राज्य पाठ्य पुस्तक विकास समिति
तेलंगाना, हैद्राबाद

गणित
वर्ग 9 वा

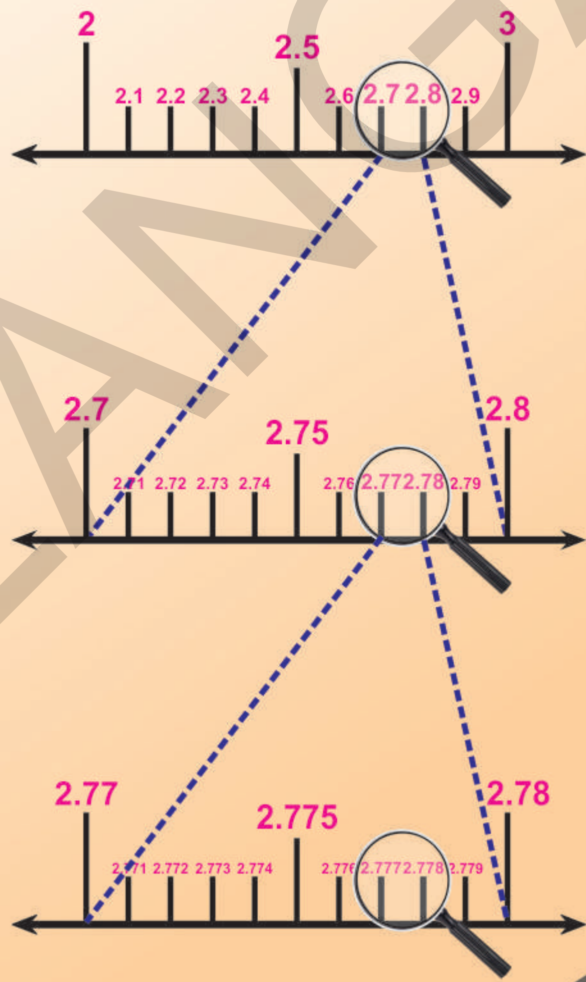
गणित

वर्ग 9 वा

F

MATHEMATICS

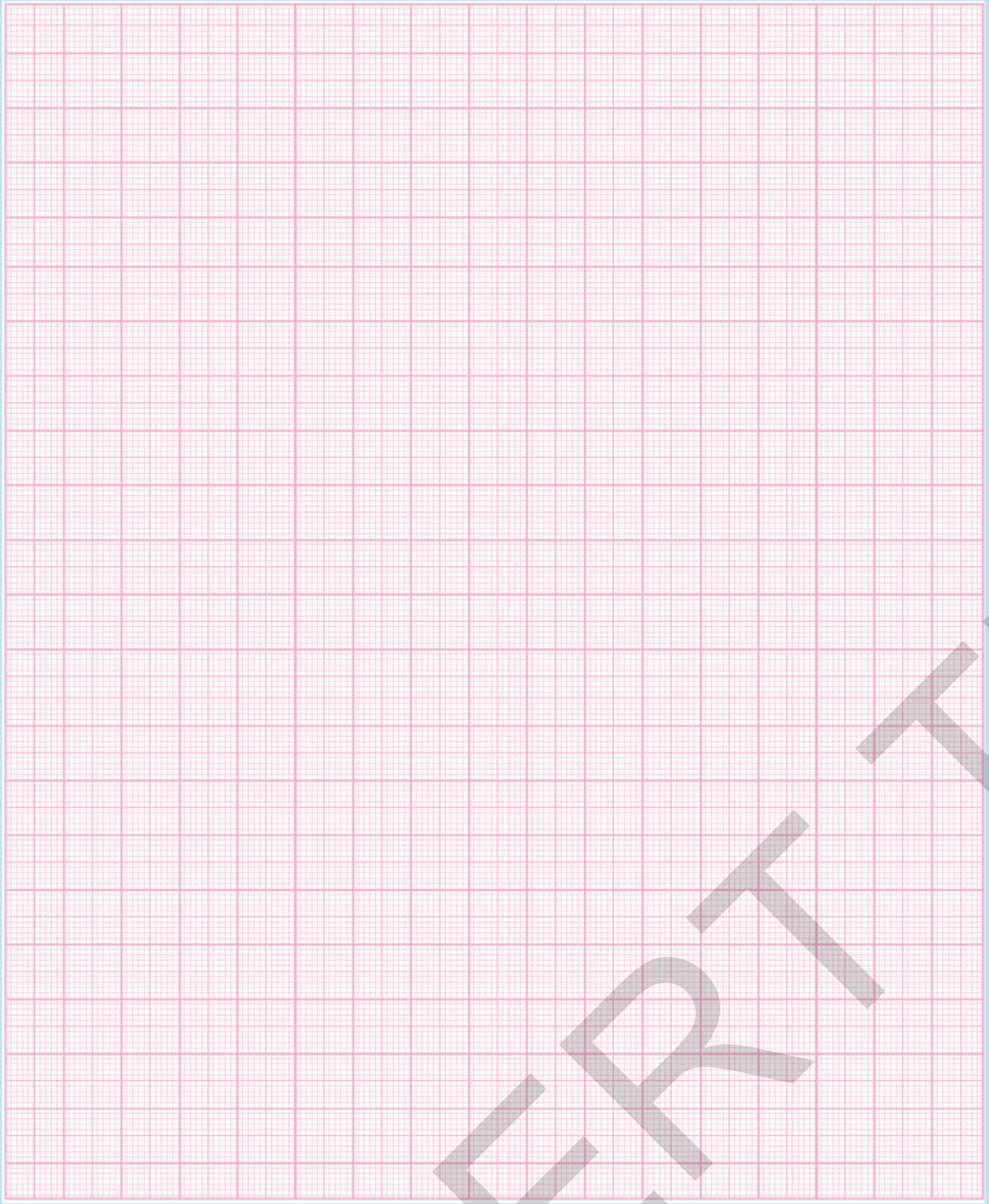
Class IX



तेलंगाना शासनाव्दारे मोफत वितरण

प्रकाशक
तेलंगाना सरकार, हैदराबाद

आलेख कागद



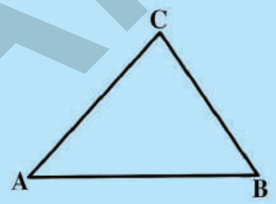
गंमीतेचे वर्तुळ

नऊ बिंदु वर्तुळाची त्रिकाणावर रचना

कोणत्याही त्रिकोणाच्या शिरोंबिंदुच्या विरुध्द बाजुवर शिरोबिंदुं वरुन काढलेल्या लंबपादावरुन जाणारे वर्तुळ या बाजुच्या मध्यबिंदु मधुन सुध्दा जाते. शिरोबिंदु आणि लंबाच्या छेदन बिंदुस जोडणाऱ्या रेषेच्या मध्यबिंदुतुन जातात. या वर्तुळास नऊ बिंदु वर्तुळ म्हणतात. हे नाऊ बिंदु वर्तुळ लियोनार्ड आयलर 1765 चा परिमाण होता. परंतु नंतर जम ‍ण गणित शास्त्रज्ञ Karl Feuerbach यांनी पुन्हा शोध लावला.

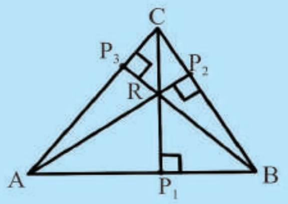
तुमच्या रचनेच्या कोशाल्य आणि योग्यतेची परिक्षा म्हणजेच नऊ बिंदु वर्तुळाची रचना होय

पायरी-1



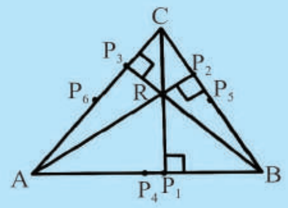
मोठ्या पांढऱ्या कागदावर विषम भुज त्रिकोणाची रचना करा त्यास ΔABC

पायरी-2



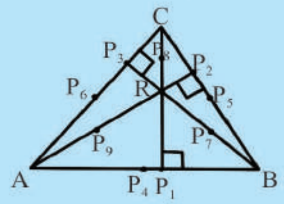
त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजुवर शिरोलंब P_1,P_2 आणि P_3 बाजुवर काढुन त्याच्या छेदन बिंदुला R हे नाव द्या

पायरी-3



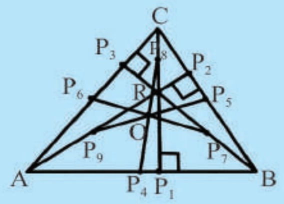
त्रिकोणाच्या प्रत्येक बाजुवर मध्यबिंदु काढा त्यास P_4,AB चा मध्यबिंदु P_5 BC चा मध्य बिंदु, आणि P_6 अशी नावे द्या.

पायरी-4



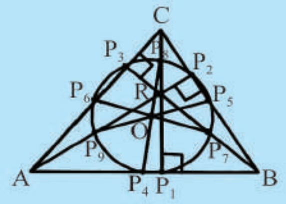
BR,CR, AR चे मध्यबिंदु काढा. आणि BR च्या P_7, CR, च्या मध्यबिंदु P_8आणि P_9 अशी नावे द्या.

पायरी-5



P_4ते P_8 P_5ते P_9 आणि P_6ते P_7 ला जोडणारे रेषाखंड काढा. ते सर्व एकाच बिंदुवर O वर छेदले पाहिजे जाते.

पायरी-6



OP त्रिज्या घेऊन O बिदुंवरुन केंद्रबिंदु वर्तुळ क़ाढा.P_1,P_2,P_3,P_4, P_5,P_6 बिंदुतुन जाते.

हे गंमीचे वर्तुळ आहे. भुमितीय रचनेसाठी वृत्तलेखणी (कंपास) महत्वाची आहे. हे तुम्ही पाहिलेच असाल.

गणित
वर्ग 9 वा

Mathematics
Class - IX
(Marathi Medium)

पाठ्यपुस्तक विकास आणि प्रकाशन मंडळ

मुख्य निर्मिती अधिकारी : श्री ए.सत्यनारायण रेड्डी,
संचालक एस.सी.ई.आर.टी. हैद्राबाद, आंध्र प्रदेश

मुख्य कार्यकारी अधिकारी : श्री बि.सुधाकार,
संचालक ,शासकीय पुस्तक मुद्रणालय, हैद्राबाद, आंध्र प्रदेश

संघटन प्रमुख : श्री डॉ.एन. उपेंद्र रेड्डी,
प्रो.सी.ॲण्ड टी विभाग प्रमुख एस.सी.ई.आर.टी.हैद्राबाद,

प्रकाशक
तेलंगाना सरकार, हैदराबाद

कायद्याचा आदर करा
हक्क मिळवा

शैक्षणिक उन्नती साधा
प्रेमाने वागा

First Published 2013
New Impressions 2014, 2015,2016,2017,2018, 2019,2020

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho,
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

तेलंगाना शासनाव्दारे मोफत वितरण 2020-21

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

पाठ्य पुस्तक विकास समिती

श्री. प्रा.वि.कानान
गणित आणि संख्यिकी विभाग, विद्यापीठ हैद्राबाद

मुख्य सल्लागार

श्री. चुक्का रामय्या
शिक्षणतज्ञ हैद्राबाद, आं.प्र.

श्री. डॉ. एच.के. देवन
शिक्षण सल्लागार, विद्या भवन सोसायटी, रेसोर्स सेन्टर, उदयपुर, राजस्थान

लेखक

श्री .ताता व्यंकटरामा कुमार
मुख्याध्यापक, जेडीपीपीएचएस, मुलुमुडी,नेल्लोर जिल्हा

श्री.गोटुमुक्कला व्हि.बी.एस.एन.राजु
एस.ए.एमपीएल उ.मा.शाळा, कापसा, विजयानगरम जिल्हा

श्री.सोमा प्रसाद बाबु
पीजीटी,ए.पी.टी.डब्ल्यु.आर.एस.चंद्रशेखर पुरम, नेल्लोर जिल्हा

श्री.के.वरदा सुंदर रेड्डी
एस.ए.जेडीपीपीएचएस,थाक्कसीला अमलापुर मुहबुबनगर जिल्हा

श्री.कोमानदुरी मुरली श्रीनीवास
पीजीटी,ए.पी.टी.डब्ल्यु.आर.श्रीशैल्लम

श्री.अब्बाराजु किशारे
एसजीटी, एमपीयुपीएस, चलामुडी गुटुर जिल्हा.

श्री.पडाला सुरेश कुमार
एस.ए.जीएचएस, विजयनगर कॉलनी, हैद्राबाद

श्री.जी.आनंता रेड्डी
निवृत्त मुख्याध्यापक रंगारेड्डी जिल्हा

श्री.पी.डी.एल.गणपाई शर्मा
एस.ए.जीएचएस,झामीसतापुर,मानिकेश्वर नगर,हैद्राबाद

श्री.एम. रामानुजंनेयुल्लु
प्राध्यापक, शासकीय अध्यापक विद्यालय, विक्राबाद, आर.आर.जिल्हा

श्री.दुर्गाराजु वेनु
एस.ए.युपीएस,अल्लवाडा,चेवेल्ला मंडळ, आर.आर.जिल्हा

श्री.एम. रामा चॅरी
प्राध्यापक,शासकीय अध्यापक विद्यालय, विक्राबाद, आर.आर.जिल्हा

श्री.पी.अॅनोथी रेड्डी
मु.अ.सें.पिटर हायस्कुल आर.एन.पेटा.नेल्लोर जिल्हा

श्री. डॉ. ए. रामबाबु
प्राध्यापक, शासकीय सीटीई, वरंगल

श्री.डी. मनोहर
एस.ए.जेडपीएचएस.,ब्राम्हमपेल्ली, ताडवाई मंडळ निजामबाद जिल्हा

श्री. डॉ. पुंनडला रमेश
प्राध्यापक, शासकीय आयएएसई, नेल्लोर

संपादक

श्री.प्रा. व्हि. शिवा रामप्रसाद
निवृत्त, संख्यिकी गणित विभाग उस्मानिया विद्यापिठ, हैद्राबाद

श्री.प्रा.एन.सीएच.पट्टाभी रामाचार्युलु
निवृत्त नॅशलन इन्सीटुट ऑफ टेक्नोलॉजी वरंगल

श्री.प्रो. शिवा रामाप्रसाद
प्राध्यापक,सांख्यिक विभाग एससीईआरटी, हैद्राबाद आं.प्र.

श्री.के ब्राह्मया
निवृत्त प्राध्यापक, एससीईआरटी, हैद्राबाद आं.प्र.

श्री.ए. पद्मनाभन
निवृत्त एच.ओ.आे.गणित, महाराणी महाविद्यालय, पेद्दापुरम

डॉ. जी.एस.एन. मुर्ती (निवृत्त)
गणित विभाग, राजह आर.एस.आर.के.आर.आर.कॉलेज, बोब्बीली

समन्वयक

श्री.काकुलावरम राजेंद्र रेड्डी
रिसोर्स पर्सन, एस.सी.ई.आर.टी. हैद्राबाद, आं.प्र.

श्री.के.के.व्हि. रायुलु
लेक्चरर,आयएएसएफ, मसाब टॅक, हैद्राबाद

शैक्षणिक सहाय्यक गट सदस्य

श्री इंद्र मोहन, **श्री यशवंत कुमार दवे**, **श्री. हानिफ पानिवाल**, **श्री. आशिष चौरडीया**
विद्या भवन सोसायटी, रिसोर्स सेन्टर, उदयपुर, राजस्थान

श्री.शरन गोपाल

कुमारी एम.अर्चना, **श्री पी.चिरंजीवी**
सांख्यिक विभाग विश्वविद्यालय हैद्राबाद

श्रीमती निरजा
जीपीएस,सीपीएल,अंबरपेट, हैद्रबाद

रेखाटन

श्री.प्रशांत सोनी, **श्री शेख शकिल अहमद**, **श्री एस.एम. इकराम**
विद्या भवन सोसायटी, रिसोर्स सेन्टर, उदयपुर, राजस्थान

मराठी अनुवादासाठी समन्वयक

श्री.सरदार धर्मेंद्रसिंग चहल, एस.ए.
शासकीय अध्यापक विद्यालय, आदिलाबाद

मराठी अनुवादक

श्री.प्रशांत भोयर, एसए,
गर्व्हमेंट गजीटेड हायस्कुल नंबर 1, आदिलाबाद

श्री.नागेश चनमनवार,एसए, झेडपीएचएस,
इंद्रवेल्ली, जिल्हा आदिलाबाद

श्री.सुभाष मुसळे, एसए,
युपीएस, मुतन्नुर, जिल्हा आदिलाबाद

श्री. राजेश दानका, (आदित्या डि.टी.पी.सेंटर,आदिलाबाद)

प्रस्तावना

शिक्षण ही मानवास अज्ञानातुन मुक्त आणि सामर्थ्यवान बनविणारी एक कार्यप्रणाली आहे. शिक्षणाची प्रचंड अव्यवस्था ओळखुन सर्व साधारणवादी समजानी दर्जेदार शिक्षणाची तरतुद करण्याचा अगदी स्पष्ट उद्देशाने प्राथमिक शिक्षणाचे सार्वत्रिक करण्याची जबाबदारी घेतली. दुसऱ्या पायरीत माध्यमिक शिक्षणाला सार्वत्रिक किंवा सर्वसाधारण करण्याची चालना मिळाली. माध्यमिक आवस्था ठळकपणे क्रियाशिल गणितापासुन सुरुवात झाली. उच्च प्राथमिक आवस्थेच्या अभ्यासापर्यंत शिस्तपुर्णक गणिताचे अध्ययन आहे. या अवस्थेत समस्येची तार्किक सिध्दता, प्रमेय इत्यादी परिचीत केले आहे. त्यापासुन वेगळा एक खास विषय जो इतर कोणत्याही विषयाचा सहगामी आहे. ज्यात विचारसरणी आणि पृथकरण आहे.

आपल्या तेलंगानातील विद्यार्थ्या मोठ्या उत्साहाने आणि आनंदाने गणित शिकतील अशी मला खात्री वाटते.गणितास त्याच्या जिवणातील महत्वाचा अंग बनवुन आणि अर्थपुर्ण प्रश्न सोडवुन या पुस्तकांच्या वाचनाव्दारे गणिताचे मुलभुत आकार समजुन घेतील. शिक्षकांना अभ्यासक्रमातील अवघड विषयाकडे लक्ष वेघुन आणि अध्यापण शास्त्रातील दृष्य समजुन घेणे आणि ठळक विषयाकडे लक्ष केंद्रीकृत करण्याची गरज आहे. अभ्यासक्रमाच्या परिणाम कारक, व्यवहारासाठी संकिर्ण खोलीचे वातावरण, शिकविणे आणि शिकणे प्रणालित अत्यंत महत्वाचे आहे. वर्ग खोलीच्या संस्कृतीला संवर्धण करुन त्याच्या मनात धनात्मक रुची ठसवुन जिवनशैलीच्या वेगवेगळ्या संभावतेचा आणि अभिप्रायातील फरक आणि जिवन हे ज्ञानाची तहान आहे. हे शिक्षणाव्दारे त्यांच्या मनात ठसविले पाहिजे.

राज्य अभ्यासक्रम फ्रेम वर्क (SCF 2011) ने दाखवलेली गणित शिकविण्याच्या सदर कल्पणेस गणिताच्या दर्जेदार कागदावर श्रमकौशल्य निर्मीत करुन राज्यात गणित शिकविण्यासाठी पाठ्यपुस्तक प्रमाणाची मांडणी केली. सर्व भावनांना साकार करण्याचा प्रयत्न पाठ्यपुस्तकाने केला आहे. तेलंगाना राज्य विद्या परिशोधन संस्था (SCERT) आपल्या राज्यामधील सर्व शिक्षकवृंद ज्यानी या पाठ्यपुस्तकांच्या विकासासाठी हातभार लावला आणि पाठ्यपुस्तक विकास समितीच्या मेहनतीची प्रशंसा केली. मी जिल्हाशिक्षणाधिकारी, मंडळ शिक्षणाधिकारी आणि मुख्य शिक्षकाचा अतिशय आभारी आहोत. मी संस्था आणि संघटना यांचा सुध्दा आभारी आहे, ज्यांनी या पाठ्यपुस्तकाच्या विकासात वेळ दिला मी कार्यालयाचे निदेशक आणि शालेय शिक्षणाचे संचालक (तेलंगाना) आणि विद्या भवन सोसायटी उदयपुर, राजस्थान ज्यांनी या पाठ्यपुस्तकाच्या विकासासाठी साहय्यता प्रधान केली. त्यांचे सुध्दा मी आभारी आहे. या कामाला निरंतर परिश्रमाने दर्जावाढविल्या बद्दल तुमचे आभारी आहोत.तुमच्या स्पष्टीकरणाचे आणि सल्ल्याचे आम्ही मनपुर्वक स्वागत करतो.

स्थळ : हैद्राबाद
दिनांक : 03 डिसेंबर 2012

संचालक
SCERT, तेलंगाना हैद्राबाद

मनोगत

राज्य अभ्यासक्रम फ्रेम वर्क (SCF - 2011) च्या आधाराने आंध्र प्रदेश शासनाने सर्व विषयांच्या अभ्यासक्रमाची उजळणी करण्याचा निश्चय केला. त्यांच्या मागणीनुसार शाळेतील विद्यार्थ्यांच्या जिवनात शाळेच्या बाहेरील जिवनाशी नक्कीच संबंध असायला पाहिजे. शिक्षणाचा (RTE - 2009)हक्कामुळे कळुन आले की शाळेत प्रवेश करणाऱ्या प्रत्येक विद्यार्थ्यांस आवश्यक प्राविण्य 14 वर्षाच्या वयाच्या पातळीवर प्राप्त झाले पाहिजे. नॅशनल करीकुलम फ्रेम वर्क 2005 च्या आधारावर परिचित केलेला पाठक्रम हा अतिशय आवश्यक आहे. विशेष म्हणजे गणित हा विज्ञान हे माध्यमिक पातळी वर राष्ट्रीय दृष्टीकोनातुन आपल्या विद्यार्थ्यांना गणिताचा आणि विज्ञानाचा मजबुत आधार देण्याची आवश्यकता आहे.

देशाची शक्ती ही त्याच्या लोकांना जबाबदार आणि क्षमतापुर्ण बनविण्या वर असते जे त्यांच्या गरजा भगविते, महत्वाकांशा आणि प्रयत्नशिल औद्योगीक सामाजाच्या गरजेवर आधारीत असते. प्राध्यमिक व माध्यमिक शिक्षणाचा गणिताच्या शिक्षकांनी 8 ते 10 वर्गाच्या पाठ्यक्रमाचे अध्ययन करुन त्यांची पार्श्वभुमीच्या विस्तार आणि सखोल पणा समजुन घेणे आणि त्या विषयाचे उपयोगजन विद्यार्थ्यांव्दारे प्राथमिक आणि उच्चप्राथमिक अवस्थेत करुन घेतले पाहिजे.

गणिताचा पाठ्यक्रम तीन अवस्थेत म्हणजेच प्राथमिक उच्च प्राथमिक आणि माध्यमिक हा रचनात्क आणि मागमोही ने प्रवेश केला आहे. पाठ्यक्रम हा रचनात्क रुपात प्रवेश शोधुन काढण्यावर जोर दिलेला आहे आणि मुलभुत गणिताच्या आणि त्याचे स्पष्टीकरण दिलेले आहे. विद्यार्थ्यांना सहभागी होण्यासाठी प्रेरणा, चर्चा आणि वर्गात उत्साहाने भाग घेण्यासाठी त्यास जवळ करते. आजचे पाठ्यक्रम अभ्यासक्रमाच्या आणि शैक्षणिक पात्रतेच्या आधारावरुन लिहिल्या गेले आहे. TSSCERT ने तयार केलेल्या अभ्यासक्रमाची पक्की उजळणी करुन उदयास आले आहे.

पाठ्यक्रम सहा क्षेत्रात विभागल्या गेले आहे. जसे संख्या पध्दत, अंकगणित, बिजगणित, भुमीती, सांख्यिकी आणि निर्देशांक भुमीती या क्षेत्राशी संबंधीत असलेल्या विषयाच्यसा शिकवणीमुळे शैक्षणिक पात्रतेमधील प्राविण्य जसे समस्यसा सोडविणे, तार्किक विचार, गणिताचे परस्पर संबंध माहितीचे विविध रुपात इत्यादी विकास होतो. गणितामुळे अध्ययनाची शिस्त आणि दैनदिन परिस्थितीत सुध्दा होते. पाठ्यपुस्तकामुळे प्रयत्न जास्त प्राधान्यता आणि ध्यायावरुन परिश्रमाची वाढ होते. लहान गटातील अवसर आहे. आणि हे करा. आणि प्रयत्न करा या रुपातील अनुभावाला आवश्यक असलेले कृत्य वर्गातील परिस्थितीला आटोक्यात आणण्यासाठी शिक्षकांची मदत जरुरी आहे.

या पुस्तकाचे काही विशेष वैशिष्टये खाली दिलेले आहे.

- या धड्याची रचना वेगवेगळ्या पध्दतीने केली आहे. ज्यामुळे विद्यार्थी सर्व अभ्यासक्रमाच्या क्षेत्रात रुची घेऊन. अभ्यासाच्या प्रत्येक पदात रुची ठेवतो.

- उच्च प्राथमिक वर्गांना भुमीती शिकविणे केवळ अंर्तज्ञान होते. आणि मापावरुन आणि कागदाच्या घड्यावरुन गुणधर्माचा शोध घेतल्या जाते. आता आपण स्वंयसिध्दी मध्ये प्रवेश केलेला आहे. निरनिराळे प्रयत्न स्पष्टीकरणातुन निर्माण होतात. माहिती समझण्यासाठी व्याखेसाठी, व्याख्या न केलेली पदे आणि स्वत:सिध्द आले नविन संबंध काढणे त्याच्या प्रमेय म्हणतात. ही स्विकारलेल्या तत्वाचे तार्कीक परिणाम आहेत.
- प्रत्येक प्रमेय पाहण्यासाठी काळजी घेतली पाहिजे जी या प्रमेयाच्या सिध्दतेला सोप्यारितीने समजण्यासाठी वृत्याच्या साहाय्याने प्रारंभीक तरतुद केली आहे.
- निरंतर आकलन करुन किंमत ठरविण्याची कार्यप्रणाली वस्तुंच्या प्रयत्न करा, आणि विचार,चर्चा आणि लिहा याखाली आच्छादलेली आहे. अशा प्रत्येक वस्तुंचा शेवटी अभ्यास दिलेला आहे. ज्यामुळे शिक्षकास पुर्ण 15 धड्यातील मुलांचा कुशलता माहित होतो.
- संपुर्ण पाठ्यक्रम 15 धड्यात विभागलेला आहे. ज्यामुळे पाठंयाशातुन लहान लहान प्रश्नाला तर्काला एकत्रकरुन उत्साहाने गणित शिकवतात.
- रंगित चित्र, आकृत्या, वाचता येणारा अक्षराचा आकार निश्चीतपणे मुलांना पाठ्यांश स्विकाराण्यास आणि पुस्तकांची काळजी घेण्यास मदत मिळते.

पहिल्या धड्यात(1) वास्तविक संख्या क्षेत्रफळ संख्या पध्दती आणि अपरिमेय संख्या आहेत. विद्यार्थ्यांना परिमेय आणि अपरिमेय संख्या रेषेवर दर्शविलेल्या दिसतात. संख्येचा काही इतिहास सुध्दा जोडला आहे. उदा. विद्यार्थ्यांमध्ये उत्साह निर्माण करणे. वास्तविक संख्यांना भोंगाच्या साहय्याने संख्यारेषेवर दर्शविण्याने परिमेय आणि अपरिमेय संख्यांना ओळखणे विद्यार्थ्यांची कल्पनाशक्ती, आंतरदृष्टीनला वेळ मिळुन दशांस संख्येच्या विस्तारासाठी उपयोगी पडते.

धडा (2) मध्ये बहुपदी आणि अवयाच्या विभाजनात बिजगणिताच्या मुलभुत भावनेचे विश्लेषणत्मक वर्णन केले. शेष सिध्दांत अवयव पध्दतीव्दारे बहुपदीच्या अवयास समजुन घेण्याजोगे परिचीत केले. वर्गबहुपदीला अवयव पाडण्याने मधले पदा कशासाठी मोडण्यात फोडण्यात आले. कारणासह स्पष्ट केले. अशा प्रकारे बैजिक राशीत समानतेचा वापर करुन चर्चा करण्यात आली. त्याव्दारे अवयव पाडण्याच्या पध्दतीचा प्रवेश झाला.

भुमीतीमध्ये 7 धडे 3,4,7,8,11,12 या पुस्तकात ठेवले आहे. या सर्व धड्यात समस्यांना हेतु बद्दलतेने विचार करुन आंतर दृष्टीने पाहणी करुन नित्यजिवनातील संघटनांना समजुन घेण्यासाठी अनेक उदाहरणे परिचय केला. विविध समतल आकृत्या मधील संबंधाला तार्किकपणे सिध्दतेच्या पध्दती आहेत. प्राचीन काळापासुन भुमीती विकासीत केल्या सारखी प्रत्येक्षात समतल भुमीतीमध्ये द एलीमेंट या युक्लीडच्या ग्रंथात दिलेल्या कृतीची चर्चा केली. रेषा, केान, त्रिकोण, चर्तुभुज, वर्तुळ आणि त्याचे क्षेत्रफळ असलेल्या धड्यात विविध प्रमेयांना कृतीच्या

रुपात सिध्दांतीकरण केल्यासारखे आहे. भुमीतीय आकृत्यांना मोजपट्टी आणि वृत्तलेखणीच्या साहाय्याने भुमीतीय आकृत्यांची खचीतपणे रचना करता येते.

धडा (5) निदेशन भुमीतीला युक्लीडच्या भुमीतीचा दुसरा पर्याय म्हणुन चर्चा करण्यात आली. बिजगणिता सारखेच भुमीतीच्या भावना कशा प्रकारे जोंड्यांना कशा प्रकारे दर्शविता येते. यास विस्ताराने चर्चा केली.

धडा (9) मध्ये साख्यिकीचे महत्व संग्रहीत, असंग्रहीत सामग्री गोळा करणे उदाहरणाच्या स्पष्टीकरणाने दिलेल्या माहितीचे मध्य, मध्यक, आणि बहुलकाची चर्चा दैनंदिन जिवनातील प्रसंग घेऊन करणे.

धडा(14) संभाव्यता ही पुर्ण नविन धडा आहे. माध्यमिक विद्यार्थ्यांसाठी हा नविन आहे. आणि विविध विस्तृत उदाहरणांच्या वापर करुन या धड्याच्या परिचय केला. विविध क्षेत्रात नित्य जिवनातील अनेक पध्दतीचे सोडविणे.

धडा (10) पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि घनफळाच्या चर्चेवरुन वक्र पृष्ठाचे क्षेत्रफळ काढणे, एकुण पृष्ठफळ आणि दंडगोलाचे घनफळ शंक, गोल, त्यांच्या घनवस्तुमधील संबंध त्यांच्या घनफळावरुन आणि येणाऱ्या सुत्रावरुन याची सुध्दा चर्चा करण्यात आली आहे.

धडा (15) विद्यार्थ्यांना गणीताचे विधान काय आहे. हे समजण्यासाठी आणि विविध संदर्भात गणिताचे विधाने कसे सिध्द करतात या साठी गणितातील सिध्दता मदत करते. आपण गृहतक, आधारतत्व, अनुमान आणि प्रमेय सिध्दतेच्या विविध पायऱ्यांचा उदाहरणाच्या स्पष्टीकरताची चर्चा केली.

कोणत्याही पाठ्यक्रमाचा यशस्वीपणा त्याच्या अभ्यास क्रमावर निर्भर नसुन शिक्षक आणि शिकविण्याची पध्दतीवर निर्भर असते. एकाचांगल्या पाठ्यपुस्तकाची विद्यार्थ्यांतील गुणात्मक बदलाची आशा बाळगता येत नाही. वर्गातील उत्तम शिक्षण प्रणालीच फक्त पाठ्यक्रमात नविन अर्थ देऊन बदलाची आशा करु शकतो. यावरुन गणित शिकविणे म्हणजे फक्त अभ्यासातील प्रश्न सोडविणेच नसुन मुलभुत भावनांना समजण्याव्दारे समस्या सोडविण्याचे नैपुण्य वाढविते. हे समजले पाहिजे. असा बदल गणित शिकण्याच्या प्रणालीत येईल अशी आशा बळगतो.

पाठ्य पुस्तक विकास समिती

इतिहासातील मुख्यांश

“शोध करण्याचे कुतुहुल मुख्यता लहानपणीच बाहेर पडतात” एक लहान मुलगा प्रसिध्द गणितशास्त्रज्ञ कसा बनला?

श्रीनीवास रामानुजनचे नविन विषय शिकण्याचा आंनद कधी गमावला नाही. लहानपणीच त्याची प्रतिभा आणि विचारासारणी सहमित्रास मोठ्या माणसांना, शिक्षकांना आश्चर्य चकीत केले. एकेदिवशी वर्गात शिक्षक अंकगणिता मधील तिन केळींना तिघांत वाटल्यास प्रत्येकी एक एक केळी येते. सांगुन त्यापासुन भागाराकारा च्या नियमांना सांगीतले, तेव्हा लगेच रामानुजन ने सर एकही केळ एकही विद्यार्थ्यांस न वाटल्यास आता प्रत्येकास एक केळ येते का असे विचारले. म्हणजे शुन्यांनी शुन्याला भागले असता का होते. भागारातील दोषाला दाखविले. त्यांनी आपल्या गणिताचे कुशलतेने कितीतरी मित्र बनविले. एकदा त्याच्या वरच्या वर्गाच्या विद्यार्थ्यांनि एक प्रश्न विचारला $\sqrt{x}+y=7$ आणि $x+\sqrt{y}=11$ असेल तर x आणि y” च्या किंमती काय होतात म्हणुन विचारले तेव्हा लगेच $x=9$ आणि $y=4$ असे उत्तर दिले आणि त्यास आश्चर्यचकीत केले. शाळेत शिकत असतांना शाळेत दिलेले गृहपाठ पुर्ण करुन त्याला आवडलेल्या गणितात नविन नमुने तयार करत होता.

$$3=\sqrt{9}=\sqrt{1+8}$$
$$=\sqrt{1+(2\times 4)}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{16}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+15}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+(3\times 5)}}$$

and so on ...

$$\frac{1}{4}+2=\left(1\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3)=\left(2\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5)=\left(5\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4}+(2\times 3\times 5\times 7)=\left(14\frac{1}{2}\right)^2$$

..... and so on.

श्रीनिवास अंय्यगार रामानुजन भारतातील एका महान गणितातील अलौलीक बुध्दीमान होता. तो तामिलनाडु मधील इंरोडा या गावी 22 डिसेंबर 1887 रोजी गरीब कूंटुबात त्याचा जन्म झाला. बाल बुध्दीमान असलेला रामानुजन त्याच्या वयाच्या 13 व्या वर्षी लोने त्रिकोणमीती, 15 वर्षी त्याच्या सहमित्र जार्ज कॉर ने लिहीलेल्या शुध्द गणित उपयोजीत गणितातील अनेक सिध्दांताचे विश्लेषण करुन संक्षिप्त पणे वर्णण केले. याचे विचार, निकालास कागदावर लिहीत असे. हीच कागदावरील प्रति काही काळानंतर रामानुजनची प्रतिभा ओळखणार फ्रेड नोट बुक्स म्हणुन प्रसिध्द झाले. त्यांना संप्रदायपणे मान न दिला तरी मद्रास विश्वविद्यादयाने त्याची कुशलता ओळखुन त्या 75 रुपये प्रतिमहिना वेतन म्हणुन मंजुर केले. अधिक उत्साहाने रामानुजनी 120 प्रमेय अनेक सुत्र पुराव्यात गणित शास्त्रज्ञ जी.एच. हार्डी (केंब्रीज विश्वविद्यालय, लंडन) यांना पाठविली. याचे अध्ययन करुन याचे प्रामुख्यता ओळखुन रामानुजनला लंडनला बोलविले. इंग्लड मध्ये हार्डी सोबत अनेक सिध्दतांत मुख्यता संख्या पध्दतीत वर्तुळ सिध्दंता, बैजिक असमानता दिर्घवृत्ताकार, प्रमेयास इत्यादी अनेक लिहिले. 1918 मध्ये त्याचा फेलो ऑफ रॉयल सोसायटी ब्रिटीश सरकार ने ओळखीले फेलो ऑफ ट्रिनीटी कॉलेज, केंब्रीज कॉलेज मध्ये निवडणारा पहिला भारतीय झाला. तो आजारी पडलेल्या काळात संख्येंच्या विचारापासुन दुर राहीला नाही. एके दिवशी त्यांना भेटण्यासाठी हार्डी त्याच्या घरी कार घेऊन आले होते. हार्डीच्या कारच्या नंबर 1729 ला पाहुन ही एक असाधारण संख्या म्हणुन ओळखले. यास दोन संख्याच्या बेरजे ऐवढा दोन प्रकारे लिहिण्यासाठी सर्वात लहान पुर्णांक संख्येच्या रुपात दर्शविला. $1729=1^3+12^3=9^3+10^3$. दुर्भाग्याने क्षयरोग होऊन 26 एप्रिल 1920 मध्ये मद्रास येथे शेवटचा श्वास सोडला. भारत सरकारने रामानुजनला त्याच्या गणिताच्या सेवेला ओळखुन त्यांच्या नावाची टपाल मुंद्रांक कले. यांच्या 125 व्या जयंतमी निमित्त 2012 वर्षाला “गणित वर्ष” म्हणुन प्रकटना (घोषणा) केली.

विषय सुची

Paper - I :	वास्तविक संख्या, बहुपदी आणि अवयव पाडणे, सहनिर्देशन भूमिती, चल राशीतल रेषीय समीकरणे, त्रिकोण, चौकोन, क्षेत्रफळ.
Paper - II :	भूमितीचे मूळ, रेषा आणि कोन, सांख्यिकी, पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि गुणफळ, वर्तुळ, भूमितीय रचना आणि संभाव्यता.

आपले राष्ट्रगीत

- रविंद्रनाथ टागोर

जन गण मन अधिनायक जय हे
भारत भाग्य विधाता ।
पंजाब, सिंध, गुजरात, मराठा
द्राविड उत्कल बंग ।।
विंध्य हिमाचल यमुना, गंगा
उच्छल जलधितरंग ।
तव शुभ नामे जागे ।
तव शुभ आशिष मागे ।
गाहे तव जय गाथा
जन गण मंगलदायक जय हे
भारत भाग्य विधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे
जय जय जय जय हे ।

प्रतिज्ञा

- पैडिमर्री व्यंकटा सुब्बाराव्

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत. माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी, म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन. प्राणी मात्रावर दया दाखविण.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

01 वास्तविक संख्या

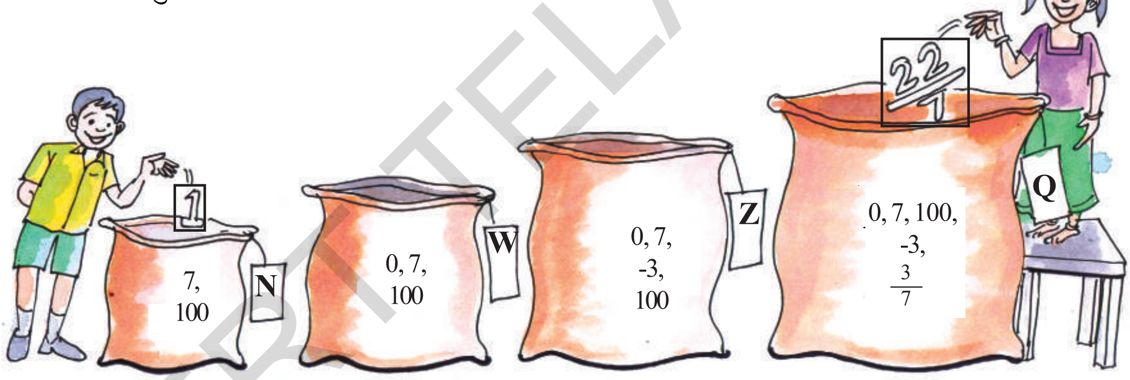
1.1 प्रस्तावना

वेगवेगळ्या प्रकारच्या संख्यांची थोडक्यात उजळणी करु या.

खालील संख्यांना ग्रहीत धरा.

$$7, 100, 9, 11, -3, 0, -\frac{1}{4}, 5, 1, \frac{3}{7}, -1, 0.12, -\frac{13}{17}, 13.222\ldots, 19, \frac{-5}{3}, \frac{213}{4}, \frac{-69}{1}, \frac{22}{7}, 5.\overline{6}$$

कोणत्या संख्येच्या संचाशी संबंधीत आहे. याचा निर्णय करुण कागदावर लिहुन त्यांना खाली दिलेल्या संबंधीत पिशवीत टाका. जॉन आणि स्नेहा वरील संख्या पिशवित टाकले. एका संख्येला एक किंवा त्या पेक्षा जास्त पिशवीत टाकु शकतात अशा संख्यांना अजुन एका कागदावर लिहुन संबंधीत पिशवीत टाका.



तुम्हाला निरिक्षणास आले असेल की, N पिशवीत नैसर्गिक संख्या आहेत. W पिशवीत पुर्ण संख्या, Z पिशवीत पुर्णांक संख्या आणि Q पिशवीत परिमेय संख्या आहेत.

Z पिशवीत पुर्णांक आहेत ज्या, ऋण आणि पुर्ण संख्येचा समुह आहे. याला I किंवा Z ने दर्शवितात. $Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

त्याच प्रमाणे Q पिशवीत सर्व $\frac{p}{q}$ च्या रुपात असलेल्या संख्या आहेत.(p , q पुर्णांक आहेत आणि $q \neq 0$)

तुम्हाला कदाचित लक्षात आले असेल की, नैसर्गिक संख्या, पुर्ण संख्या, पुर्णांक आणि परिमेय संख्याना $\frac{p}{q}$ च्या रुपात लिहु शकतो. p आणि q पुर्णांक आहेत आणि $q \neq 0$.

उदाहरणार्थ -15 ला $\frac{-15}{1}$ लिहु शकतो.येथे p = -15 आणि q = 1.खालील उदाहरणाकडे पहा.

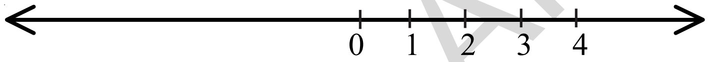
$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{50}{100}$ ... या सारख्या परिमेय संख्या (अपुर्णांक) आहेत. याचा अर्थ, परिमेय

संख्यांना p/q रुपात (येथे p , q पुर्णांक आणि $q \neq 0$)विलक्षण दर्शवणुक नसते. जेव्हा आपण

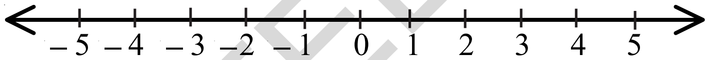
ला परिमेय संख्या म्हणतो. किंवा $\frac{p}{q}$ संख्या रेषेवर दर्शविते तेव्हा आपण $q \neq 0$ आणि p ,q ला '1' च्या व्यतिरिक्त दुसरा सामाईक़ अवयव (म्हणजेच p ,q हे सहमुळ आहेत.) नाही म्हणुण समजतो. म्हणुन संख्या रेषेवर अनंत परिमेय संख्या मध्ये बऱ्याचश्या च्या समान आहेत.

आपण $\frac{1}{2}$ ला निवडले. म्हणजेच सर्वांना दर्शविण्यासाठी हे साधे रुप आहे. हे समजण्यासाठी संख्या रेषा काढु या.

संख्या रेषेवर पुर्ण संख्या दर्शविणे तुम्हाला माहित आहे. आपण एक रेषा काढतो. आणि त्या वर '0'हा बिंदुची खुण करतो. नंतर '0' बिंदुच्या उजव्या बाजुला सारख्या अंतरावर 1, 2, 3, 4, ... या बिंदुच्या खुणा करतो.



पुर्णांकी संख्या रेषा अशी तयार होते.

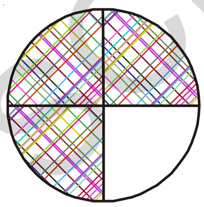


संख्या रेषेवर परिमेय संख्या कसे दिर्शवितात तुम्हाला आठवते का?

हे आठवण करण्यासाठी सुरुवातीला $\frac{3}{4}$ हा पुर्णांक घेऊन ते चित्राने आणि नंतर संख्या रेषेवर दर्शवा. $\frac{3}{4}$ मध्ये 3 हा अंश आणि 4 हा छेद आहे. हे आपल्याला माहित आहे.

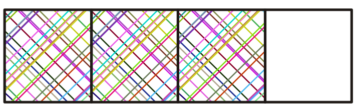
याचा अर्थ, दिलेल्या एककाच्या 4 समान भागातुन 3 भाग घेतले.

येथे $\frac{3}{4}$ ला काही चित्रात दाखविलेले आहेत.

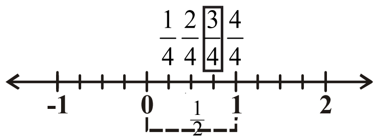


$\frac{3}{4}$

(चित्राव्दारे)



$\frac{3}{4}$



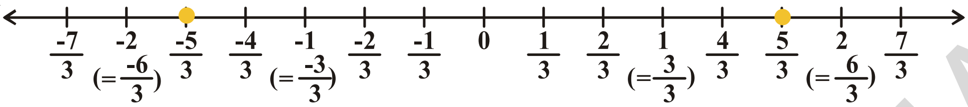
(संख्या रेषा)

विचार करा आणि चर्चा करा

1.आपण सर्व परिमेय संख्यांना चित्राव्दारे दर्शवु शकतो का?

उदाहरण - 1. $\frac{5}{3}$ आणि $-\frac{5}{3}$ हे संख्या रेषेवर दर्शवा.

सोडवणुक: $-2, -1, 0, 1, 2$ या पुर्णांकाने दर्शविणारी रेषा काढा.



शुन्याच्या उजव्या आणि डाव्या बाजुच्या प्रत्येक एककाला तिन समान भागात विभागा. त्या पैकी पाच भाग घ्या. शुन्याच्या उजव्या बाजुला पाचवा बिंदु $\frac{5}{3}$ दर्शविते आणि शुन्याच्या डाव्या बाजुला पाचवा बिंदु $\frac{-5}{3}$ दर्शविते.

हे करा

1. संख्या रेषेवर $\frac{-3}{4}$ दर्शवा.
2. 0, 7, 10, -4 ला $\frac{p}{q}$ च्या रुपात लिहा.
3. **माझ्या संख्याचा अंदाज करा:** तुमचा मित्र 0 आणि 100 मधुन एक संख्या निवडेल. तुम्ही तुमच्या मित्राला **होय** किंवा **नाही** चे प्रश्न विचारुन ती संख्या माहित करुन घ्यावी. तुम्ही कोणती पध्दत वापराल?

उदाहरण 2 : खालील विधान सत्य आहेत का? तुमच्या उत्तरासाठी उदाहरणासह कारणे द्या.

1. प्रत्येक परिमेय संख्या ही एक पुर्णांक आहे.
2. प्रत्येक पुर्णांक हे परिमेय संख्या आहे.
3. शुन्य ही एक परिमेय संख्या आहे.

सोडवणुक : 1. असत्य : उदा. $\frac{7}{8}$ ही परिमेय संख्या आहे पण पुर्णांक नाही.

2. सत्य: कारण कोणताही पुर्णांक $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ च्या रुपात व्यक्त करु शकतो. उदा. $-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2}$ या प्रकारे ते परिमेय संख्या आहे.

(म्हणजेच कोणताही पुर्णांक 'b' ला $\frac{b}{1}$ म्हणुन व्यक्त करु शकतो)

3. सत्य : कारण 0 ला $\frac{0}{2}, \frac{0}{7}, \frac{0}{13}$ च्या रुपात व्यक्त करु शकतो. ($\frac{p}{q}$ रुपात p आणि q हे पुर्णांक आहेत आणि $q \neq 0$)

('0' ला $\frac{0}{x}$ मध्ये दर्शवु शकतात येथे 'x' ही एक पुर्णांक आहे आणि $x \neq 0$)

उदाहरण 3 : 3 आणि 4 मधील दोन परिमेय संख्या,सरासरी (मध्य) पध्दतीने माहित करा.

सोडवणुक

पध्दत 1: a आणि b या दोन परिमेय संख्याचा मध्य $\frac{a+b}{2}$ परिमेय संख्या असते. हे आपल्याला माहित आहे.

येथे $a = 3$ आणि $b = 4$ (आपल्याला माहित आहे की,a आणि b या पुर्णांकाचा मध्य $\frac{a+b}{2}$ आहे आणि ते 'a' आणि 'b'च्या मध्यात असतो.)

म्हणुन $\frac{(3+4)}{2} = \frac{7}{2}$ जी 3 आणि 4 च्या मध्यात आहे. $3 < \frac{7}{2} < 4$

जर आपण वरील पध्दत चालु ठेवली तर आपल्याला 3 आणि $\frac{7}{2}$ च्या मधात बरेचश्या परिमेय संख्या आपल्याला माहित होऊ शकतात.

$$\frac{3+\frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{6+7}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{2}}{2} = \frac{13}{2\times 2} = \frac{13}{4}$$

$$3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2} < 4$$

पध्दत 2 : एका पायरीत दोन परिमेय संख्या माहित करण्याची इतर पध्दत, आपल्याला दोन संख्या पाहिजे म्हणुन $2+1=3$ या छेदाने 3आणि 4ला परिमेय संख्या म्हणुन आपण लिहु शकतो.

म्हणजेच $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3}$ आणि $4 = \frac{4}{1} = \frac{12}{3}$

3 आणि 4 मधील $\frac{10}{3}, \frac{11}{3}$ या परिमेय संख्या नंतर तुम्ही पाहु शकता.

$$3 = \frac{9}{3} < \left(\frac{10}{3} < \frac{11}{3}\right) < \frac{12}{3} = 4$$

आता, तुम्हाला जर 3 आणि 4 मधील 5 परिमेय संख्या माहित करायचे असले तर $5+1=6$ छेदाने 3 आणि 4 ला परिमेय संख्या म्हणुन आपण लिहु शकतो.

म्हणजेच $3 = \frac{18}{6}$ आणि $4 = \frac{24}{6}$ $\qquad 3 = \frac{18}{6} < \left(\frac{19}{6}, \frac{20}{6}, \frac{21}{6}, \frac{22}{6}, \frac{23}{6}\right) < \frac{24}{6} = 4$

या वरुन 3 आणि 4 मध्ये अनंत परिमेय संख्या आहेत ते तुम्हाला समजले. तपासणी करा, कोणत्याही दोन परिमेय संख्यासाठी आहे का? अशा प्रकारे आपण असे म्हणू शकतो की, दिलेल्या कोणत्याही दोन परिमेय संख्या मध्ये अनंत परिमेय संख्या असतात.

हे करा

i. 2 आणि 3 च्या मधील 5 परिमेय संख्या सरासरी (मध्य) पध्दतीने काढा.

ii. $-\frac{3}{11}$ आणि $\frac{8}{11}$ मधील 10 परिमेय संख्या माहित करा.

उदाहरण -4 : $\frac{7}{16}$, $\frac{10}{7}$ आणि $\frac{2}{3}$ ना दशांश रुपात व्यक्त करा.

सोडवणुक:

$$\begin{array}{r} 0.4375 \\ 16\overline{)7.00000} \\ 0 \\ \hline 70 \\ 64 \\ \hline 60 \\ 48 \\ \hline 120 \\ 112 \\ \hline 80 \\ 80 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.428571 \\ 7\overline{)10} \\ 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 10 \\ 7 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.666 \\ 3\overline{)2.0000} \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

अ

$\therefore \frac{7}{16} = 0.4375$

ही अनावृत्ती दशांश आहे.

$\therefore \frac{10}{7} = 1.\overline{428571}$

ही आवृत्ती दशांश आहे.

$\therefore \frac{2}{3} = 0.666 = 0.\overline{6}$

ही आवृत्ती दशांश आहे.

वरील उदाहरणावरुन आपल्याला असे लक्षात येते की, कोणत्याही परिमेय संख्यांना आवृत्ती दशांश किंवा अनावृत्ती दशांशाच्या रुपात लिहिता येते.

हे करा

(i) $\frac{1}{17}$ (ii) $\frac{1}{19}$ चे दशांश रुप माहित करा.

उदाहरण-5: 3.28 ला $\frac{p}{q}$ च्या रुपात व्यक्त करा (जेथे p आणि q पुर्णांक आहेत $q \neq 0$)

सोडवणुक $3.28 = \frac{328}{100}$

$= \frac{328 \div 2}{100 \div 2} = \frac{164}{50}$

$= \frac{164 \div 2}{50 \div 2} = \frac{82}{25}$ (अंश आणि छेद सहमुळ आहेत.)

$\therefore 3.28 = \frac{82}{25}$

उदाहरण - 6: $1.\overline{62}$ ला $\frac{p}{q}$ च्या रुपात व्यक्त करा.(येथे p, q हे पुर्णांक आहेत आणि $q \neq 0$

सोडण क:- समजा $x = 1.626262.....$ (1)

समीकरण (1) च्या दोन्ही बाजुला 100 ने गुणाकार करुन

$100x = 162.6262...$ (2)

(1) मधुन (2) वजा करुन

$$\begin{array}{rl} 100x = & 162.6262... \\ x = & 1.6262... \\ - & - \\ \hline 99x = & 161 \\ \hline x = & \frac{161}{99} \end{array}$$

$\therefore 1.\overline{62} = \frac{161}{99}$

प्रयत्न करा

I. खालील ची दशांश किंमत माहित करा.

i.	$\frac{1}{2}$	ii.	$\frac{1}{2^2}$	iii.	$\frac{1}{5}$	iv.	$\frac{1}{5 \times 2}$
v.	$\frac{3}{10}$	vi.	$\frac{27}{25}$	vii.	$\frac{1}{3}$	viii.	$\frac{7}{6}$
ix.	$\frac{5}{12}$	x.	$\frac{1}{7}$				

खालील दशांशाचे निरिक्षण करा.

$\frac{1}{2} = 0.5$ $\frac{1}{10} = 0.1$ $\frac{32}{5} = 6.4$ $\frac{1}{3} = 0.333...$ $\frac{4}{15} = 0.2\overline{6}$

अपुर्णांक हा आवृत्ती किंवा अनावृत्ती दशांश होण्यासाठी छेदाचे विशेष लक्षण तुम्ही सांगु शकाल का?

प्रत्येक परिमेय संख्येच्या छेदाचे मुळ अवयव लिहा.

उत्तरावरुन तुम्ही काय निरीक्षण केले.

अभ्यास - 1.1

1. (a) कोणत्याही तीन परिमेय संख्या लिहा.

   (b) तुमच्या शब्दात परिमेय संख्यांना स्पष्ट करा.

2. खालील प्रत्येक विधानाचे एक उदाहरण द्या.

   i. एखादी संख्या जे परिमेय आहे पण पुर्णांक नाही.

   ii. एखादी पुर्ण संख्या जे नैसर्गिक संख्या नाही आहे.

   iii. एखादी पुर्णांक जे पुर्ण संख्या नाही आहे.

   iv. अशी एखादी संख्या जे नैसर्गिक संख्या, पुर्ण संख्या, पुर्णांक आणि परिमेय संख्या आहे.

   v. एखादी संख्या जे पुर्णांक आहे पण नैसर्गिक संख्या नाही आहे.

3. 1 आणि 2 मधील पाच परिमेय संख्या लिहा.

4. $\frac{3}{5}$ आणि $\frac{2}{3}$ मध्ये तीन परिमेय संख्या टाका.

5. $\frac{8}{5}$ आणि $\frac{-8}{5}$ हे संख्या रेषेवर दर्शवा.

6. खालील परिमेय संख्याना, दशांश संख्येत व्यक्त करा.

   I. i) $\frac{242}{1000}$ ii) $\frac{354}{500}$ iii) $\frac{2}{5}$ iv) $\frac{115}{4}$

   II. i) $\frac{2}{3}$ ii) $-\frac{25}{36}$ iii) $\frac{22}{7}$ iv) $\frac{11}{9}$

7. खालील प्रत्येक दशांशाला $\frac{p}{q}$ च्या रुपात व्यक्त करा जेथे p आणि q पुर्णांक आहेत आणि $q \neq 0$

   i) 0.36 ii) 15.4 iii) 10.25 iv) 3.25

8. खालील प्रत्येक दशांशाला $\frac{p}{q}$ च्या रुपात लिहा.

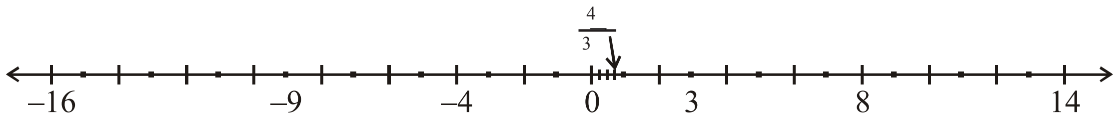
   i) $0.\overline{5}$ ii) $3.\overline{8}$ iii) $0.\overline{36}$ iv) $3.12\overline{7}$

9. भागाकार न करता खालील मध्ये कोणते अनावृत्ती दशांश आहे. ते माहित करा.

   (i) $\frac{3}{25}$ (ii) $\frac{11}{18}$ (iii) $\frac{13}{20}$ (iv) $\frac{41}{42}$

1.2 अपरिमेय संख्या

संख्या रेषेकडे पुन्हा एकदा पाहु या. संख्या रेषेवर आपण सर्व संख्या दर्शवु शकतो का? खर पाहिले तर संख्या रेषेवर अजुन अनंत संख्या सुटलेल्या आहेत.



हे समजण्यासाठी हे समीकरणे पाहु या.

(i) $x^2 = 4$ (ii) $3x = 4$ (iii) $x^2 = 2$

समीकरण (i) साठी x ची किंमत 2 आणि -2 आहे. हे आपल्याला माहित आहे. संख्या रेषेवर 2 आणि -2 आपण ठेऊ शकतो.

समीकरण (ii) $3x = 4$ ला दोन्ही बाजुला 3 ने भागुन $\frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ हे आपण संख्या रेषेवर ठेऊ शकतो.

समीकरण (iii) $x^2 = 2$ हे जेव्हा आपण सोडवितो, समीकरणाच्या दोन्ही बाजुला वर्गमुळ करुन $\sqrt{x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$

आपण संख्या रेषेवर $\sqrt{2}$ दर्शवु शकतो का?

$\sqrt{2}$ ची किंमत काय आहे? $\sqrt{2}$ च्या कोणत्या किंमती असेल?

$\sqrt{2}$ ची किंमत भागाकार पध्दतीने माहित करु या.

	1.4142135
1	$2.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
282841	383600
	282841
2828423	10075900
	8485269
28284265	159063100
	141421325
28284270	17611775

पायरी 1: 2 च्या नंतर दशांश बिंदु

पायरी 2: दशांश बिंदु नंतर 0 लिहा.

पायरी 3:0 ची जोडी बनवा आणि त्यावर बार द्या.

पायरी 4:नंतर पुर्ण वर्ग चा वर्गमुळ माहित करण्याच्या पध्दतीला अनुसरा.

$\therefore \sqrt{2} = 1.4142135\ldots$

जर $\sqrt{2}$ ची किंमत माहित करतांना तुमच्या असे लक्षात येईल की, $\sqrt{2}$ =1.4142135623731..... ही आवृत्ती नाही किंवा अनावृत्ती दशांश ही नाही.

$\frac{p}{q}$ च्या रुपात व्यक्त केलेले दशांश एक तर आवृत्ती दशांश किंवा अनावृत्ती दशांश असते. हे आपल्या निरिक्षणात आले आहे. यांना परिमेय संख्या म्हणुन ओळखतो.

पण $\sqrt{2}$ साठी दशांश संख्या हे अनावृत्ती दशांश आणि आवृत्ती दशांश असते. यास तुम्ही बारच्या सहाय्याने दर्शवु शकता का? नाही, आपण करु शकत नाही. अशा प्रकारच्या संख्याना अपरिमेय संख्या म्हणतात. आणि ते p/q च्या रुपात दर्शवु शकत नाही. म्हणजेच $\sqrt{2} \neq p/q$ (p आणिqपुर्णांकासाठी $q \neq 0$).

याच प्रमाणे $\sqrt{3}$ = 1.7320508075689.....

$\sqrt{5}$ = 2.2360679774998.....

या आवृत्ती दशांश आहेत.यांना अपरिमेय संख्या म्हणून ओळखतात. यांना 'S' किंवा 'Q^1' म्हणुन दर्शवितात.

अपरिमेय संख्याचे उदाहरण

(1) 2.1356217528..., (2) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, etc.

इ.स.5 व्या शतकामध्ये ग्रीक चा प्रमुख गणीतज्ञ आणि तत्वज्ञ पायथागोरस च्या अनुयायीनी अशा संख्याचा शोध लावला ज्या परिमेय संख्या नाही आहेत. त्यांना अपरिमेय संख्या म्हणुन नाव देण्यात आले. $\sqrt{2}$ हा अपरिमेय संख्या आहे हे पायथागोरस ने सिध्द केले. नंतर सायरन चे थेडरस नी $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ आणि $\sqrt{17}$ या अपरिमेय संख्या म्हणुन दाखवल्या. सुलभ सुत्रा (सन 800) मध्ये वर्गमुळ गणना मध्ये अपरिमेययांचा उल्लेख आहे.

खालील तक्त्याचे निरिक्षण करा.

$\sqrt{1}$	=	1
$\sqrt{2}$	=	1.414213.....
$\sqrt{3}$	=	1.7320508.....
$\sqrt{4}$	=	2
$\sqrt{5}$	=	2.2360679.....
$\sqrt{6}$	=	
$\sqrt{7}$	=	
$\sqrt{8}$	=	
$\sqrt{9}$	=	3

जर 'n' हा पुर्ण वर्ग किंवा नैसर्गिक संख्या असेल तर $\sqrt{n}$ हे अपरिमेय संख्या आहे.

कोणते परिमेय आहे आणि कोणते परिमेय नाही आहे हे तुम्ही आता ओळखु शकता का?

$\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}$ - हे परिमेय संख्या आहे.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ - हे अपरिमेय संख्या आहे.

विचार करा आणि चर्चा करा आणि लिहा

कृती म्हणाली $\sqrt{2}$ ला $\frac{\sqrt{2}}{1}$ म्हणुन लिहु शकतो जे $\frac{p}{q}$ च्या रुपात आहे. म्हणुन $\sqrt{2}$ हे परिमेय संख्या आहे. तिचे म्हणणे बरोबर आहे का?

π विषयी माहिती

वर्तुळाचा परिघा (C) सोबत त्याच्या व्यासाचे गुणोत्तर म्हणुन π ची व्याख्या करण्यात आली . म्हणजेच $\pi = \frac{c}{d}$ म्हणजेच $\frac{p}{q}$ च्या रुपात असल्यामुळे ती अपरिमेय संख्या नाही म्हणुन समजतो. वर्तुळाचा परिघ (C) आणि वर्तुळाचा व्यास (d) तुलना करणारी लांबी नाही आहे. त्यांना निश्चित मोजण्याचे माप नाही आहे. म्हणुन π ही अपरिमेय म्हणुन समजल्या जाते.

ग्रीकचा शास्त्रज्ञ अर्कीमेडीज यांनी π ची किंमत सर्वात अगोदर गणना केली त्यांनी ही किंमत 3.140845 आणि 3.142857. (म्हणजेच $3.140845 < \pi < 3.142857$) भारतीय प्रसिध्द गणीतज्ञ आणि आर्यभट्ट (476-550 AD) ने π ची किंमत 3.1416. हे चार दशांशपर्यंत ची संख्या शोधुन काढली. गतीमान संगणक आणि आधुनिक अल्गोरीदम चा वापर करुन π ची किंमत 1.24 ट्रिलीयन दशांश स्थळा पर्यंत मोजल्या गेले.

π =3.14159265358979323846264338327950 ….. π चा दशांश विस्तार हा आवृत्ती आहे. म्हणुन π हे अपरिमेय संख्या आहे. आपण π ची अंदाजे किंमत म्हणुन $\frac{22}{7}$ वारंवार घेत असतो. पण परंतु $\pi \neq \frac{22}{7}$ याची नोंद घ्या.

दर वर्षी 14 मार्च ला आपण π चा दिवस म्हणुन साजरा करतो. कारण ते 3.14 (π = 3.14159 ....). काय योगा योग अल्बर्ट ऐनस्टाईन चा जन्म 14 मार्च 1879 ला झाला.

प्रयत्न करा

$\sqrt{3}$ ची किंमत सहा दशांश स्थळापर्यंत माहित करा.

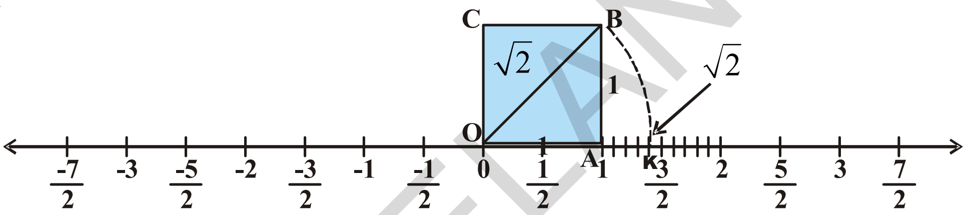
1.3 संख्या रेषेवर अपरिमेय संख्या दर्शविणे

कोणत्याही दोन परिमेय संख्याच्या मधात परिमेय संख्या असतात. हे आपण शिकलेले आहोत. म्हणुन जेव्हा दोन परिमेय संख्या संख्या रेषेवर बिंदु ने दर्शवितो तेव्हा त्या मधील परिमेय संख्यांना दर्शविण्यासाठी आपण बिंदुचा वापर करतो. म्हणुन परिमेय संख्या दर्शविण्यासाठी तिथे अनंत बिंदु असतात. संख्या रेषेवर असलेले बिंदु फक्त परिमेय संख्या दर्शविते असे दिसते. हे सत्य आहे का? संख्या रेषेवर $\sqrt{2}$ तुम्ही दर्शवु शकत नाही का? चला चर्चा करु या आणि संख्या रेषेवर $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ अशा अपरिमेय संख्याला ठेवु या.

उदाहरण -7. संख्या रेषेवर वर $\sqrt{2}$ शोधा.

सोडवणुक: प्रत्येक बाजु 1 एकक लांबी असलेला चौरस OABC संख्या रेषेवर O येथे काढा.

पा.गो.प्र. नुसार OB = $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

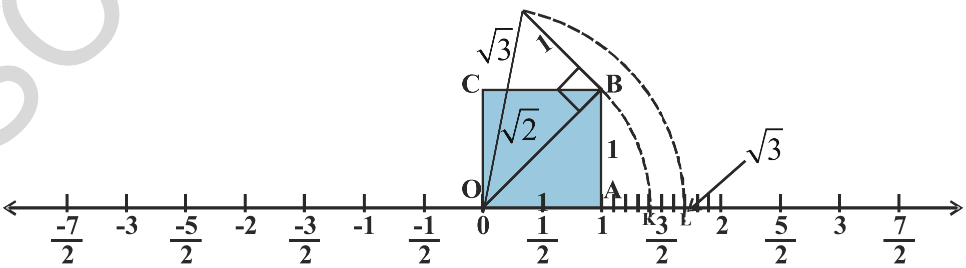


आकृती (i)

OB = $\sqrt{2}$. हे आपल्याला दिसत आहे. वृत्त लेखणी (कंपास) च्या सहाय्याने केंद्र O घेऊन त्रिज्या OBघ्या. आणि उजव्या बाजुला O छेदात असलेल्या संख्यारेषेवर Kयेथे एक कंस काढा. आता संख्या रेषेवर K हा $\sqrt{2}$ ला सुचवतो.

उदाहरण-8: संख्या रेषेवर $\sqrt{3}$ शोधा

सोडवुणक : पुन्हा आकृती (1) कडे पाहु या.



आकृती (ii)

आता 1 एकक लांबीची BD घेऊन OB वर लंब काढा (आकृती 2 मध्ये) OD ला जोडा.

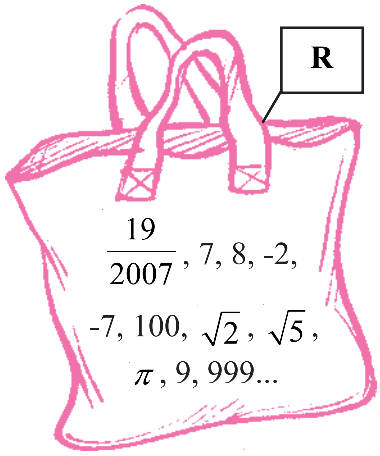
प्रा.गो.प्र. नुसार OD = $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

वृत्त लेखणी(कंपास) चा वापर करुन O घ्या आणि त्रिज्या OD घेऊन O च्या उजव्या बाजुला संख्या रेषेला छेदल्यास L बिंदु वर कंस काढा. तर 'L' हे $\sqrt{3}$ ला सुचवतो. या वरुन आपण असा निष्कर्ष काढु शकतो की, संख्या रेषेवर बरेचशे बिंदु अपरिमेय संख्या सुध्दा दर्शवितातत या प्रकारे, कोणत्याही n धन पुर्णांकासाठी $\sqrt{n-1}$ माहित केल्या नंतर आपण $\sqrt{n}$ माहित करु शकतो.

प्रयत्न करा

संख्या रेषेवर $\sqrt{5}$ आणि $-\sqrt{5}$ शोधा. [सुचना : $h^2 = (2)^2 + (1)^2$]

1.3 वास्तविक संख्या



सर्व परिमेय संख्यांना $\frac{p}{q}$ च्या रुपात लिहु शकतो. येथे p आणि q पुर्णांक आहेत. आणि q ≠ 0. p आणि q पुर्णांक असलेल्या अशा संख्या सुध्दा आहेत ज्यांना $\frac{p}{q}$ च्या रुपात लिहु शकत नाही. त्यांना अपरिमेय संख्या म्हणतात. जर आपण सर्व परिमेय संख्याना आणि सर्व अपरिमेय संख्याला संख्या रेषेवर दर्शविलो तर संख्या रेषेवर अजुन कोणता तरी बिंदु शिल्लक आहे का?

याचे उत्तर नाही म्हुणन येते. सर्व परिमेय संख्या आणि सर्व अपरिमेय संख्याच्या समुहाने संख्या रेषा पुर्ण होते. या नविन समुहाला वास्तविक संख्या असे म्हणतात. याला R ने दर्शवितात. संख्या रेषेवरील सर्व बिंदु वास्तविक संख्यांनी पुर्ण होते. प्रत्येक वास्तविक संख्या संख्यारेषेवरील एक विलक्षण बिंदु दर्शविते. असे आपण म्हणु शकतो. तसेच संख्या रेषेवरील प्रत्येक बिंदु एक विलक्षण वास्तविक संख्या दर्शविते. म्हणुन आपण याला वास्तविक संख्या रेषा म्हणतो.

वास्तविक संख्याचे येथे काही उदाहरणे आहेत.

$-5.6, \sqrt{21}, -2, 0, 1, \frac{1}{5}, \frac{22}{7}, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{9}, 12.5, 12.5123.....$ इत्यादी, परिमेय आणि अपरिमेय या दोन्ही संख्या या समुहात तुम्हाला आढळुन येतात.

उदहारण -9: $\frac{1}{5}$ आणि $\frac{2}{7}$ मधील कोणत्याही दोन परिमेय संख्या माहित करा.

सोडवणुक : आपल्याला माहित आहे $\frac{1}{5} = 0.20$

$$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$$

$\frac{1}{5}$ आणि $\frac{2}{7}$, मधील दोन परिमेय संख्या माहित करण्यासाठी, दोन संख्याच्या दशांश रुपाकडे आपल्याला पाहणे आवश्यक आहे. त्यानंतर प्रक्रियाची सुरुवात करावी. आपण अनंत अपरिमेय संख्या माहित करु शकतो.

अशा दोन अपरिमेय संख्याचे उदाहरण

0.201201120111..., 0.24114111411114…, 0.25231617181912..., 0.267812147512 …

$\frac{1}{5}$ आणि $\frac{2}{7}$ मधील आणखी चार अपरिमेय संख्या माहित करु शकता का?

उदाहरण -10: 3 आणि 4 मधील अपरिमेय संख्या माहित करा.

सोडवणुक:

a आणि b हे अशा दोन परिमेय संख्या आहेत की, जर ab हा त्या परिमेय संख्याचा पुर्णवर्ग नसेल तर a आणि b मधील $\sqrt{ab}$ हे अपरिमेय संख्या आहे.

$\therefore$ 3 आणि 4 मधील अपरिमेय संख्या $\sqrt{3\times 4} = \sqrt{3}\times\sqrt{4}$

$$= \sqrt{3}\times 2 = 2\sqrt{3}$$

उदाहरण-11: खालील संख्या परिमेय आहेत की अपरिमेय आहेत? ते तपासुन पहा.

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\frac{10}{2\sqrt{5}}$ (iv) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2$

सोडवणुक:

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right) = 3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}$

$= 6$, जे परिमेय संख्या आहे.

(ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

आपल्याला माहित आहे. $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

अशा प्रकारे $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) = 3^2 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$ जे की, परिमेय संख्या आहे.

(iii) $\dfrac{10}{2\sqrt{5}} = \dfrac{10 \div 2}{2\sqrt{5} \div 2} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$,जे की, अपरिमेय संख्या आहे.

(iv) $(\sqrt{2}+2)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2.\sqrt{2}\ .2 + 2^2 = 2 + 4\sqrt{2} + 4$

$= 6 + 4\sqrt{2}$, जे की, अपरिमेय संख्या आहे.

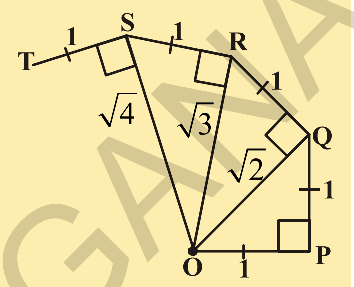
अभ्यास 1.2

1. खालील संख्यांचे परिमेय किंवा अपरिमेय संख्यामध्ये वर्गीकरण करा.
   (i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{441}$ (iii) 30.232342345…
   (iv) 7.484848… (v) 11.2132435465 (vi) 0.3030030003.....
2. अपरिमेय संख्या, परिमेय संख्यापेक्षा कशा वेगळ्या आहे ते उदाहरणा सहीत स्पष्ट करा.
3. $\frac{5}{7}$ आणि $\frac{7}{9}$ मधील अपरिमेय संख्या माहित करा. त्या मध्ये किती असेल?
4. 0.7 आणि 0.77 मधील दोन अपरिमेय संख्या माहित करा.
5. $\sqrt{5}$ ची किंमत 3 दशांश स्थळापर्यंत माहित करा.
6. भागाकार पध्दतीने $\sqrt{7}$ ची किंमत सहा दशांश स्थळा पर्यंत माहित करा.
7. संख्या रेषेवर $\sqrt{10}$ स्थापन करा.
8. 2 आणि 3 मधील कमीत कमी दोन अपरिमेय संख्या माहित करा.
9. खालील विधाने सत्य आहेत की, असत्य ते सांगा. तुमच्या उत्तराचा पडताळा करा.
   (i) प्रत्येक अपरिमेय संख्या ही वास्तविक संख्या आहे.
   (ii) प्रत्येक परिमेय संख्या ही वास्तविक संख्या आहेत.
   (iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या ही परिमेय संख्या असण्याची आवश्यकता नाही.
   (iv) जर n ही पुर्ण वर्ग असेल तर $\sqrt{n}$ हे अपरिमेय नाही.
   (v) जर n ही पुर्ण वर्ग असेल तर $\sqrt{n}$ हे अपरिमेय आहे.
   (vi) सर्व वास्तविक संख्या हे अपरिमेय आहेत.

कृती

'वर्गमुळाचे जाळे' रचना करणे.

एक मोठा कागद घ्या आणि 'वर्गमुळाचे जाळे' खालील प्रकारे रचना करा.



पायरी 1 : 'O' पासुन सुरुवात करा आणि 1 एकक लांबीचे $\overline{OP}$ रेषाखंड काढा.

पायरी 2 : एकक लांबीच्या $\overline{OP}$ वर $\overline{PQ}$ हा लंब रेषाखंड काढा.(येथे OP = PQ = 1) (आकृती पहा.)

पायरी 3 : O, Q जोडा. (OQ = $\sqrt{2}$)

पायरी 4 : एकक लांबीचे $\overline{QR}$ रेषाखंड $\overline{OQ}$ वर लंब काढा.

पायरी 5 : O, R जोडा. (OR = $\sqrt{3}$)

पायरी 6 : एकक लांबीचे RS रेषाखंड $\overline{OR}$ वर लंब काढा.

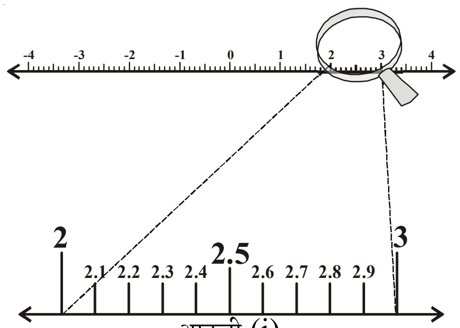
पायरी 7 : अजुन काही पायऱ्या साठी ही पध्दत पुढे चालु ठेवा. $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TU}$ ... इत्यादी रेषाखंडाचे तुम्ही सुंदर असे जाळे निर्माण कराल. $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$, $\overline{OS}$, $\overline{OT}$, $\overline{OU}$ ... इत्यादी रेषाखंड अनुक्रमे $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ लांबीचे दर्शवितात यांची नोंद करा.

1.4 संख्या रेषेवर वास्तविक संख्येला क्रमबध्द पध्दतीने परिवर्धन करुन दाखविणे

पुर्वीच्या भागात आपण पाहिले की, कोणत्याही वास्तविक संख्येला दशांश विस्तार असतो.

संख्या रेषेवर आवृत्ती दशांश कसे दर्शवितात ते आता सुरुवातीला पाहु या.

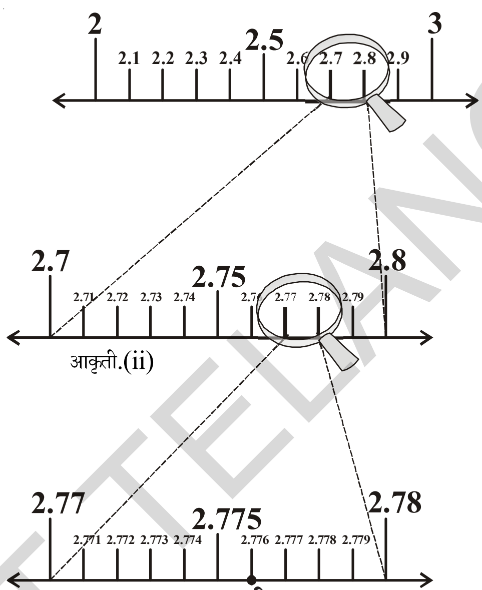
समजा आपल्याला संख्या रेषेवर 2.776 शोधायचे आहे. आपल्याला माहित आहे, हे अनावृत्ती दशांश आहे आणि ते 2 आणि 3 च्या मधात आहे.



आकृती (i)

म्हणुन संख्या रेषेच्या 2 आणि 3 मधातील भागाला बारकाईने पाहु या. समजा आकृती (1) प्रमाणे या भागाला 10 समान भागात विभागले तर त्यांची खुण 2.1,2.2,2.3 सारखी असेल त्याला स्पष्ट पाहण्यासाठी जर समजा आपण हातात भिंग घेऊन 2 आणि 3 च्या मधातील भागाला पाहिले तर ते आकृति (1) मध्ये जसे दिसत आहे तसे तुम्हाला दिसेल.

आता, 2.7 आणि 2.8 च्या मधात 2.776 आहे. म्हणुन 2.7 आणि 2.8 च्या मधातील भागावर दृष्टी टाकु (आकृती (ii) पहा) कल्पना करा की, या भागाला आपण पुन्हा 10 समान भागात विभागलो तर पाहिली खुण 2.71 दर्शविते, दुसरी 2.72 हे स्पष्ट पाहण्यासाठी आपण याला मोठे करुन पाहु जे आकृती (ii) मध्ये दिसत आहे.



आकृती 3

पुन्हा 2.77 आणि 2.78 च्या मधात 2.776 आहे. संख्या रेषेच्या या भागावर दृष्टी टाकु या. (आकृती 3 पहा) आणि कल्पना करा की, त्याला पुन्हा 10 समान भागात विभागले. आकृती 3 मध्ये जसे चांगले दिसत आहे. तसे पाहण्यासाठी आपण त्याला मोठे करु.

पाहिली खुण 2.771 दर्शविते, दुसरी खुण 2.772. या पोटभाग विभागणीत 6 वी खुण 2.776 आहे.

संख्या रेषेवर संख्यांना परिवर्धनाव्दारे दर्शविणाऱ्या कल्पनेच्या प्रक्रियेला आपण क्रमबध्द परिवर्धनाची पध्दत म्हणतो.

आता आपण क्रमबध्द परिवर्धनाचा वापर करुन संख्या रेषेवर अनंत आवृत्ती दशांशास दाखवण्याचा प्रयत्न करु या.

उदाहरण - 12: क्रमबध्द भिंगाव्दारे 4 दशांश स्थळा पर्यंत $3.5\overline{8}$ ला दर्शविण्याची कल्पना करा.

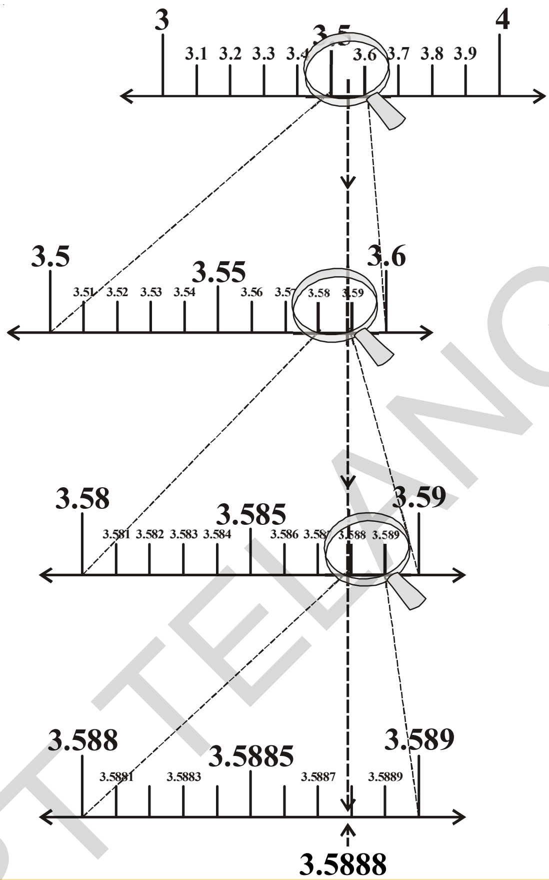
सोडवणुक : संख्या रेषे वर 3.5888 दर्शवण्यासाठी पुन्हा एकदा क्रमबध्द भिंगाव्दारे समोर जाऊ या.

पायरी :1

पायरी :2

पायरी:3

पायरी :4



अभ्यास -1.3

1. क्रमबध्द भिंगपध्दतीचा वापर करुन संख्या रेषेवर 2.874 दृष्यमान करा.
2. 3 दशांश स्थळापर्यंत संख्या रेषेवर $5.\overline{28}$ ला दृष्यमान करा.

1.5 वास्तविक संख्यावर क्रिया

बेरीज आणि गुणाकारासाठी परिमेय संख्या क्रमनिरपेक्षतेच्या साहचर्य आणि वितरणाचा नियम पुर्ण करतात. हे आपण पुर्वीच्या वर्गात शिकलेले आहोत. तसेच परिमेय संख्या बेरीज, वजाबाकी, आणि गुणाकार मध्ये संवृत्त असते. हे पण शिकले आहेत. अपरिमेय संख्या सुध्दा चार मुलभुत प्रक्रिया मध्ये संवृत्त आहेत. असे तुम्ही सांगु शकता का?

खालील उदाहरणाना पहा.

$\left(\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3}\right)=0$. येथे 0 ही परिमेयसंख्या आहे.

$\left(\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}\right)=0$. येथे 0 ही परिमेयसंख्या आहे.

$\left(\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{2}\right)=2$. येथे 2 ही परिमेय संख्या आहे. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=1$. येथे 1 ही परिमेय संख्या आहे.

तुमच्या निरिक्षणास काय आले आहे? अपरिमेय संख्याची बेरीज वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार अपरिमेय असण्याची आवश्यकता नाही.

म्हणुन बेरीज, वजाबाकी, गुणाकर आणि भागाकार सोबत अपरिमेय संख्या संवृत्त नाही. असे आपण म्हणु शकतो. समजा तुम्हाला $3\sqrt{2}$ ला $2\sqrt{2}$ मध्ये जोडा त्यांची बेरीज $5\sqrt{2}$ अशी लिहिता येते. आणि जर $3\sqrt{2}$ मधुन $2\sqrt{2}$ वजा केले असता तुम्हाला बाकी 1 येते.

अपरिमेय संख्या वर काही उदाहरणे पाहु या.

विचार करा आणि चर्चा करा

1.हासित म्हणतो, $5\sqrt{3}+2\sqrt{7}=7\sqrt{10}$ तुम्ही त्याच्याशी सहमत आहात का? 2. तुम्ही $5\sqrt{2}-\sqrt{8}$ ची किंमत कशी माहित कराल?

उदाहरण-13: (i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (iii) $21+\sqrt{3}$ (iv) $\pi+3$ हे अपरिमेय संख्या आहेत की नाहीत हे सांगा?

सोडवणुक : आपल्याला माहित आहे. $\sqrt{2}=1.414\ldots$, $\sqrt{3}=1.732\ldots$, $\pi=3.1415\ldots$

(i) $5\sqrt{2} = 5(1.414\ldots)=7.070\ldots$

(ii) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{7.070}{2}=3.535\ldots$ (i वरुन)

(iii) $21+\sqrt{3} = 21+1.732\ldots=22.732\ldots$

(iv) $\pi+3 = 3.1415\ldots+3=6.1415\ldots$

या सर्व आवृत्ती दशांश आहेत.

अशा प्रकारे ते अपरिमेय संख्या आहेत.

जर q हे परिमेय संख्या आणि s हे अपरिमेय संख्या असेल तर $q+s$, $q-s$, qs आणि $\frac{q}{s}$ $(s\neq 0)$ हे अपरिमेय संख्या आहेत

उदाहरण-14: $5\sqrt{3}+7\sqrt{5}$ मधुन $3\sqrt{5}-7\sqrt{3}$ वजा करा.

सोडवणुक: $(3\sqrt{5}-7\sqrt{3})-(5\sqrt{3}+7\sqrt{5})$

$= 3\sqrt{5}-7\sqrt{3}-5\sqrt{3}-7\sqrt{5}$

$= -4\sqrt{5}-12\sqrt{3}$

$= -(4\sqrt{5}+12\sqrt{3})$

उदाहरण-15: $6\sqrt{3}$ ला $13\sqrt{3}$ ने गुणाकार करा.

सोडवणुक: $6\sqrt{3}\times 13\sqrt{3} = 6\times 13\times\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 78\times 3 = 234$

वर्गमुळ संबंधीत काही गुणधर्माची आता आणि आपण यादी करु या. जे की, अनेक पध्दतीने उपयोगी पडते.

a आणि b या ऋण नसलेल्या वास्तव संख्या आहेत तर

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; जर $b \neq 0$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

या गुणधर्माच्या काही विशेष संदर्भाकडे पाहु या.

उदाहरण - 16: खालील पदावलीना सरळ रुप द्या.

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

सोडवणुक

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right) = 6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

(ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 = 5+2\sqrt{10}+2 = 7+2\sqrt{10}$

(iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2 = 5-2 = 3$

उदाहरण - 17: $5+2\sqrt{6}$ चे वर्गमुळ काढा.

सोडवणुक - $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

$= \sqrt{3+2+2.\sqrt{3}.\sqrt{2}}$ $\because \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$= \sqrt{3}+\sqrt{2}$

1.5.1 छेदाचे परिमेयीकरण

संख्या रेषेवर आपण $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ठेऊ शकतो का?

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ची किंमत किती?

आपण ती किंमत कशी माहित करु? $\sqrt{2} = 1.4142135.....$ ने अनावृत्ती नाही आणि पुन्हा पुन्हा येत नाही. याला तुम्ही 1 ने भाग देऊ शकता का?

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ ची किंमत माहित करणे सोपे दिसत नाही.

परिमेय रुपात छेदाचे बदल करण्याचा प्रयत्न करु या.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ च्या छेदाचे परिमेय करण्यासाठी, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ च्या अंशाला $\sqrt{2}$ ने गुणुन आणि भागुन.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.होय हे, $\sqrt{2}$ च्या अर्धे आहे.

संख्या रेषेवर आता आपण $\frac{\sqrt{2}}{2}$ स्थापु शकतो का? हे शुन्य आणि $\sqrt{2}$ च्या मधातील आहे.

निरिक्षण करा $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ अशा प्रकारे आपण म्हणु शकतो की, $\sqrt{2}$ हे $\sqrt{2}$ चे परिमेयीकारक अवयव (R.F) आहे.

याच प्रमाणे $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ तर $\sqrt{2}$ आणि $\sqrt{8}$ हे एकमेकांचे परिमेयीकारक अवयव आहे. आणखी $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$, इत्यादी, या मध्ये $\sqrt{2}$ हे $\sqrt{2}$ चे साधे परिमेयीकारक अवयव आहे.

जर दोन अपरिमेय संख्याचा गुणाकार परिमेय संख्या असेल तर दोन पैकी एक दुसऱ्याचे परिमेयकरण अवयव (R.F) असते. याची नोंद घ्या. तसेच दिलेल्या अपरिमेय संख्याचे (R.F) हे विलक्षण नसते याची पण नोंद घ्या. दिलेल्या अपरिमेय संख्याचे (R.F) चा वापर सोयी प्रमाणे करता येते.

हे करा

छेदाचे परिमेयीकारक अवयव माहित करा. (i) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{8}}$.

उदाहरण-18: $\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ च्या छेदाचे परिमेयीकरण करा.

सोडवणुक: आपल्याला माहित आहे. $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$

$\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ च्या अंशाला आणि छेदाला $4-\sqrt{5}$ ने गुणुन

$$\frac{1}{4+\sqrt{5}}\times\frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}=\frac{4-\sqrt{5}}{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4-\sqrt{5}}{16-5}=\frac{4-\sqrt{5}}{11}$$

उदाहरण-19: जर $x=7+4\sqrt{3}$ तर $x+\frac{1}{x}$ चे मूल्य काढा.

देण्यात आलेले $x=7+4\sqrt{3}$

आता $$\frac{1}{x}=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}=\frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-(4\sqrt{3})^2}=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-16\times 3}=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}=7-4\sqrt{3}$$

$$\therefore x+\frac{1}{x}=7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}=14$$

उदाहरण-20: सरळ रुप द्या $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$

सोडवणुक: $7+4\sqrt{3}$ चे परिमेयक अवयव $7-4\sqrt{3}$ आहे. आणि $2+\sqrt{5}$ चे परिमेयक अवयव $2-\sqrt{5}$ आहे.

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}\times\frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}\times\frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-(4\sqrt{3})^2}+\frac{2-\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}+\frac{2-\sqrt{5}}{(4-5)}$$

$$=\frac{7-4\sqrt{3}}{1}+\frac{2-\sqrt{5}}{(-1)}$$

$$=7-4\sqrt{3}-2+\sqrt{5}=5-4\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

1.5.2 वास्तविक संख्यासाठी घातांकाचा नियम

घातांकाच्या नियमांची उजळणी करु या.

i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ iii) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{जर } m > n \\ 1 & \text{जर } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{जर } m < n \end{cases}$

iv) $a^m b^m = (ab)^m$ v) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ vi) $a^0 = 1\ (a \neq 0)$

येथे 'a', 'm' आणि 'n' हे पुर्णांक आहेत आणि $a \neq 0$. 'a' ला पाया m, n ला घातांक म्हणतात. उदा.

i) $7^3.7^{-3} = 7^{3+(-3)} = 7^0 = 1$ ii) $(2^3)^{-7} = 2^{-21} = \frac{1}{2^{21}}$

iii) $\frac{23^{-7}}{23^4} = 23^{-7-4} = 23^{-11}$ iv) $(7)^{-13}.(3)^{-13} = (7 \times 3)^{-13} = (21)^{-13}$

खालील गणना आपण करु या.

i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}}$

आपण कसे सोडवु? वरील उदाहरणात पाया आणि घातांक या परिमेय संख्या आहेत. अशा प्रकारे तेथे धन वास्तविक संख्याच्या घातांकाचा नियम लागु करण्याची आवश्यकता आहे आणि घातांक हे परिमेय संख्या म्हणुन, हा नियम सांगण्याच्या अगोदार, वास्तविक संख्याचे n वे मुळ कोणते आहे. हे समजणे आपल्याला आवश्यक आहे.

आपल्याला माहित आहे जर $3^2 = 9$ तर $\sqrt{9} = 3$ (9 चे वर्गमुळ 3)

म्हणजेच $\sqrt[2]{9} = 3$

जर $5^2 = 25$ तर $\sqrt{25} = 5$ म्हणजेच $\sqrt[2]{25} = 5$ जेव्हा जेव्हा $\sqrt[2]{25} = (25)^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2 \times \frac{1}{2}} = 5$

खालील चे निरिक्षण करा.

जर $2^3 = 8$ तर $\sqrt[3]{8} = 2$ (8 चा घनमुळ 2 आहे) $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

$2^4 = 16$ तर $\sqrt[4]{16} = 2$ (16 चे 4 थे मुळ 2 आहे. $\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$

$2^5 = 32$ तर $\sqrt[5]{32} = 2$ (32 चे 5 वे मुळ 2 आहे) $\sqrt[5]{32} = (32)^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2$

$2^6 = 64$ तर $\sqrt[6]{64} = 2$ (64 चे 6 वे मुळ 2 आहे.) $\sqrt[6]{64} = (64)^{\frac{1}{6}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = 2$

....

या प्रमाणे जर $\mathbf{a^n = b}$ तर $\sqrt[n]{\mathbf{b}} = \mathbf{a}$ (bचे n वे मुळ aआहे); $\sqrt[n]{b} = (b)^{\frac{1}{n}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a$

$\mathbf{a} > 0$ हे वास्तविक संख्या आणि '**n**' हे धन पुर्णांक समजु

जर $\mathbf{b^n = a}$, काही धन वास्तविक संख्या '**b**', साठी, तर **b** ला '**a**' चे **n** वे मुळ म्हणतात. आणि याला $\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{b}$. असे लिहतात. पुर्वीच्या चर्चेत घातांकाचे नियमाची व्याख्या पुर्णांकांसाठी करण्यात आली. धन वास्तव संख्या आणि परिमेय घातांकाचे नियम लागु करु या.

$a > 0$ हे वास्तविक संख्या आणि p आणि q हे परिमेय संख्या समजु

i) $a^p . a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ iv) $a^p . b^p = (ab)^p$ v) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

अगोदार विचारलेल्या प्रश्नाची उत्तरे माहित करण्यासाठी आता आपण या नियमाचा वापर करु शकतो.

उदाहरण -19: सरळ रुप द्या.

i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}} . 11^{\frac{1}{17}}$

सोडवणुक: i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{7}}$

iii) $\dfrac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{3-5}{15}} = 3^{\frac{-2}{15}} = \dfrac{1}{3^{2/15}}$

iv) $7^{\frac{1}{17}} . 11^{\frac{1}{17}} = (7 \times 11)^{\frac{1}{17}} = 77^{\frac{1}{17}}$

हे करा

सरळ रुप द्या.

i. $(16)^{\frac{1}{2}}$ ii. $(128)^{\frac{1}{7}}$

iii. $(343)^{\frac{1}{5}}$

करणी

जर '**n**' हा 1 पेक्षा मोठा धनपुर्णांक आणि '**a**' ही धन परिमेय संख्या आहे. पण कोणत्याही परिमेय संख्याचे n^{th} घात नसेल तर $\sqrt[n]{a}$ किंवा $a^{1/n}$ ला **n** व्या क्रमाचे करणी म्हणतात. साधारणपणे आपण '**a**' च्या धन '**n**' व्या मुळाला करणी किंवा रॅडीकल म्हणतो. येथे '**a**' ला रॅडीकॅल (radical) आणि $\sqrt[n]{\ }$ ला रॅडीकल चिन्ह म्हणतो. '**n**' ला रॅडीकलचा घात असे म्हणतात.

करणीचे येथे काही उदाहरणे दिलेली आहेत.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{9}$, ... etc

करणी चे रुप

घातांक रुप $a^{\frac{1}{n}}$

रॅडीकल रुप $\sqrt[n]{a}$

$\sqrt{7}$ ही एक वास्तविक संख्या आहे. याला $7^{\frac{1}{2}}$ पण लिहीतात. 7 हे कोणत्याही परिमेय संख्येचा वर्ग नसल्यामुळे $\sqrt{7}$ हे करणी आहे.

$\sqrt[3]{8}$ ही एक वास्तविक संख्या आहे. 8 हे 2 या परिमेय संख्येचा घन असल्यामुळे $\sqrt[3]{8}$ हे करणी नाही आहे.

$\sqrt{\sqrt{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$ म्हणुन हे करणी आहे.

हे करा

1. खालील करणी ना घातांकाच्या रुपात लिहा.

i. $\sqrt{2}$ ii. $\sqrt[3]{9}$ iii. $\sqrt[5]{20}$ iv $\sqrt[17]{19}$

2. खालील करणी ना रॅडीकल रुपात लिहा.

i. $5^{\frac{1}{7}}$ ii. $17^{\frac{1}{6}}$ iii. $5^{\frac{2}{5}}$ iv $142^{\frac{1}{2}}$

अभ्यास 1.4

1. खालील पदावलीना सरळ रुप द्या.

i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

2. खालील संख्यांना परिमेय किंवा अपरिमेय मध्ये वर्गीकरण करा.

i) $5-\sqrt{3}$ ii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ iii) $\left(\sqrt{2}-2\right)^2$

iv) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ v) 2π vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vii) $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$

3. खालील समीकरणात x, y, z इत्यादी चल, परिमेय किंवा अपरिमेय दर्शवितात का? माहित करा.

i) $x^2 = 7$ ii) $y^2 = 16$ iii) $z^2 = 0.02$

iv) $u^2 = \frac{17}{4}$ v) $w^2 = 27$ vi) $t^4 = 256$

4. वर्तुळाचे परिघ आणि व्यासाचे गुणोत्तर $\frac{c}{d}$ हे π ने दर्शवितात. पण आपण असे म्हणतो की π हे अपरिमेय संख्या आहे. का?

5. खालील छेदाचे परिमेयीकरण करा.

i) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ iii) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ iv) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

6. छेदाचे परिमेयीकरण करुन प्रत्येकाला सरळ रुप द्या.

i) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$ ii) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ iii) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ iv) $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$ ची किंमत तीन दशांश स्थळापर्यंत माहित करा. ($\sqrt{2} = 1.414$ $\sqrt{3}=1.732$ आणि $\sqrt{5} = 2.236$)

8. माहित करा.

i) $64^{\frac{1}{6}}$ ii) $32^{\frac{1}{5}}$ iii) $625^{\frac{1}{4}}$

iv) $16^{\frac{3}{2}}$ v) $243^{\frac{2}{5}}$ vi) $(46656)^{\frac{-1}{6}}$

9. सरळ रुप द्या. $\sqrt[4]{81} - 8\sqrt[3]{343} + 15\sqrt[5]{32} + \sqrt{225}$

10. जर 'a' आणि 'b' परिमेय संख्या असेल तर प्रत्येक समीकरणातील a आणि b ची किंमत माहित करा.

i) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = a+b\sqrt{6}$ ii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}} = a-b\sqrt{15}$

आपण काय चर्चा केली ?

या धड्यातील आपण चर्चा केलेले अंश

1. ज्या संख्येला $\frac{p}{q}$ च्या रुपात लिहिता येते त्या संख्येला परिमेय संख्या म्हणतात.(येथे p आणि q पुर्णांक आहेत आणि $q \neq 0$)
2. ज्या संख्येला $\frac{p}{q}$ च्या रुपात लिहु शकत नाही त्या संख्येला अपरिमेय संख्या म्हणतात. (येथे pआणि q पुर्णांक आहेत आणि $q \neq 0$)
3. परिमेय संख्याचा दशांश विस्तार एकतर आवृत्ती असते नाही तर अनावृत्ती असते.
4. अपरिमेय संख्याचा दशांश विस्तार अंत न होणारे आणि आवृत्ती आहे.
5. सर्व परिमेय आणि अपरिमेय संख्याच्या समुहाला वास्तविक संख्या म्हणतात.
6. संख्या रेषेवरील प्रत्येक बिंदु विलक्षण वास्तविक संख्या सुचित करते. तसेच संख्या रेषेवर प्रत्येक वास्तविक संख्या विलक्षण बिंदुला सुचित करते.
7. जर q हे परिमेय आणि s हे अपरिमेय असेल तर q+s, q-s, qs आणि $\frac{q}{s}$ हे अपरिमेय असते.
8. जर n हे पुर्ण वर्गाच्या व्यतिरिक्त नैसर्गिक संख्या असेल तर $\sqrt{n}$ हे अपरिमेय संख्या असते.
9. a आणि b हे कोणत्याही दोन धन वास्तविक संख्या असेल तर

   i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

   iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

   v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$
10. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ च्या छेदाचे परिमेयीकरण करण्यासाठी आपल्याला $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ ने गुणावे लागेल. येथे a, b हे पुर्णांक आहेत.
11. समजा $a > 0, b > 0$ वास्तविक संख्या आणि p आणि q परिमेय संख्या समजु तर,

    i) $a^p.a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$ iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

    iv) $a^p.b^p = (ab)^p$
12. जर 'n' हे 1 पेक्षा मोठी धन पुर्णांक असेल आणि 'a' धन परिमेय संख्या आहे. पण कोणत्याही परिमेय संख्याचे n^{th} मुळ नाही तर $\sqrt[n]{a}$ किंवा $a^{\frac{1}{n}}$ ला n व्या क्रमाचे करणी म्हणतात.

बहुपदी आणि अवयव पाडणे

02

2.1 प्रस्तावना

एका बगीच्यात 6 रांगा आहेत. प्रत्येक रांगेत सहा रोपटे आहेत. तेथे एकुण किती रोपटे आहेत? समजा तेथे 'x' रोपटे आहेत त्यास 'x' रांगेत लावले असता, त्या बगीच्यात किती रोपटे राहतात? स्पष्टपणे ते x^2 म्हणुन माहित आहे.

एक कि.ग्र. कांद्याची किंमत 10 रुपये आहे. इंदरने p कि.ग्रॅ. कांदे विकत घेतले. राजुने q कि.ग्रॅ. विकत घेतले आणि हानिफने r कि.ग्रॅ. विकत घेतले. प्रत्येकाला किती रुपये द्यावे लागते? त्यांनी दिलेले रुपये अनुक्रमे 10p, 10q आणि 10r आहेत. ही सर्व उदाहरणे बैजिक पदावलीचा वापर दाखविते.

अशा प्रकारे आपण बैजिक पदावली 's^2' ला चौरसाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी 'lb' ला आयताचे आणि 'lbh' ला आयतज घनफळ काढण्यासाठी वापरतो. आपण उपयोग करणाऱ्या इतर बैजिक पदावल्या कोणत्या आहेत?

बैजिक पदावली जसे $3xy$, x^2+2x, $x^3 - x^2 + 4x + 3$, πr^2, $ax + b$ इत्यादींना बहुपदी असे म्हणतात. लक्षात घ्या की, आपण आतापर्यंत घेतलेल्या बैजिक पदावलीत ऋणात्मक नसलेले पुर्णांक चलाचे सहगुणक आहेत.

खाली दिलेल्या पदावलीतील बहुपदीला माहित करु शकता का?

$$x^2, \quad x^{\frac{1}{2}} + 3, \quad 2x^2 - \frac{3}{x} + 5; \quad x^2 + xy + y^2$$

वरील पैकी $x^{\frac{1}{2}} + 3$ ही बहुपदी नाही कारण $x^{\frac{1}{2}}$ या पदात घातांक हा ऋणरहीत पुर्णांक नाही.(म्हणजे $\frac{1}{2}$) आणि $2x^2 - \frac{3}{x} + 5$ ही सुध्दा बहुपदी नाही कारण त्यास $2x^2 - 3x^{-1} + 5$ असेही लिहीता येते. जेथे दुसरे पद $(3x^{-1})$ यास घातांक ऋण संख्या (म्हणजेच -1)आहे. ज्या बैजिक पदावलीत असलेल्या घातांक फक्त ऋणरहीत पुर्णांक संख्या असते. त्यास बहुपदी असे म्हणतात.

विचार करा आणि चर्चा करा आणि लिहा

खालील पैकी कोणती पदावली बहुपदी आहे? कोणती नाही? कारणे द्या.

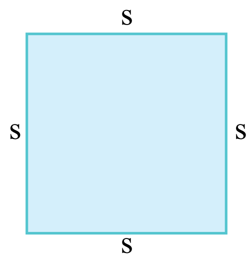
(i) $4x^2 + 5x - 2$ (ii) $y^2 - 8$ (iii) 5 (iv) $2x^2 + \frac{3}{x} - 5$

(v) $\sqrt{3}x^2 + 5y$ (vi) $\frac{1}{x+1}$ (vii) $\sqrt{x}$ (viii) $3\ xyz$

विविध रुपात असलेल्या बहुपदीचा अभ्यास करु या. या धड्यात शेषसिध्दांताच्या साहाय्याने आणि अवयवाच्या सिध्दांतानुसार त्यांचा बहुपदीच्या अवयवात झालेला उपयोगावरुन बहुपदीचे अवयव पाडणे शिकुन घेऊ या.

2.2 एकचलीय बहुपदी

प्रत्येक चलराशी एका चिन्हाने(अक्षर) दर्शविते.जी कोणतीही वास्तविक किंमत घेते. याची उजळणी करु. आपण x, y, z इत्यादी अक्षरांचा वापर चलास दर्शविण्यासाठी करतो.



जसे $2x, 3x, -x, \frac{3}{4}x$ .... पदावलीमध्ये सर्वात एकच चल x आहेत. ही पदावली (स्थिर) × (चलाचा काही घातांक) या रुपात आहे. आता समजा आपणास चौरसाची परिमीती काढायची आहे. आपण P = 4s हे सुत्र वापरतो.

येथे '4' ही स्थिरांक आणि 's' ही चल आहेत जी चौरसाची बाजु दर्शविते. विविध चौरसासाठी बाजु बदलत असते.

खालील तक्ता पहा.

चौरसाची बाजु (s)	परिमीती (4s)
4 से.मी.	P = 4 × 4 = 16 से.मी.
5 से.मी.	P = 4 × 5 = 20 से.मी.
10 से.मी.	P = 4 × 10 = 40 से.मी.

या पुर्ण संदर्भात स्थिरकांची किंमत 4 ही सारखीच म्हणजे दिलेल्या प्रश्नात स्थिरांकाची किंमत बदलत नाही. परंतु चलाची (s) किंमत बदलते.

समजा पदावलीला (स्थिरांक) (चलराशी) या रुपात लिहायचे असल्यास आणि आपणास स्थिरांक कोणता आहे हे नसल्यास आपण त्यास a, b, c ... इत्यादी लिहितो.

म्हणुन साधारणता ही पदावली$ax, by, cz, ...$ इत्यादी अशी असते. येथे a, b, c ... हे निश्चीत स्थिरांक आहेत. आणि इतर पदावली जसे $x^2, x^2 + 2x + 1,\ x^3 + 3x^2 - 4x + 5$. ही सर्व पदावली एकचलीय बहुपदी आहेत.

हे करा

- 'x' चल असलेली दोन बहुपदी लिहा.
- 'y' चल असलेली तिन बहुपदी लिहा.
- $2x^2 + 3xy + 5y^2$ ही बहुपदी एकचलीय आहे काय?
- निरनिराळ्या घन आकाराच्या क्षेत्रफळाचे आणि घनफळाची सुत्रे लिहा. त्यामधील चले आणि स्थिरांक काढा.

2.3 बहुपदीचा कोटी

बहुपदीतील प्रत्येक पद हे स्थिरांक आणि शुन्येतर पुर्णांकांचा घातांकाचा गुणाकार आहे. यालाच सहगुणक असे म्हणतात. पदाचा कोटी म्हणजे त्या चलातील घातांकाची बेरीज होय. आणि बहुपदीचा कोटी हा त्या पदातील चलांचा महत्तम घातांक होय.

खालील बहुपदीत पद, त्याचा सहगुणक आणि कोटी माहित करु.

(i) $3x^2 + 7x + 5$ (ii) $3x^2y^2 + 4xy + 7$

$3x^2 + 7x + 5$, या बहुपदीमध्ये $3x^2$, $7x$ आणि 5 ही पदावलीतील पदे आहेत. बहुपदीतील प्रत्येक पदास सहगुणक असतो. म्हणुन $3x^2 + 7x + 5$, मध्ये x^2 चा सहगुणक 3 आहे. x चा सहगुणक 7 आहे आणि x^0 चा सहगुणक 5 आहे (लक्षात ठेवा x^0=1)

तुम्हाला माहित आहे की, बहुपदीचा कोटी हा पदातील चलांचा महत्तम घातांक आहे.

दिलेल्या पदावलीत सर्व पदांमध्ये $3x^2$ या पदाचा घातांक मोठा आहे. म्हणुन अशा प्रकारे $3x^2 + 7x + 5$ चा कोटी '2' आहे.

आता, तुम्ही $3x^2y^3 + 4xy + 7$ चा कोटी माहित करु शकतो काय?

x^2y^3 चा सहगुणक 3 आहे आणि xy चा4 आहे. आणि x^0y^0 चा 7 आहे. $3x^2y^3$ या पदातील चलाच्या घातांकाची बेरीज $2 + 3 = 5$ आहे. ती दुसऱ्या पदांच्या घातांकाच्या बेरजेपेक्षा मोठा आहे. म्हणुन $3x^2y^3 + 4xy + 7$ चा बहुपदीचा कोटी 5 आहे.

आता स्थिरांकाचा कोटी काय आहे. विचार करा? स्थिरांकात चले नसल्यामुळे त्यास x^0 च्या गुणाकारासारखे लिहु शकतो. उदाहरणार्थ 5 चा कोटी शुन्य आहे. त्यास $5x^0$ असे लिहिता येते. कोटी 1, कोटी 2, किंवा कोटी 3 असलेल्या बहुपदी कशा दिसतात तुम्ही पाहिले.

कोणत्याही नैसर्गिक संख्या n साठी कोटी असलेली एकचलातील बहुपदी तुम्ही n लिहु शकता का? x एकचलीय n कोटी असणाऱ्या बहुपदीचे रुप

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ . \ . \ . + a_1x + a_0$$

येथे $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ स्थिरांक आहेत आणि $a_n \neq 0$.

विषेशता जर $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (म्हणजे सर्व सहगुणक शुन्य आहेत) आपणास बहुपदीचा शुन्य मिळतो ज्याला '0' ने दर्शवितात.

कोटी शुन्य म्हणु शकता का? याला घातांकाच्या रुपात न लिहिता आल्यामुळे त्याची व्याख्या करता येत नाही.

हे करा

1. खालील प्रत्येक बहुपदीचा कोटी लिहा.

   (i) $7x^3 + 5x^2 + 2x - 6$ (ii) $7 - x + 3x^2$

   (iii) $5p - \sqrt{3}$ (iv) 2 (v) $-5xy^2$

2. खालील प्रत्येक x^2 चा सहगुणक लिहा.

   (i) $15 - 3x + 2x^2$ (ii) $1 - x^2$ (iii) $\pi x^2 - 3x + 5$ (iv) $\sqrt{2}x^2 + 5x - 1$

खालील तक्त्याचे निरिक्षण करा आणि रिकाम्या जागा भरा.

(i) कोटीवरुन बहुपदीचे प्रकार

बहुपदीचा कोटी	बहुपदीचे नाव	उदाहरण
व्याख्या करता येत नाही	शुन्य बहुपदी	0
शुन्य	स्थिर बहुपदी	$-12; 5; \frac{3}{4}$ इत्यादी
1	....	$x - 12; -7x + 8; ax + b$ इत्यादी
2	वर्ग बहुपदी	....
3	घन बहुपदी	$3x^3 - 2x^2 + 5x + 7$

साधारणता बहुपदीचा कोटी 'n' असल्यास n वे कोटी असलेला बहुपदी म्हणतात.

(ii) पदांच्या एकुण संख्येवरुन बहुपदीचे प्रकार

शुन्येतर पदांची संख्या	बहुपदीचे नाव	उदाहरण	पदे
1	एकपदी	$-3x$	$-3x$
2	व्दिपदी	$3x + 5$	$3x,\ 5$
3	त्रिपदी	$2x^2 + 5x + 1$	....
3 पेक्षा जास्त	अनेक पदी	....	$3x^3,\ 2x^2,\ -7x,\ 5$

सुचना: एक बहुपदी अनेक पदी होऊ शकते परंतु प्रत्येक अनेकपदी बहुपदी होत नाही

एक चलअसणारी रेषीय बहुपदी एकपदी किंवा व्दिपदी होऊ शकते.

उदाहरण : $3x$ किंवा $2x - 5$

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

एक चलीय घन (कोटी3)बहुपदीत किती पदे असतात? उदाहरणे द्या.

जर बहुपदीतील चल x, असल्यास बहुपदीला $p(x)$, $q(x)$ किंवा $r(x)$ इत्यादीने दर्शवितो. उदाहरणात

$$p(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$q(x) = x^3 - 5x^2 + x - 7$$

$$r(y) = y^4 - 1$$

$$t(z) = z^2 + 5z + 3$$

बहुपदी मध्ये कितीही पदे असु शकते.

प्रयत्न करा.

1. x या चल असलेली बहुपदी दोन पदात लिहा.
2. p चल असलेल्या बहुपदीला 15 पदात कसे लिहिता?

आतापर्यंत बहुतेक आपण एकाच चलातील बहुपदीची चर्चा केली एका चलापेक्षा जास्त चलात सुध्दा बहुपदी असतात. उदाहरणात$x + y$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - y^2$ हे x अणि y या दोन चलातील बहुपदी आहे. अशारीतीने $x^2 + y^2 + z^2$, $x^3 + y^3 + z^3$ हे तिन चले असणारी बहुपदी आहेत. अशा बहुपदीना सविस्तरपणे नंतर शिकणार आहोत.

अभ्यास - 2.1

1. खाली दिलेल्या प्रत्येक बहुपदीची कोटी काढा.

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $x^2 + x - 5$ (iii) 5

(iv) $3x^6 + 6y^3 - 7$ (v) $4 - y^2$ (vi) $5t - \sqrt{3}$

2. खाली दिलेल्या पदावलीत एकचलीय बहुपदी कोणत्या आहेत आणि कोणत्या नाहीत? तुमच्या उत्तरासाठी कारणे द्या.

(i) $3x^2 - 2x + 5$ (ii) $x^2 + \sqrt{2}$ (iii) $p^2 - 3p + q$ (iv) $y + \frac{2}{y}$

(v) $5\sqrt{x} + x\sqrt{5}\ (x > 0)$ (vi) $x^{100} + y^{100}$

3. खालील प्रत्येक बहुपदीतील x^3 चा सहगुणक लिहा.

(i) $x^3 + x + 1$ (ii) $2 - x^3 + x^2$ (iii) $\sqrt{2}x^3 + 5$ (iv) $2x^3 + 5$

(v) $\frac{\pi}{2}x^3 + x$ (vi) $-\frac{2}{3}x^3$ (vii) $2x^2 + 5$ (viii) 4

4. खाली दिलेल्या पदावलींना रेषीय, वर्गीय आणि घन बहुपदी मध्ये वर्गीकरण करा.

(i) $5x^2 + x - 7$ (ii) $x - x^3$ (iii) $x^2 + x + 4$ (iv) $x - 1$

(v) $3p$ (vi) πr^2

5. खालील विधाने सत्य किंवा असत्य लिहा? तुमचे उत्तर सिध्द करा.

(i) व्दिपदीत बहुतेक दोन पदे असतात.
(ii) प्रत्येक बहुपदी ही व्दिपदी आहे.
(iii) व्दिपदीचा कोटी 3 असु शकतो.
(iv) शुन्य बहुपदीचा कोटी असतो.
(v) $x^2 + 2xy + y^2$ चा कोटी 2 आहे.
(vi) πr^2 ही एकपदी आहे.

6. कोटी 10 असणाऱ्या एकपदी आणि त्रीपदीची प्रत्येक एक उदाहरण द्या.

2.4(अ) बहुपदीचा शुन्य

- समजा बहुपदी $p(x) = x^2 + 5x + 4$.

$x = 1$ साठी $p(x)$ ची किंमत किती होते.

यासाठी आपणास $p(x)$ मध्ये प्रत्येक x च्या ऐवजी 1 मांडावे लागतो.

असे केले असता $p(1) = (1)^2 + 5(1) + 4$,

$= 1 + 5 + 4 = 10$ मिळते.

म्हणुन आपण म्हणु शकतो की, $x = 1$ असताना $p(x) = 10$ येते.

अशारीतीने $x = 0$ आणि $x = -1$ साठी $p(x)$ माहित करा

$$p(0) = (0)^2 + 5(0) + 4 \qquad p(-1) = (-1)^2 + 5(-1) + 4$$
$$= 0 + 0 + 4 \qquad\qquad = 1 - 5 + 4$$
$$= 4 \qquad\qquad = 0$$

$p(-4)$ ची किंमत काढु शकता काय?

- दुसरी बहुपदी घ्या.

$$s(y) = 4y^4 - 5y^3 - y^2 + 6$$
$$s(1) = 4(1)^4 - 5(1)^3 - (1)^2 + 6$$
$$= 4(1) - 5(1) - 1 + 6$$
$$= 4 - 5 - 1 + 6$$
$$= 10 - 6$$
$$= 4$$

$s(-1)$ ची किंमत काढु शकता का?

हे करा

खाली दिलेल्या प्रत्येक बहुपदीची चलाच्या निर्देशित किंमती वरुन किंमत काढा.

(i) $p(x) = 4x^2 - 3x + 7$ at $x = 1$

(ii) $q(y) = 2y^3 - 4y + \sqrt{11}$ at $y = 1$

(iii) $r(t) = 4t^4 + 3t^3 - t^2 + 6$ at $t = p,\ t \in R$

(iv) $s(z) = z^3 - 1$ at $z = 1$

(v) $p(x) = 3x^2 + 5x - 7$ at $x = 1$

(vi) $q(z) = 5z^3 - 4z + \sqrt{2}$ at $z = 2$

- अजुन एक बहुपदी घ्या $r(t) = t - 1$

$r(1)$ काय आहे $r(1) = 1 - 1 = 0$ आहे का?

$r(1) = 0$, असल्यास $r(t)$ या बहुपदीचा शुन्य 1 आहे. असे आपण म्हणुन शकतो.

साधारणता, $p(x)$ या बहुपदीचा शुन्य ही x ची किंमत आहे ज्यासाठी $p(x) = 0$.

या किंमतीला बहुपदी $p(x)$ चे मुळ सुध्दा म्हणतात.

$f(x) = x + 1$ या बहुपदीचा शुन्य काय आहे?

तुम्ही निरिक्षण केले असता, $x + 1 = 0$. बहुपदीचा शुन्य हा त्याला 0 शी समान केल्यास येतो. म्हणजे $x + 1 = 0$, यावरुन $x = -1$येते f याही (x) मधील बहुपदी असल्यास $f(x) = 0$ x मधील बहुपदीचे समीकरण म्हणतात.आपणास दिसुन येते की, वरील उदाहरणात -1 हे बहुपदी $f(x)$ चे मुळ आहे. म्हणुन आपण म्हणु शकतो की, $x + 1$ बहुपदीचा शुन्य -1 आहे किंवा $x + 1 = 0$ या बहुपदीस समीकरणाचे मुळ आहे.

- आता स्थिर बहुपदी 3 घ्या. याची शुन्य किंमत सांगु शकता का? नाही $3 = 3x^0$ च्या कोणत्याही वास्तविक किंमतीसाठी $3x^0$ येत नाही अशातऱ्हेने स्थिर बहुपदीला शुन्य किंमत नसते.

प्रयत्न करा

खालील बहुपदीची शुन्य किंमत माहित करा

1. $2x - 3$ 2. $x^2 - 5x + 6$
3. $x + 5$

उदाहरण-1: $p(x) = x + 2$. तर $p(1)$, $p(2)$, $p(-1)$ आणि $p(-2)$ ची किंमत काढा. यापैकी कोणत्या किमतीला बहुपदीची किंमत शुन्य येईल.

सोडवणुक: समजा $p(x) = x + 2$

x च्या ऐवजी 1 ठेवल्यास

$p(1) = 1 + 2 = 3$

x च्या ऐवजी 2 ठेवल्यास

$p(2) = 2 + 2 = 4$

x च्या ऐवजी -1 ठेवल्यास

$p(-1) = -1 + 2 = 1$

x च्या ऐवजी -2 ठेवल्यास

$p(-2) = -2 + 2 = 0$

म्हणुन $1, 2, -1$ हे $x + 2$ बहुपदीचे शुन्य नाहीत. परंतु -2 ही बहुपदीचा शुन्य आहे.

उदाहरण:2 $p(x) = 3x + 1$ या बहुपदीचा शुन्य माहित करा.

सोडवणुक: $p(x)$ चा शुन्य माहित करणे समीकरण सोडविल्यासारखे आहे.

$$p(x) = 0$$

म्हणजे
$$3x + 1 = 0$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

म्हणुन $-\frac{1}{3}$ हा $3x + 1$ बहुपदीचा शुन्य आहे.

उदाहरण-3: $2x - 1$ बहुपदीची शुन्य किंमत काढा.

सोडवणुक: $p(x)$ ची शुन्य किंमत काढणे आणि $p(x) = 0$ समीकरण सोडविणे सारखेच आहे.

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ (कसे?)}$$

$P\left(\frac{1}{2}\right)$ ची किंमत काढुन तपासुन पहा.

2.4(ब) एक चलराशीतील रेषीय बहुपदीचे शुन्य

आता जर $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$, रेषीय बहुपदी असेल तर $p(x)$ ची शुन्य किंमत कसे काढाल?

$p(x)$ बहुपदीची शुन्य किंमत माहित करणे आपण पाहिले असल्यामुळे आपणास $p(x) = 0$ समीकरण सोडविण्याची गरज आहे.

याचा अर्थ $ax + b = 0$, $a \neq 0$ म्हणुन $ax = -b$

म्हणजेच $x = \frac{-b}{a}$ म्हणुन $x = \frac{-b}{a}$ हा फक्त $p(x) = ax + b$ या बहुपदीचा शुन्य आहे म्हणजे एका चलातील रेषीय बहुपदीस एकच शुन्य किंमत असते.

हे करा

रिकाम्या जागा भरा

रेषीय बहुपदी	बहुपदीची शुन्य किंमत
$x + a$	$-a$
$x - a$	-------------
$ax + b$	-------------
$ax - b$	$\frac{b}{a}$

उदाहरण-4: $x^2 - 3x + 2$ या बहुपदीची शुन्य किंमत 2 आणि 1 आहे का पडताळा करुन पहा.

सोडवणुक: समजा $p(x) = x^2 - 3x + 2$

x च्या एवेजी 2 ठेवल्यास

$$p(2) = (2)^2 - 3(2) + 2$$
$$= 4 - 6 + 2 = 0$$

x च्या एवेजी 1 ठेवल्यास

$$p(1) = (1)^2 - 3(1) + 2$$
$$= 1 - 3 + 2$$
$$= 0$$

म्हणुन $x^2 - 3x + 2$ बहुपदीचे 2 आणि 1 हे दोन्ही शुन्य किंमती आहेत.

याच्या पडताळण्याची आणखी दुसरी पध्दत आहे का?

$x^2 - 3x + 2$ बहुपदीचा कोटी काय आहे? ही रेषीय बहुपदी आहे का? नाही, ही वर्ग बहुपदी आहे. म्हणुन वर्ग बहुपदीमध्ये दोन शुन्य किंमती असतात.

उदाहरण-5: जर $x^2 + 2x - a$. या बहुपदीची शुन्य किंमत 3 असल्यास a माहित करा?

सोडवणुक: समजा $p(x) = x^2 + 2x - a$

बहुपदीचा शुन्य 3 आहे, आपणास माहित आहे $p(3) = 0$.

$$x^2 + 2x - a = 0$$

$x = 3$ ठेवल्यास $(3)^2 + 2(3) - a = 0$

$$9 + 6 - a = 0$$
$$15 - a = 0$$
$$-a = -15$$

किंवा $a = 15$

विचार करा आणि चर्चा करा

1. $x^2 + 1$ यास शुन्य किंमत नाही का?
2. 'n' कोटी असल्यास बहुपदीच्या एकुण शुन्य किंमती कीती आहे तुम्ही सांगु शकता का?

अभ्यास - 2.2

1. $4x^2 - 5x + 3$ या बहुपदीची शुन्य किंमत काढा जेव्हा,

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = \frac{1}{2}$

2. खालील प्रत्येक बहुपदीसाठी $p(0)$, $p(1)$ आणि $p(2)$ ची किंमत काढा.

(i) $p(x) = x^2 - x + 1$ (ii) $p(y) = 2 + y + 2y^2 - y^3$

(iii) $p(z) = z^3$ (iv) $p(t) = (t-1)(t+1)$

(v) $p(x) = x^2 - 3x + 2$

3. खालील मध्ये प्रत्येक संदर्भात x च्या दिलेल्या किंमती बहुपदीच्या शुन्य किंमत होतात का नाही ? पडताळणी करा.

(i) $p(x) = 2x + 1; x = -\frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi; x = \frac{-3}{2}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1;\ x = \pm 1$ (iv) $p(x) = (x-1)(x+2);\ x = -1, -2$

(v) $p(y) = y^2;\ y = 0$ (vi) $p(x) = ax + b;\ x = -\frac{b}{a}$

(vii) $f(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $f(x) = 2x - 1, x = \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$

4. खाली दिलेल्या प्रत्येक संदर्भात बहुपदीचा शुन्य माहित करा.

(i) $f(x) = x + 2$ (ii) $f(x) = x - 2$ (iii) $f(x) = 2x + 3$

(iv) $f(x) = 2x - 3$ (v) $f(x) = x^2$ (vi) $f(x) = px,\ p \neq 0$

(vii) $f(x) = px + q,\ p \neq 0,\ p\ q$ या वास्तविक संख्या आहेत.

5. जर $p(x) = 2x^2 - 3x + 7a$ बहुपदीची शुन्य किंमत असल्यास a ची किंमत काढा.

6. जर $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$, बहुपदीची शुन्य किंमत 0 आणि 1 असल्यास a आणि b च्या किंमती काढा.

2.5 बहुपदीचा भागाकार करणे

खालील उदाहरणे पहा.

(i) 25 आणि 3 या दोन संख्या घ्या. 25 ला 3 ने भागा. आपणास भागाकार 8 आणि बाकी 1 येतो.

भाज्य = (भाजक × भागाकार) + बाकी

म्हणुन, $25 = (8 \times 3) + 1$

अशारितीने 20 ला 5 ने भागा आपणास $20 = (4 \times 5) + 0$ येतो.

येथे बाकी 0 आहे. या संदर्भात आपण म्हणु शकतो की, 5 हा 20 चा अवयव आहे. किंवा 20 हा 5 चा गुणक आहे.

जसे आपण एका संख्येला दुसऱ्या शुन्येत्तर संख्येने भाग देतो. आपण बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने सुध्दा भाग देऊ शकतो? चला पाहु या.

(ii) $3x^3 + x^2 + x$ या बहुपदीला x या एकपदीने भागाकार करा.

आपणास $(3x^3 + x^2 + x) \div x = \dfrac{3x^3}{x} + \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{x}{x}$

$$= 3x^2 + x + 1$$

वास्तविकपणे x हा $3x^3 + x^2 + x$ या प्रत्येक पदाचा सामान्य अवयव आहे. म्हणुन $3x^3 + x^2 + x$ यास $x(3x^2 + x + 1)$ असे लिहितो

$3x^3 + x^2 + x$ चे अवयव काय आहेत?

(iii) दुसऱ्या उदाहरणात $(2x^2 + x + 1) \div x$

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x+1 \\ \hline x & 2x^2 + x + 1 \\ & -2x^2 \\ \hline & \quad\; x + 1 \\ & \quad -x \\ \hline & \qquad 1 \\ \hline \end{array}$$

इथे $(2x^2 + x + 1) \div x = \dfrac{2x^2}{x} + \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x}$

$$= 2x + 1 + \frac{1}{x}$$

ही बहुपदी आहे का?

$\dfrac{1}{x}$ या पदास ऋण घातांक असल्यामुळे (म्हणजेच $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$)

$\therefore\; 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$ ही बहुपदी नाही.

आपण त्यास $(2x^2 + x + 1) = [x \times (2x + 1)] + 1$ असे लिहितो.

1 ला बाहेर काढले असता इतर बहुपदीला दोन बहुपदीच्या गुणाकाराच्या रुपात लिहिता येते.

इथे आपण म्हणु शकतो की, $(2x + 1)$ हा भागाकार x या भाजक आणि 1 हा बाकी आहे. आपण लक्षात ठेवले पाहिजे की, बाकी 0 नसल्यामुळे 'x' चा $2x^2 + x + 1$ चा अवयव हाते नाही

हे करा

1. $3y^3 + 2y^2 + y$ ला 'y' ने भागा आणि भागाकाराची वास्तविकता लिहा.
2. $4p^2 + 2p + 2$ ला '$2p$' ने भागा आणि भागाकाराची वास्तविकता लिहा.

उदाहरण-6: $3x^2 + x - 1$ ला $x + 1$ ने भागाकार करा.

सोडवणुक : समजा $p(x) = 3x^2 + x - 1$ आणि $q(x) = x + 1$.

$p(x)$ ला $q(x)$ ने भागा. मागील वर्गात शिकलेल्या भागाकाराच्या पध्दतीची आठवण करा.

पायरी :1 भागा $\dfrac{3x^2}{x} = 3x$, पहिले भागाकाराचे पद होते.

पायरी:2 गुणाकार करा $(x+1)\ 3x = 3x^2 + 3x$

$3x^2 + 3x$ ला $3x^2 + x$ मधुन वजा केल्यास $-2x$ येते.

पायरी :3 भागा $\frac{-2x}{x} = -2$, भागाकराचे दुसरे पद

पायरी :4 गुणा $(x + 1)(-2) = -2x - 2$,

त्यास $-2x - 1$ मधुन वजा केल्यास '1' येते.

पायरी:5 बाकी 1 आले. इथे थांबले पाहिजे.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x-2 \\ \hline
x+1 & 3x^2+x-1 \\
 & 3x^2+3x \\
 & -\quad - \\ \hline
 & -2x-1 \\
 & -2x-2 \\
 & +\quad + \\ \hline
 & +1 \\ \hline
\end{array}
$$

(स्थिरांकाला बहुपदीने का भागता येत नाही तुम्ही सांगु शकता का?)

यावरुन आपणास भागाकार $(3x - 2)$ आणि बाकी $(+1)$ येतो.

सुचना : भागाकाराची क्रिया पुर्ण होते जेव्हा बाकी 0 येते कींवा बाकीची कोटी हा भाजकाच्या कोटी पेक्षा लहान असतो.

या भागाकराच्या वास्तविकतेस

$3x^2 + x - 1 = (x + 1)(3x - 2) + 1$ असे लिहु शकतो.

म्हणजेच भाज्य = (भाजक × भागाकार) + बाकी

$p(x)$ मध्ये x च्या ऐवजी -1 ठेवुन पाहु या

$p(x) = 3x^2 + x - 1$

ची किंमत $p(-1)$

$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1$

$= 3(+1) + (-1) - 1 = 1.$

आढळुन आले की, $p(-1)$ किंमत बाकीच्या बरोबर आहे म्हणजे 1 आहे

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ ला $(x + 1)$ या भागाकाराने आलेली बाकी $p(-1)$ सारखीच राहते जेथे -1 हा $x + 1$ ची शुन्य किंमत म्हणजे $x = -1$ आहे

अजुन काही उदाहरणे घेऊ या.

उदाहरण-7: $2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ ला $(x - 1)$ ने भागाकार करा आणि 0 भागाकारास भाजकाशी पडताळा करुन पहा.

सोडवणुक: समजा $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$

पहिले पहा $2x^4$ हा x च्या किती पट आहेत.

$$\frac{2x^4}{x} = 2x^3$$

आता गुणा $(x - 1)(2x^3) = 2x^4 - 2x^3$

गुणा नंतर बाकींचे पहिले पद $-2x^3$ आहे. असेच करत जा.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^3-2x^2-2x-5 \\ \hline
x-1 & 2x^4-4x^3-3x-1 \\
 & 2x^4-2x^3 \\
 & -\quad + \\ \hline
 & -2x^3-3x-1 \\
 & -2x^3+2x^2 \\
 & +\quad - \\ \hline
 & -2x^2-3x-1 \\
 & -2x^2+2x \\
 & +\quad - \\ \hline
 & -5x-1 \\
 & -5x+5 \\
 & +\quad - \\ \hline
 & -6 \\ \hline
\end{array}
$$

इथे भागाकार $2x^3 - 2x^2 - 2x - 5$ आणि बाकी -6 आहे.

आता $(x - 1)$ बहुपदीची शुन्य 1 आहे.

$x = 1$, $f(x)$ मध्ये ठेवल्यास $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x - 1$

$$f(1) = 2(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$$
$$= 2(1) - 4(1) - 3(1) - 1$$
$$= 2 - 4 - 3 - 1$$
$$= -6$$

$(x - 1)$ च्या शुन्यावर बहुपदी $f(x)$ ची किंमत बाकी सारखी आहे का? वरील उदाहरणावरुन आपण सांगु शकतो का, वास्तविकता खालील सिध्दतांचे रुप आहे. त्यामुळे आपणास एकचल रेषीय समीकरणाने बहुपदीला वास्तविक भागाकार न करता बाकी येते.

शेष सिध्दांत

समजा $\boldsymbol{p(x)}$ ही एक किंवा त्यापेक्षा जास्त कोटी असलेली बहुपदी आहे. आणि '$\boldsymbol{a}$' ही कोणतीही वास्तविक संख्या असल्यास जर $\boldsymbol{p(x)}$ ही रेषीय बहुपदी $\boldsymbol{(x - a)}$ ने भागल्या गेली असता बाकी $\boldsymbol{p(a)}$ येते.

आता या सिध्दांताच्या सिध्दतेकडे पाहु या.

सिध्दता: समजा $p(x)$ ही एक किंवा त्यापेक्षा जास्त कोटी असलेली कोणतीही बहुपदी आहे. समजा जेव्हा $p(x)$ ही रेषीय बहुपदी $g(x) = (x - a)$ नी भागली जाते तेव्हा भागाकार $q(x)$ येते आणि बाकी $r(x)$ येते. दुसऱ्या शब्दात $p(x)$ आणि $g(x)$ अशा बहुपदी आहेत की, $p(x) \geq$ चा कोटी आणि $g(x)$ चा कोटी आणि $g(x) \neq 0$ तर आपणास $q(x)$ आणि $r(x)$ अशा रितीने येते की, जेथे $r(x) = 0$ किंवा $r(x) <$ च्या कोटी $g(x)$ चा कोटी

भागाकारावरुन

$$p(x) = g(x) \,.\, q(x) + r(x)$$

$$\therefore\ p(x) = (x - a) \,.\, q(x) + r(x) \qquad \because\ g(x) = (x - a)$$

$(x - a)$ चा कोटी आणि $r(x)$ चा केाटी हा $(x - a)$ च्या कोटीच्या लहान असल्यामुळे

$\therefore\ r(x)$ चा कोटी $= 0$ म्हणजे $r(x)$ हा स्थिरांक K आहे.

$r(x) = \mathrm{K}$ x,च्या प्रत्येक वास्तविक किंमती साठी

म्हणुन

$$p(x) = (x - a)\ q(x) + \mathrm{K}$$

जर $x = a$, तर $p(a) = (a - a)\ q(a) + \mathrm{K}$

$$= 0 + \mathrm{K}$$
$$= \mathrm{K}$$

हे सिध्द झाले.

बहुपदीने बहुपदीला वास्तविक भागाकार न करता या पध्दीतीचा उपयोग करुन बाकी माहित करु शकतो.

उदाहरण-8: जेव्हा $x^3 + 1$ ला $(x + 1)$ नी भागता बाकी माहित करा.

सोडवणुक: येथे $p(x) = x^3 + 1$

$x + 1$ रेषीय बहुपदीचा शुन्य -1 आहे. $[x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1]$

म्हणुन x च्या ऐवजी -1 ठेवल्यास

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3 + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

म्हणुन शेष सिध्दांतानुसार आपणास माहित होते की, $(x^3 + 1)$ ला $(x + 1)$ ने भागले असता बाकी 0 येते.

यास तुम्ही वास्तविक भागाकाराने तपासुन पाहु शकता. $x^3 + 1$ ला $x + 1$ भागा

$(x + 1)$ हा $(x^3 + 1)$ चा अवयव आहे तुम्ही सांगु शकता का?

उदाहरण-9: $(x - 2)$ हा $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ चा अवयव आहे का? तपासणी करा.

सोडवणुक: समजा $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$

रेषीय बहुपदी $(x - 2)$ हा दिलेल्या बहुपदीचा अवयव आहे हे

तपासणीसाठी x, च्या ऐवजी $(x - 2)$ चा शुन्य म्हणजे $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ घेणे.

$$\begin{aligned} p(2) &= (2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 4 \\ &= 8 - 2(4) - 10 + 4 \\ &= 8 - 8 - 10 + 4 \\ &= - 6. \end{aligned}$$

बाकी शुन्य नसल्यामुळे $(x - 2)$ ही बहुपदी $x^3 - 2x^2 - 5x + 4$ चा बहुपदीचा अवयतव नाही

उदाहरण-10: $p(y) = 4y^3 + 4y^2 - y - 1$ ही बहुपदी $(2y + 1)$ चा गुणक आहे का सांगा.

सोडवणुक: तुम्हाला माहित आहे $p(y)$ हा $(2y + 1)$ चा गुणक होते. जर फक्त $(2y + 1)$ ही $p(y)$ ला पुर्णपणे भागल्यास

पहिल्यांदा आपण $2y + 1$ भाजकाचा शुन्य काढु म्हणजे $y = \frac{-1}{2}$,

y च्या ऐवजी $\frac{-1}{2}$ ठेवले असता $p(y)$

$$p\left(\frac{-1}{2}\right)=4\left(\frac{-1}{2}\right)^3+4\left(\frac{-1}{2}\right)^2-\left(\frac{-1}{2}\right)-1$$

$$=4\left(\frac{-1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}-1$$

$$=\frac{-1}{2}+1+\frac{1}{2}-1$$

$$=0$$

म्हणुन $(2y+1)$ हा $p(y)$ चा अवयव होतो. म्हणजे $p(y)$ हा $(2y+1)$ चा गुणक होतो.

उदाहरण-11: ax^3+3x^2-13 आणि $2x^3-5x+a$ या बहुपदीला $(x-2)$ नी भागल्यास बाकी सारखे राहते. तर a ची किंमत काढा.

सोडवणुक: समजा $p(x)=ax^3+3x^2-13$ आणि $q(x)=2x^3-5x+a$

$\because$ $p(x)$ आणि $q(x)$ ला $x-2$ ने भागले असता बाकी सारखी राहते.

$\therefore\ p(2)=q(2)$

$$a(2)^3+3(2)^2-13=2(2)^3-5(2)+a$$

$$8a+12-13=16-10+a$$

$$8a-1=a+6$$

$$8a-a=6+1$$

$$7a=7$$

$$a=1$$

अभ्यास - 2.3

1. x^3+3x^2+3x+1 ला खालील रेषीय बहुपदीने भागले असता बाकी माहित करा.

   (i) $x+1$ (ii) $x-\frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x+\pi$

   (v) $5+2x$

2. x^3-px^2+6x-p ला $x-p$ नी भागले असता बाकी माहित करा.

3. $2x^2 - 3x + 5$ ला $2x - 3$ भागल्यास बाकी किती येते काढा. ते बहुपदीला पुर्णपणे भागते का? कारण सांगा.

4. $9x^3 - 3x^2 + x - 5$ ला $x - \frac{2}{3}$ ने भाग दिला असता बाकी काढा.

5. जर $2x^3 + ax^2 + 3x - 5$ आणि $x^3 + x^2 - 4x + a$ ला $x - 2$ ने भागले असता बाकी सारखी येते, तर a ची किंमत काढा.

6. जर $x^3 + ax^2 + 5$ आणि $x^3 - 2x^2 + a$ ला $(x + 2)$ नेभागल्यास बाकी सारखी येते तर a ची किंमत काढा.

7. जर $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ ला $g(x) = x - 2$ ने भागले असता बाकी काय राहते आणि आलेल्या उत्तराची वास्तविक भागाकाराने पडताळणी करुन पहा.

8. जर $p(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 3$ ला $g(x) = 1 - 2x$ ने भाग दिल्या असता, बाकी काय येते उत्तराची भागाकाराने पडताळणी करा.

9. जर $2x^3 + 3x^2 + ax + b$ ला $(x - 2)$ ने भागले असता बाकी 2 आणि $(x + 2)$ भागले असता बाकी -2 तर a आणि b च्या किंमती काढा,

2.6 बहुपदीचे अवयव पाडणे

आपण आधिच अभ्यास केला कि $q(x)$ ही बहुपदी $p(x)$ या बहुपदीने पुर्णपणे भागल्या गेली असे म्हणतो जर बाकी शुन्य असेल तर या संदर्भात $q(x)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे.
उदाहरणार्थ जेव्हा $p(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$ ला $g(x) = 2x + 1$ ने भागले असता तर बाकी शुन्य आल्यास त्याची पडताळणी करा.

तर $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = q(x)\ (2x + 1) + 0$

म्हणुन $p(x) = q(x)\ (2x + 1)$

म्हणुन $g(x) = 2x + 1$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे.

शेषसिध्दतांच्या मदतीने दिलेल्या बहुपदीचे अवयव काढणारी पध्दत तुम्ही सांगु शकता का?

अवयव पध्दती : जर $p(x)$ ही कोटी $n \geq 1$ असलेल्या आणि 'a' ही वास्तविक संख्या असलेली बहुपदी असेल तर (i) $x - a$ हा $p(x)$, चा घटक होते जर $p(a) =$ 0 (ii) आणि त्या विरुध्द जर $(x - a)$ हा $p(x)$ बहुपदीचा अवयव असल्यास $p(a) = 0$.
चला या सिध्दतेला पाहुया.

सिध्दता: शेष सिध्दतांवरुन

$p(x) = (x - a)\ q(x) + p(a)$

(i) जर $p(a) = 0$, तर $p(x) = (x - a)\ q(x) + 0.$

$= (x - a)\ q(x)$

$(x-a)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे हे दर्शविते.

म्हणुन हे सिध्द झाले.

$(x-a)$ हा $p(x)$ चा अवयव असल्यामुळे $p(x) = (x-a)\,q(x)$ काही बहुपदी $q(x)$ साठी $\therefore\ p(a) = (a-a)\,q(a)$

$= 0$

$\therefore$ म्हणुन $p(a) = 0$ जर $(x-a)$ $p(x)$ चा अवयव आहे.

चला काही उदाहरणे घेऊ या.

समजा $p(x)$=ax^3+bx^2+cx+d ($a \neq 0$) आणि $(x-1)$हा $p(x)$ $\Rightarrow$ p(1) = 0 $\Rightarrow$ a+b+c+d=0 चा अवयव आहे.म्हणजेच एक बहुपदीच्या सहगुणकांची बेरीज ही शुन्य असेल तर $(x-1)$ अवयव असतो.

समान

उदाहरण-12: $x+2$ हा x^3+2x^2+3x+6 चा अवयव आहे का परिक्षण करा.

सोडवणुक: समजा $p(x) = x^3+2x^2+3x+6$ आणि $g(x) = x+2$

$g(x)$ ची शुन्य किंमत -2 आहे.

तर $p(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + 3(-2) + 6$

$= -8 + 2(4) - 6 + 6$

$= -8 + 8 - 6 + 6$

$= 0$

या अवयव पध्दतीवरुन $x+2$ हा x^3+2x^2+3x+6 चा अवयव आहे.

समजा $p(x)$=ax^3+bx^2+cx+d ($a \neq 0$) आणि $(x+1)$हा $p(x)$ $\Rightarrow$ p(1) = 0 $\Rightarrow$ a+b+c+d=0 चा अवयव आहे.म्हणजेच एक बहुपदीच्या सहगुणकांची बेरीज ही समान असेल तर $(x+1)$ बहुपदीचा अवयव असतो.

उदाहरण-13: जर $2x-3$ हा $2x^3-9x^2+x+K$ चा अवयव असल्यास K ची किंमत काढा.

सोडवणुक : $(2x-3)$ हा $p(x) = 2x^3-9x^2+x+K$ चा अवयव आहे.

जर $2x-3=0$ तर $x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ $(2x-3)$ ची शुन्य किंवा $\frac{3}{2}$ आहे.

जर $(2x-3)$ हा$p(x)$ चा अवयव असल्यास $p\left(\frac{3}{2}\right)=0$

$p(x) = 2x^3 - 9x^2 + x + K,$

$$\Rightarrow p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + K = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{27}{8}\right) - 9\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} + K = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{3}{2} + K = 0\right) \times 4$$

$27 - 81 + 6 + 4K = 0$

$$-48 + 4K = 0$$
$$4K = 48$$
म्हणून $\quad K = 12$

उदाहरण-14: $(x - 1)$ हा $x^{10} - 1$ चा आणि $x^{11} - 1$ चा सुध्दा अवयव आहे.

सोडवणुक: समजा $p(x) = x^{10} - 1$ आणि $g(x) = x^{11} - 1$

$(x - 1)$ हा $p(x)$ आणि $g(x)$ चाअवयव आहे हे दाखविण्यासाठी $p(1) = 0$ आणि $g(1) = 0$ दाखविणे पुरेसे आहे.

आता

$p(x) = x^{10} - 1$ आणि $g(x) = x^{11} - 1$

$p(1) = (1)^{10} - 1$ आणि $g(1) = (1)^{11} - 1$

$= 1 - 1 \qquad = 1 - 1$

$= 0 \qquad = 0$

अवयव पध्दतीनुसार

प्रयत्न करा

$(x - 1)$ हा $x^n - 1$चा अवयव आहे सिध्द करा.

$(x - 1)$हा $p(x)$ आणि $g(x)$ चा अवयव आहे. आता आपण ax^2+bx+c($a \neq 0$ आणि a, b, c स्थिर संख्या आहेत) अवयव पाडण्याचा प्रयत्न करु या.

समजा त्याचे अवयव $(px + q)$ आणि $(rx + s)$.

तर $ax^2 + bx + c = (px + q)\ (rx + s)$

$$= prx^2 + (ps + qr)x + qs$$

x^2, x आणि स्थिरांकाच्या सहगुणकाची तुलना करुन

आपणास $\quad a = pr$

$$b = ps + qr$$

$$c = qs$$

यावरुन दिसुन येते की, b ही ps आणि qr ची बेरीज आहे.

ज्यांना गुणाकार $(ps)\ (qr) = (pr)(qs)$

$$= ac$$

म्हणून $ax^2 + bx + c$ चे अवयव पाडण्यासाठी b ला दोन संख्येच्या बेरजेच्या रुपात लिहिले पाहिजे ज्यांचा गुणाकार ac.आहे

उदाहरण-15: $3x^2 + 11x + 6$ चे अवयव काढा.

सोडवणुक: आपण p आणि q दोन संख्या अशाप्रकारे माहित करु की, $p + q = 11$ आणि $pq = 3 \times 6 = 18$, नंतर आपणास अवयव येते.

म्हणुन 18 च्या अवयवाची जोड्या पाहुन

(1, 18), (2, 9), (3, 6) पैकी 2 आणि 9 ही $p + q = 11$ या समीकरणाचे समाधान करते.

म्हुणन $3x^2 + 11x + 6 \quad = 3x^2 + 2x + 9x + 6$

$= x(3x + 2) + 3(3x + 2)$

$= (3x + 2)\ (x + 3).$

हे करा

खालील अवयव पाडा

1. $6x^2 + 19x + 15$ 2. $10m^2 - 31m - 132$ 3. $12x^2 + 11x + 2$

आता एक उदाहरण घ्या.

उदाहरण-16: $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ ला $x^2 - 3x + 2$ ने भाग जातो किंवा नाही पडताळुन पहा. अवयव पध्दतीचा मदतीने तुम्ही पडताळणी कसे कराल?

सोडवणुक: भाजक ही रेषीय बहुपदी नाही ही वर्ग बहुपदी आहे. वर्ग बहुपदीचे अवयव पाडतांना मधल्या पदाचे भाग करुन अवयव पाडणे तुम्ही शिकलात.

$x^2 - 3x + 2 \quad = x^2 - 2x - x + 2$

$= x(x - 2) - 1(x - 2)$

$= (x - 2)\ (x - 1).$

$x^2 - 3x + 2$ हा $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$, या बहुपदीचा अवयव आहे. हे दाखविण्यासाठी आपणास $(x - 2)$ आणि $(x - 1)$ हे $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$.

समजा $\quad p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$

तर $\quad p(2) = 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2$

$= 2(16) - 6(8) + 3(4) + 6 - 2$

$= 32 - 48 + 12 + 6 - 2$

$= 50 - 50$

$= 0$

$p(2) = 0$, $(x - 2)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे.

तर $p(1) = 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2$

$= 2(1) - 6(1) + 3(1) + 3 - 2$

$= 2 - 6 + 3 + 3 - 2$

$= 8 - 8$

$= 0$

जसे $p(1) = 0$, $(x - 1)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे.

$(x - 2)$ आणि $(x - 1)$ हे दोन्ही $p(x)$ चे अवयव असल्यामुळे $x^2 - 3x + 2$ चा गुणाकार हा $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ चा अवयव होतो.

उदाहरण-17: $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$ चे अवयव पाडा.

सोडवणुक: समजा $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

सरावाने आपणास $p(1) = 0$. येते (पडताळा करा)

म्हणुन $(x - 1)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे.

जेव्हा आपण $p(x)$ ला $(x - 1)$ ने भागतो आपणास $x^2 - 22x + 120$ येते.

- $(x - y) \mid (x^n - y^n)$, सर्वांसाठी $n \in N$
- $(x + y) \mid (x^n - y^n)$, जिथे n समसंख्या
- $(x + y) \mid (x^n + y^n)$, जिथे n is विषमसंख्या
- $(x - y) \nmid (x^n + y^n)$, सर्वांसाठी $n \in N$

हे करण्याची पर्यायी पध्दत

$x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1)$ (का?)

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$

आता $x^2 - 22x + 120$ ही वर्ग बहुपदी आहे आणि त्याचे अवयव मधल्या पदाचे भाग पाडुन माहित करतो.

$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$

$= x(x - 12) - 10(x - 12)$

$= (x - 12)(x - 10)$

म्हणुन $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$.

अभ्यास - 2.4

1. खालील बहुपदीमधील कोणत्या बहुपदीचा $(x+1)$ हा अवयव आहे निश्चीत करा.
   (i) $x^3 - x^2 - x + 1$ (ii) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
   (iii) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (3 - \sqrt{3})\, x + \sqrt{3}$
2. खालील संदर्भात $g(x)$ हा $f(x)$ चा अवयव आहे का नाही हे अवयव पध्दतीचा उपयोगाने निश्चित करा.
   (i) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 5x - 1, \ g(x) = x + 1$
   (ii) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \ g(x) = x + 1$
   (iii) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, \ g(x) = x - 2$
   (iv) $f(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12, \ g(x) = 3x - 2$
   (v) $f(x) = 4x^3 + 20x^2 + 33x + 18, \ g(x) = 2x + 3$
3. सिध्द करा $(x - 2)$, $(x + 3)$ आणि $(x - 4)$ हे $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ चे अवयव आहे.
4. सिध्द करा. $(x + 4)$, $(x - 3)$ आणि $(x - 7)$ हे $x^3 - 6x^2 - 19x + 84$ चे अवयव आहे.
5. जर $(x - 2)$ आणि $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ हे दोन $px^2 + 5x + r$ चे अवयव असल्यास सिध्द करा

   $p = r$.
6. जर $(x^2 - 1)$ हा $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, चा अवयव असल्यास सिध्द करा. $a + c + e = b + d = 0$
7. अवयव पाडा (i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$
   (iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $y^3 + y^2 - y - 1$
8. जर $ax^2 + bx + c$ आणि $bx^2 + ax + c$ चा $x + 1$ हा सामान्य अवयव असल्यास सिध्द करा $c = 0$ आणि $a = b$.
9. जर $x^2 - x - 6$ आणि $x^2 + 3x - 18$ चा सामान्य अवयव $(x - a)$असल्यास a ची किंमत काढा.
10. जर $(y - 3)$ हा $y^3 - 2y^2 - 9y + 18$ चा अवयव आहे तर इतर दोन अवयव काढा.

2.6 बैजिक समानता:

बैजिक समानता हे बैजिक समीकरण आहे. जे त्यामधील येणाऱ्या चलाच्या सर्व किंमतीसाठी सत्य ठरते. मागील वर्गात तुम्ही या बैजिक समानेतबद्दल शिकलात .

समानता I : $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

समानता II : $(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$

समानता III : $(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$

समानता IV : $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab.$

भुमीतीय सिध्दता:

समानता $(x - y)^2$ साठी

पायरी-1 x ची बाजु असलेला चौरस काढा

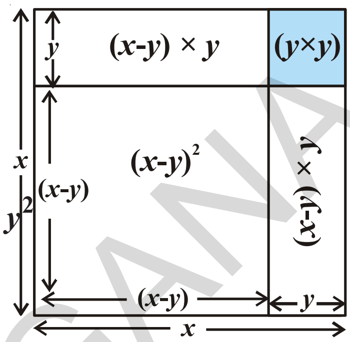
पायरी-II लांबी y ला x मधुन वजा करा.

पायरी-III $(x - y)^2$ ची किंमत काढा.

$= x^2 - [(x - y)\,y + (x - y)\,y + y^2]$

$= x^2 - xy + y^2 - xy + y^2 - y^2$

$= x^2 - 2xy + y^2$



प्रयत्न करा

इतर समानतेसाठी भुमितीय आकृत्या काढण्याचा प्रयत्न करा.

(i) $(x+y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ (ii) $(x+y)(x-y) \equiv x^2 - y^2$

(iii) $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

हे करा

योग्य समानतेचा वापर करुन खालील गुणाकार करा.

(i) $(x + 5)(x + 5)$ (ii) $(p - 3)(p + 3)$ (iii) $(y - 1)(y - 1)$

(iv) $(t + 2)(t + 4)$ (v) 102×98

बैजिक राशीचे अवयव पाडण्यासाठी समानतेचा उपयोग होतो. काही उदारहणे पाहु या.

उदाहरण-18: अवयव पाडा

(i) $x^2 + 5x + 4$ (ii) $9x^2 - 25$

(iii) $25a^2 + 40ab + 16b^2$ (iv) $49x^2 - 112xy + 64y^2$

सोडवणुक:

(i) येथे $x^2 + 5x + 4 = x^2 + (4 + 1)x + (4)(1)$

याची तुलना $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$ च्या

समानतेशी केली तर आपणास $(x + 4)(x + 1)$ येते.

(ii) $9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2$

आता याची तुलना समानता III, $x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$, शी केली असता

$\therefore 9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5)$.आपणास येते.

(iii) येथे तुम्ही पाहु शकता की,

$25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a)^2 + 2(5a)(4b) + (4b)^2$

या बैजिक राशीची तुलना $x^2 + 2xy + y^2$,शी केल्यास आपणास दिसुन येते की, $x = 5a$ आणि $y = 4b$

समानता I चा वापर करुन $\mathbf{(x+y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2}$

आपणास $25a^2 + 40ab + 16b^2 = (5a + 4b)^2$

$= (5a + 4b)(5a + 4b)$ येते.

(iv) येथे $49x^2 - 112xy + 64y^2$ आपणा पाहातो की,

$49x^2 = (7x)^2, \quad 64y^2 = (8y)^2$ आणि

$112\,xy = 2(7x)(8y)$

अशाप्रकारे समानता II $\mathbf{(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2}$, शी तुलना केल्यास आपणास $49x^2 - 112xy + 64y^2 = (7x)^2 - 2(7x)(8y) + (8y)^2$

$= (7x - 8y)^2$

$= (7x - 8y)(7x - 8y)$.येते.

हे करा

योग्य समानतेचा वापर करुन खालील अवयव पाडा.

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{y^2}{9}$

(iii) $t^2 - 2t + 1$ (iv) $x^2 + 3x + 2$

आतापर्यंत सर्व समानतेचा समावेश व्दिपदीत होता आता आपण समानता I चा विस्तार करुन त्रिपदी $x + y + z$ पर्यत वाढवु. आपण $(x + y + z)^2$ माहित केले पाहिजे.

समजा $x + y = t$, तर $(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + z^2$ (समानता 1 नुसार)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ ('t' ची किंमत ठेवल्या)

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$

पदांना क्रमाने लिहिल्यास $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ मिळतो.

पर्यायी पध्दत

तुम्ही $(x+y+z)^2$ ची किंमत पदांचे गट पाडुन सुध्दा काढु शकता.

$[(x+y)+z]^2 = (x+y)^2 + 2(x+y)(z) + (z)^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ [समानता (1)वरुन]

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

इतर कोणत्या दुसऱ्या पध्दतीने गट पाडुन विस्तार करु शकता का? तुम्हाला सारखेच उत्तर येते का?

समानता: V : $(x+y+z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

उदाहरण-19: समानतेचा वापर करुन $(2a+3b+5)^2$ चा विस्तार करा.

सोडवणुक: दिलेल्या समीकरणाची $(x+y+z)^2$ या बैजिक राशीशी तुलना

केल्यास आपणास $x = 2a$, $y = 3b$ आणि $z = 5$ मिळते

म्हणुन समानता V चा उपयोग केल्यास आपणास

$(2a+3b+5)^2 = (2a)^2 + (3b)^2 + (5)^2 + 2(2a)(3b) + 2(3b)(5) + 2(5)(2a)$

$= 4a^2 + 9b^2 + 25 + 12ab + 30b + 20a$.येते.

उदाहरण-20: $(5x-y+z)(5x-y+z)$ चा गुणाकार काढा

सोडवणुक: येथे $(5x-y+z)(5x-y+z) = (5x-y+z)^2$

$= [5x+(-y)+z]^2$

म्हणुन समानता V वरुन $(x+y+z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$, we get

$(5x+(-y)+z)^2 = (5x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(5x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(5x)$

$= 25x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 2yz + 10zx.$

उदाहरण-21: $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$ चे अवयव पाडा.

सोडवणुक: आपणास माहित आहे.

$4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy - 30yz + 20zx$

$= [(2x)^2 + (-3y)^2 + (5z)^2 + 2(2x)(-3y) + 2(-3y)(5z) + 2(5z)(2x)]$

समानता V शी तुलना केल्यास

$(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$, मिळते.

$$= (2x - 3y + 5z)^2$$

$$= (2x - 3y + 5z)\,(2x - 3y + 5z).$$

हे करा

(i) $(p + 2q + r)^2$ विस्ताराच्या रुपात लिहा

(ii) समानतेचा वापर करुन $(4x - 2y - 3z)^2$ चा विस्तार करा.

(iii) समानतेचा उपयोग करुन $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 2bc - 4ca$ चा विस्तार करा.

आता पर्यंत आपण कोटी दोन असलेल्या पदाच्या समानते बद्दल शिकलोत. आता समानता I वरुन $(x + y)^3$ माहित करु.

आपणास

$$\begin{aligned}
(x + y)^3 &= (x + y)^2\,(x + y) \\
&= (x^2 + 2xy + y^2)\,(x + y) \\
&= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2) \\
&= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
&= x^3 + 3xy\,(x + y) + y^3 \\
&= x^3 + y^3 + 3xy(x + y).
\end{aligned}$$

अशाप्रकारे आपणास खालील समानता येतात.

समानता VI : $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$.

प्रयत्न करा.

प्रत्यक्ष गुणाकार न करता $(x - y)^3$ माहित करा. प्रत्यक्ष गुणाकारासोबत पडताळणी करा.

दुसरी समानता मिळते.

समसनता: VII : $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy\,(x - y)$.

$$\equiv x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

या समानतेचा उपयोग केलेली काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण-22: खालील घनास विस्तारणाच्या रुपात लिहा.

(i) $(2a+3b)^3$ (ii) $(2p-5)^3$

सोडवणुक: (i) दिलेली बैजिक राशीची $(x+y)^3$ शी तुलना करा, आपणास $x = 2a$आणि $y = 3b$

म्हणुन समानता VI प्रमाणे

$$\begin{aligned}(2a+3b)^3 &= (2a)^3 + (3b)^3 + 3(2a)(3b)\,(2a+3b)\\ &= 8a^3 + 27b^3 + 18ab\,(2a+3b)\\ &= 8a^3 + 27b^3 + 36a^2b + 54\,ab^2\\ &= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.\end{aligned}$$

(ii) दिलेली बैजिक राशीची $(x-y)^3$ शी तुलना केल्यास आपणास $x = 2p$ आणि $y = 5$ येते.

म्हुणन समातनता VII प्रमाणे

$$\begin{aligned}(2p-5)^3 &= (2p)^3 - (5)^3 - 3(2p)(5)\,(2p-5)\\ &= 8p^3 - 125 - 30p\,(2p-5)\\ &= 8p^3 - 125 - 60p^2 + 150p\\ &= 8p^3 - 60p^2 + 150p - 125.\end{aligned}$$

उदाहरण-23: योग्य समानतेचा उपयोग करुन खालील किंमती काढा.

(i) $(103)^3$ (ii) $(99)^3$

सोडवणुक (i) आपणास

$(103)^3 = (100+3)^3$

$(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ शी तुलना केल्यास आपणास

$$\begin{aligned}&= (100)^3 + (3)^3 + 3(100)\,(3)\,(100+3)\\ &= 1000000 + 27 + 900(103)\\ &= 1000000 + 27 + 92700\\ &= 1092727\end{aligned}$$ येते.

(ii) आपणास $(99)^3 = (100-1)^3$

$(x-y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$ शी तुलना केल्यास आपणास

$$\begin{aligned}&= (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)\,(100-1)\\ &= 1000000 - 1 - 300\,(99)\end{aligned}$$ येते.

$= 1000000 - 1 - 29700$

$= 970299.$

उदाहरण-24: $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x+3y)^3$ चे अवयव पाडा.

सोडवणुक: दिलेली बैजिक राशी अशी लिहु शकतो.

$$8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2\,(3y) + 3(2x)\,(3y)^2 + (3y)^3$$

$(x + y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ समानता VI शी तुलना केली असता.

आपणास $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 = (2x + 3y)^3$

$= (2x + 3y)\,(2x + 3y)\,(2x + 3y)$ येते.

हे करा

1. समानतेचा वापर करुन $(x + 1)^3$ चा विस्तार करा.
2. $(3m - 2n)^3$ ची किंमत काढा.
3. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ चे अवयव पाडा.

समजा $(x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

याचा विस्ताराने आपणास गुणाकार

$$= x(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + y(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$+ z(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= x^3 + \cancel{xy^2} + \cancel{xz^2} - \cancel{x^2y} - xyz - \cancel{x^2z} + \cancel{x^2y} + y^3 + \cancel{yz^2} - \cancel{xy^2} - \cancel{y^2z} - xyz + \cancel{x^2z}$$
$$+ \cancel{y^2z} + z^3 - xyz - \cancel{yz^2} - \cancel{xz^2}$$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (संक्षिप्त केल्यास) येते.

अशारितीने

समानता VIII : $(x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

उदाहरण-25: $(2a + b + c)\,(4a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - bc - 2ca)$ गुणाकार काढा.

सोडवणुक: या गुणाकारास असे लिहिता येते.

$= (2a + b + c)\,[(2a)^2 + b^2 + c^2 - (2a)(b) - (b)(c) - (c)\,(2a)]$

समानता VIII शी तुलना केल्यास

$(x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (2a)^3 + (b)^3 + (c)^3 - 3(2a)\,(b)\,(c)$

$= 8a^3 + b^3 + c^3 - 6abc$

उदाहरण-26: $a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc$ चे अवयव पाडा.

सोडवणुक: दिलेली बैजिक राशीला असे लिहिल्यास

$a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc = (a)^3 + (-2b)^3 + (-4c)^3 - 3(a)(-2b)(-4c)$

समानता VIII, शी तुलना केल्यास

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

आपणास अवयव

$= (a - 2b - 4c)\,[(a)^2 + (-2b)^2 + (-4c)^2 - (a)(-2b) - (-2b)(-4c) - (-4c)(a)]$

$= (a - 2b - 4c)\,(a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 2ab - 8bc + 4ca)$.येतात.

हे करा

1. $(a - b - c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc - ca)$ चा गुणाकार प्रत्यक्ष गुणाकार न करता काढा.
2. $27a^3 + b^3 + 8c^3 - 18abc$ चा गुणाकार समानतेचा वापर करुन करा.

उदाहरण-27: $2x^2 + 9x - 5$ क्षेत्रफळ असणाऱ्या आयताच्या लांबी आणि रुंदीच्या संभाव्य किंमती द्या.

सोडवणुक: समजा l, b या आयताच्या लांबी आणि रुंदी आहेत.

आयताचे क्षेत्रफळ $= 2x^2 + 9x - 5$

$lb = 2x^2 + 9x - 5$

$= 2x^2 + 10x - x - 5$

$= 2x(x + 5) - 1(x + 5)$

$= (x + 5)\,(2x - 1)$

$\therefore$ लांबी $= (x + 5)$

रुंदी $= (2x - 1)$

समजा $x = 1,\ l = 6,\ b = 1$

$x = 2,\ l = 7,\ b = 3$

$x = 3,\ l = 8,\ b = 5$

....

....

तुम्ही अजुन काही किंमती काढु शकता का?

अभ्यास - 2.5

1. खालील गुणाकार माहित करण्यासाठी योग्य समानतेचा वापर करा.

(i) $(x + 5)(x + 2)$ (ii) $(x - 5)(x - 5)$ (iii) $(3x + 2)(3x - 2)$

(iv) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ (v) $(1 + x)(1 + x)$

2. खालील गुणाकाराची किंमत प्रत्यक्ष गुणाकार न करता किंमती काढा.

(i) 101×99 (ii) 999×999 (iii) $50\frac{1}{2} \times 49\frac{1}{2}$

(iv) 501×501 (v) 30.5×29.5

3. योग्य समानतेचा उपयोग करुन खालील अवयव पाडा.

(i) $16x^2 + 24xy + 9y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$

(iii) $4x^2 - \frac{y^2}{25}$ (iv) $18a^2 - 50$

(v) $x^2 + 5x + 6$ (vi) $3p^2 - 24p + 36$

4. योग्य समानतेचा उपयोग करुन खालील प्रत्येकाचा विस्तार पाडा.

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $(-2a + 5b - 3c)^2$

(iv) $\left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + 1\right)^2$ (v) $(p + 1)^3$ (vi) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$

5. अवयव पाडा.

(i) $25x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 40xy + 16yz - 20xz$

(ii) $9a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 12ab - 16bc - 24ca$

6. जर $a+b+c=9$ आणि $ab+bc+ca=26$, तर $a^2+b^2+c^2$ काढा.

7. योग्य समानतेचा वापर करुन खालील किंमती काढा.

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$ (iv) $(1001)^3$

8. खालील प्रत्येकाचे अवयव पाडा.

(i) $8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2$ (ii) $8a^3-b^3-12a^2b+6ab^2$

(iii) $1-64a^3-12a+48a^2$ (iv) $8p^3-\frac{12}{5}p^2+\frac{6}{25}p-\frac{1}{125}$

9. पडताळा करा (i) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ (ii) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ शुन्येतर धनपुर्णांकाचा वापर करुन आणि प्रत्यक्ष गुणाकार करुन तपासणी करा. यास तुम्ही समानता म्हणता काय?

10. अवयव पाडा (i) $27a^3+64b^3$ (ii) $343y^3-1000$

11. समानतेचा उपयेाग $27x^3+y^3+z^3-9xyz$ अवयव पाडा.

12. पडताळा करा $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$

13. जर $x+y+z=0$, सिध्द करा $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

14. घनाची प्रत्यक्षपणे किंमत न काढता खालील प्रत्येकाची किंमत माहित करा.

(i) $(-10)^3+(7)^3+(3)^3$ (ii) $(28)^3+(-15)^3+(-13)^3$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^3$ (iv) $(0.2)^3-(0.3)^3+(0.1)^3$

15. खाली दिलेल्या आयताच्या क्षेत्रफळावरुन त्याच्या लांबी आणि रुंदीसाठी शक्य तेवढ्या बैजिक राशी लिहा. (i) $4a^2+4a-3$ (ii) $25a^2-35a+12$

16. इष्टीकाचीतीच्या खाली दिलेल्या घनफळाच्या किंमतीवरुन त्याच्या परिमाणाच्या संभाव्य बहुपदी बैजिक राशी काय आहे?

(i) $3x^3-12x$ (ii) $12y^2+8y-20$.

17. जर $2(a^2+b^2)=(a+b)^2$, तर $a=b$ सिध्द करा.

आपण काय शिकलो

या धड्यात तुम्ही खालील अंश शिकलात.

1. एकचलीय x मधील बहुपदी $p(x)$ ही x मधील बैजिक राशीच्या रुपात आहे.

   $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1 x + a_0$, जेथे $a_0, a_1, a_2, \ldots. a_n$ हे अनुक्रमे $x^0, x^1, x^2, \ldots. x^n$ चे सहगुणक आहेत आणि n ला बहुपदीचा कोटी म्हणतात. जर $a_n \neq 0$. प्रत्येक a_nx^n ; $a_{n-1}x^{n-1}$; .... a_0, ला $p(x)$ बहुपदीची पदे म्हणतात.

2. बहुपदीला एकपदी, व्दिपदी, त्रिपदी, इत्यादीत त्यामधील असलेल्या पदांच्या संख्येवरुन वर्गीकरण केले आहेत.

3. बहुपदीला त्यांच्या कोटीवरुन रेषीय बहुपदी, वर्गबहुपदी,घन बहुपदी इत्यादी सुध्दा नावे दिलेली आहे.

4. 'a' वास्तविक संख्येच्या $p(x)$ बहुपदीचा शुन्य म्हणतात. जर $p(a) = 0$.या संदर्भात 'a' ला बहुपदी समीकरण $p(x) = 0$ चे मुळ सुध्दा म्हणतात.

5. एक चलातील प्रत्येक बहुपदीस विशिष्ट शुन्य असतो. शुन्येतर स्थिर बहुपदीस शुन्य राहात नाही.

6. शेष सिध्दतांत: जर $p(x)$ ही एक किंवा त्या पेक्षा मोठी कोटी असलेली बहुपदी आहे. आणि $p(x)$ ला रेषीय बहुपदी $(x - a)$, ने भागले असता बाकी $p(a)$ असते

7. अवयव पध्दत: जर $x - a$ हा $p(x)$ बहुपदीचा अवयव असल्यास $p(a) = 0$ आणि जर $p(a) = 0$ तर $(x - a)$ आणि जर $p(x)$ चा सुध्दा अवयव होतो.

8. काही बैजिक समानता खाली आहेत.

   (i) $(x + y + z)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

   (ii) $(x + y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

   (iii) $(x - y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

   (iv) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ also

   (v) $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

   (vi) $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

मेंदुस अवघड प्रश्न

जर $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}$ तर x ची किंमत काढा.

03 भुमितीचे मुळ

3.1 प्रस्तावना

तुम्ही मोठ मोठी बांधणी जसे पुल, धरण, शाळेची इमारत, वस्तीगृह, दवाखाने इत्यादी पाहिलेच असाल. अशा बांधणीची रचना करणे इजिनीयरला मोठे काम आहे.

याचे बांधकाम करण्यासाठी लागणारी किंमतीची अंदाज कसा माहित होते? मजुरांच्या मजुरीच्या खर्चा सोबत, सिमेंट आणि कांक्रीटचा खर्च त्या रचनेचा आकार आणि परिमाणावर अवलंबुन असते.

बांधकामाच्या आकारात आणि परिमाणात पाया, बांधणाऱ्या जागेचे क्षेत्रफळ, भिंतीचा आकार, समोरील भाग, छत इत्यादी त्यामध्ये येतात. अशा बांधणीत उपयोगात आणलेले भुमीतीय सिध्दांत समजण्यासाठी आपणास भुमीतीच्या मुलभुत मुळांची माहिती आणि त्यांचे उपयोजन माहित पाहिजे.

आपणास माहित आहे की, आपल्या नित्य जिवनात भुमीतीचा वापर जसे पेंटींग, हस्तकला, फरशीवर डिझाईन टाकणे, शेतात नांगरणे आणि पेरणे दुसऱ्या शब्दात सांगायचे म्हणजे भुमीतीशिवाय जिवनाची कल्पना करु शकत नाही.

प्रसिध्द बांधकाम (बांधणी) जसे इजिप्त मधील पिरॅमीड, चिन मधील जग प्रसिध्द भिंत,(चायना वॉल) मंदिरे, मस्जिद, कॅथरडॉल(चर्च) ताजमहाल, चारमीनार आणि भारतातील अल्टनर्स, फ्रान्समधील इफिल टावर इत्यादी भुमितीच्या उपयोजनाचे काही सर्वात चांगले उदाहरण आहेत.

या धड्यात भुमितीची इतिहासातील मुळ आणि इतर विचारांच्या शाळेत ज्या मध्ये भुमितीचा विकास झालेला आहे आणि त्यांची तुलना आधुनिक भुमितीशी केली आहे.

3.2 इतिहास

गणिताच्या क्षेत्रात शिकविलेले रचनेचे आणि रुपाचे वर्णन भुमितीत कले आहे.बांधकामच्या आकाराच्या आणि रुपाचा भुमिती खाली वर्णनाचा अभ्यास गणिताच्या क्षेत्रात आहे. भुमिती(*geometry*) हा शब्द (geo) जिओ म्हणजे पृथ्वी आणि मेट्रीन(metrein) मध्ये मापण या ग्रीक शब्दातुन आला आहे.

प्राचिन भुमीतीचे अवशेष सिंधु नागरीकता बाबीलोनीया नागरीकता प्रजा जिवनात आढळुन आले. त्यांनी या नागरीकते मधुनच अधिक कोन त्रिकोनाचा शोध लावला.भिकक्षालु ने तयार केलेला हस्तलिखीत प्रतेमध्ये भुमितीय समस्यांचे प्रतिपादन केले. ज्यात अनियमीत घनाच्या क्षेत्रफळाच्या समस्येबद्दल माहिती आहे. सिंधु नागरीकतेमध्ये लोकांचे भुमीतीय अवशेष

हडप्पा मोहेंजोदळो मध्ये खांदल्यामुळे बाहेर पडले. इ.स. 2500 मध्ये वर्तुळास काढणारे उपकराणाचे पुरावे दिसुन आले.

वैदिक संस्कृतात सुलब सुत्राचा वापराणे यक्षवाटीका आणि होमकुंडाचे निर्माणात भुमितीय सिंध्दांताचा वापर केल्या गेला. या यज्ञ वाटीकेच्या निर्मीती मागील अदभुत कल्पना म्हणजे ते जरी वेगवेगळ्या आकाराचे असले तरी त्यांनी व्यापलेले क्षेत्रफळ सारखेच असते. बौद्धधायना (8 व्या शतकात B.C.) यांनी बौध्दायना सुलभ सुत्र तयार केले. हे सुपरिचीत सुलभ सुत्र ज्यामध्ये साधे पायथागोरचे ट्रिपल्स जसे (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17)... इत्यादी आणि त्रिकोनाचा पायथोगोरसचा सिध्दांताची सांगता याचा समावेश असतो.

प्राचिन गणित शास्त्रज्ञाने भुमितीय हिरेमोती जडलेल्या विज्ञानाचा किरीट अशी कल्पना केली. त्यांनी भुमितीच्या सिमेला काही नविन प्रकारच्या आकृत्या, घनवस्तुचे पृष्ठभागात विस्तार केला. त्यांनी प्रतिपादन केलेले विधानास सार्वजनिक सत्याच्या रुपात तर्कानुसार दर्शविण्याची गरज भासली. या भावनेस ग्रीक गणितज्ञ थेलस ने अनुमानिक पध्दतीचा वापर करण्यासाठी परावृत्त केले.

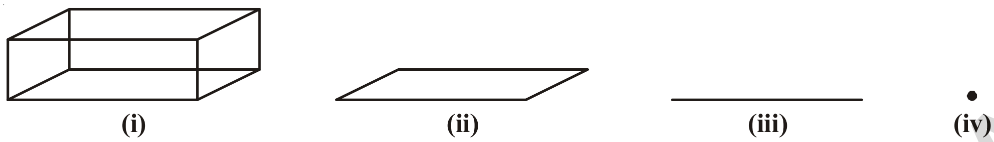
आयोनियाचा पायथोगरसला थेलस यांचा शिष्य मानतात. आणि त्यांचे प्रमेय त्यांच्या नावावर शोधाच्या आधी दिल्या गेले. पण ते एक संभाव्य गणित शास्त्रज्ञ होते ज्यांनी अनुमानीक पध्दतीने याची सिध्दंता दिली. इजिप्त मधील एलेक्झांडीया चा युक्लीड (235-265 B.C.) यानी 13 पुस्तके **द एलीमेंटस** लिहिले. युक्लीडने मुलभुत भावना, व्याख्या स्वीकृती, प्रतिपादन सिध्दांता, प्रमेय, अनुमान काढणे, किंवा तार्कीकता इत्यादी विचारांच्या पहिल्या पध्दतीची निर्मीती केली.

3.3 भुमितीचे युक्लीडचे एलिमेंटस

युक्लीडने भुमितीला ते राहत असलेल्या जगातला एक अमृर्त नमुना मानला. बिंदुचे सुचक रेषा, प्रतल, (किंवा पृष्ठभाग) असे कित्येक आपल्या सभोवताली असलेली संग्रहीत केले परिसरातील धन आणि आकाशातील घनांची अभुर्त भावनाची वृध्दी झाली. प्रत्येक घनास, घन परिमाण, आकार असतो, एका जागेवरुन दुसऱ्या जागेवर हलविता येतो. त्यास सिमा, पृष्ठभाग असतो. त्यांच्या सिमांना पृष्ठभाग म्हणतात. ते घनाच्या एका भागास दुसऱ्यापासुन वेगळे करतात. आणि त्यास जाडी नसते असे म्हणतात. पृष्ठभागाच्या सिमा वक्र किंवा सरळ असते. त्या रेषाच्या शेवट बिंदुत होतो. घनापासुन बिंदुपर्यंत तिन अवस्था पहा(धन-पृष्ठभाग- रेषा- बिंदु)

बाजुच्या पानावर दिलेल्या आकृत्याचे निरिक्षण करा. ही आकृती इष्ठीकाचीती घन आहे. (आकृती 1) यास तीन परिमाण मुख्यता लांबी, रुंदी आणि उंची असते. जर त्याचे एक माप उंची नसल्यास त्यास फक्त दोनच परिमाण असतात जो आयत आहे. तुम्हाला माहित आहे की, आयतास दोन मापे लांबी आणि रुंदी (आकृती 2) असते. नंतर अजुन एक परिमाण काढुन म्हणजे रुंदी काढल्यास तेथे फक्त एक रेषाखंड राहतो. (आकृती 3) आणि अजुन एक परिमाण काढल्यास फक्त तेथे बिंदुच (आकृती 4) उरतो. बिंदुस कोणतेही परिमाण नसते. अशारीतीने जेव्हा आपण टेबलाच्या कडा किंवा पुस्तक पाहतो. ते फक्त रेषेसारखे दृष्यमान होतात.

अशा रितीने जेव्हा आपण टेबलाच्या कडा किंवा पुस्तक पाहतो ते फक्त रेषेसारखे दृष्यमान होतात. रेषेचा शेवट किंवा दोन रेषा जेथे मिळतात तो बिंदु आहे.



घन →	पृष्ठभाग/ वक्र →	रेषा →	बिंदु
3-D	2-D	1-D	परिमाण नाही

ही भुमितीय मुलभुत पदे आहेत. याच्या साहाय्याने रेषाखंड, कोन, त्रिकोण इत्यादी ची व्याख्या करता येते. वरील निरिक्षणावरुन युक्लीडने बिंदु, रेषा, प्रतलाची व्याख्या केली.

त्याच्या पुस्तक एलिमेंटरस 1 मध्ये युक्लीडने 23 व्याख्याची यादी केली. त्यापैकी काही खाली दिलेल्या आहेत.


युक्लीड 300 B.C
भुमितीचे जनक

- बिंदुला कोणताही भाग नसतो.
- रेषा म्हणजे रुंदी नसलेली लांबी.
- रेषेचा शेवट बिंदु आहे.
- एक सरळ रेषा म्हणजे रेषा ज्यावर तुल्य बिंदुचा समावेश असतो.
- एका पृष्ठभागास फक्त लांबी आणि रुंदी असते.
- पृष्ठभागाच्या कडा रेषा आहेत.
- एक प्रतलिय पृष्ठभाग म्हणजे पृष्ठभाग ज्यावर तुल्य सरळ रेषा असतात.

बिंदु तुल्य बिंदु, रेषा आणि प्रतल, याची व्याख्या करण्यासाठी स्पष्ट येण्यासाठी युक्लीडने शब्द किंवा वाक्यप्रचार जसे भाग, रुंदी, तुल्य याचा उपयोग केला. प्रतलाची व्याख्या करतांना जर आपण प्रतल असे म्हणतो. तेव्हा तो काही जागा (क्षेत्रफळ) व्यापतो. नंतर क्षेत्रफळास पुन्हा स्पष्टता द्यावी लागते. म्हणुन एकापदाची व्याख्या करण्यासाठी पुन्हा दुसऱ्या पदाची गरज पडते. अशा प्रकारे पदाच्या व्याख्येची साखळी तयार होते. म्हणुन गणीततज्ञ अशा पदांना सोडुन देण्याची अनुमती देतात. काही झाले तरी भुमीती ही भावना बिंदुस वरील व्याख्येपेक्षा चांगली काल्पनीक भावना आपणात आहे. म्हणुन टिंबास आपण काही परिमाण असुन सुध्दा त्यास बिंदुने दर्शवितो. चिनचा तत्ववेत्ता मोहिस्ट म्हणाले की, रेषेला भागात विभागले आहे. आणि तो भाग ज्यास उरलेले भाग नाही तो बिंदु आहे.

अशीच समस्या वरील व्याख्या 2 मध्ये निर्माण झाली. या व्याख्येत रुंदी, लांबी, दोन्हीची व्याख्या केली नाही. यामुळे काही पदांची व्याख्या केलेली नाही. ती तसेच ठेवली.आपणास

भुमीतीत बिंदु, रेषा, प्रतल, (युक्लीडच्या पदात, सपाट पृष्ठभाग) ही व्याख्या नसलेली पदे आहेत. त्यास फक्त अर्तज्ञानानेच दर्शवितो. किंवा भौतिक नमुन्याच्या सहाय्याने स्पष्ट करतो.

युक्लीडने त्याच्या व्याख्याला केलेल्या पदांना सिध्दांताची गरज नसलेल्या भुमीतीय गुणधर्माचे प्रतिपादन केले. हे सर्व गुणधर्म स्वयम सिध्द सत्यता आहेत. त्यास त्यांनी दोन भागात विभागले प्रमाणभुत तत्व आणि गृहीत तत्व.

3.3.1स्वयं सिध्द तत्व आणि गृहित तत्व

एका निर्देशित गणिताच्या व्यवस्थेत संदर्भानुसार स्वयंम निर्देशित सत्य विधाने किंवा गृहीत तत्व विधाने यास स्वयंसिध्द तत्व म्हणतात. उदाहरणात जेव्हा आपण म्हणतो की, " पुर्ण हे नेहमी भागापेक्षा मोठे असते." हे स्वयसिध्दता सत्य आहे. यास सिध्दतेची गरज नाही. हे स्वयंसिध्द तत्व आपणास च्या पेक्षा मोठे ची व्याख्या करते. उदाहरणात जर राशी P दुसरी राशी C चा एक भाग आहे. तर C राशीला राशी P आणि तिसरी राशी R च्या बेरजेच्या रुपात लिहिता येते. त्यास संज्ञेच्या रुपात $C > P$ असेल तर R अशा प्रकारे आहे की $C = P + R$.

युक्लीडने या सामान्य 4 तास किंवा प्रमाणभुत तत्वास फक्त भुमीती मध्ये नव्हे तर गणितात सर्व वापरले. परंतु गृहीत तत्वास भुमीतीतील भावनासाठी फक्त वापरला. गृहीत तत्व हे या पायावर भुमीतीच्या रचेनचा विकास केला. हे गृहीत तत्व निरनिराळ्या संदर्भात समोर येतात.

युक्लीडची काही स्वयंसिध्द तत्वे खाली दिलेली आहेत.

- एका राशीला समान असलेली राशी एकमेकास समान असते.
- समान राशीला समान राशीत मिळविल्यास पुर्ण राशी समान येते.
- जर समान राशीतुन समान राशी वजा केल्यास त्याची बाकी समान येते.
- राशी एकमेकांना तंतोतंन मिळविल्यास ते एकमेकांना समान असतात.
- समान राशीची दुप्पट राशीला एकमेकांस समान राहते.
- समान राशीच्या अर्धे एकमेकांस समान असतात.

या सामान्य मतास काही प्रकारचे परिमाण सुचित करते. पाहिल्या सामान्य मतास सपाट आकृत्यावर लागु करु. उदारहणात जर A चे क्षेत्रफळ B च्या क्षेत्रफळाला समान असल्यास आणि B चे क्षेत्रफळ चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या समान असल्यास A चे क्षेत्रफळ सुध्दा चौरसाच्या क्षेत्रफळ समान असते.

सारख्या प्रकारच्या परिमाणाची तुलना किंवा बेरीज करता येते, परंतु वेगवेगळ्या प्रकारच्या परिमाणाची तुलना करता येत नाही. उदाहरणार्थ एका रेषेला दुसऱ्या एका वस्तुच्या क्षेत्रफळाशी मिळविता येत नाही किंवा एका कोनाची पंचभुजीशी तुलना करता येत नाही.

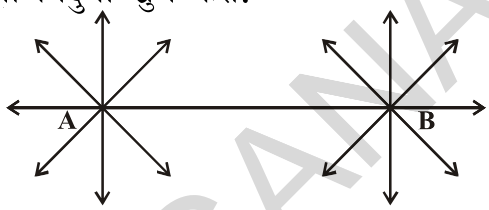
प्रयत्न करा

तुमच्या नित्य जिवनातील प्रमाणभुत तत्वाची कोणतीही दोन उदाहरणे देऊ शकता का

युक्लीडच्या पाच गृहीत तत्वाची चर्चा करु या.

1. कागदाच्या शिट वर A आणि B दोन वेगवेगळ्या बिंदुची खुण करा.

A आणि B बिंदुमधुन जाणारी सरळ रेषा काढा. A आणि B बिंदु मधुन अशा किती सरळ रेषा काढु शकता? दिलेल्या दोन बिंदुतुन आपण एक पेक्षा जास्त सरळ रेषा काढता येत नाही.



युक्लीडच्या पहिल्या तत्वावरुन पहिला कल्पना मिळते. तत्व खालील प्रकारे आहेत.

गृहीत तत्व 1:देान भिन्न बिंदुतुन जाणारी फक्त एकच रेषा आहे.

युक्लीडनुसार एका बिंदुवरुन दुसऱ्या बिंदुवर एकच रेषा काढता येते.

2. कागदाच्या शिटवर PQ रेषाखंड काढा.

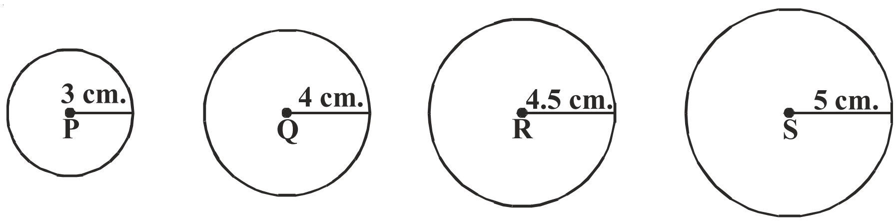
दोन्ही बाजुला रेषाखंड वाढवा.

PQ रेषाखंड दोन्ही बाजुस कुठपर्यंत वाढविता येते? त्यास कोणताही शेवटच्या बिंदु असतो का? आपणास दिसुन येते की, PQ रेषाखंड दोन्ही बाजुस वाढवता येते आणि रेषा PQ ला शेवटच्या बिंदु नसतो. युक्लीडने हा विचार दुसऱ्या तत्वात मांडला.

तत्व 2: रेषाखंडाला दोन्ही बाजुस वाढविल्यास रेषा तयार होते.

युक्लीडच्या शब्दात : एका सांत रेषेला निरंतर एका सरळ रेषेत वाढविता येते. युक्लीडने रेषाखंडासाठी वाढवलेली रेषा शब्दाचा वापर केला.

3. चार वर्तृळाची त्रिज्या 3 से.मी., 4 सें.मी., 4.5 सें.मी., 5 सें.मी. दिली आहे. वृत्तलेखणीच्या साहाय्याने त्यांची त्रिज्या P, Q, R आणि S केंद्रबिंदु घेऊन वर्तुळ काढा.



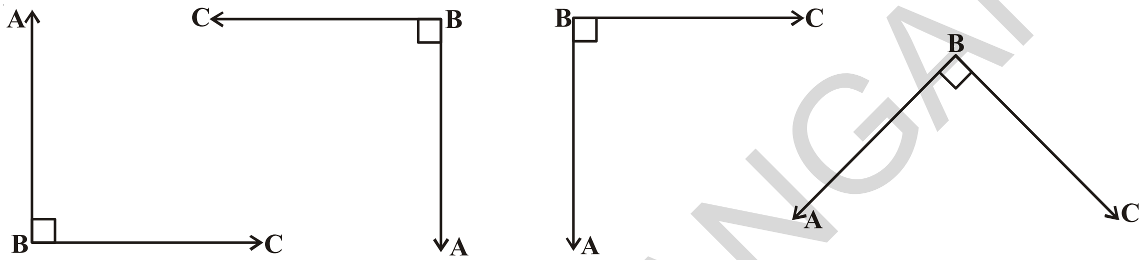
जर वर्तुळाची त्रिज्या आणि केंद्रबिंदु दिला असता तुम्ही वर्तुळ काढु शकता का? कोणत्याही त्रिज्येवरुन आणि केंद्रावरुन आपण वर्तूळ काढु शकतो? (धडा 12 पहा- वर्तुळ)

युक्लीडचे तिसरे तत्व वरील उपाय सुचविते.

(एका बिंदुजवळ कोणत्याही अंतरावर वर्तुळ काढणे)

गृहीत तत्व : कोणत्याही केंद्र बिंदुवरुन आणि त्रिज्येवरुन वर्तुळ काढणे .

4. एक आलेखाचा कागद घ्या. काटकोन दर्शविणाऱ्या वेगवेगळ्या आकृत्या काढा. त्यांना त्यांच्या कोनाच्या बाजुवरुन कापा आणि सर्व कोन एकमेकांवर ठेवा. तुम्हाला काय दिसते?



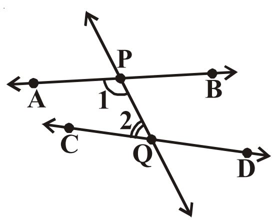
तुम्हाला दिसुन येते प्रत्येक कोनाची बाजु दुसऱ्या कोनबाजुवर येते. म्हणजे सर्व काटकोन समान आहेत. हे युक्लीडचा चवथा आधारतत्व आहे. तुम्ही कोणत्याही कोनासाठी सांगु शकता काय? युक्लीडने सांगीतलेल्या सर्व घटनेत आणि सर्व काटकोनास संदर्भ साठी घेतले.

गृहीत तत्व :4 सर्व काटकोन एकमेकांस समान असतात.

आता युक्लीडच्या 5 व्या गृहीत तत्व कडे आणि त्यांचे समतुल्याकडे पाहु या.

गृहीत तत्व :5 दोन सरळ रेषेला खंडण करणारी सरळ रेषा त्याच्या त्याच बाजु वर अंतर कोन करते. कोनाची बेरीज दोन काटकोन पेक्षा कमी असते. तेव्हा दोन सरळ रेषा जर निरंतर वाढवित गेल्यास एका बाजुवर मिळतात. जेथे कोनांची बेरीज दोन काटकोना पेक्षा कमी असते.

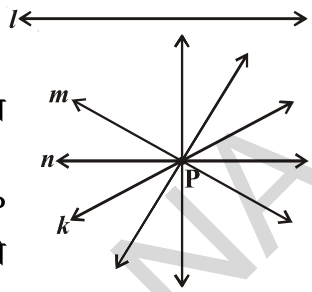
सुचना: आकृतीतील PQ रेषा AB आणि CD रेषेवर अशा प्रकारे छेदते की, आतिल कोन 1 आणि 2 ची बेरीज PQ च्या डाव्या बाजुवर $180°$ पेक्षा कमी असते. म्हणुन AB आणि CD रेषा PQ च्या डाव्या बाजुवर छेदतात.



या तत्वास युक्लीड बरोबर गणीत शास्त्रज्ञानी यास सिध्दात समजुन जास्त प्राधान्यता मिळाली. आनुषंगीकपणे दोन हजार वर्ष गणित शास्त्रज्ञ युक्लीडचे पाचवे तत्व इतर नऊ तत्वाचा परिणाम म्हणुन दाखविण्याचा प्रयत्न केला. या समान असलेल्या इतर मौखीक भावनेस (जॉन प्लेफेयर) प्रतिपादनेवरुन दाखविण्याचा प्रयत्न केला.

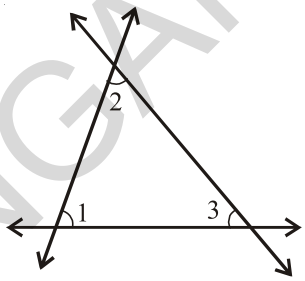
3.3.2पाचव्या तत्वाचे समतुल्य वर्णन किंवा 5 व्या आधारतत्वाची समतुल्यता:

प्राचीन शास्त्राज्ञांनी प्रतिपादन केलेले काही सांगता येणारे पर्याय आहेत.



- एका सरळ रेषेवर नसणाऱ्या बिंदुवरुन एक समांतर रेषा दिलेल्या रेषेवर काढता येते. (जॉन फेअर 1748-1819)

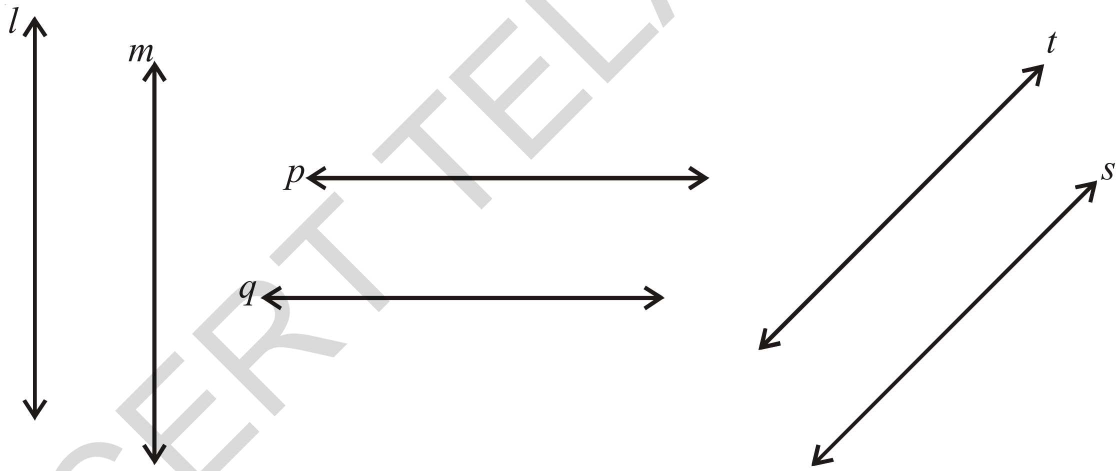
समजा l ही रेषा असुन P हा त्या रेषेवर नसणारा बिंदु आहे. P वरुन l रेषेला फक्त एकच रेषा अस्तीत्वास असते. यालाच फेअर्स चे तत्व म्हणतात.



- कोणत्याही त्रिकोणातील कोनांची बेरीज स्थिर संख्या आहे. आणि ती देान काटकोनाला समान आहे.

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$

- एकमेकापासुन समान अंतरावर कुठेही समांतर रेषेची जोडी अस्तीत्वात असते.



- जर दोन समांतर रेषेपैकी कोणत्याही एक रेषेला सरळ रेषा छेदल्यास ती दुसऱ्यांस सुध्दा छेदते (प्रोक्लस)
- सरळ रेषा त्याच सरळरेषेला समांतर असल्यास त्या एकमेकांस समांतर असतात(प्रोक्लस)

जर यापैकी कोणतेही एक विधान युक्लीडच्या 5 व्या सिध्दांतासाठी प्रतिक्षेपीत केल्यास पहिले चार तत्व समान राहुन सारखी भुमीती मिळते.

नंतर या पाच तत्वावरुन युक्लीडने याचा वापर अनुमानीक पध्दतीस लागु करुन जास्त माहिती मिळविण्यासाठी आणि विधाने पुर्ण सिध्द केली. यालाच प्रतिपादन किंवा सिध्दतांत म्हणतात.

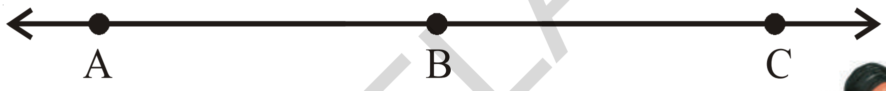
कधी कधी निश्चित विधानाचा जो तुम्ही विचार करता ते निरिक्षणाच्या आधारावर शिक्षणाच्या अंदाजाने सत्य ठरते. अशी विधाने जी सिध्द करता येते, सिध्द करता येत नाही. त्यास अनुमान (तर्क) म्हणतात. गणिताचे शोध या तर्कावरुनचे (अनुमान) सुरु झाले. 4 पेक्षा मोठी असणाऱ्या प्रत्येक संख्येला दोन मूल संख्येच्या रुपात लिहिता. येते. हा एक गोल्ड बाश चा तर्क आहे.

अनुमानास सिध्द करुन दाखविण्यास त्यास सिध्दता म्हणतात. सिध्दतांला तार्किक साखळीच्या पायऱ्यांनी सिध्द केल्या जाते. सिध्दतांचा सिध्दता ही व्यादाची प्रक्रिया आहे. जी सिध्दतांतच्या सत्याची स्थापना करते.

युक्लीकडे परिभाषीक शब्द, गृहीतक, आधारतत्व अणि प्रमेय इत्यादी चा वापर करुन 465 सिध्दांतास तार्किक साखळीतुन काढुन टाकावे.

युक्लीडच्या गृहीतक आणि तत्वाचा सिध्दतेसाठी कसा उपयोग होतो ते शिकु

उदाहरण -1 जर एका रेषेवर A,B,C हे तिन बिंदु आहेत.अणि B बिंदु हा A आणि C च्या मध्ये स्थित आहे. तर सिध्द करा AC - AB = BC.



सोडवणुक: आकृतीत AC ही AB+BC ना तंतोतंत मिळते.
युक्लीडच्या 4 थ्या तत्वावरुन जे एकमेकांस तंतोतंत मिळतात.
ते एकमेकांस समान असतात. म्हणुन

$AB + BC = AC,$

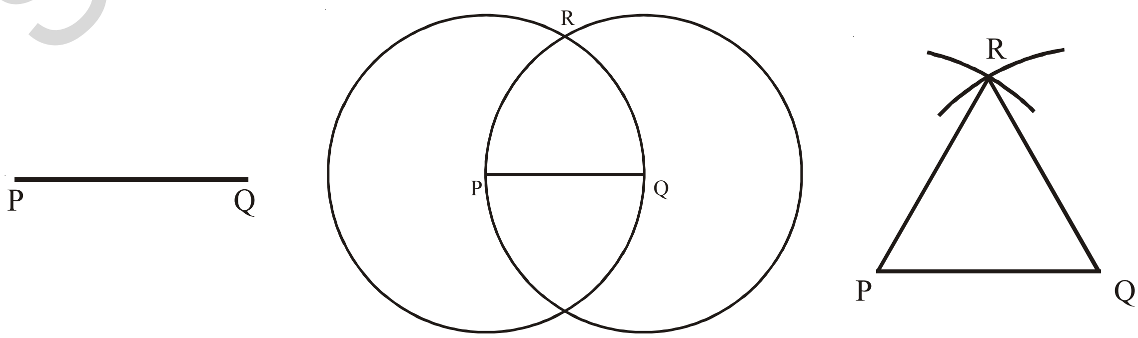
या AC ची किंमत $AC - AB = BC$ मध्ये ठेवल्यास

$\cancel{AB} + BC - \cancel{AB} = BC$

लक्षात घ्या कि यामध्ये गृहीत धरले आहे की, दोन बिंदुतुन फक्त एकच रेषा जाते.

सिद्धांत: 1. सिध्द करा की, समभुज त्रिकोण हा दिलेल्या कोणत्याही रेषाखंडावर रचना करता येते.

सोडवणुक : कोणत्याही दिलेल्या लांबीचा रेषा खंड PQ समजा



युक्लीडच्या 3 ऱ्या तत्वावरुन आपण कोणत्याही केंद्रबिंदुवरुन कोणत्याही त्रिजेच्या वर्तुळ काढता येते. म्हणुन आपण P केंद्रबिंदु असलेला PQ त्रिजेच्या वर्तुळ काढता काढु शकतो. Q केंद्र बिंदु आणि त्रिज्या QP असलेले दुसरे वर्तुळ काढा. ही दोन्ही वर्तुळ R. वर मिळतात. 'R'ला P आणि Q शी जोडा Δ PQR तयार होते.

आता आपण तयार झालेला त्रिकोण समभुज त्रिकोण आहे हे सिध्द करावे लागते. म्हणजेच PQ = QR = RP.

PQ = PR (P बिंदुवरील त्रिज्या) अशारीतीनेPQ = QR (Q केंद्र बिंदुवरील त्रिज्या)

युक्लीडच्या सिंध्दातानुसार दोन राशी सारख्या असल्यास ते एकमेकांस समान असतात. PQ = QR = RP, मधुन ΔPQR हा समभुज त्रिकोण आहे. युक्लीडने कशाचाही उल्लेख कुठेही न करता गृहीत धरले यांची नोंद घ्या. P आणि Q केंद्रबिंदुवरुन काढलेली दोन्ही वर्तुळ एकमेकास एका बिंदुवर मिळतात.

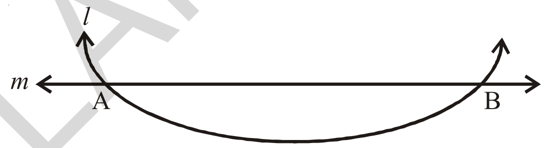
आता सिध्दतांची सिध्दता करु.

उदाहरण:3-दोन भिन्न रेषांना एका पेक्षा जास्त सामान्य बिंदु नसतो.

दोन रेषा l आणि m दिल्या आहेत.

सिध्दता: (RTP): l आणि m त्यास फक्त एकच सामाईक बिंदु असतो.

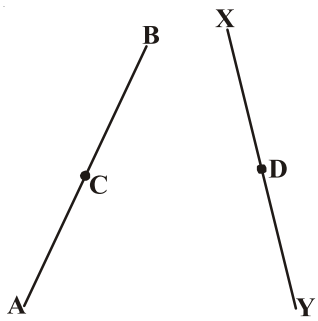
सिध्दता: गृहीत धरा की, दोन रेषा या दोन विभीन्न बिंदु A आणि B वर छेदतात.



युक्लीडने कशाचाही उल्लेख कुठेही न करता गृहीत धरले यांची नोंद घ्या. P आणि Q केंद्रबिंदुवरुन काढलेली दोन्ही वर्तुळ एकमेकास एका बिंदुवर मिळतात.

आपणास दोन रेषा A आणि B मधुन जाणाऱ्या आहेत. ही गृहीताची विरुध्दता युक्लीडच्या सिध्दतांस नुसार दोन भिन्न बिंदुतुन फक्त एकच रेषा जाते. हे विरुध्दता रेषा दोन भिन्न बिंदुतुन जाते हे गृहीत धरल्यामुळे उत्पन्न होते. म्हणून आपण निष्कर्श काढु शकतो का दोन भिन्न रेषेला एका पेक्षा जास्त सामान्य बिंदु नसतो.

उदाहरण 4: बाजुच्या आकृतीत AC = XD, C आणि D हे AB चे XY अनुक्रमे मध्ये बिंदु आहेत. सिध्द करा.AB = XY.



सोडवणुक : AB = 2 AC (C हा ABचा मध्य बिंदु आहे.)

XY = 2 XD (D हा XY मध्य बिंदु आहे.)

आणि AC = XD (दिले आहे)

म्हणुन AB = XY

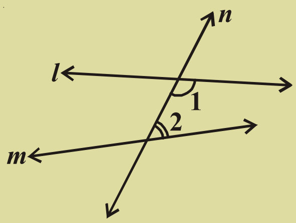
राशी जी सारख्या राशीची दुप्पट आहे ते एकमेकास समान असतात.

अभ्यास - 3.1

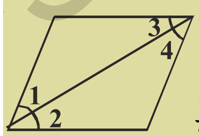
1. खालील उत्तरे द्या.
   i. युक्लीडच्या एलीमेंट मध्ये किती पुस्तके आहेत?
   ii. घनास किती परिमाण असतात?
   iii. घन आणि लंब इष्टीकाचीतीच्या एकुण पृष्ठाची संख्या किती आहे?
   iv. त्रिकोणाच्या आतील कोनांची बेरीज किती आहे?
   v. व्याख्या न केलेल्या भुमीतीच्या तिन पदे लिहा.
2. खालील विधाने सत्य किंवा असत्य आहे ते लिहा? आणि तुमच्या उत्तरासाठी कारणे द्या.
   a) दिलेल्या बिंदुतुन फक्त एकच रेषा जाते.
   b) सर्व काटकोन समान असतात.
   c) सारखी त्रिज्या असलेली वर्तुळे समान असतात.
   d) रेषाखंडाला दोन्ही बाजुने वाढविले असता सरळ रेषा येते.

   e) आकृती वरुन $AB > AC$
3. खालील दिलेल्या आकृतीवरुन लांबी $AH > AB + BC + CD$ दाखवा.

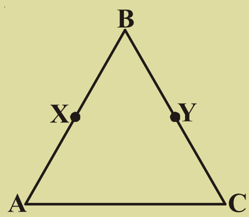
4. P आणि R बिंदुमध्ये Q अशा रितीने आहे की, $PQ = QR$, तर सिध्द करा $PQ = \frac{1}{2}PR$.
5. 5.2 से.मी. प्रत्येक बाजु असलेला समभुज त्रिकोण काढा.
6. अनुमान म्हणजे काय? त्याचे उदाहरण द्या.
7. P आणि Q बिंदुची खुण करा. P आणि Q मधनु जाणारी रेषा काढा. PQ, ला समांतर असलेल्या रेषा किती आहेत?



8. बाजुच्या आकृतीत n रेषा l आणि m रेषेवर अशी आहे की, 1 आणि 2 या आतील कोनाची बेरीज 180° पेक्षा कमी आहे ,तर l आणि m रेषेबद्दल तुमचे म्हणणे काय आहे?



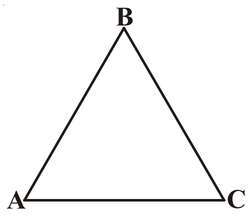
9. बाजुच्या आकृतीत जर $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ आणि $\angle 3 = \angle 4$ तर $\angle 1$ आणि $\angle 2$ मधील संबंध युक्लीडच्या तत्वानुसार लिहा.



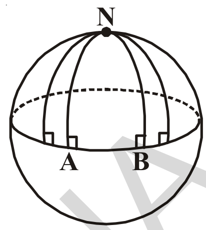
10. बाजुच्या आकृतीत $BX = \frac{1}{2}AB$, $BY = \frac{1}{2}BC$ आणि $AB = BC$ सिध्द करा की, $BX = BY$

युक्लीडेतर भुमिती

पाचव्या आधारतत्वाची सिध्दता निष्फळ झाल्यामुळे कॉल फेडरीक गॉस, लोबाचेवस्की आणि बार्ले यांनी नविन विचार मांडले. पाचवे तत्व सत्य आहे किंवा त्या ऐवजी काही विरुध्द तत्वास ठेवुन याचा त्यांनी विचार केला. जर असे ठेवल्यास आपणास युक्लीडच्या भुमीती ऐवजी वेगळी भुमीती येते यालाच युक्लीकडेतर भुमीती म्हणतात.



(i)



(ii)

जर प्रतल सपाट नसल्यास आपल्या सिध्दंतांचे काय होते?

चला पाहु या.

एक चेंडु घ्या आणि त्यावर त्रिकोण काढण्याचा प्रयत्न करा? प्रतलावर आणि चेंडुवर त्रिकोण काढतांना तुम्हाला कोणता फरक आढळुन येतो. तुम्हाला दिसुन येते की, कागदावर त्रिकोणनाच्या रेषा सरळ येतात परंतु चेंडुवर सरळ येत नाही.

आकृती (2) पहा. AN आणि BN रेषा (प्रसध्दी गोलाच्या वर्तुळाचे भाग आहेत) ABरेषेला लंब आहे. परंतु जरी AB रेषेच्या सारख्या बाजुवरी कोनांची बेरीज दोन काटकोनापेक्षा कमी नसली तरी ते N वर मिळतात.(वास्तविकपणे $90° + 90° = 180°$) गोलावरील त्रिकोण NAB च्या कोनाची बेरीज $180°$ पेक्षा जास्त आहे. $\angle A + \angle B = 180°$.

गोलावरील प्रतलास आपण गोलीय प्रतल म्हणतो. गोलावर समांतर रेषा अस्तित्वात असतात का? अशारीतीने वेगवेगळी प्रतले आणि संबंधीत गृहीतके घेऊन नविन भुमितीची निर्मीती होते.

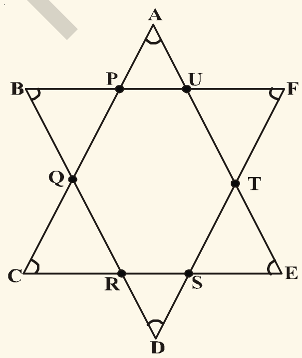
आपण काय शिकालोत?

- बिंदु, रेषा आणि प्रतले ही व्याख्या न केलेली पदे भुमीतीचे आधार स्तंभ आहेत.
- युक्लीड सोबत प्राचिन गणीत शास्त्रज्ञ या शब्दाची व्याख्या करण्याचा प्रयत्न केला.
- द एलिमेंट मध्ये युक्लीडने विचाराच्या व्यवस्थेच्या विकास केला. ही व्यवस्थानंतर गणिताच्या विकासाचा पाया ठरली.
- युक्लीडचे काही गृहीतक आहेत.
  - एका राशिला समान असलेली राशी एकमेकास समान असते.
  - समान राशिला समान राशीत मिळविल्यास पुर्ण राशी समान येते.

- जर समान राशीतुन समान राशी वजा केल्यास त्यांची बाकी समान असते.
- राशी एकमेकांना तंतोतंत जुळल्यास ते एकमेकांना समान असतात.
- पुर्ण राशी त्याच्या भागापेक्षा मोठी असते.
- समान राशीची दुप्पट राशीला एकमेकास समान असते.
- राशीच्या अर्धे एकमेकास समान असतात.
- युक्लीकडे आधारतत्व आहेत.
- एका बिंदुवर दुसऱ्या बिंदुवर एकच रेषा काढता येते.
- वाढविलेली रेषा अनंत निर्माण करतात.
- कोणत्याही केंद्रावरुन आणि त्रिज्येवरुन वर्तुळ काढता येते.
- सर्व काटकोन एकमेकास समान असतात.
- जर एक सरळ रेषा दोन सरळ रेषेवर पडत असेल तर.
- एकाच बाजुला अंतर्गत कोन निर्माण करते जो दोन काटकोन पेक्षा कमी असतो जर त्या दोन्ही सरळ रेषा अनंता पर्यंत काढल्यातर ते दोन्ही अशा ठिकाणी जुळतात जेथील कोन दोन काटकोना पेक्षा कमी असतो.

मेंदुची गंमत

1. खालील दिलेल्या आकृतीत $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ ची मापे काय आहेत. तुमच्या उत्तराचे कारण सांगा



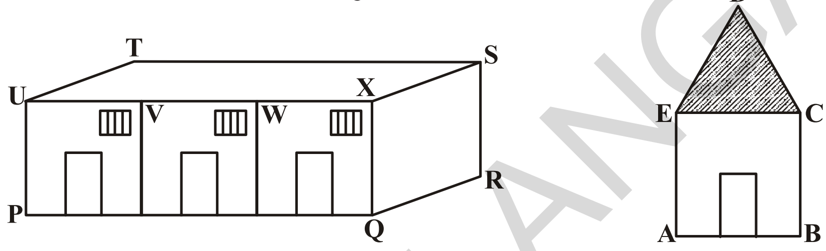
2. जर चौरसाचा कर्ण 'a' एकक आहे. पहिल्या चौरसाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट असलेल्या चौरसाचे कर्ण काय होतो ?

रेषा आणि कोन

04

4.1 प्रस्तावना

रेशमाने आणि गोपीने त्याच्या शाळेची आणि घराची अनुक्रमे रुपरेषा काढली. तुम्ही कांही कोन आणि रेषाखंड रेखाटा ओळखु शकता का?



(i) (ii)

वरील आकृतीत (PQ, RS, ST, ...) आणि (AB, BC, CD, ...) हे रेषाखंडाचे उदाहरण आहेत. जेथे $\angle QPU$, $\angle RQP$, ... आणि $\angle BAE$, $\angle CBA$, ... कोनाचे उदाहरण आहेत.

तुम्हाला माहित आहे का शिल्पकाराला इमारती, शिखर, पुल इत्यादी नकाशा काढावयाचा असतो. शिल्पकाराला बरेचशा रेषा आणि समांतर रेषा वेगवेगळ्या कोनापाशी काढावे लागते.

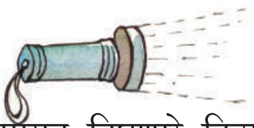
दृष्टी आणि डोळ्यासंबंधीचे शास्त्र आपण रेषा आणि कोनाचा वापर प्रकाशाची वक्रीभवण, विस्तृत हे निर्माण होतात. त्याच सारखे एका वस्तुवर कार्यरत असलेले वेगवेगळे बल ज्याव्दारे किती काम झाले आहे माहित करण्यासाठी त्याचा उपयोग होतो. आपण गृहीत धरतो की, बल आणि स्थानांतर मधील कोन निकाल माहित करण्यासाठी आपणास दोन्ही बाजु आणि कोनांची गरज असते. म्हणुन आपल्या दैनंदिन जिवणात आपण एका संपर्कात येतो. की भुमीती मध्ये मुळ भावना यांचा खुप उपयोग होतो.

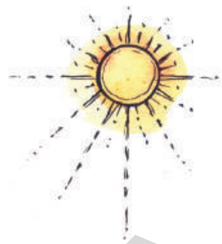
हे करा

तुमच्या भोवताच्या परिसराचे काळजीपुर्वक निरिक्षण करा आणि तुमच्या दैनंदिन जिवणातील तीन परिस्थिती बद्दल लिहा. तुम्हाला रेषा, कोन कोठे आढळतात?

तुमच्या वहीत चित्र काढा आणि काही चित्र एकत्र करा.

4.2 भुमीती मधील मुळ शब्द





सुर्यापासुन निघणाऱ्या सुर्य किरणाचा किंवा टार्च लाईटचा विचार करा. तुम्ही अशा प्रकारच्या प्रकाशाच्या किरनाला कसे दर्शवु शकता? हे सुर्य पासुन निघणारे किरण आहे. पुनविचार करा. एक किरन म्हणजे रेषेचा एक भाग आहे. ते एका बिंदु जवळ सुरु होऊन समाप्त न होणाऱ्या दिशेने जात राहते. परंतु रेषेला दोन्ही बाजुनी समाप्त न होणाऱ्या दिशेने वाढवु शकतो.

दोन शेवटचे बिंदु असलेल्या एका रेषेच्या भागाला रेषा खंड असे म्हणतात.

सर्व साधारपणे आपण रेषा खंडालाAB ला $\overline{AB}$ व्दारे दर्शविती आणि त्याची लांबी AB व्दारे दर्शवितात. AB किरणाला $\overrightarrow{AB}$ व्दारे दर्शवितात आणि रेषाखंडाला $\overleftrightarrow{AB}$ने दर्शवितात. कसे तरी आपण साधारण पणे $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ इत्यादी रेषांना दर्शविण्यासाठी वापरतो. आणि लहान अक्षरे l, m, n इत्यादींना देखील रेषांना दर्शविण्यासाठी दर्शवितात.

जर दोन किंवा तिन बिंदु एकाच रेषेवर असतील तर त्या बिंदुना एक रेषीय बिंदु असे म्हणतात. नाहीतर त्यांना एक रेषीय बिंदु नाही म्हणतात.

शेखरने काही बिंदु एक रेषेवर खुण करुन केले आणि त्यांच्या पासुन तयार झालेल्या रेषाखंडाचा मोजमाप करण्याचा प्रयत्न केला.

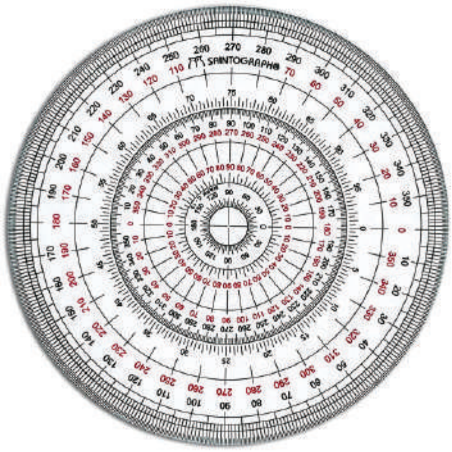
(सुचना $\overline{PQ}$ आणि $\overline{QP}$ सारख्या रेषाखंड दर्शवितात.)

क्र.स.	रेषेवर बिंदु	रेषा खंड	संख्या
1.	P R Q 3	PQ, PR, RQ	3
2.	P S R Q 4	PQ, PR, PS, SR, SQ, RQ	6
3.	P S T R Q 5	....	

तुम्हाला बिंदुच्या संख्या आणि रेषा खंडा मध्ये कोणता तरी नमुना आढळुन आला का?

आणखी काही बिंदु रेषा खंडावर घेऊन नमुना काढा.

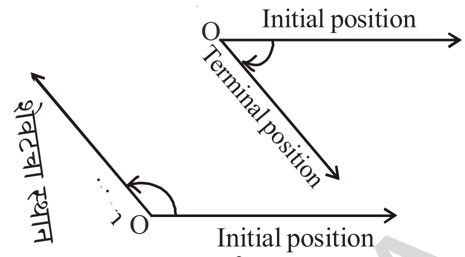
रेषा खंडावर बिंदुची संख्या	2	3	4	5	6	7
एकुण रेषा खंडाची संख्या	1	3	6	.....	.....	.....



आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे वर्तुळाला 360 समान भागात दुभागले आहे.

प्रत्येक भागाच्या मापास एक डिग्री म्हणतात.

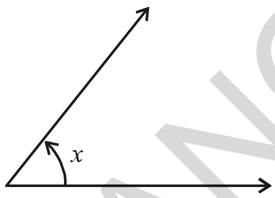
सुरुवातीच्या स्थानापासुन ते शेवटच्या स्थानापर्यंत भ्रमण करणाऱ्या किरणाव्दारे कोण तयार होतो.

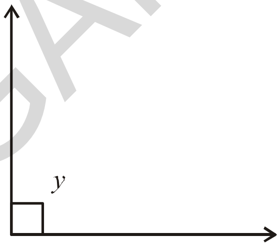


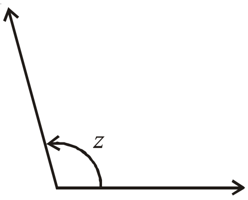
एका सुरुवातीच्या स्थानापासुन ते शेवटच्या स्थानापर्यंत किरणाच्या 0 स्थिर बिंदु भोवती किरणाच्या बदलाला भ्रमण म्हणतात. मापाला कोन म्हणतात.

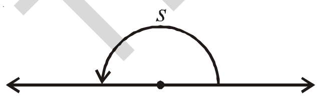
एक पुर्ण भ्रमण 360^0 कोन देते. आपण कंपासाव्दारे देखली कोण काढतो.

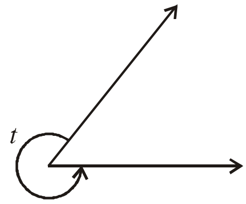
जेव्हा दोन किरणे एकाच बिदुं पासुन सुरु हेातात तेथे एक कोन तयार होतो. कोन बनविणारे बाजुंना कोनाच्या बाजु म्हणतात. सामाईक बिंदुला शिरोबिंदु म्हणतात. तुम्ही वेगवेगळ्या पध्दतीने कोनाचा अभ्यास केला. जसे लघू कान, काटकोन विशाल कोन, रेषीय कोन आणि परावर्तीत कोन आपण मागील वर्गात शिकलो आहेात.


लघु कोन : $0° < x < 90°$


काटकोन : $y = 90°$


विशाल कोन: $90° < z < 180°$

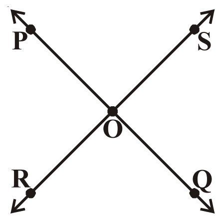

रेषीय कोन : $s = 180°$


परावर्तीत कोन : $180° < t < 360°$

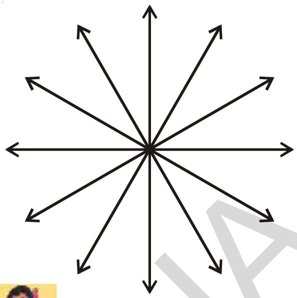
4.2.1 छेदन करणाऱ्या रेषा आणि छेदन न करणाऱ्या रेषा

आकृतीचे निरिक्षण करा, $\overleftrightarrow{PQ}$ आणि $\overleftrightarrow{RS}$ या रेषांना एकादा सामाईक बिंदु आहे का? अशा रेषांना तुम्ही काय म्हणतात? त्या रेषांना समांतर रेषा म्हणतात.

दुसऱ्या बाजुने जर ते एका बिंदु जवळ मिळतात. तर त्यांना छेदन रेषा असे म्हणतात.



4.2.2 एक संपानी रेषा



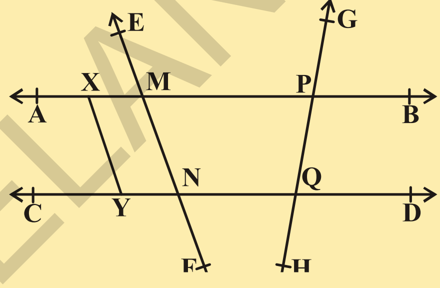
एका बिंदु जवळ किती रेषा मिळतात? तुम्हाला तशा रेषेची नावे माहित आहेत का? जेव्हा तिन किंवा अधिक रेषा एका बिंदु जवळ मिळतात त्यांना एक संपाती रेषा असे म्हणतात आणि ज्या बिंदु जवळ ते मिळतात त्या बिंदुला एक संपाती बिंदू असे म्हणतात.

विचार करा,चर्चा करा आणि लिहा

छेदन करणाऱ्या रेषा आणि एक संपाती रेषा मधील फरक काय आहे?

अभ्यास - 4.1

1. दिलेल्या आकृतीत नावे लिहा.



(i) कोणतेही सहा बिंदु

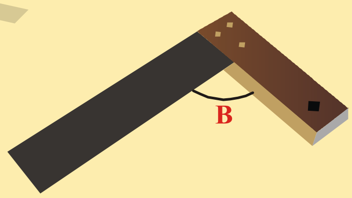
(ii) कोणतेही पाच रेषा खंड

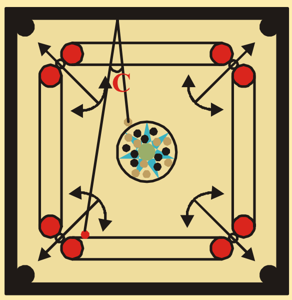
(iii) कोणतेही चार किरण

(iv) कोणतेही चार रेषा

(v) कोणतेही चार एक रेषीय बिंदु

2. खालील चित्राचे निरिक्षण करा आणि त्यातील कोणत्या प्रकारचे कोन आहेत ते सांगा.





3. खालील विधाने चुक किंवा बरोबर आहेत हे सांगा.

(i) एका किरणाला शेवटचा बिंदु नसतो.

(ii) $\overleftrightarrow{AB}$ रेषा ही $\overleftrightarrow{BA}$ रेषा सारखी आहे.

(iii) $\overrightarrow{AB}$ किरण हे $\overrightarrow{BA}$ किरण सारखेच आहे.

(iv) एका रेषेला निश्चित अशी लांबी असते.

(v) एका तळाला लांबी आणि रुंदी असते परंतु जाडपणा नसतो.

(vi) दोन वेगवेगळ्या बिंदु नेहमी एक रेषा तयार करतात.

(vii) दोन रेषा दोन बिंदुमध्ये छेदन करु शकतात.

(viii) दोन छेदन रेषा दोन्ही समांतर आणि सारख्या रेषा राहु शकत नाहीत.

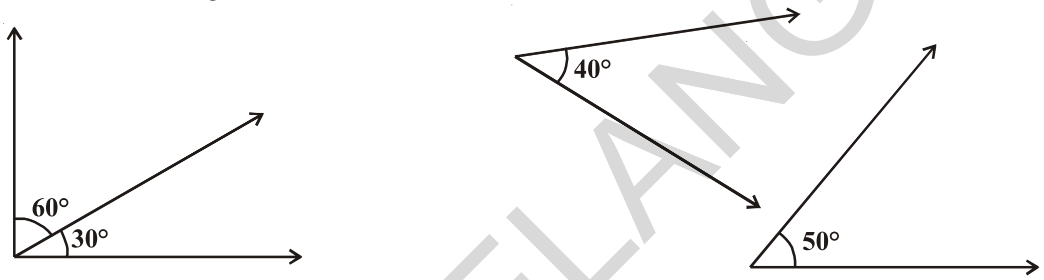
4. घड्याळाच्या दोन काट्यामधील कोन किती आहे जेव्हा घड्याळामध्ये दिलेली वेळ खाली दिली आहे.

(a) 9'O वाजता (b) 6'O वाजता (c) 7:00 वाजता

4.3 कोनांची जोडी

आता चला काही कोनांच्या जोडी बद्दल चर्चा करु या.

खालील आकृतीचे निरिक्षण करा आणि कोनांची बेरीज काढा.



(i) (ii)

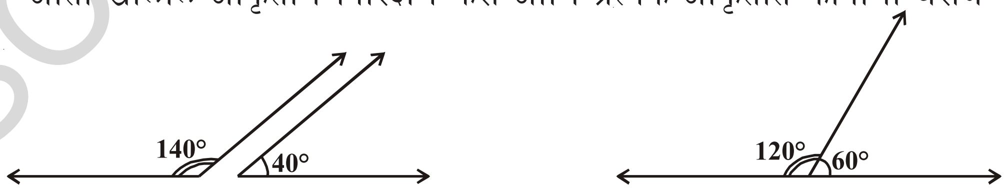
प्रत्येक आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे दोन कोनाची बेरीज काय आहे? ते 90^0 आहे. तुम्हाला माहित आहे का अशा कोनाला काय म्हणतात? त्यांना पुरक कोन असे म्हणतात.

जर दिलेला कोन x^0 आहे तर त्याचा पुरक कोन काय होतो? x^0 चा पुरक कोन $(90^0 - x^0)$ आहे.

उदाहरण-1. जर एका कोणाचे माप 62° तर पुरक कोनाचे माप माहित करा?

सोडवणुक : बेरीज 90° असल्या कारणाने 62° चा पुरक कोन $90° - 62° = 28°$

आता खालील आकृतीचे निरिक्षण करा आणि प्रत्येक आकृतीत कोनाची बेरीज करा.



प्रत्येक आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे दोन कोनाची बेरीज किती आहे? ते 180^0 आहे. तुम्हाला माहित आहे का अशा कोनाच्या जोडीला काय म्हणतात? जर दिलेला कोन x^0 नंतर त्यांचे संपुरक कोन काय आहे ? x^0 चा संपुरक कोन $(180° - x°)$ आहे.

उदाहरण-2. दोन पुरक कोन 4:5 च्या गुणोत्तरात आहेत. तर कोन माहित करा.

सोडवणुक : समजा आवश्यक कोन $4x$ आणि $5x$ आहेत.

तर $4x + 5x = 90^0$ (का?)

$9x = 90^0 \Rightarrow x = 10^0$

म्हणुन येणारे कोन 40^0 आणि 50^0 आहेत.

आता कोनाच्या जोडीचे निरिक्षण करा. जसे (120°, 240°) (100°, 260°) (180°, 180°) (50°, 310°) .....इत्यादी. तुम्ही अशा जोडींना काय म्हणतात? कोनाची जोडी त्यांची बेरीज 360° आहे त्यांना आनुमानिक कोन म्हणतात? तुम्हा270^0 चा अनुमानिक कोन सांगु शकता का? $x°$ चा कोन काय होईल?

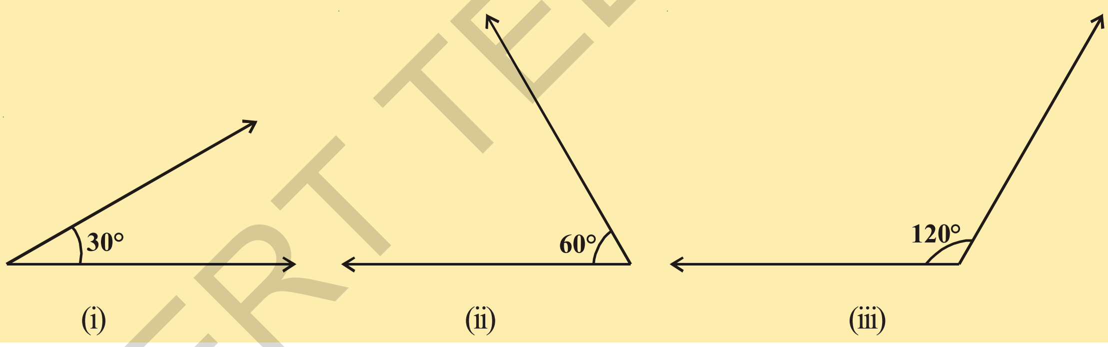
हे करा

1. खालील कोनाचे पुरक अनुमानिक कोन आणि अनुमानिक कोन लिहा.

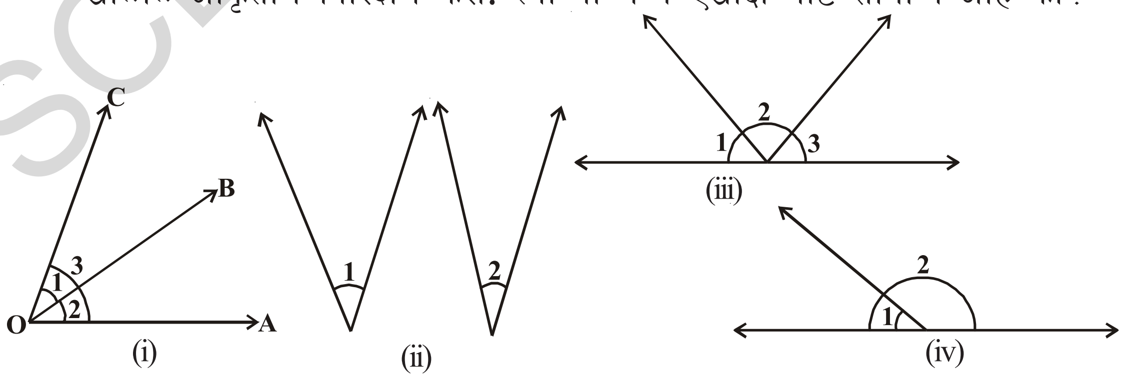
(a) 45^0 (b) 75^0 (c) 215° (d) 30^0

(e) 60^0 (f) 90° (g) 180°

2. खालील कोणत्या जोडीचे कोन पुरक किंवा संपुरक कोन बनतात.



खालील आकृतीचे निरिक्षण करा. त्याच्या मध्ये एखादी गोष्ट सामान्य आहे का?



आकृती (i) मध्ये आपण निरिक्षण करु शकतो की, शिरोबिंदु 'O' आणि बाजु '$\overrightarrow{OB}$' या $\angle 1$ आणि $\angle 2$.ला साधारण आहेत. तुम्ही असामन्य बाजु बद्दल काय सांगु शकता आणि त्यांना कसे मांडले जाते? त्यांना सामान्य बाजुच्या दोन्ही बाजुंनी मांडणी केली जाते. तशा प्रकारच्या जोडीच्या कोनाला काय म्हणतात?

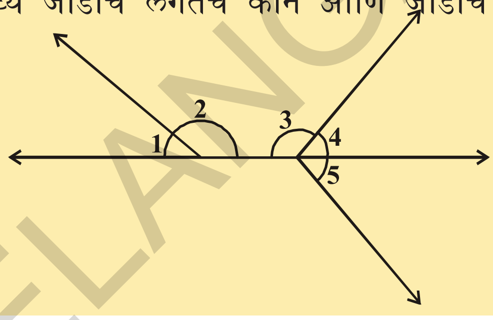
त्यांना लगतच्या जोडीचे कोन असे म्हणतात?

आकृती(ii) मध्ये, दोन कोन$\angle 1$ आणि $\angle 2$ दिले आहेत. त्यांना बाजुही नाही आणि शिरोबिंदु ही नाही. म्हणुन ते लगतचे कोन नाहीत.

प्रयत्न करा

(i) वरील आकृतीत (i, ii, iii & iv) मध्ये जोडीचे लगतचे कोन आणि जोडीचे नसणारे लगतचे कोन माहित करा.

(ii) दिलेल्या आकृतीत लगतच्या कोनाची यादी तयार करा



वरील पासुन आपण एका निष्कर्षाला येतो की, जोडीचे कोन ज्यांना साधारण शिरोबिंदु असतो त्यांना सामान्य बाजु आणि असामान्य बाजु एका साधारण बाजुवर राहतात. त्यांना लगतचे कोन म्हणतात.

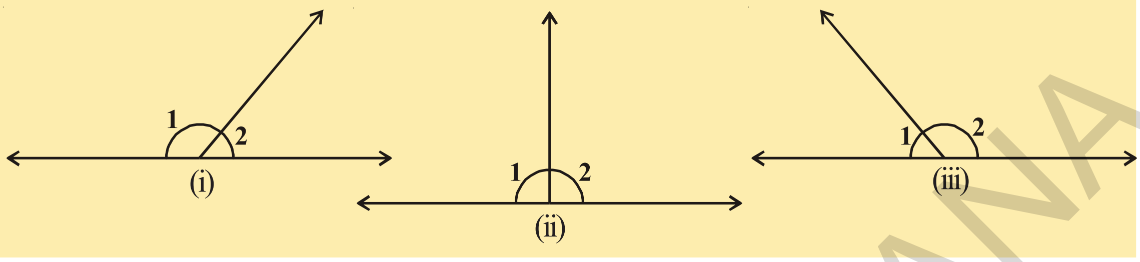
दिलेल्या आकृतीचे निरिक्षण करा, एका खेळाडुचा हात ज्यावेळी भाला फेकतो तेव्हा कोन तयार होत आहेत. कोणत्या प्रकारचे कोन तयार होत आहेत? स्पष्टपणे ते लगतचे कोन आहेत. नंतर त्या कोनाची बेरीज किती होईल? कारण ते सरळ रेषेवर आहेत. कोनाची बेरीज 180^0 आहे. आपण त्या जोडीच्या कोनाला काय म्हणतो? त्यांना रेषीय जोडी म्हणतात. म्हणुन दोन लगतच्या कोनाची बेरीज180^0 त्यांना रेषीय जोडी असे म्हणतात.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

रेषीय कोनाची जोडी नेहमी संपुरक असते. परंतु संपुरक कोन रेषीय जोडी निर्माण करणे गरजेचे नाही कारण का?

कृती

खालील आकृतीतील कोन मोजा आणि तक्ता पुर्ण करा.

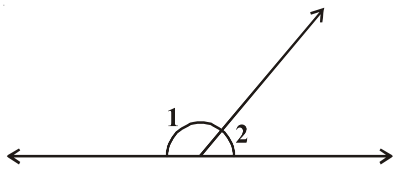


आकृती	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 1 + \angle 2$
(i)			
(ii)			
(iii)			

4.3.1 सरळ रेषा आणि कोन स्वयसिध्द

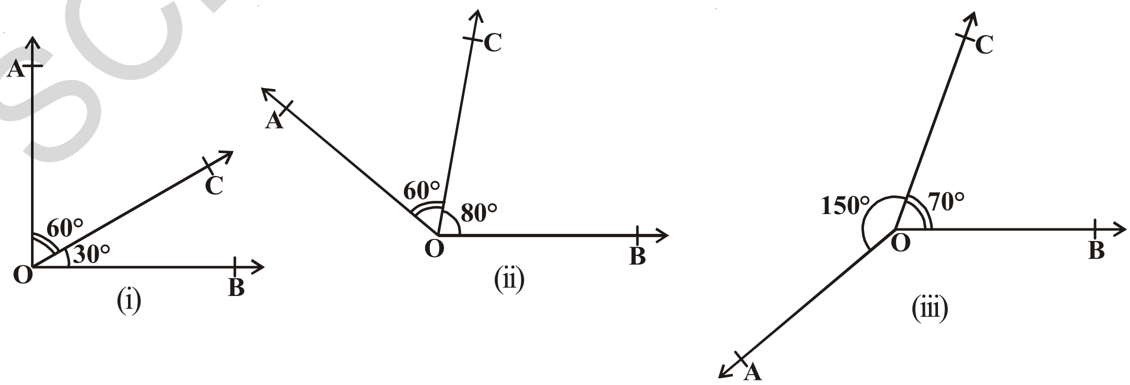
स्वयसिंध्द : जर किरण एका सरळ रेषेवर उभे राहते तर लगतचे तयार झालेल्या दोन कोणाची बेरीज $180°$ असते.

जेव्हा दोन लगतच्या कोनाची बेरीज $180°$ आहे तेव्हा त्यांना रेषीय जोडीचे कोन असे म्हणतात.

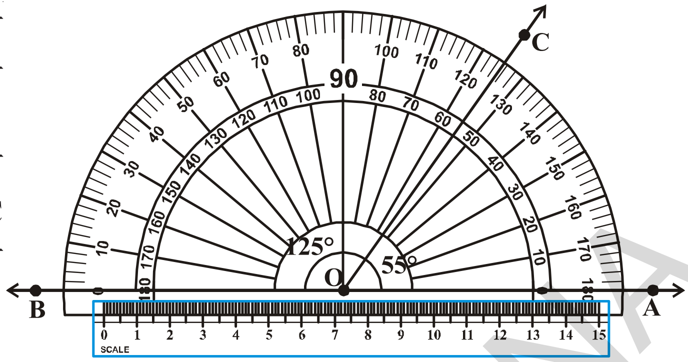


दिलेल्या आकृतीत $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$

चला खालील कृती करु या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे वेगवेगळ्या मापाचे लगतचे कोन काढा. प्रत्येक संदर्भात एका फुटपट्टीला असामान्य बाजु बरोबर ठेवा. असामान्य बाजु फुटपट्टीच्या बरोबर राहील का?

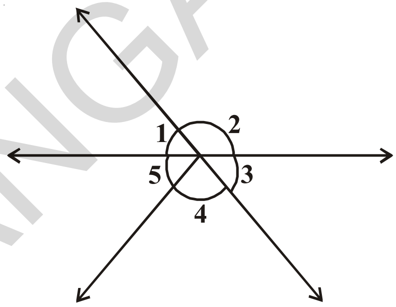


तुम्हाला माहित आहे की आकृती (iv) मध्ये, दोन्ही असामान्य बाजु रुळ(फुटपट्टी) बाजुने पडतात. सरळ रेषे पासुन असामान्य बाजुपर्यंत असते त्याचे निरिक्षण करा. $\angle AOC + \angle COB = 55° + 125° = 180°$ दुसऱ्या आकृतीत हे या सारख्या नसते.



(iv)

स्वयंसिध्द : जर लगतच्या केानाची बेरीज 180° असेल तर कोनाची असामान्य बाजु एक रेषा निर्माण होते. हे रेषीय जोडी कोनाचा स्वयसिंध्द व्यत्यास आहे.

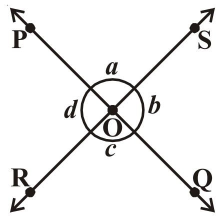


एका बिंदु जवळ कोन: आपणास माहित आहे की, एका बिंदु भोवती असलेल्या कोनाची बेरीज 360° असते.

दिलेल्या आकृतीत $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^0$

4.3.2 छेदन रेषेतील कोन:

कोणत्याही दोन छेदन रेषा काढावे आणि त्यांना नावे द्या. रेषीय जोडीचे कोन ओळखा आणि त्यांना तुमच्या वहीत लिहा. किती जोडया तयार झाल्या सांगा?

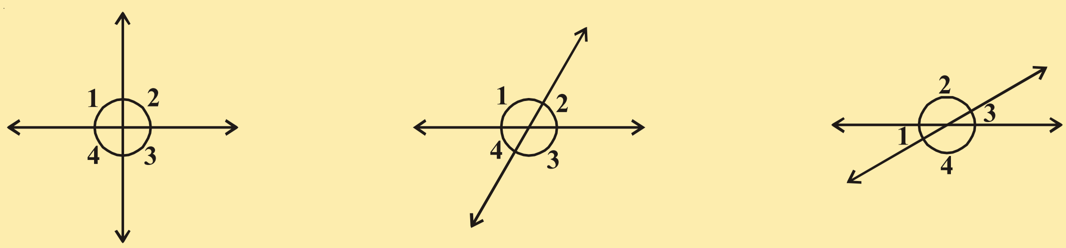


आकृतीत $\angle POS$ आणि $\angle ROQ$ एकाच शिरोबिंदुचे विरुध्द कोन आहेत आणि त्यांना सामान्य बाजु नाही आहे. म्हणुन त्यांना लंब विरुध्द कोन असे म्हणतात. (काही वेळा त्यांना लंब कोन देखील म्हणतात.)

किती जोडी लंब विरुध्द कोन आहेत? त्यांना तुम्ही पाहु शकता का? (चित्र पहा)

कृती

वरील प्रत्येक आकृतीत चार कोनाचे माप करा.1,2,3,4 आणि त्यांना पुर्ण करा.

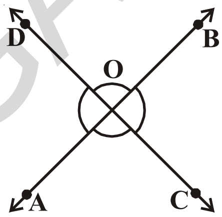


आकृती	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$
(i)				
(ii)				
(iii)				

विरुध्द असलेले लंब जोडीचे कोन बद्दल तुम्ही काय निरिक्षण करु शकता? ते समान आहेत का? आता या निकालाचा आपण तर्कशुध्द पध्दतीने सिध्द करु या.

प्रमेय-4.1 : जर दोन रेषा एकमेकांस छेदत असतील तर विरुध्द जोडीचे लंब कोन निर्माण झालेले असतात. ते समान असतात.

दिले आहे: AB आणि CD दोन रेषा O जवळ छेदत आहेत.



सिध्दता:

(i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle DOA = \angle COB$.

सिध्द:

$\overrightarrow{OA}$ किरण $\overleftrightarrow{CD}$ रेषेवर उभे राहते.

म्हणुण $\angle AOC + \angle DOA = 180°$ [रेषीय जोडीचे स्वयसिध्द कोन] .... (1)

देखील $\angle DOA + \angle BOD = 180°$ [कारण काय?] .... (2)

$\angle AOC + \angle DOA = \angle DOA + \angle BOD$ [(1) आणि (2)वरुन]

$\angle AOC = \angle BOD$ [दोन्ही बाजुंना असलेले समान कोन]

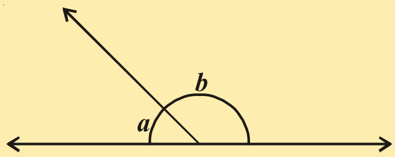
तशाच प्रकारे आपण सिध्द करु शकतो की,

$\angle DOA = \angle COB$

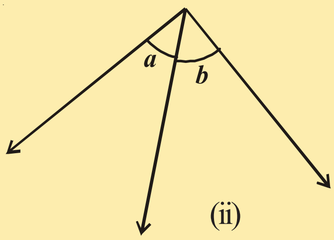
तुम्ही स्व:ताहा करा.

हे करा

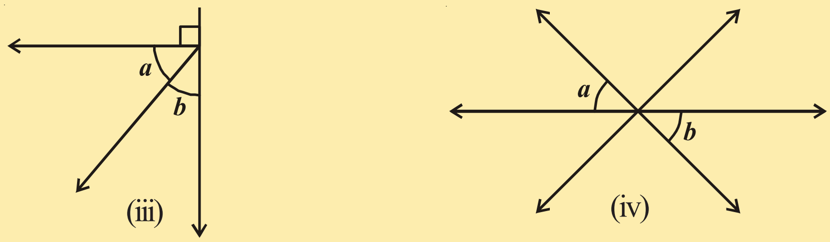
1. दिलेल्या जोडीचे पुरक कोन, रेषीय जोडीचे कोन विरुध्द लंब जोडीचे कोन आणि लगतचे कोन वर्गीकरण करा.



(i)

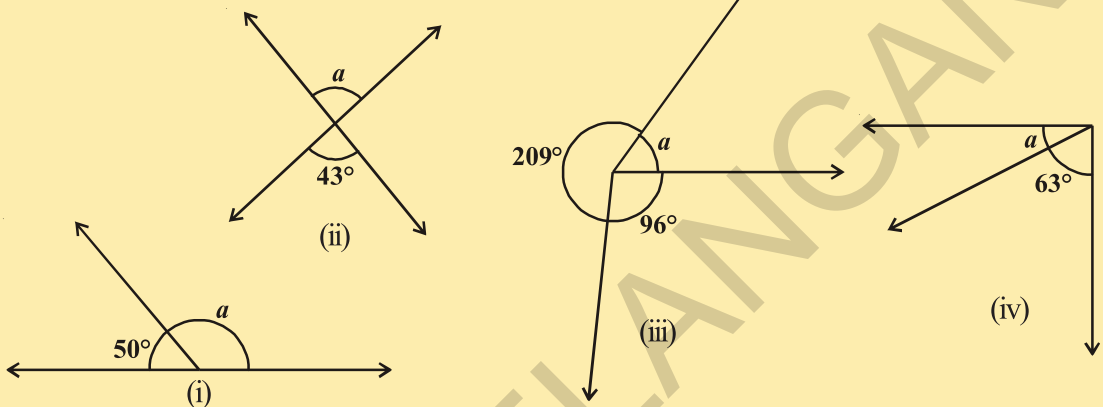


(ii)



(iii) (iv)

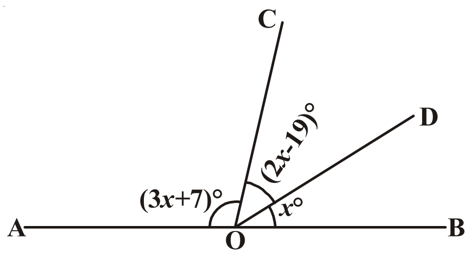
2. प्रत्येक आकृतीत ‘a’ कोनाचे माप माहित करा. प्रत्येक संदर्भात कारणे द्या.



(i) (ii) (iii) (iv)

आता, आपण काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण - 3. लगतच्या आकृतीमध्ये $\overleftrightarrow{AB}$ ही एक सरळ रेषा आहे. तर x ची किंमत माहित करा. आणि $\angle AOC$, $\angle COD$ आणि $\angle BOD$ ची देखील किंमत माहित करा.



सोडवणुक : $\overleftrightarrow{AB}$ एक सरळ रेषा असल्यामुळे सर्व कोनाची बेरीज $\overleftrightarrow{AB}$ रेषेवर O बिंदु जवळ 180^0 आहे.

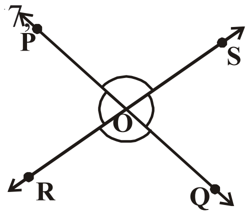
$\therefore (3x + 7)° + (2x - 19)° + x = 180°$ (रेषीय कोन)

$\Rightarrow 6x - 12 = 180 \Rightarrow 6x = 192 \Rightarrow x = 32°$.

So, $\angle AOC = (3x + 7)° = (3\times 32 + 7)^o = 103^o$,

$\angle COD = (2x - 19)° = (2 \times 32 - 19)^o = 45^o$, $\angle BOD = 32^o$.

उदाहरण - 4. लगतच्या आकृतीत PQ आणि RS रेषा एकमेकांस O बिंदुजवळ छेदन करतात. जर $\angle POR : \angle ROQ = 5: 7$, सर्व कोन माहित करा.



सोडवणुक: $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (रेषीय कोन)

परंतु $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (दिले आहे)

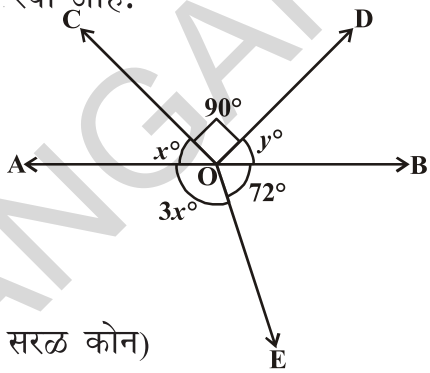
म्हणुन $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180 = 75°$

अशाप्रकारे $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180 = 105°$

आता, $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ (लंब विरुध्द कोन)

आणि $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ (लंब विरुध्द कोन)

उदाहरण-5. दिलेल्या लगतच्या आकृतीत $\angle AOC$, $\angle BOD$ आणि $\angle AOE$ ला मोजा दिले आहे. $\angle COD = 90°$, $\angle BOE = 72°$ आणि AOB एक सरळ रेषा आहे.



सोडवणुक: AOB एक सरळ रेषा असल्यामुळे आपणास

$\angle AOE + \angle EOB = 180°$

$= 3x° + 72° = 180°$

$\Rightarrow 3x° = 108° \Rightarrow x = 36°$.

आपणास माहित आहे.

$\therefore \angle COA + \angle DOC + \angle BOD = 180^0$ ($\because$ सरळ कोन)

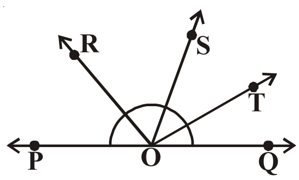
$\Rightarrow x° + 90° + y° = 180°$

$\Rightarrow 36° + 90° + y° = 180°$

$y° = 180° - 126° = 54°$

$\therefore \angle COA = 36°$, $\angle BOD = 54°$ आणि $\angle AOE = 108°$.

उदाहरण-6. लगतच्या आकृतीत OS किरण PQ रेषेवर उभे आहे. किरण OR आणि किरण OT हे $\angle SOP$ आणि $\angle QOS$ चे कोन दुभाजक अनुक्रमे आहेत $\angle TOR$ तर माहित करा.



सोडवणुक : OS किरण PQ रेषेवर उभे राहते.

म्हणुन $\angle SOP + \angle QOS = 180°$ (रेषीय जोडी)

समजा $\angle SOP = x°$

म्हणुन $x° + \angle QOS = 180°$ (कसे ?)

म्हणुन $\angle QOS = 180° - x°$

आता, OR किरण $\angle POS$ दुभागते , म्हणुन

$\angle SOR = \frac{1}{2} \times \angle SOP$

$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$

याच प्रमाणे $\angle TOS = \frac{1}{2} \times \angle QOS$

$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - x)$

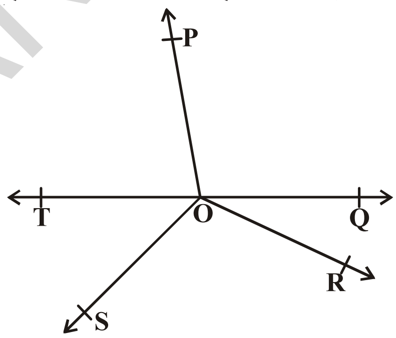
$= 90^\circ - \frac{x^\circ}{2}$

आता $\angle TOR = \angle SOR + \angle TOS$

$= \frac{x^\circ}{2} + \left(90^\circ - \frac{x^\circ}{2}\right)$

$= 90^\circ$

उदाहरण-7. लगतच्या आकृतीत $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ आणि $\overrightarrow{OS}$ हे चार किरण आहेत. सिध्द करा की, $\angle QOP + \angle ROQ + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$.



सोडवणुक : दिलेल्या आकृतीत $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ किंवा $\overrightarrow{OS}$ यापैकी केाणत्याही किरणाच्या विरुध्दता एक किरण काढायची गरज आहे. $\overrightarrow{OT}$ किरण अशाप्रकारे काढा की, $\overleftrightarrow{TOQ}$ एक रेषा बनते. आता OP किरण $\overleftrightarrow{TQ}$ रेषेवर उभे राहते.

म्हणुन $\angle TOP + \angle POQ = 180^\circ$ .... (1) (रेषीय जोडी)

याच प्रमाणे $\overrightarrow{OS}$ किरण $\overleftrightarrow{TQ}$ रेषेवर उभे राहते.

म्हणुन $\angle TOS + \angle SOQ = 180^\circ$ .... (2) (कारण का?)

परंतु $\angle SOQ = \angle SOR + \angle ROQ$

म्हणुन (2) असे बनते.

$\angle TOS + \angle SOR + \angle ROQ = 180^\circ$ .... (3)

आता (1) आणि (3) ला मिळविले असता आपणास येते.

$\angle POT + \angle QOP + \angle TOS + \angle SOR + \angle ROQ = 360^\circ$ .... (4)

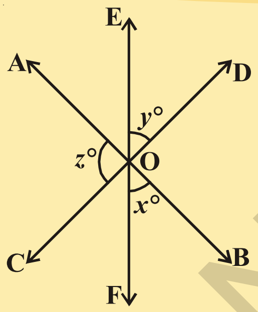
परंतु $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

म्हणुन (4) असे बनते.

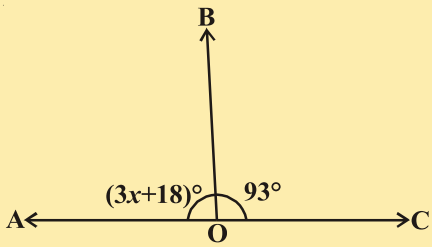
$\angle QOP + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^\circ$

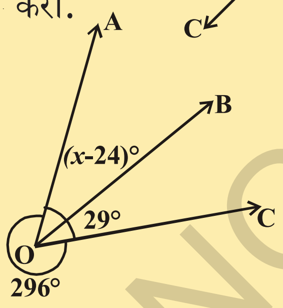
अभ्यास - 4.2

1. दिलेल्या आकृतीत $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ आणि $\overleftrightarrow{EF}$ तिन्ही रेषा O बिंदु जवळ छेदन करतात. तर x, y आणि z ची किंमत माहित करा दिलेले आहे कि, x : y : z = 2 : 3 : 5

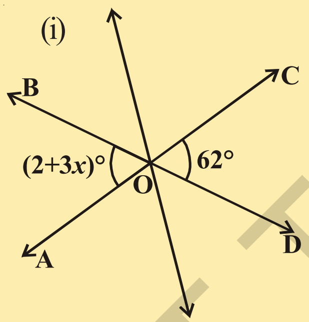


2. खालील आकृतीत x ची किंमत माहित करा.

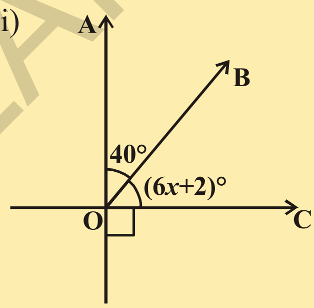




(i)

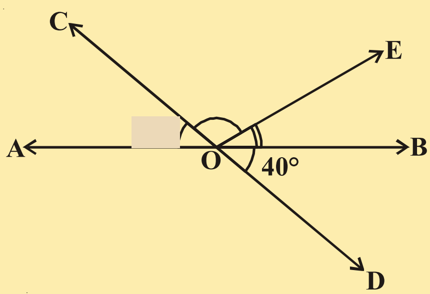


(ii)

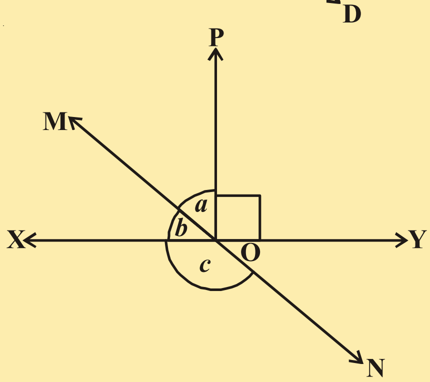


(iii)

(iv)

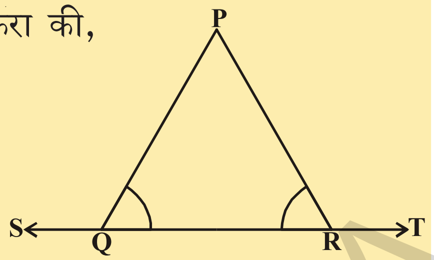


3. दिलेल्या आकृतीत रेषा $\overleftrightarrow{AB}$ आणि $\overleftrightarrow{CD}$ या O बिंदु जवळ छेदन करतात. जर $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ आणि $\angle DOB = 40°$ तर $\angle BOE$ आणि परावर्तीत कोन $\angle EOC$ माहित करा.

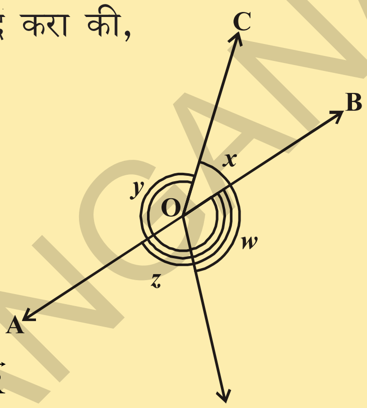


4. दिलेल्या आकृतीत $\overleftrightarrow{XY}$ आणि $\overleftrightarrow{MN}$ रेषा एक O बिंदु जवळ छेदन करतात. जर $\angle YOP = 90°$ आणि a: b = 2 : 3 तर c माहित करा.

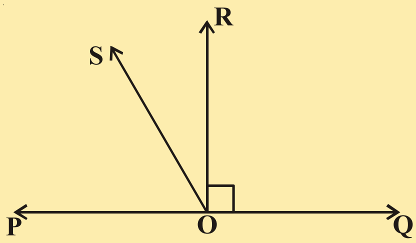
5. दिलेल्या आकृतीत $\angle RQP = \angle PRQ$ तर सिध्द करा की, $\angle PQS = \angle TRP$.



6. दिलेल्या आकृतीत, जर $x + y = w + z$ तर सिध्द करा की, AOB हे एक रेषा आहे.



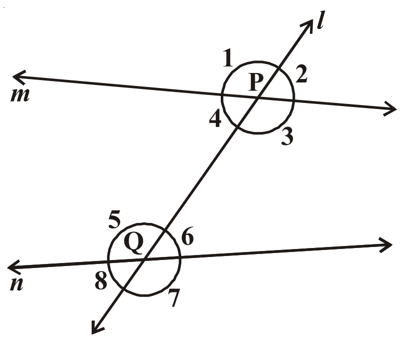
7. दिलेल्या आकृतीत $\overleftrightarrow{PQ}$ एक रेषा आहे. किरण $\overrightarrow{OR}$ हे रेषा $\overleftrightarrow{PQ}$ ला लंब आहे. $\overrightarrow{OS}$ हे दुसरे किरण आहे जे की, $\overrightarrow{OP}$ आणि $\overrightarrow{OR}$ किरणाच्या मध्ये आहे. सिध्द करा. $\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle SOP)$



8. दिलेल्या आकृतीत $\angle XYZ = 64°$ आणि XY ला P पर्यंत वाढविले आहे. एक किरण YQ ला दुभागते. दिलेल्या माहिती नुसार एक आकृती काढा. कोन $\angle ZYP$ आणि परावर्तीत कोन $\angle XYQ$ आणि $\angle QYP$ माहित करा.

4.4 रेषा आणि छेदिका रेषाः

आकृतीचे निरिक्षण करा. किती बिंदुज़वळ l रेषा m आणि n रेषांना मिळतात? रेषा l बाकी दोन रेषांना दोन वेगवेगळ्या बिंदु जवळ मिळते. तशा रेषेला तुम्ही काय म्हणतात? ते छेदित रेषा आहे. हे रेषा म्हणजे दोन वेगळ्या रेषांना दोन वेगवेगळ्या बिंदु जवळ मिळते. 'l' रेषा 'm' आणि 'n' रेषांना 'P' आणि 'Q' जवळ अनुक्रमे छेदन करते म्हणन l रेषा m आणि n रेषांना छेदीत रेषा म्हणतात.



जेव्हा छेदित रेषा जोड रेषांना छेदन करते तेव्हा तयार झालेल्या कोनांच्या संख्येचे निरिक्षण करा.

जर एक छेदित रेषा दोन रेषांना मिळते तर आठ कोन तयार होतात.

चला त्या कोनांना नावे द्या. जसे $\angle 1, \angle 2 \ldots \angle 8$ आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे तुम्ही या कोनाचे वर्गीकरण करु शकता का? काही बाह्य कोन आहेत आणि काही अंतर कोन आहेत. $\angle 1, \angle 2, \angle 7$ आणि $\angle 8$ यांना बाह्य कोन म्हणतात आणि $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ आणि $\angle 6$ यांना अंतर कोन असे म्हणतात.

जे कोन लगतचे कोन नाहीत आणि छेदित रेषेच्या सारख्या बाजुला असुन एक कोन अंतर कोन आहे आणि दुसरा कोन बाह्य कोन यांना संगत कोन असे म्हणतात.

दिलेल्या आकृती वरुन

(a) संगत कोन कोणते आहेत?

(i) $\angle 1$ आणि $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ आणि $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ आणि $\angle$ 8 (iv) $\angle 3$ आणि $\angle$ 7,म्हणुन संगत कोनाच्या चार जोड्या आहेत.

(b) पर्यायी अंतर कोन कोणते आहेत?

(i) $\angle 4$ आणि $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ आणि $\angle 5$,हे दोन पर्यायी अंतर कोन आहेत(का?)

(c) पर्यायी बाह्य कोन कोणते आहेत?

(i) $\angle 1$ आणि $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ आणि $\angle 8$, हे दोन पर्यायी अंतरबाह्य कोन आहेत(का?)

(d) छेदीत रेषेच्या एकाच बाजुला कोणते अंतर कोन आहेत?

(i) $\angle 4$ आणि $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ आणि $\angle 6$ हे दोन छेदित रेषेच्या एकाच बाजुला अंतर कोन आहेत (कारण का?)

छेदित रेषेच्या एकाच बाजुला असलेले अंतर कोन यांना क्रमवार अंतर कोन किंवा सह अंतर कोन किंवा सोबत कोन म्हणतात.

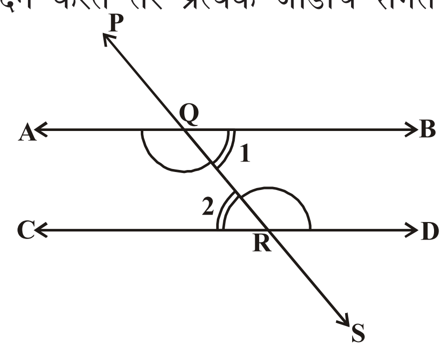
(e) एका छेदित रेषेच्या एकाच बिंदुला असणारे बाह्य कोन कोणते?

(i) $\angle 1, \angle 8$ (ii) $\angle 2, \angle 7$ एका छेदित रेषेच्या सारख्या बाजुंना बाह्य कोनांची जोडी असते (का?)

एका छेदित रेषेच्या एकाच बाजुला असलेले बाह्य कोनांना क्रमवार कोन बाह्य कोन किंवा सहबाह्य कोन किंवा सोबत बाह्य कोन असे म्हणतात.

आपण संगत कोनाबद्दल काय म्हणु शकतो जे की, दोन रेषा l आणि m ला समांतर आहेत. तपासणी करा आणि माहित करा ते समान बनते का? ते समान समांतर संगत कोनाचे स्वय:सिध्द जर एक छेदित रेषा दोन समांतर रेषांना छेदन करते तर प्रत्येक जोडीचे संगत कोन समान आहेत.

पर्यायी अंतर कोना मधील संबंध काय आहे?(i) $\angle RQB$ आणि $\angle QRC$ (ii) $\angle AQR$ आणि $\angle QRD$ आकृती मध्ये काढा?



आपण पर्यायी अंतर कोनामधील संबंध माहित करण्यासाठी संगत कोनाचा स्वय:सिध्द वापर करु शकतो का?

आकृतीमध्ये $\overleftrightarrow{PS}$ छेदित रेषा दोन समांतर रेषा $\overleftrightarrow{AB}$ आणि $\overleftrightarrow{CD}$ यांना Q आणि R बिंदु जवळ अनुक्रमे छेदन करते.

चला सिध्द करु या की, $\angle RQB = \angle QRC$ आणि $\angle AQR = \angle DRQ$

तुम्हास माहित आहे. $\angle PQA = \angle QRC$ ..... (1) (संगत कोणाचे गुणधर्म)

आणि $\angle PQA = \angle BQR$ ..... (2) (का ?)

म्हुणन (1)आणि (2) पासुन तुम्ही एका निष्कर्शाला येतो की, $\angle RQB = \angle QRC$.

त्याच प्रमाणे $\angle AQR = \angle DRQ$.

या निकालास खालील प्रमेय रुपात मांडता येते.

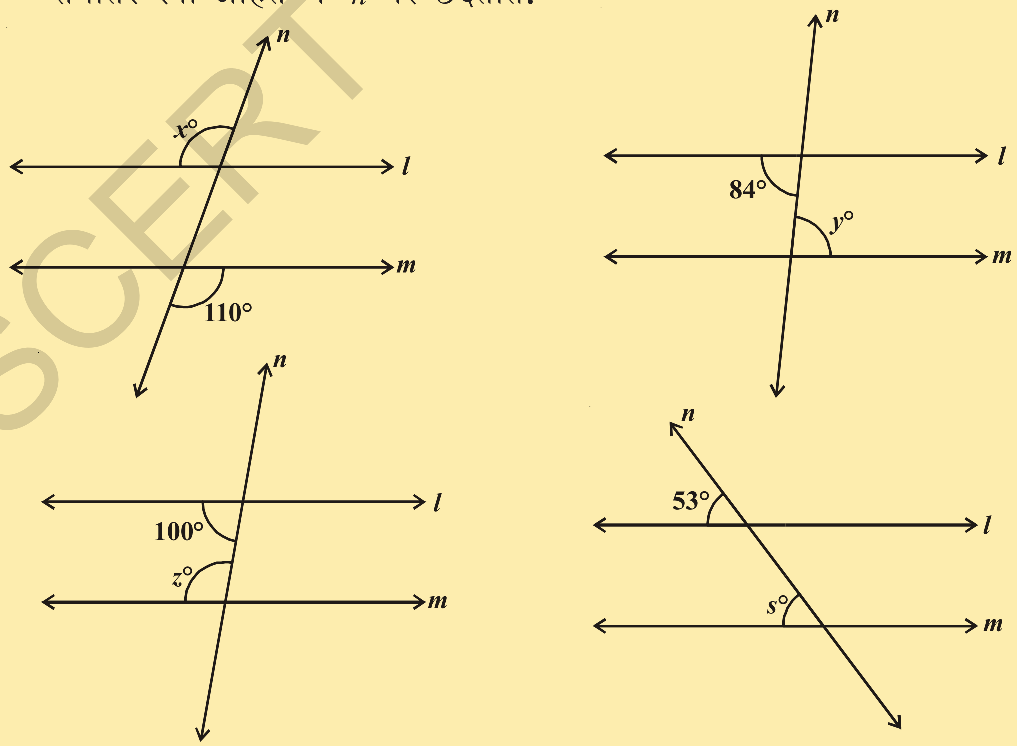
प्रमेय-4.2 : जर एक छेदित रेषा दोन समांतर रेषेना छेदन करते तर प्रत्येक पर्यायी अंतर कोन समान असतात.

अशाच रितीने तुम्हाला खालील प्रमेय छेदित रेषेच्या एकाच बाजुला असलेल्या अंतर कोनासोबत संबंधीत आहेत.

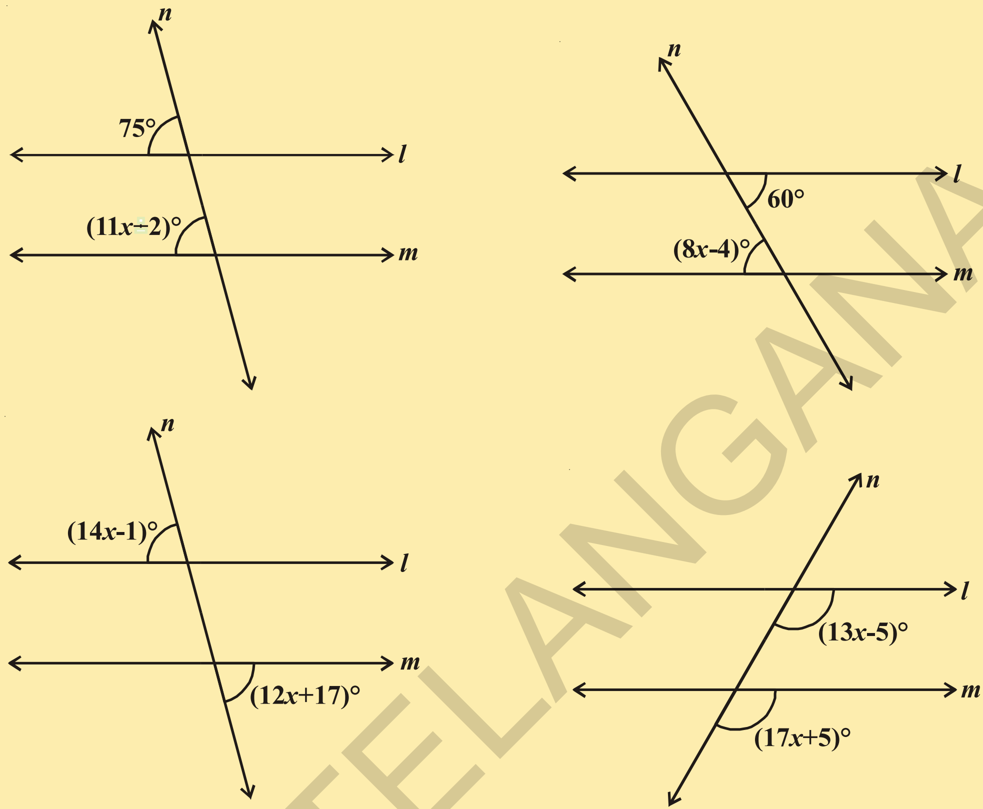
प्रमेय-4.3 : जर एक छेदित रेषा दोन समांतर रेषांना छेदन करते तर छेदित रेषेच्या सारख्या बाजुंचे प्रत्येक अंतर कोन संपुरक असतात.

हे करा

1. प्रत्येक आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे कोणाचे माप काढा जेथे l आणि m हे समांतर रेषा आहेत जे n वर छेदतात.

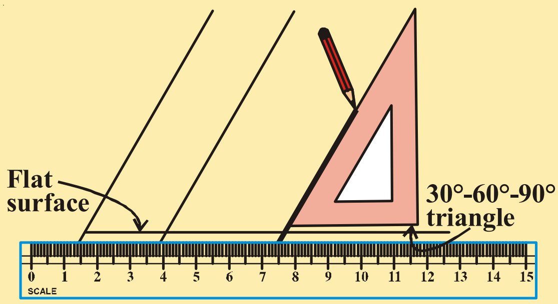


2. 'x' साठी सोडवा आणि कारणे द्या.



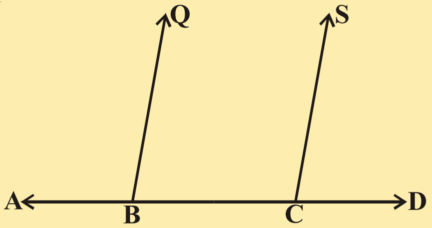
कृती

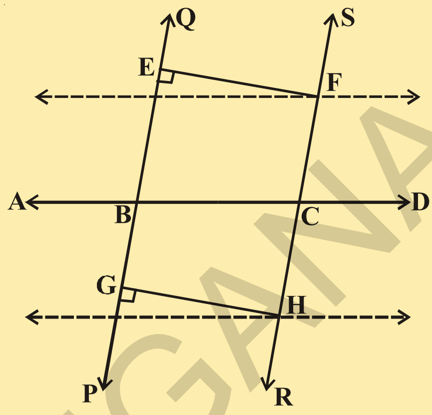
एक स्केलपट्टी घ्या आणि चौरस तयार करा आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे स्केलपट्टीवर चौरसाची मांडणी करा. तयार झालेल्या चौरसाच्या झुकाव बाजुने एका पेन्सीलने एक रेषा काढा. आता तुमच्या चौरस त्याच्या समांतर बाजुने झुकवा आणि पुन्हा एक रेषा काढा. आपणास दिसुन येते की, रेषा समांतर आहेत. ते समांतर का असते? तुमच्या मित्रासोबत विचार करा आणि चर्चा करा.



हे करा

एक रेषा $\overleftrightarrow{AD}$ काढा B आणि C बिंदुची त्याच्यावर खुण करा. B आणि C जवळ आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे $\angle ABQ$ आणि $\angle BCS$ एकमेकांसी समान असलेल्या कोणाचे निर्माण करा. AD च्या दुसऱ्या बाजुला QB आणि SC वाढवा जेणे करुन PQ आणि RS दोन रेषा तयार होतील.

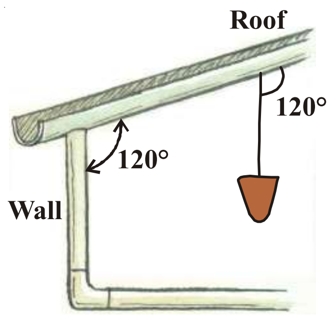




दोन रेषा PQ आणि RS ला साधारण लंब EF आणि GH काढा. EF आणि GH ची लांबी मोजा. तुम्हाल काय आढळते? त्याच्या पासुन तुम्ही कोणता अनुमान काढला? परत एकदा आठवण करा जर दोन रेषा मधील लंब अंतर असेल तर ते समांतर रेषा असतात.

स्वय:सिध्द-1 : संगत कोन स्वय:सिध्दतेचा व्यत्यास:जर एक छेदित रेषा दोन रेषांना अशा प्रकारे छेदन करते की, त्यांचे संगत कोन समान असतात. तर दोन रेषा एकमेकांस समांतर असतात.

एक मोळका चेंडु एका तारेला वजन लटकुन ठेवा आणि त्या तारेला येथे नळ एका रेषा म्हुणन समजले जाते. वजन तारेला अशा रितीने ओढतो की, ते एका सरळ लंब रेषेत असले पाहिजे. समजा भिंतीं मधील आणि छप्पर मधील कोन 120^0 आहे. तेव्हा गवंडी एका निष्कर्षाला येते की, भिंत जमीनीच्या लंब आहे. विचार करा की, तो या निष्कर्षाला करता आला.



आता संगत कोणाच्या गुणधर्माचा व्यत्यासाचा दाखुव शकतो की, दोन रेषा समांतर आहेत जर पर्यायी केानाची जोडी समान असते.

आकृतीमध्ये छेदीत रेषा PS , $\overleftrightarrow{AB}$ आणि $\overleftrightarrow{CD}$ ला Q आणि R ला छेदन करते अशाप्रकारे की पर्यायी अंतर कोन $\angle BQR$ आणि $\angle QRC$ समान आहेत.

म्हणजेच $\angle RQB = \angle QRC$.

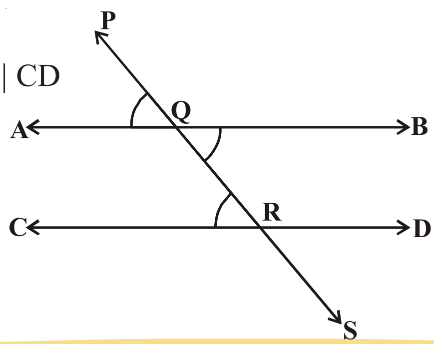
आता आपणास सिध्द करण्याची गरज आहे.$AB \parallel CD$

$\angle BQR = \angle PQA$ (का?) ... (1)

परंतु $\angle BQR = \angle QRC$ (दिले आहे)... (2)

म्हणुन (1) आणि (2) पासुन

$\angle PQA = \angle QRC$



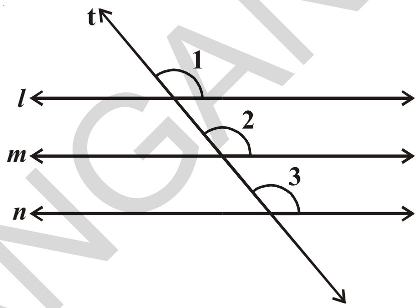
परंतु ते जोड रेषा $\overleftrightarrow{AB}$ आणि $\overleftrightarrow{CD}$ बरोबर $\overleftrightarrow{PS}$ छेदीत रेषांना संगत कोन आहेत. म्हणुन

म्हणुन $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (संगत कोनाच्या गुणधर्माचा व्यत्यास)

वरील निकालास खाली दाखविल्या प्रमेय रुपात

प्रमेय-4.4 : जर एक छेदीत रेषा दोन रेषांना छेदन अशाप्रकारे करते की,व्यत्क्रम कोन समांतर कोन समान असतील नंतर दोन रेषा समांतर आहेत.

4.4.1 सारख्या रेषेना समांतर रेषा



जर दोन रेषा सारख्या रेषेना समांतर असतील तर ते एकमेकांस समांतर असतात.

चला याची तपासणी करा. तिन रेषा l, m आणि n अशाप्रकारे की $m \parallel l$ आणि $n \parallel l$

आता एक छेदित रेषा 't' l, m आणि n.

आता आकृती पासुन $\angle 1 = \angle 2$ आणि $\angle 1 = \angle 3$

(संगत कोनाचा गुणधर्म)

म्हणुन $\angle 2 = \angle 3$ परंतु हे दोन कोन m & n रेषेसाठी जोडीचे संगत कोन निर्माण करतात.

म्हणुन तुम्ही म्हणु शकता की, $m \parallel n$.

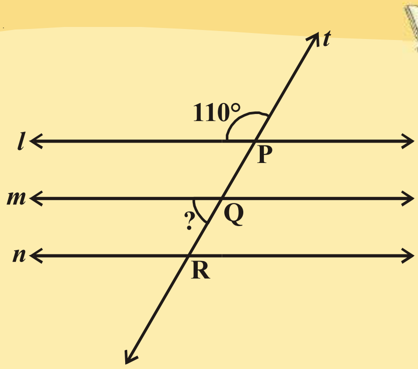
(संगत कोनाच्या गुणधर्माचा व्यत्यास)

प्रमेय-4.5 : रेषा जे सारख्या रेषेला समांतर असतात हे ऐकमेकास समांतर असतात.

प्रयत्न करा

(i) दिलेल्या आकृतीत प्रश्नार्थक खुण केलेल्या कोनाचे माप माहित करा.

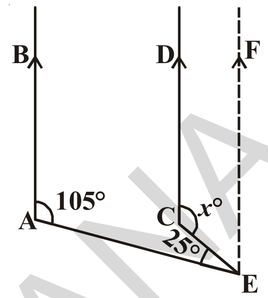
(ii) $\angle P$ ला समान असलेल्या कोनांणा माहित करा.



आता, काही समांतररेषेचे उदारण पाहु या.

उदाहरण-8. आकृती दाखविल्याप्रमाणे AB|| CD आहे तर x ची किंमत काढा.

सोडवणुक : E पासुन EF || AB || CD. EF || CD आणि CE एक छेदिका आहे.



$\therefore$ $\angle ECD + \angle FEC = 180^o$ [$\because$ सह अंतर कोन]

$\Rightarrow$ $x^o + \angle FEC = 180^o \Rightarrow \angle FEC = (180 - x^o)$.

पुन्हा EF || AB आणि AE एक छेदिका रेषा आहे.

$\angle EAB + \angle FEA = 180^o$ [$\because$ सह अंतर कोण]

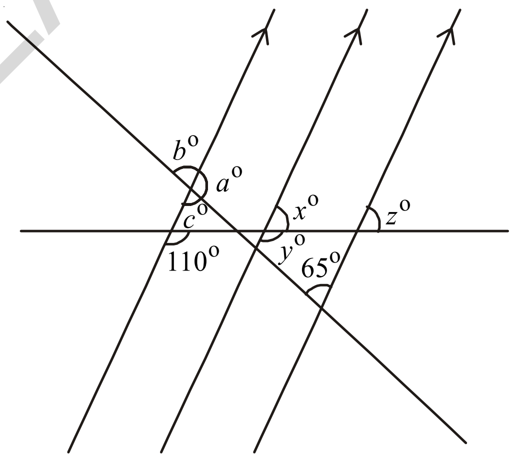
$\Rightarrow 105^o + \angle AEC + \angle FEC = 180^o$

$\Rightarrow$ $105^o + 25^o + (180^o - x^o) = 180^o$

$\Rightarrow$ $310 - x° = 180°$

म्हणुन $x = 130°$.

उदाहरण-9. बाजुच्या आकृतीत x, y, z आणि $a, b, c.$ किमत काढा.



सोडवणुक : स्पष्टपणे आपणास आहे की,

$y^o = 110^o$ ($\because$ संगत कोन)

$\Rightarrow$ $x^o + y^o = 180^o$ (रेषीय कोन)

$\Rightarrow$ $x^o + 110^o = 180^o$

$\Rightarrow$ $x^o = (180^o - 110^o) = 70^o$.

$z^o = x^o = 70^o$ ($\because$ संगत कोन)

$c^o = 65^o$ (कसे ?)

$a^o + c^o = 180^o$ (रेषीय जोडी)

$\Rightarrow$ $a^o + 65^o = 180^o$

$\Rightarrow$ $a^o = (180^o - 65^o) = 115^o$.

$b^o = c^o = 65^o$. [$\because$ विरुध्द लंब कोन]

म्हणुन, $a = 115°$, $b = 65°$, $c = 65°$, $x = 70°$, $y = 110°$, $z = 70°$.

उदाहरण 10. दिलेल्या आकृतीत रेषा EF आणि GH या समांतर रेषा आहेत. तर x ची किंमत माहित करा जर AB आणि CD रेषा समांतर आहेत.

सोडवणुक : $4x° = \angle APR$ (कसे ?)

$\angle APR = \angle PQS$ (कसे ?)

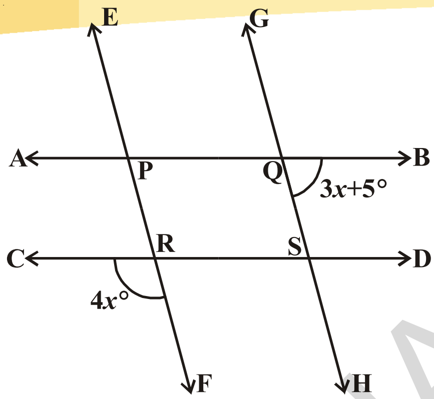
$\angle PQS + \angle SQB = 180°$ (Why?)

$4x° + (3x + 5)° = 180°$

$7x° + 5° = 180°$

$x° = \dfrac{180° - 5°}{7}$

$= 25°$



उदाहरण-11. आकृतीत दिल्याप्रमाणे PQ || RS, $\angle MXQ = 135°$ आणि $\angle MYR = 40°$ तर माहित करा की, $\angle XMY$ किती ?

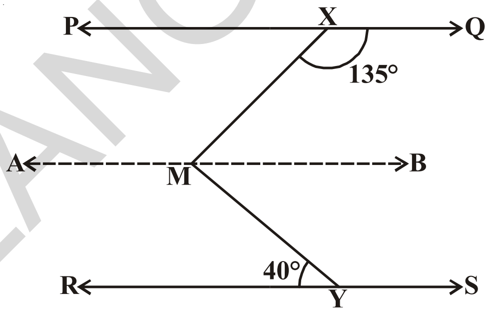
सोडवणुक : PQ ला समांतर असलेली रेषा AB ची रचना करा जे M बिंदु मधुन जाते.

आता AB || PQ आणि PQ || RS.

म्हणुन AB || RS

आता, $\angle MXQ + \angle BMX = 180°$

(AB || PQ,एकाच रेषेवर अंतर कोन छेदीत रेषाची बाजु XM)



म्हणुन $135° + \angle BMX = 180°$

म्हणुन $\angle BMX = 45°$ ...(1)

आता, $\angle YMB = \angle MYR$ (व्युत्क्रम अंतर कोन जसे AB || RS)

म्हणुन $\angle YMB = 40°$ ...(2)

(1) आणि (2) ची बेरीज केली असता.

$\angle BMX + \angle YMB = 45° + 40°$

ते म्हणजे, $\angle YMX = 85°$

उदाहरण-12. जर छेदीत रेषांना छेदन अशाप्रकारे करते की, संगत जोडी कोनाचा दुभाजक रेषांना समांतर आहे हे सिध्द करा की, रेषा समांतर आहेत.

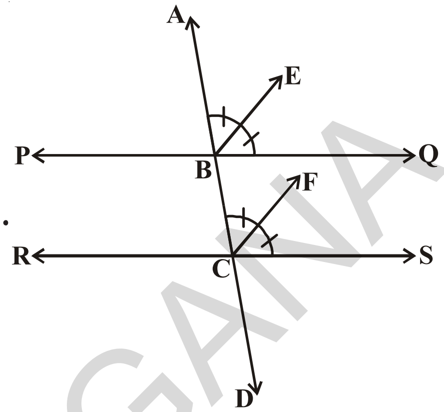
सोडवणुक : दिलेल्या आकृतीमध्ये एक छेदीत रेषा $\overleftrightarrow{AD}$ दोन रेषा $\overleftrightarrow{PQ}$ आणि $\overleftrightarrow{RS}$ यांना दोन बिंदु B आणि C जवळ छेदन करते. $\overrightarrow{BE}$ किरण हे $\angle ABQ$ चा दुभाजक आणि किरण $\overrightarrow{CF}$ हे $\angle BCS$ चा दुभाजक आहे आणि BE || CF आहे. आपणास सिध्द करायाचे आहे की, PQ || RS. खालील जोडी पैकी कोणतेही एक सिध्द करण्याची अवश्यकता आहे.

i. संगत कोन समान आहेत.

ii. अंतर कोन किंवा बाह्य कोनाची जोडी हे समान आहेत.

iii. एका छेदीत रेषेच्या सारख्या बाजुंना असलेले अंतर कोन संपुरक कोन आहेत.

आकृती पासुन आपण सिध्द करण्याचा प्रयत्न करु या की, जोडीचे संगत कोन समान म्हणुन हे दिलेले आहे की, $\angle QBA$ चा किरण BE हा दुभाजक आहे.



$\angle EBA = \frac{1}{2} \angle QBA.$ ... (1)

त्याप्रमाणे CF हे $\angle BCS$ चा दुभाजक आहे.

म्हणुन $\angle BCF = \frac{1}{2} \angle BCS$ ... (2)

परंतु BE आणि CF समांतर रेषांना $\overleftrightarrow{AD}$ हे छेदीत रेषा आहे.

म्हणुन $\angle EBA = \angle FCB$

(संगत कोनाचा गुणधर्म) ... (3)

समीकरण (1) आणि (2) पासुन आपणास येते की, (3)

$$\frac{1}{2} \angle QBA = \frac{1}{2} \angle SCB$$

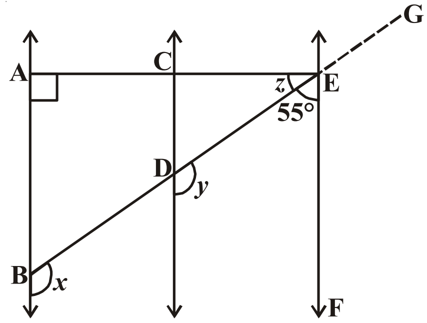
$$\therefore \quad \angle QBA = \angle SCB$$

परंतु हे संगत कोन $\overleftrightarrow{PQ}$ आणि $\overleftrightarrow{RS}$ रेषे बरोबर $\overleftrightarrow{AD}$ छेदीत रेषेने बनणारे कोन आहे.

म्हणुन PQ || RS (संगम कोनाच्या गुणधर्माचा व्यत्यास)

उदाहरण-13. दिलेल्या आकृतीत AB || CD आणि CD || EF आणखी देखील $EA \perp AB$ जर $\angle BEF = 55°$ तर x, y आणि z ची किंमत काढा.

सोडवणुक : BE ला G. पर्यंत वाढवा.



आता, $\angle FEG = 180° - 55°$ (कारण काय ?)

$= 125°$

देखील $\angle FEG = x = y = 125°$ (कारण काय ?)

आता $z = 90° - 55°$ (कारण काय ?)

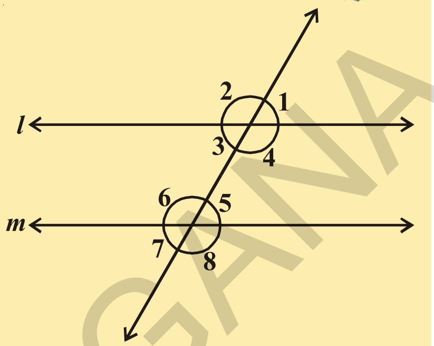
$= 35°$

दोन रेषा समांतर असतात. हे सिध्द करण्याच्या वेगवेगळ्या पध्दती.

1. जोडीचे संगत कोन समान आहेत हे दाखविणे.
2. व्यत्क्रम अंतर कोन समान आहेत हे दाखविणे.
3. छेदीत रेषेच्या सारख्या बाजु जोडीचे अंतर कोन संपुरक असतात हे दाखविणे.
4. प्रतलामध्ये दोन्ही रेषा त्याचे रेषेला लंब ⊥ हे दाखविणे.
5. दोन रेषा तिसऱ्या रेषेला समांतर आहेत हे दाखविणे.

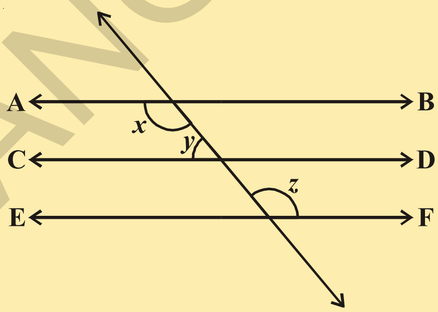
अभ्यास - 4.3

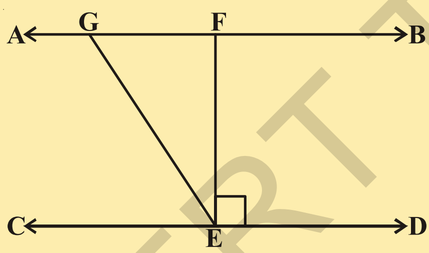
1. दिले आहे की, $l \parallel m$ सिध्द करा की, $\angle 1$ हा कोन $\angle 8$ चा संपुरकाच्या आहे. विधानासाठी तुमचे कारण लिहा.



विधान	**कारण**
i. $l \parallel m$	________
ii. $\angle 1 = \angle 5$	________
iii. $\angle 5 + \angle 8 = 180°$	________
iv. $\angle 1 + \angle 8 = 180°$	________
v. $\angle 1$ हा $\angle 8$चा संपुरक	________

2. लगतच्या आकृतीमध्ये $AB \parallel CD$; $CD \parallel EF$ आणि $y : z = 3 : 7$ तर x ची किंमत काढा.

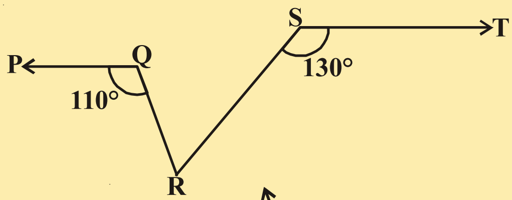




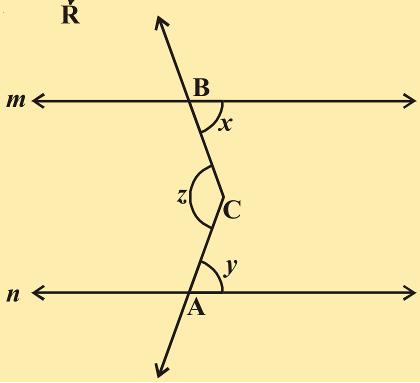
3. आकृतीत दिलेल्या प्रमाणे $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ आणि $\angle DEG = 126°$, तर $\angle AGE$, $\angle GEF$ आणि $\angle EGF$ ची किंमत माहित करा.

4. लगतच्या आकृतीमध्ये $PQ \parallel ST$, $\angle PQR = 110°$ आणि $\angle RST = 130°$ तर $\angle SRQ$ ची किंमत माहित करा.

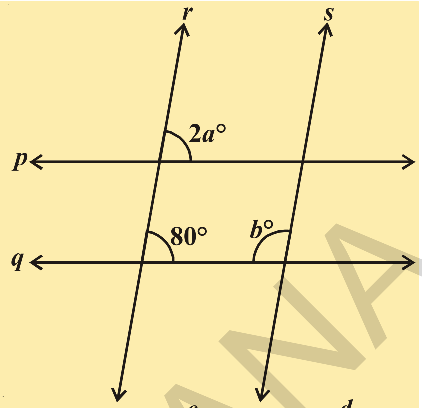
[सुचना: R बिंदुपासुन ST ला समांतर रेषा काढा]



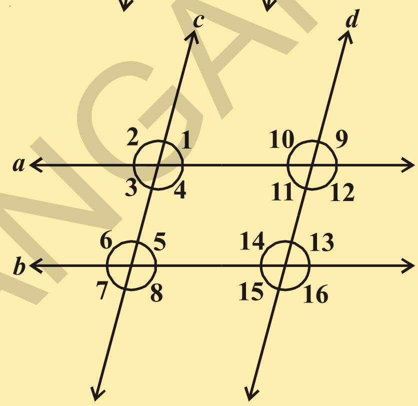
5. लगतच्या आकृतीत $m \parallel n$. A, B हे दोन बिंदु m आणि n वर अनुक्रमे आहेत. समजा 'C' हा एक अतर बिंदु m आणि n.रेषेच्या मध्ये आहे तर $\angle ACB$ ची किंमत काढा.

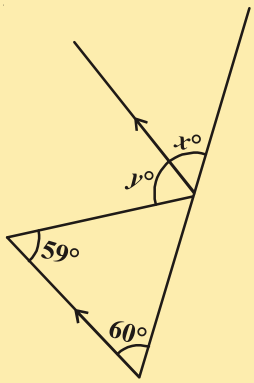


6. a आणि b किंमत माहित करा $p \parallel q$ आणि $r \parallel s$ दिलेले आहे.



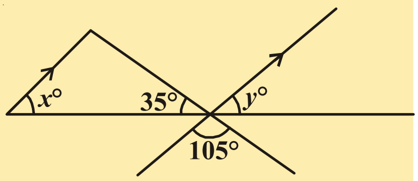
7. जर आकृती मध्ये $a \parallel b$ आणि $c \parallel d$ आहे तर (i) $\angle 1$ (ii) $\angle 2$ बरोबर एकरुप असलेल्या कोनाची नावे लिहा.

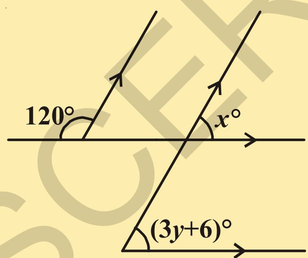




8. दिलेल्या आकृतीत बानाचे चिन्ह असलेल्या रेषा खंड समांतर आहेत, तर x आणि y ची किंमत माहित करा.

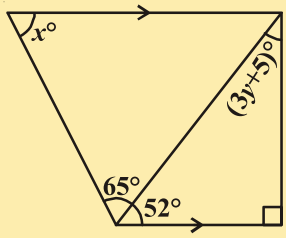
9. दिलेल्या आकृतीत बानाचे चिन्ह असलेले रेषाखंड समांतर आहेत तर x आणि y ची किंमत काढा.





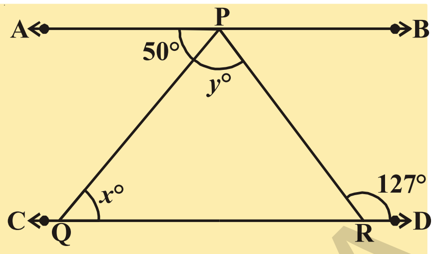
10. आकृती पासुन x आणि y ची किंमत माहित करा.

11. बाजुच्या आकृतीपासुन x आणि y ची किंमत काढा.

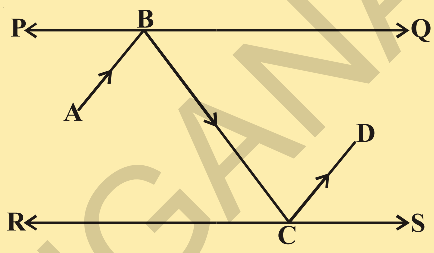


12. खालील विधानासाठी आकृती काढा.
" जर एका कोनाच्या दोन बाजु अनुक्रमे दुसऱ्या कोनाच्या दोन बाजु लंब असतील तर दोन्ही कोन समान किंवा संपुरक असतात."

13. दिलेल्या आकृतीमध्ये जर $AB \parallel CD$, $\angle APQ = 50°$ आणि $\angle PRD = 127°$ तर x आणि y ची किंमत काढा.

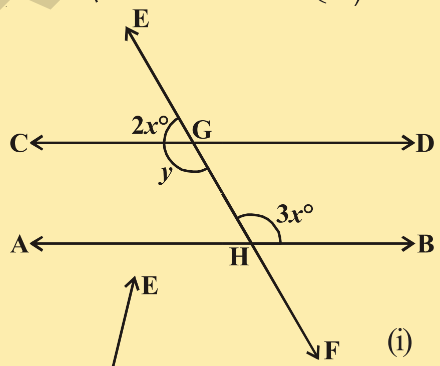


14. लगतच्या आकृतीत PQ आणि RS हे दोन आरसे एकमेकांशी समांतर ठेवले आहेत. $\overrightarrow{AB}$ मधुन निघणारे किरण B जवळ एका आरशावर पडतात आणि परावर्तीत किरण $\overrightarrow{BC}$ चा मार्गाने C जवळ RS आरशावर पडते आणि पुन्हा $\overrightarrow{CD}$ च्या मार्गाने परावर्तीत होतात. सिध्द करा की, $AB \parallel CD$.

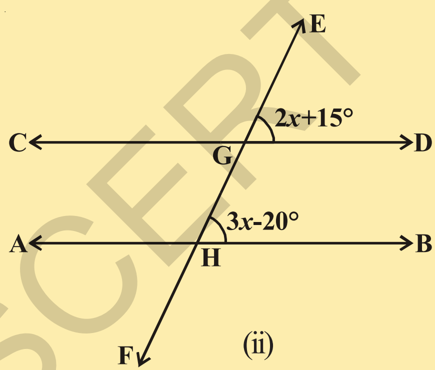


(सुचना: समांतर रेषांना काढलेले लंब असलेल्या रेषा देखील समांतर आहेत)

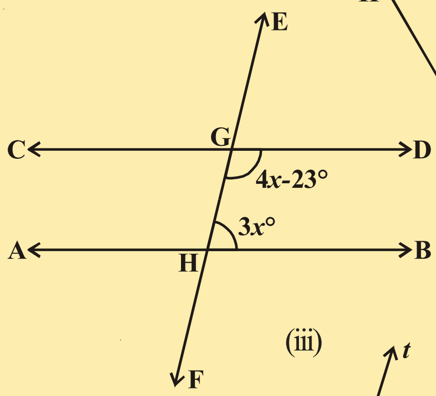
15. खालील दिलेल्या आकृतीत $AB \parallel CD$. EF ही एक छेदीका रेषा AB आणि CD ला G जवळ H जवळ छेदन करते. तर x आणि y ची किंमत काढा. कारणे द्या.



(i)

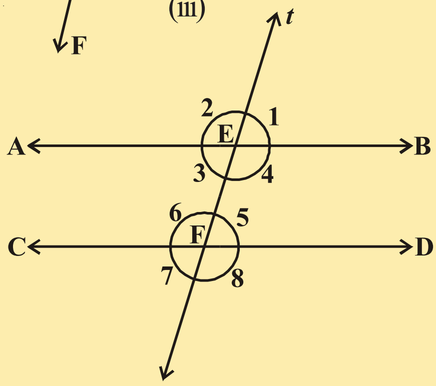


(ii)

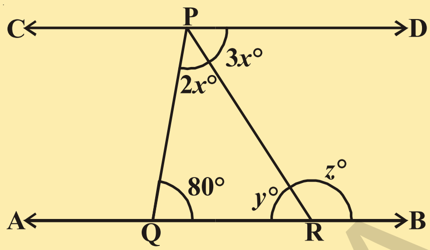


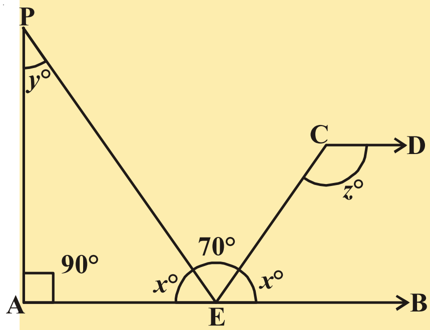
(iii)

16. लगतच्या आकृतीमध्ये $AB \parallel CD$, 't' हे एक छेदीका रेषा अनुक्रमे E आणि F जवळ छेदन करते. जर $\angle 2 : \angle 1 = 5 : 4$, असते तर प्रत्येकी केलेल्या कोनांची माप काढा.



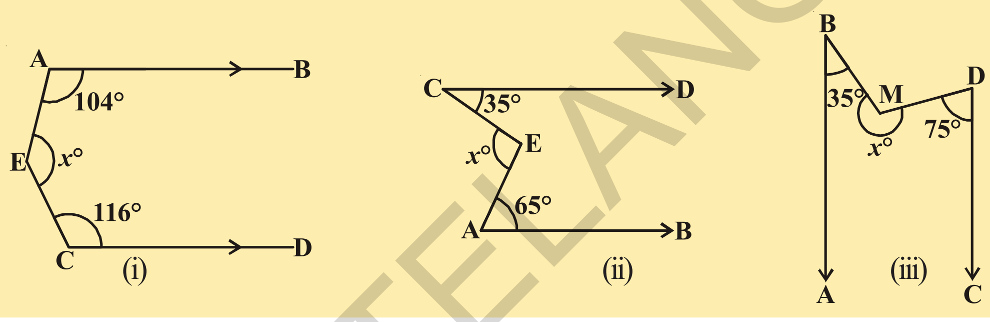
17. लगतच्या आकृतीमध्ये AB || CD असेल तर x, y आणि z ची किंमत माहीत करा.





18. लगतच्या आकृतीमध्ये AB || CDअसेल तर x, y आणि z ची किंमत काढा.

19. खालील प्रत्येक आकृतीमध्ये AB || CD आहे तर प्रत्येक संदर्भात x ची किंमत काढा.



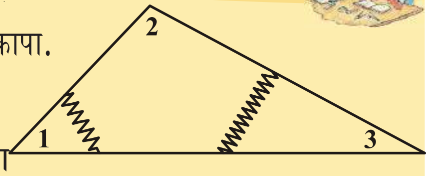
(i) (ii) (iii)

4.5 त्रिकोणातील कोनाच्या बेरजेचा नियम

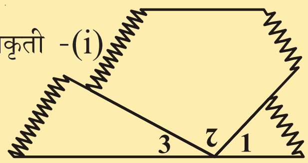
आता चला सिध्द करु या की, त्रिकोणातील अंतर कोनांची बेरीज 180° आहे.

कृती

- आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एक विशाल त्रिकोण काढा आणि कापा.
- कोनांना क्रमांक द्या आणि त्यांना फाडुन घ्या.
- लगतच्या तिन कोनांना एकमेकांच्या बाजुला ठेवा ज्यामुळे एक कोन तयार होतो आकृती -(i) जसे याला उजव्या बाजुला दाखविले आहे.



आकृती -(i)

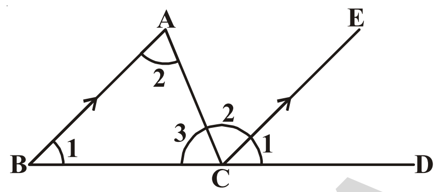


आकृती -(ii)

1. तिन लगतच्या कोनामुळे तयार झालेल्या कोनांना ओळखा? त्याचे माप काय होईल?
2. एका त्रिकोणाच्या तिन कोनाच्या बेरजेबद्दल लिहा?

आता चला या विधानाला समांतर रेषेच्या प्रमाणभुत तत्व घेंऊन सिध्द करा.

प्रमेय-4.6 : त्रिकोनातील कोनाची बेरीज 180° आहे.



दिले आहे : ABC हा त्रिकोण आहे.

सिध्दता. : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

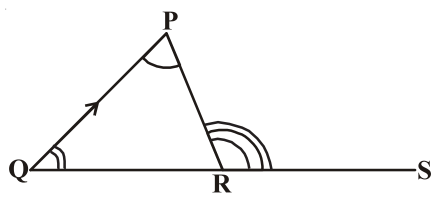
रचना : BC ला D पर्यंत वाढवा.

'C' बिदुंमधुनCE रेषा काढा जी BA समांतर आहे.

सिध्द करणे :

$BA \parallel CE$	(रचने वरुन)
$\angle CAB = \angle DCE$ .....(1)	(संगत कोनाणाच्या स्वयसिध्द तत्वावरुन)
$\angle BAC = \angle ACE$ .....(2)	(व्यत्क्रम समांतर रेषेसाठी अंतर कोन AB आणि CE]
$\angle CBA = \angle ACB$ .....(3)	(समान कोन)
$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB =$	(वरील तिन समीकरणे मिळवा)
$\angle DCE + \angle ACE + \angle ACB$	
परंतु $\angle DCE + \angle ECA + \angle ACB = 180^0$	(बिंदु वरच्या कोनाची बेरीज)
$\therefore\ \angle CBA + \angle BAC + \angle ACB = 180^0$	
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$	

तुम्हाला माहित आहे की, जेव्हा त्रिकोणाची बाजु वाढविली तर त्रिकोणाचे बाह्य कोन तयार होतात.



जेव्हा बाजु QR ला S पर्यंत वाढविले तर $\angle SRP$ ला ΔPQR चा बाह्य कोन म्हणतात.

$\angle PRQ + \angle SRP = 180^\circ$ आहे का ? (का ?).....(1)

हे देखील पहा

$\angle PRQ + \angle PQR + \angle QPR = 180^\circ$ (का ?) .....(2)

(1) आणि (2) पासुन आपणास पाहु शकतो कही, $\angle PRQ + \angle SRP = \angle PRQ + \angle PQR + \angle QPR$

$$\therefore\ \angle SRP = \angle PQR + \angle QPR$$

या निकालाला खाली प्रमेय रुपात मांडता येतो.

प्रमेय-4.7 : जर त्रिकोणाची बाजु वाढविली तर तयार झालेले बाह्य कोन अंतर विरुध्द कोनाच्या बेरीजच्या समान असतात.

वरील प्रमेयावरुन हे स्पष्ट आहे की, त्रिकोणाच्या बाह्य कोन नेहमी त्याच्या अंतर विरुध्द कोनापेक्षा मोठा असतो.

आता, चला वरील प्रमेयावर आधारीत काही उदाहरणे सोडवु या.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

जर त्रिकोणाच्या बाजु क्रमवार वाढविल्या तर तयार झालेल्या बाह्य कोनांची बेरीज किती होईल?

उदाहरण-14. त्रिकोणातील कोन $(2x)^\circ$, $(3x + 5)^\circ$ आणि $(4x - 14)^\circ$ आहेत.

x ची किंमत माहित करा आणि त्रिकोणातील प्रत्येक कोनाचे माप माहित करा.

सोडवणुक : आपणास माहित आहे की, त्रिकोणातील कोनाची बेरीज 180° आहे.

$\therefore\ 2x^\circ + 3x^\circ + 5^\circ + 4x^\circ - 14^\circ = 180^\circ \Rightarrow 9x^\circ - 9^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow 9x^\circ = 180^\circ + 9^\circ = 189^\circ$

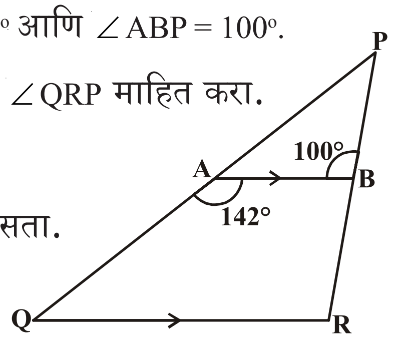
$\Rightarrow x = \dfrac{189^\circ}{9^\circ} = 21.$

$\therefore\ 2x^\circ = (2\times 21)^\circ = 42^\circ,\ (3x + 5)^\circ = [(3\times 21 + 5)]^\circ = 68^\circ.$

$(4x - 14)^\circ = [(4\times 21) - 14]^\circ = 70^\circ$

म्हणुन, त्रिकोणातील कोन 42°, 68° आणि 70° आहेत.

उदाहरण-15. बाजुच्या आकृतीत $AB \parallel QR$, $\angle BAQ = 142^\circ$ आणि $\angle ABP = 100^\circ$. आहेत तर (i) $\angle APB$ (ii) $\angle AQR$ आणि (iii) $\angle QRP$ माहित करा.



सोडवणुक : (i) समजा $\angle APB = x^\circ$,

ΔPAB बाह्य कोन PA ,Q पर्यंत वाढविली असता.

$\therefore$ बाह्य कोन $\angle QAB = \angle PBA + \angle APB$

$\Rightarrow 142^\circ = 100^\circ + x^\circ$

$\Rightarrow x^\circ = (142^\circ - 100^\circ) = 42^\circ.$

$\therefore\ \angle APB = 42^\circ,$

(ii) आता $AB \parallel QR$ आणि PQ ही छेदीत रेषा आहेत.

$\therefore\ \angle QAB + \angle RQA = 180^0$ [आतील सह कोनाची बेरीज 180° आहे.]

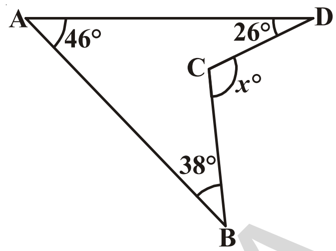
$\Rightarrow\quad 142^\circ + \angle RQA = 180^\circ,$

$\therefore\ \angle AQR = (180^\circ - 142^\circ) = 38^\circ.$

(iii) म्हणुन $AB \parallel QR$ आणि PR एक छेदीत रेषा आहे.

$\angle PRQ = \angle PBA = 100^\circ$ [संगत कोन]

उदाहरण-16. बाजुच्या आकृतीत दिलेल्या माहितीचा वापर करुन x ची किंमत काढा.

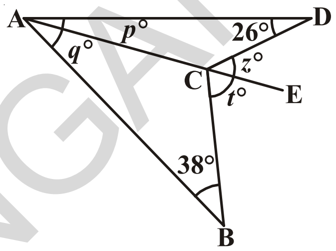


सोडवणुक : दिलेल्या आकृतीत ABCD एका चौकोन आहे.

चला प्रयत्न करा की, त्याचे दोन त्रिकोण झाले पाहिजे.

AC ला जोडा आणि E पर्यंत वाढवा.

समजा $\angle DAE = p^\circ$, $\angle BAE = q^\circ$, $\angle DCE = z^\circ$ आणि $\angle ECB = t^\circ$ म्हणुन त्रिकोणाच्या बाह्य कोन आतिल विरुध्द कोनाच्या बेरजेच्या समान आहे. आपणास हे आहे की,



$z^\circ = p^\circ + 26^\circ$

$t^\circ = q^\circ + 38^\circ$

$\therefore\ z^\circ + t^\circ = p^\circ + q^\circ + (26 + 38)^\circ = p^\circ + q^\circ + 64^\circ$

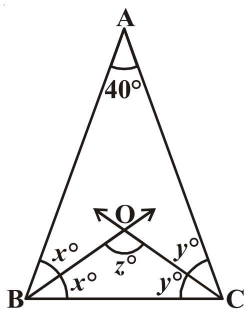
परंतु, $p^\circ + q^\circ = 46$. $\quad (\because \angle DAB = 46^\circ)$

म्हणुन, $z^\circ + t^\circ = 46 + 64 = 110^\circ$.

म्हणुनच $x^\circ = z^\circ + t^\circ = 110^\circ$.

उदाहरण-17. दिलेल्या आकृतीत $\angle A = 40^\circ$ जर $\overrightarrow{BO}$ आणि $\overrightarrow{CO}$ हे आणि $\angle B$ आणि $\angle C$ चे अनुक्रमे दुभाजक आहेत. तर $\angle$ BOC चे माप माहित करा.

सोडवणुक : आपणास माहित आहेत की, BO हा $\angle$ B चा दुभाजक आणि CO चा $\angle C$ चा दुभाजक आहे.



समजा $\angle CBO = \angle OBA = x^\circ$ आणि $\angle OCB = \angle ACO = y^\circ$.

तर $\angle B = (2x)^\circ$, $\angle C = (2y)^\circ$ आणि $\angle A = 40^\circ$.

परंतु, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. (कसे ?)

$2x^\circ + 2y^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

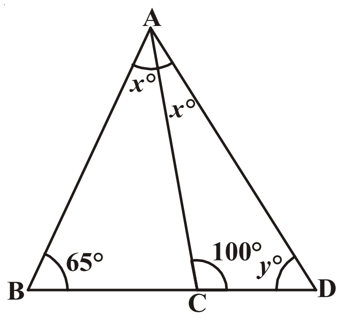
$\Rightarrow 2(x + y)^\circ = 140^\circ$

$= x^\circ + y^\circ = \dfrac{140^\circ}{2} = 70^\circ$.

म्हणुन , $\angle BOC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

उदाहरण-18. बाजुच्या आकृतीत दिलेल्या माहितीवरुन x आणि y ची किंमत काढा

सोडवणुक : ΔABC ची बाजु BC ला D पर्यंत वाढविले आहे.



बाह्य $\angle DCA = \angle CBA + \angle BAC$

$\therefore\ 100^\circ = 65^\circ + x^\circ$

$\Rightarrow x^\circ = (100^\circ - 65^\circ) = 35^\circ$.

$\therefore\ \angle CAD = \angle BAC = 35^\circ$

ΔACD मध्ये, आपणास माहित आहे.

$\angle CAD + \angle DCA + \angle ADC = 180^\circ$ (त्रिकोणातील कोनाची बेरजेचा नियम)

$\Rightarrow 35^\circ + 100^\circ + y^\circ = 180^\circ$

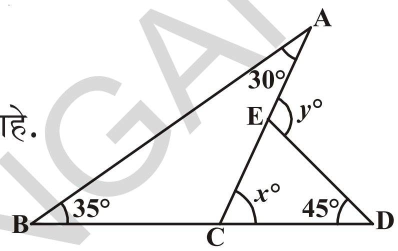
$\Rightarrow 135^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow y^\circ = (180^\circ - 135^\circ) = 45^\circ$

म्हणुन, $x = 35^\circ, y = 45^\circ$.

उदाहरण-19. बाजुच्या दिलेल्या आकृतीत माहीतीवरुन x आणि y ची किंमत काढा.

सोडवणुक : ΔABC चीBC बाजु D पर्यंत वाढविली आहे.



$\therefore$ बाह्यकोन $\angle ACD = \angle BAC + \angle CBA$

$\Rightarrow \quad x^\circ = 30^\circ + 35^\circ = 65^\circ$.

पुन्हा ΔDCE ची बाजु CE ला A पर्यंत वाढविला आहे.

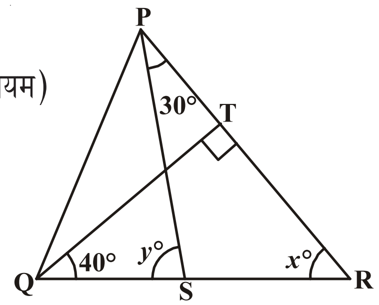
$\therefore$ बाह्य कोन $\angle DEA = \angle EDC + \angle ECD$

$\Rightarrow \quad y = 45 + x^\circ = 45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$.

म्हणुन, $x = 65^\circ$ आणि $y = 110^\circ$.

उदाहरण-20. लगतच्या आकृतीत जर $QT \perp PR$, $\angle RQT = 40^\circ$ आणि $\angle SPR = 30^\circ$, तरx आणि y ची किंमत माहित करा.

सोडवणुक : ΔTQR मध्ये



$90^\circ + 40^\circ + x = 180^\circ$ (त्रिकोणातील कोनांची बरजेचा नियम)

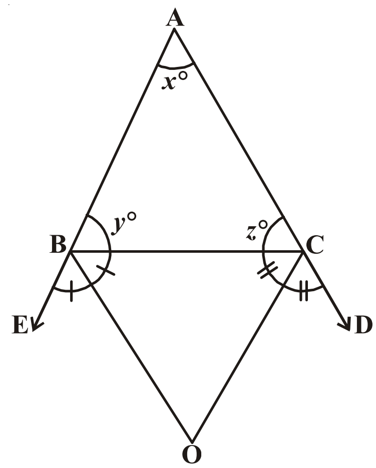
म्हणुन, $x^\circ = 50^\circ$

आता, $y^\circ = \angle SPR + x^\circ$ (त्रिकोणाचा बाह्य कोन)

म्हणुन, $y^\circ = 30^\circ + 50^\circ$

$= 80^\circ$

उदाहरण-21.बाजुच्या आकृतीत ΔABC चा AB आणि AC बाजु हे बिंदु E आणि D अनुक्रमे गुणाकार आहे. जर $\angle CBE$ आणि $\angle BCD$ चे दुभाजक BO आणि CO अनुक्रमे O बिंदुजवळ मिळतात, तर सिध्द करा की, $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$.



सोडवणुक : $\angle EBC$. हे BO चे दुभाजक आहेत.

म्हणुन $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle EBC$

$= \frac{1}{2}(180^\circ - y^\circ)$

$= 90^\circ - \frac{y^\circ}{2}$ ...(1)

त्याच प्रमाणे CO हे $\angle BCD$ चे दुभाजक आहे.

म्हणुन, $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle BCD$

$$= \frac{1}{2}(180° - z°)$$

$$= 90° - \frac{z°}{2} \qquad ...(2)$$

ΔBOC मध्ये $\angle COB + \angle BCO + \angle OBC = 180° \quad ...(3)$

(1) आणि (2) ची (3) मध्ये मांडणी करुन आपणास येते.

$$\angle COB + 90° - \frac{z°}{2} + 90° - \frac{y°}{2} = 180°$$

म्हणुन $\angle COB = \frac{z°}{2} + \frac{y°}{2}$

किंवा $\angle COB = \frac{1}{2}(y° + z°) \qquad ... (4)$

परंतु $x° + y° + z° = 180°$ (त्रिकोणातील कोनाच्या बेरजेचा नियम)

म्हणुन $y° + z° = 180° - x°$

म्हणुन (4) बनते..

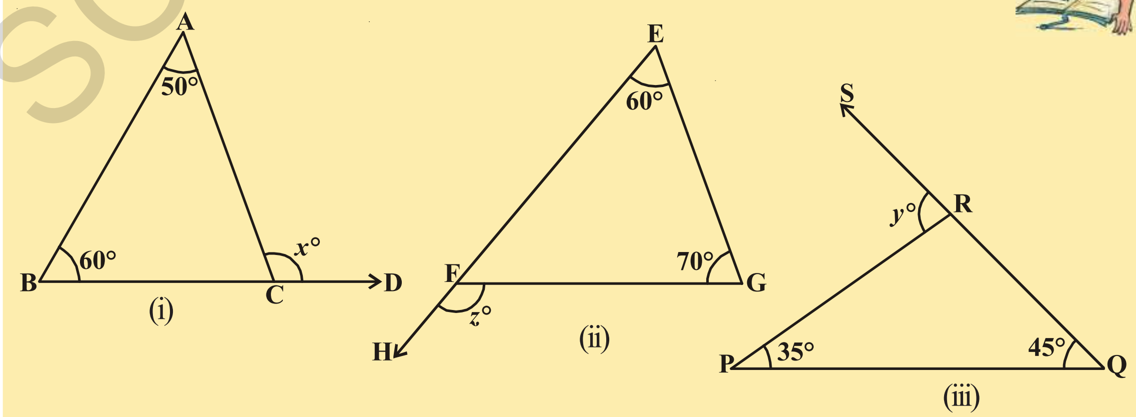
$$\angle COB = \frac{1}{2}(180° - x°)$$

$$= 90° - \frac{x°}{2}$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$$

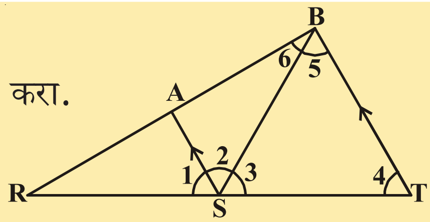
अभ्यास 4.4

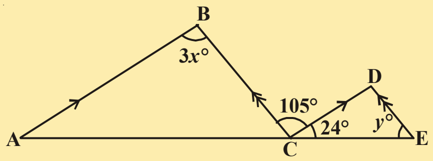
1. दिलेल्या त्रिकोणात x, y आणि z माहित करा.



2. दिलेल्या आकृतीत $AS \parallel BT$; $\angle 4 = \angle 5$

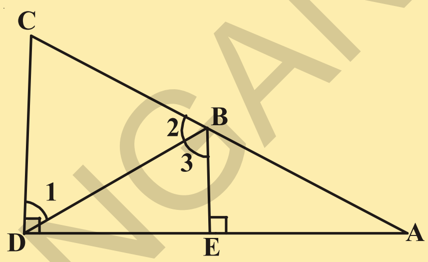
$\angle TSA$ ला $\overline{SB}$ दुभागते. तर $\angle 1$ चा माप माहित करा.

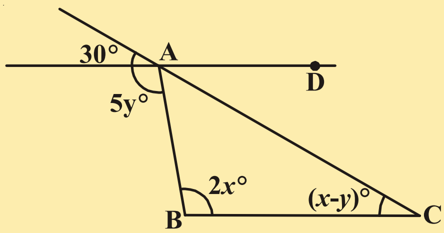




3. दिलेल्या आकृतीत $AB \parallel CD$; $BC \parallel DE$ तर x आणि y ची किंमत माहित करा.

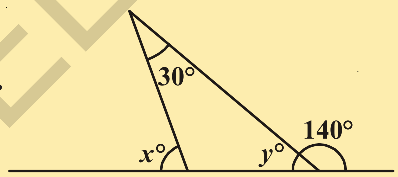
4. बाजुच्या आकृतीत $BE \perp DA$ आणि $CD \perp DA$ दिले आहे. तर सिध्द करा $m\angle 1 \cong m\angle 2$.

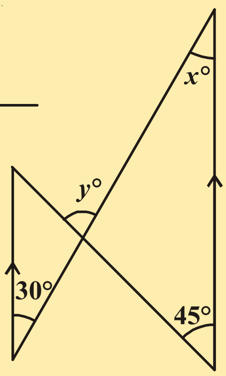




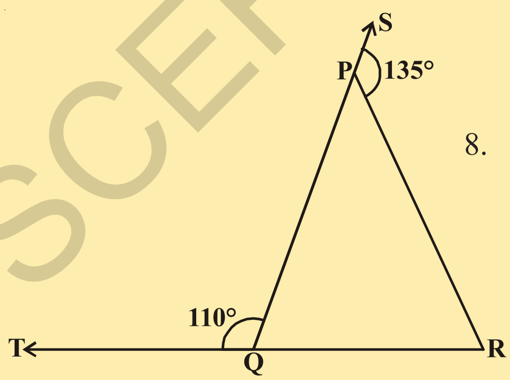
5. x आणि y च्या किंमती माहित करा जेव्हा AD आणि BC समांतर बनतात.

6. आकृतीत x आणि y ची किंमत काढा.

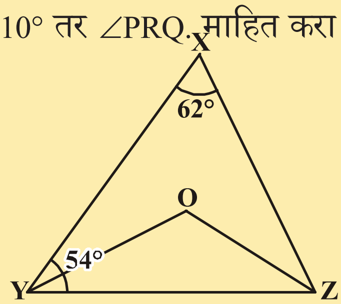




7. दिलेल्या आकृतीत बानाचे चिन्ह असलेल्या रेषा समांतर आहेत तर x आणि y ची किंमत माहित करा.

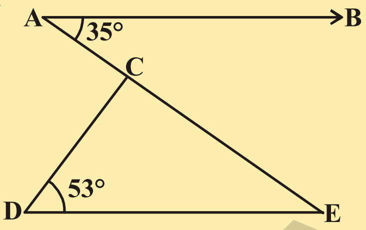


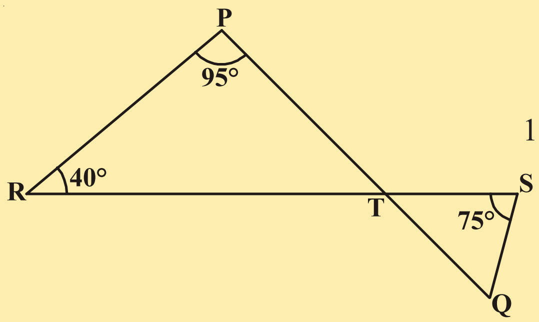
8. दिलेल्या आकृतीत $\angle PQR$ च्या बाजु QP आणि RQ आहेत आणि त्यांना S आणि T पर्यंत अनुक्रमे वाढविले आहेत. तर $\angle RPS = 135°$ आणि $\angle PQT = 110°$ तर $\angle PRQ$ माहित करा



9. दिलेल्या आकृतीत $\angle X = 62°$, $\angle ZYX = 54°$. ΔXYZ मध्ये जर $\angle XZY$ चे YO आणि ZO अनुक्रमे दुभाजक आहे. तर $\angle OZY$ आणि $\angle YOZ$ माहित करा.

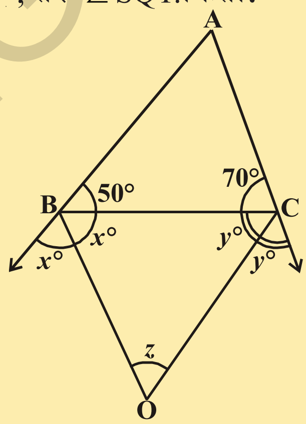
10. दिलेल्या आकृतीत $AB \parallel DE$, $\angle BAC = 35^\circ$ आणि $\angle CDE = 53^\circ$ तर माहित करा $\angle DCE$

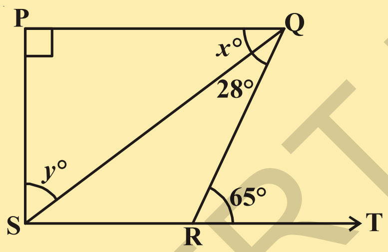




11. दिलेल्या आकृतीत जर रेषा खंड PQ आणि RS एका T बिंदु जवळ छेदन करते अशा प्रकारे की $\angle TRP = 40^\circ$ $\angle RPT = 95^\circ$ आणि $\angle TSQ = 75^\circ$, तर $\angle SQT$.किती.

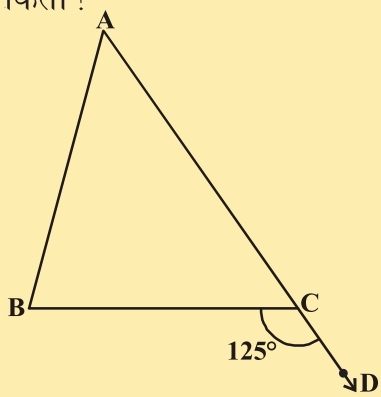
12. बाजुच्या आकृतीत ABC एक त्रिकोण आहे ज्यामध्ये $\angle B = 50^\circ$ आणि $\angle C = 70^\circ$ बाजु AB आणि AC ला वाढविले आहेत जर 'z' हे बाह्य दुभाजक कोनाच्या मधील कोनाचे माप आहेत तर 'z' ची किंमत काढा.

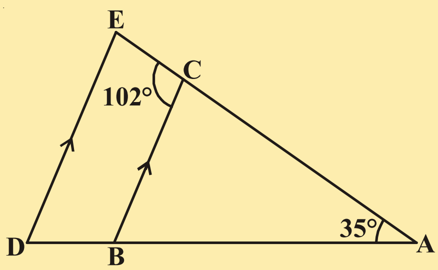




13. दिलेल्या आकृतीमध्ये जर $PQ \perp PS$, $PQ \parallel SR$, $\angle SQR = 28^\circ$ आणि $\angle TRQ = 65^\circ$ तर माहित करा की, x आणि y ची किंमत किती ?

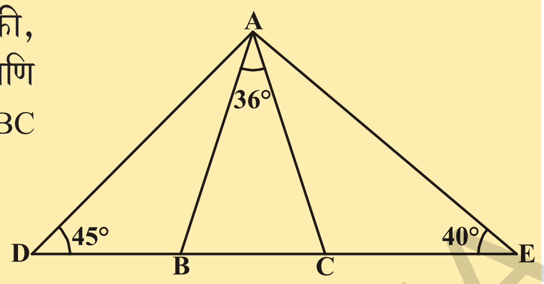
14. दिलेल्या आकृतीत ΔABC ची AC बाजु D पर्यंत वाढविली आहे. $\angle BCD = 125^\circ$ आणि $\angle A : \angle B = 2 : 3$, तर $\angle A$ आणि $\angle B$ चे माप काढा.

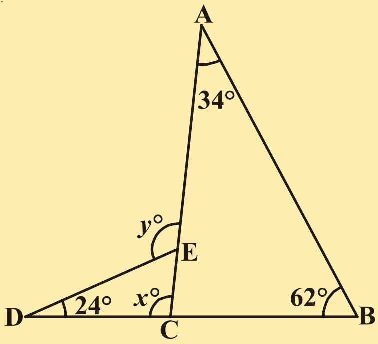




15. बाजुच्या आकृतीत हे दिलेले आहे की, $BC \parallel DE$, $\angle BAC = 35^\circ$ आणि $\angle BCE = 102^\circ$ तर माहित करा. की, (i) $\angle BCA$ (ii) $\angle ADE$ and (iii) $\angle CED$.

16. बाजुच्या आकृतीतमध्ये दिलेले आहे की, $AB=AC$, $\angle BAC=36^\circ$, $\angle BDA=45^\circ$ आणि $\angle AEC=40^\circ$. तर माहित करा. (i) $\angle ABC$ (ii) $\angle ACB$ (iii) $\angle DAB$ (iv) $\angle EAC$.





17. आकृतीत दिलेल्या माहितवरुन x आणि y ची किंमत काढा.

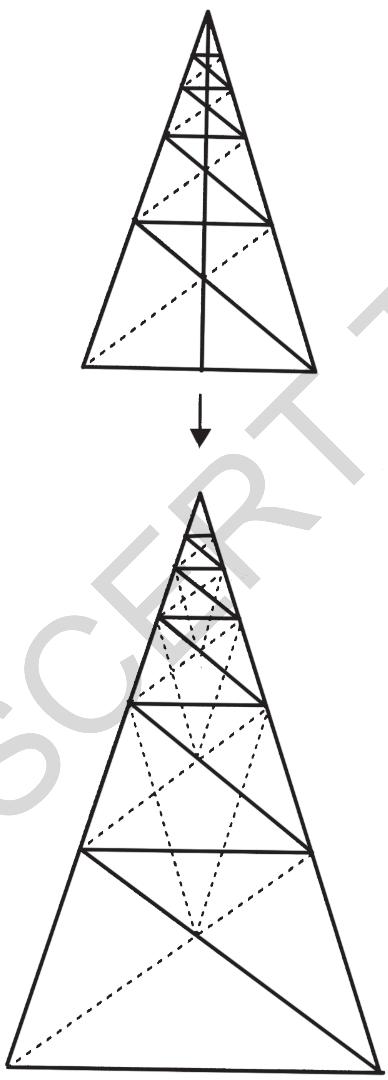
आपण काय चर्चा केली आहे.

- **रेषीय जोडीचा कोनाचा स्वय:सिध्दता:** जर एक किरण एका सरळ रेषेवर उभे राहते तर लगतच्या कोनाची बेरीज 180° असते.
- **रेषीय जोडीच्या कोनाचा व्यत्यास:**
  जर दोन लगतच्या कोनाची बेरीज180° आहे. तर असामान्य बाजु ही कोनाची एक रेषा तयार करते.
- **प्रमेय**: जर दोन रेषा ऐकमेकास छेदन करतात तर लंब विरुध्द कोन समान असतात.
- **संगत कोनाचा स्वय:सिध्द:** जर एक छेदीत रेषा दोन समांतर रेषांना छेदन करते, तर प्रत्येक संगत कोनाची जोडी समान असते.
- **प्रमेय**: जर एक छेदीत रेषा दोन समांतर रेषांना छेदन करने, तर प्रत्येक पर्यायी अंतर कोन समान असतात.
- **प्रमेय**: जर एक छेदीत रेषा दोन समांतर रेषांना छेदन करते. तर प्रत्येक पर्यायी अंतर कोनाची जोडी एका छेदीत रेषेच्या एकाच बाजुला असलेले कोन संपुरक कोन असतात.
- **संगत कोनाच्या स्वय:सिध्दचा व्यत्यास:**
  जर एक छेदीत रेषा दोन रेषांना अशा रितीने छेदन करते की, संगत कोनाची जोडी समान होते, तर दोन रेषा एकमेकांस समांतर होतात.
- **प्रमेय**: जर एक छेदीत रेषा दोन रेषांना अशा प्रकारे छेदन करते की, पर्यायी अंतर कोनाची जोडी समान होते आणि त्या दोन्ही रेषा समांतर असतात.

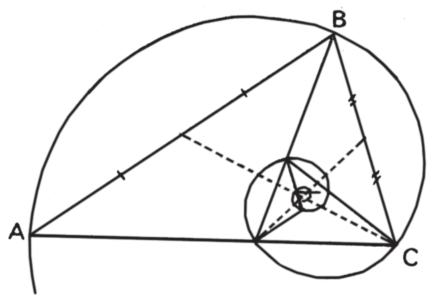
- **प्रमेय**: जर छेदीत रेषा दोन रेषांना अशा प्रकारे छेदन करते की, छेदीत रेषाच्या एकाच बाजुला अंतर कोन संपुरक कोन असतात नंतर दोन रेषा समांतर आहेत.
- **प्रमेय**: दिलेल्या रेषेला ज्या रेषा समांतर असतात ते परस्पर समांतर असतात.
- **प्रमेय:** एका त्रिकोणाच्या कोनाची बेरीज 180^o आहे.
- **प्रमेय**: जर एका त्रिकोणाची बाजु वाढविली तर अशाप्रकारे निर्माण झालेल्या बाह्य कोन विरुध्द अंतर कोनाच्या बेरजे बरोबर असते.

तुम्हाला माहित आहे का?

स्व:ताहा होणारा सुर्वण त्रिकोण



सुर्वण त्रिकोण हा एक समव्दिभुज त्रिकोण पायाचा 72^0 आणि शिरोबिंदु 36^0 जेव्हा हे पायाचे कोन नविन त्रिकोणा जे वाढविले त्यांना दुभाजतात. नविन तयार झालेले चॉप देखील सुवर्ण त्रिकोणात दुभाजतात. ही पध्दत पुन्हा चालु अनंत मुळ सुर्वण त्रिकोणाच्या बाजु आहेत. आणि अनंत सुर्वण त्रिकोणाची संख्या आपणास दिसणार जसे की ते दुमडलेले नाहीत.



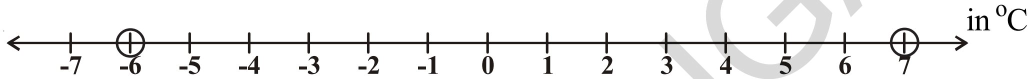
जसा हे चित्र दाखविते की, सुर्वण त्रिकोण देखील समान कोणीय आणि सुर्वण गुणोत्तर $\phi = |AB| / |BC| = 1.618 ...$

या अनंत वर चढत्या पासुन सुर्वण त्रिकोणावर तुम्ही एकजन त्याच्या आत अनंत संख्येचे सुर्वण त्रिकोणाची ते देखील सुर्वण त्रिकोण असतील.

05 सह- निर्देशन भुमितीCo-Ordinate Geometry

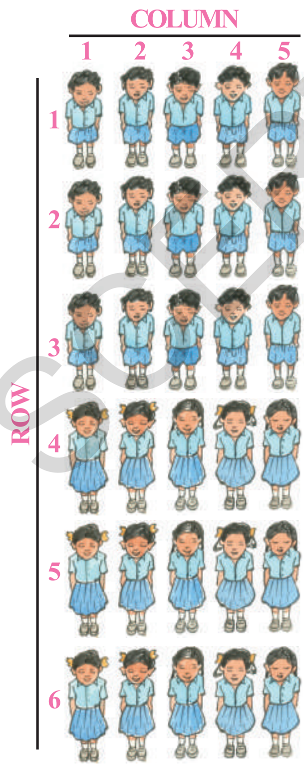
5.1 प्रस्तावना

हिमाचल प्रदेशातील कुफरी मधील डिसेंबर महिण्यातील एका विशिष्ट दिवसाचे कमाल आणि किमान तापमान 6°C आणि 7°C आहे. त्यास तुम्ही संख्या रेषवर दर्शवु शकता का?



येथे संख्या रेषा एका विशिष्ट दिवसाच्या तापमानाचे विवरण दर्शविण्यासाठी निर्णय पट्टी म्हणुन काम करते.

बाजुच्या आकृतीत दिलेल्या प्रसंगाचे निरिक्षण करु A,B,C,D,E,F, G आणि H हे आठ व्यक्ती एका रांगेत उभे आहेत. तिकीट कांऊटर वर A हा पहिला आणि H हा शेवटला रांगेत उभा आहे.केफला (Cafe)सुचिका समझल्यास 'H' हा पहिला आणि 'A' हा शेवटचा व्यक्ती होतो. तुम्हाला दिसुन आले असेल की, सुचकाची जागा बदलल्यास वस्तुचे स्थान किंमत बदलते.



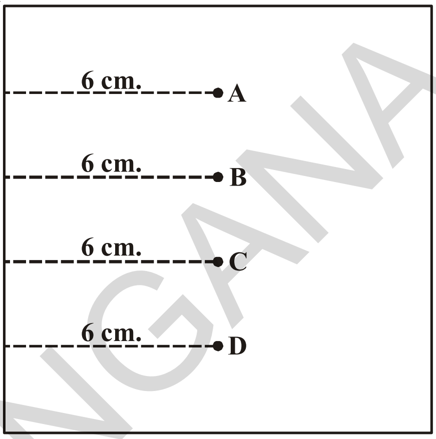
चला दुसरे उदाहरण घेऊ खेळ खेळात 9 व्यावर्गाच्या विद्यार्थ्यांची मांडणी केली(आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे) सुधा या चित्रात कुठे उभी आह. तुम्ही सांगु शकता का?

रामा म्हणाला " सुधा दुसऱ्या उभ्या रांगेत उभी आहे.."
पावणी म्हणाली " सुधा, 4 थ्या आडव्या रांगेत उभी आहे."
नसिमा म्हणाली " सुधा, दुसऱ्या उभ्या रांगेत आणि चौथ्या आडव्या रांगेत उभी आहे. वरील पैकी कोणाची माहिती अचुक आहे? नसिमाने दिलेल्या माहितीवरुन तुम्ही सुधाला ओळखु शकता का?"
माधवीचे स्थान तुम्ही शोधु शकता का? (ती पहिल्या उभ्या रांगेत आणि पाचव्या आडव्या रांगेत उभी आहे)
खालील उभे असलेल्या विद्यार्थ्यांच्या स्थितीला ओळखा.
(i) तिसरी उभी रांग,6 वी आडवी रांग(ii) (5वी उभी रांग, दुसरी आडवी रांग)

वरील उदाहरणात तुम्ही किती संदर्भ लक्षात घेतले सांगु शकता का? ते काय आहेत.

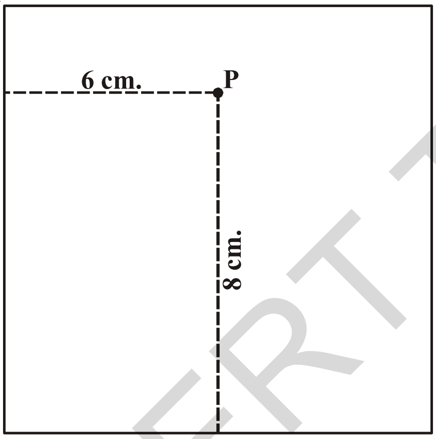
आता, अजुन एक प्रसंग घेऊ या.

एका कागदावर बिंदु चिन्हांकीत करा असे शिक्षिकेने तिच्या विद्यार्थ्यांना सांगीतले. तो बिंदु कागदाच्या डाव्या कडेवरुन 6 से.मी. अंतरावर असला पाहिजे.असे सुचविले.



आकृतीत कोणता बिंदु अचुक रितीने अंकीत केला? कारण प्रत्येक बिंदु A,B,C आणि D हा कागदाच्या डाव्या कडेपासुन 6 से.मी. अंतरावर आहे. कोणताही बिंदु अमान्य असु नये. बिंदुला अचुक स्थानी निश्चीत करण्यासाठी कोणत्या माहितीची जास्त गरज आहे. अचुक स्थान निश्चित करण्यासाठी दुसरी संदर्भ म्हणजे कडेपासुन खाली किंवा वरचे अंतर किती आहे. हे दिले पाहिजे.

समजा टिचर ने सांगीतले की, बिंदु हा डाव्या कडेपासुन 6 से.मी. अंतरावर आणि खालच्या कडेपासुन ८ से.मी. अंतरावर आहे. या वर्णनावरुन किती बिंदु अंकीत करता येते?



फक्त एकच बिंदु अंकीत करता यते. म्हणुन बिंदुचे स्थान स्थापन करण्यासाठी किती सुचकाची गरज पडते.

आपणास बिंदुचे अचुक स्थान स्थापन करण्यासाठी दोन सुचकाची (सुचना) आवश्यकता पडते. बिंदुच्या स्थानास (६,८) ने दर्शवितात जर तुम्ही म्हणाल की, बिंदु वरील कडे वरुन ७ से.मी. अंतरावर आहे. तर तुम्ही त्याचे अचुक स्थान शोधु शकता का? तुमच्या मित्राशी चर्चा करा.

हे करा

तुमच्या वर्गात पाच विद्यार्थ्यांच्या बसण्याच्या स्थानचे वर्णन करा.

कृती-(रिंगचा खेळ)

तुम्ही प्रदर्शनीत रिंगचा खेळ पाहिलात का? आडव्या आणि उभ्या रांगेत मांडणी केलेल्या वस्तुवर आपण रिंग फेकतो. खालील चित्र पहा.

खालील तक्ता पुर्ण करा,

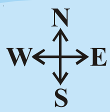
वस्तु	उभी रांग	आडवी रांग	स्थान
पर्स	3	4	(3,4)
आगपेटी	....	3	(,3)
क्लिप	....	....	....
बाहुली	....	....	....
साबन	....	....	....

तिसऱ्या उभ्या रांगेतील आणि चवथ्या आडव्या रांगेतील वस्तु ही चवथ्या उभ्यारांगेतील आणि तिसऱ्या आडव्या रांगेतील वस्तु सारखी आहे का?

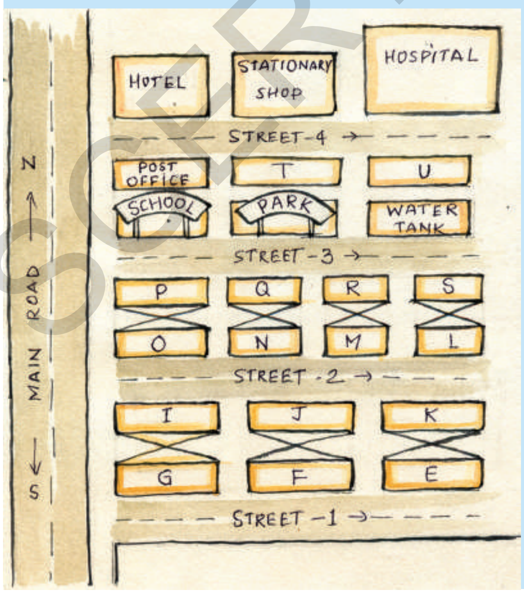
एका प्रतलात कोणत्याही बिंदुला दोन निर्देशांकांच्या आधारे स्थापन करणे अशी विकसीत झालेल्या गणिताच्या नविन शाखेला सहनिर्देशन भुमिती असे म्हणतात.

फ्रान्सचा गणित शास्त्रज्ञ आणि तत्वज्ञ रेन डेकार्टे (1595-1650) यांनी सहनिर्देशन भुमितीचा विकास केला. त्यांनी बैजिक राशी आणि भुमितीय वक्र आणि आकृत्यांमधील संगती माहित केली. या धडयात आपण बिंदु आणि बिंदु सह निर्देशन प्रतलात कसा स्थापन करतो. या बद्दल चर्चा करणार आहोत.

अभ्यास 5.1



1. एका निवासस्थानी एक मुख्य रस्ता उत्तर- दक्षिण दिशेत आहेत खाली नकाशा दिला आहे. चित्राच्या सहाय्याने खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.



(i) मार्ग क्रमांक -3 च्या डाव्या बाजुवर असलेली तिसरी वस्तु काय आहे?

(ii) मार्ग क्रमांक -2 च्या उजव्या बाजुस असलेल्या दुसऱ्या घराचे नाव काय आहे?

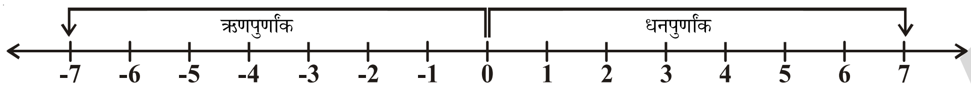
(iii) Mr. K'च्या घराचे स्थान निश्चित करा.

(iv) पोस्ट ऑफीस च्या स्थानाचे वर्णन तुम्ही कसे कराल?

(v) दवाखान्याच्या स्थानाचे वर्णन तुम्ही कसे करता?

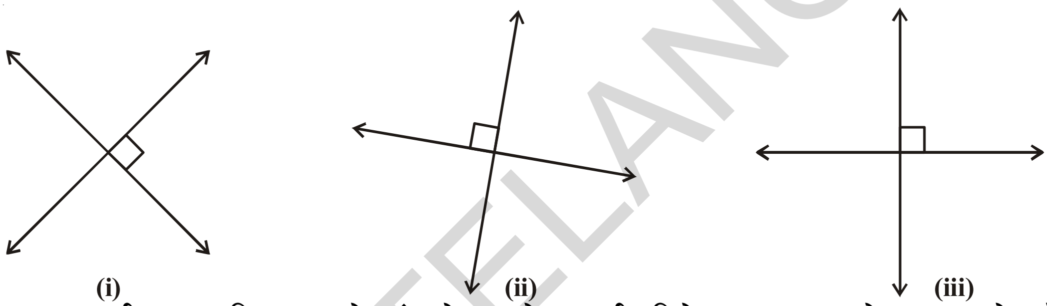
5.2 कार्तेशियनची पध्दत

संख्यांना दर्शविण्यासाठी आपण संख्या रेषेचा उपयोग करतो. संख्यारेषेवर संख्या समान अंतरावर खुणा केलेल्या असतात. खालील संख्या रेषेचे निरिक्षण करा.

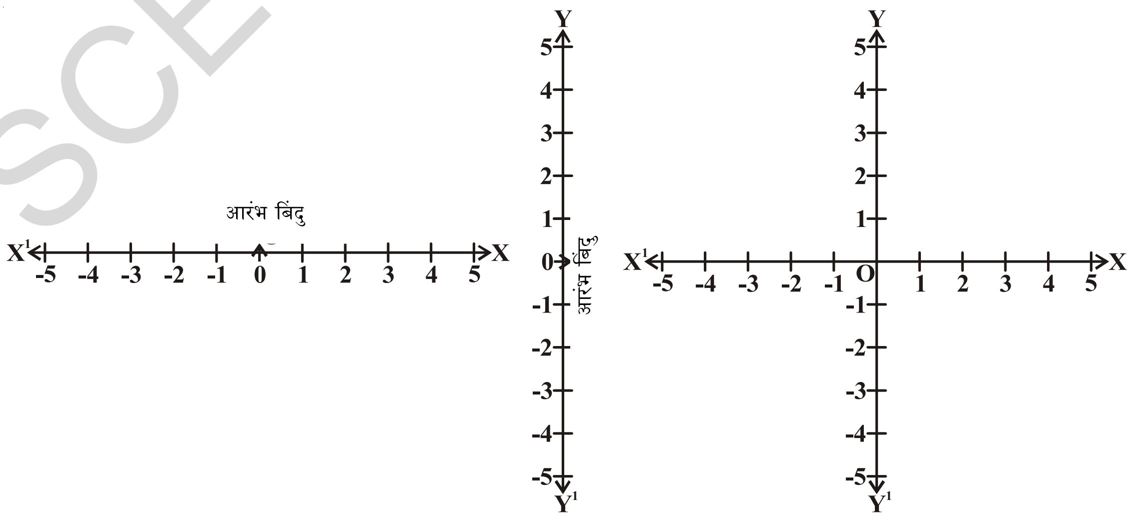


एका निश्चित बिंदु शुन्यापासुन दोन्ही बाजुला समान अंतरावर खुण केल्यास त्याला आरंभबिंदु म्हणतात. आणि त्यास 'O' नी दर्शवितात. सर्व धन संख्यांना 0 च्या उजव्या बाजुला आणि ऋणासंख्याना त्याच्या डाव्या बाजुला लिहितात.

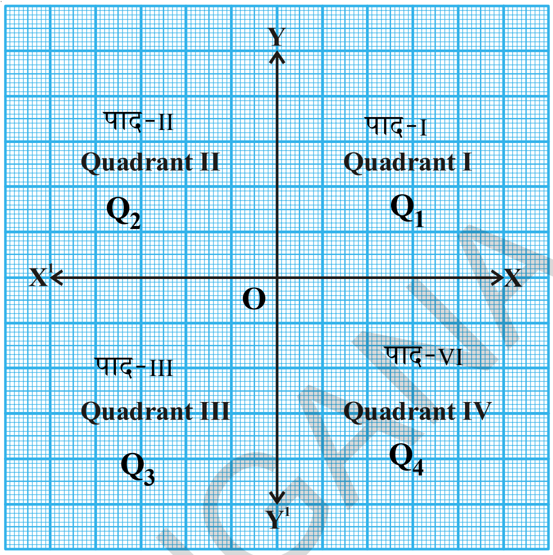
प्रतलात एकमेकांस लंब असणाऱ्या दोन संख्या रेषा घेऊ शकतो.



आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे लंब रेषा कोणत्याही दिशेत असतात. जेव्हा या दोन रेषा प्रतलातील बिंदु निश्चित करण्यासाठी निवडतो. आपल्या सोईसाठी एक रेषा आडवी एक रेषा उभी आकृती (iii).मध्ये दाखविल्याप्रमाणे आडवी संख्या रेषा आणि उभी संख्या रेषा एका बिंदुवर छेदतात आणि एकमेकांना लंब असतात. त्या छेदन बिंदुला आरंभ बिंदुने दर्शवितात. आडवी XX^1 संख्या रेषेला X-अक्ष आणि उभी संख्यारेषा YY^1 ला Y-अक्ष असे म्हणतात.



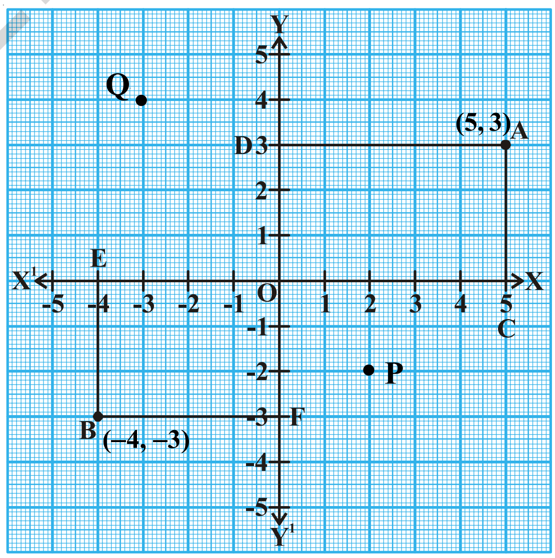
XX^1 आणि YY^1 च्या छेदन आरंभबिंदु म्हणतात. आणि त्यास 'O' नी दर्शवितात. धनसंख्या $\overline{OX}$, दिशेत असतात म्हणुन त्यास X-अक्षांची धन दिशा असे म्हणतात. अशारितीने $\overline{OY}$ ला Y-अक्षाची ऋणदिशा म्हणतात. $\overline{OX}^1$ आणि $\overline{OY}^1$ ला सुध्दा अनुक्रमे X-अक्ष आणिY-अक्षाची ऋणदिशा असे म्हणतात. आपणास दिसुन येते की, अक्षामुळे प्रतलाचे चार भाग होतात. त्याचार भागांना पाद म्हणतात. त्यास Q_1, Q_2, Q_3 आणि Q_4 नी दर्शवितात. येथे प्रतलास कार्तेशीयन प्रतल असे म्हणतात. (रेन डेकार्टेच्या नावावर) किंवा सह- निर्देशन भुमीती किंवा XY- प्रतल म्हणतात. अक्षांना सह निर्देशन अक्ष म्हणतात.



5.2.1 बिंदुचे स्थान निश्चित करणे

सह- निर्देशन पध्दतीत बिंदुचे स्थान कसे निश्चित करतात ते पाहु. खालील आलेख बघा या आलेखाच्या कागदावर दोन अक्ष काढलेले आहेत. त्यावर A आणि B हे कोणतेही दोन बिंदु आहेत. A आणि B कोणत्या पादात आहे त्यांची नावे देऊ शकता का?

A हा बिंदु पहिल्या पादात आहे. (Q_1) B बिंदु हा तिसऱ्या पादान (Q_3)आहे. आता A आणि B चे अक्षापासुन अंतर पाहु. यासाठी आपणास X अक्षावरAC आणि Y- अक्षावर AD लंब काढावे लागतात. अशारीतीने आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे BE आणि BF लंब काढु शकतो.



आपण पाहु या.

(i) X- अक्षाच्या धन दिशेत A बिंदुपासुन Y-अक्षावर असलेले लंब अंतर AD=OC= 5 एकक आहे. त्याला आपण 'A'चा X-निर्देशक म्हणतो.

(ii) Y- अक्षाच्या धन दिशेत A बिंदुपासुन X-अक्षावर असलेले लंब अंतर AC=OD=3 एकक याला आपण 'A' चा Y-निर्देशक म्हणतो. म्हणुन 'A' चे निर्देशक (5, 3) असे म्हणतात.

(iii) X-अक्षाच्या ऋण दिशेत B बिंदुचे Y-अक्षापासुन लंबआहे तरOE=BF= 4 एकक आहे. म्हणजे X-अक्षावर -4 एकक याला आपण ‘B’चा X-निर्देशांक म्हणतो.

(iv) B बिंदुचे X-अक्षापासुन Y-अक्षाच्या ऋण दिशेतील अंतर लंबावर OF = EB = 3 एकक म्हणजे Y-अक्षावर -3 आपण ‘B’ चा Y-निर्देशांक आणि तो (–4, –3) हे ‘B’ चे सहनिर्देशक आहेत. या लंबतराच्या साहाय्याने आपण बिंदुचे स्थान कसे निश्चित करतो? बिंदुचे निर्देशक खालील पध्दतीतने लिहितो?

(i) आरंभ बिंदुपासुन X-अक्षाच्या लंब पादापर्यंतच्या अंतरास त्या बिंदुचा X-निर्देशक म्हणतात.

X-निर्देशकास प्रथम निर्देशक सुध्दा म्हणतात

Pचा x-निर्देशक 2 आहे.

Q चा x-निर्देशक -3 आहे.

(ii) आरंभ बिंदुपासुन y-अक्षावरील लंबपादापर्यंतच्या अंतरास Y-निर्देशक म्हणतो

y- निर्देशकास निर्देशक सुध्दा म्हणतात.

P चा y- निर्देशक किंवा निर्देशांक -2 आहे.

Q चा y सह निर्देशक किंवा निर्देशक 4 आहे.

म्हणुनP चे निर्देशक (2, –2) आहेत.आणि Q चे निर्देशक (–3, 4).

म्हणुन प्रतलात एकाच निर्देशक बिंदु स्थापन करता येतो.

5.2.2 आरंभबिंदु

1. X-अक्ष आणि Y-अक्षाच्या छेदन बिंदुला आरंभबिंदु असे म्हणतात. प्रतलात इतर बिंदुचे स्थान निश्चित करण्यासाठी आरंभ बिंदुस सुचक बिंदु म्हणुन घेतो.

उदाहरण-1: खालील बिंदुचे X-निर्देशक आणि Y- निर्देशक आणि त्याचे स्थान माहित करा.

(i) P(8,8) (ii) Q (6,–8).

सोडवणुक: (i) P (8,8)

निर्देशांक = 8 (x - पहिले निर्देशक) आणि = 8 (y - दुसरे निर्देशक)

P बिंदु हाY-अक्षापासुन X-अक्षाच्या धन दिशेत आरंभा बिंदुपासुन 8 एकक अंतरावर आहे आणि Y- अक्षाच्या धन दिशेत X-अक्षाच्या पासुन 8 एकक अंतरावर आहे.

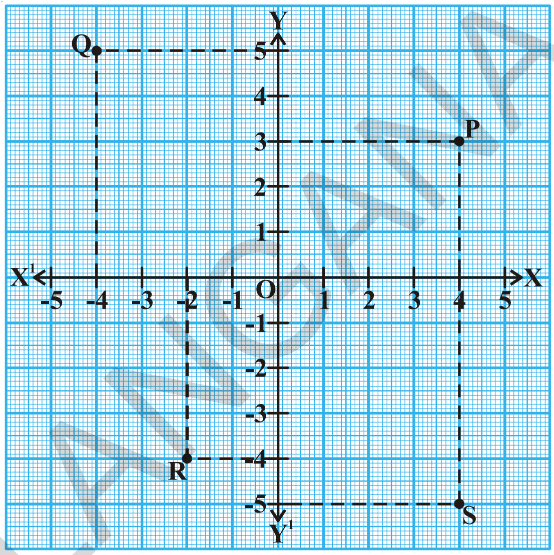
(ii) Q (6, –8)

निर्देशक = 6 ; निर्देशक = –8

Q बिंदु हा Y- अक्षापासुन X-अक्षाच्या धन दिशेत 6 एकक अंतरावर आणि X-अक्षापासुन Y- अक्षाच्या ऋण दिशेत 8 एकक अंतरावर आहे.

उदाहरण-2: आलेखाच्या कागदावर सुचविलेल्या बिंदुचे निर्देशांक लिहा.

सोडवणुक: P बिंदुपासुन X-अक्षावर एक लंबरेषा काढा. लंबरेषा X-अक्षाला 4 एककपाशी स्पर्श करते.म्हणुन P चे पहिले निर्देशक 4 आहेत. अशारीतीने p पासुन Y-अक्षास 3 एककाजवळ स्पर्श करते. अशारीतीने P चे दुसरे निर्देशक 3 आहे. म्हणुन P चे निर्देशांक (4, 3) आहे.



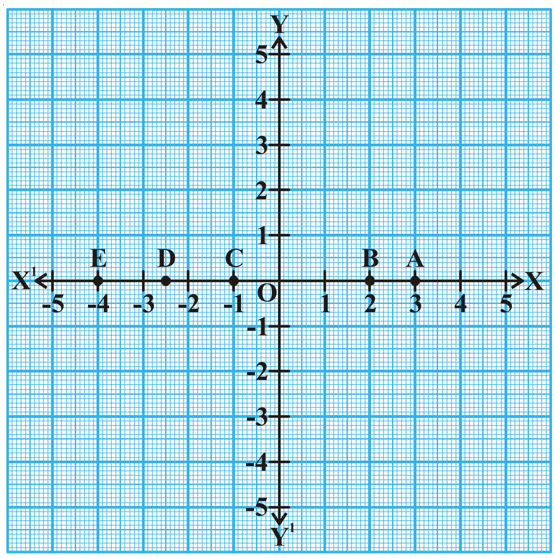
2. अशारितीने Q चे प्रथम आणि व्दितीय निर्देशक अनुक्रमे –4 आणि 5 आहेत म्हणुन Q चे निर्देशक (–4, 5) आहेत.

3. अगोदरच्या संदर्भात R चा प्रथम निर्देशक आणि व्दितीय निर्देशक –2 आणि –4 आहेत. म्हणुनR चे निर्देशक अनुक्रमे (–2, –4) आहेत.

4. S चा प्रथम निर्देशक आणि व्दितीय निर्देशक अनुक्रमे 4 आणि -5 आहे. म्हणुन S चे निर्देशक (4, –5) आहेत.

उदाहरण-3: आलेखावर सुचित केलेल्या बिंदुचे निर्देशक लिहा.

सोडवणुक: A बिंदु हा Y-अक्षावर 3 एकक अंतरावर आहे. आणि X-अक्षावर 0 एकक अंतरावर आहे. म्हणुन A चा X-निदेशक 3 आणि y-निर्देशक 0 आहे म्हणुन A चे निर्देशक (3,0) आहेत. विचार करा आणि चर्चा करा.



(i) B चे निर्देशक (2,0) आहे का?

(ii) C चे निर्देशक (–1,0) आहे का?

(iii) D चे निर्देशक (–2.5, 0) आहे का?

(iv) E चे निर्देशक (–4,0) आहे का? तुमच्या लक्षात काय येते?

आकृती पहिल्यानंतर X-अक्षाला X-अक्षावर कोणतेही अंतर नाही म्हणुन X-अक्षावरील y निर्देशक नेहमी शुन्य असतो.

X-अक्षास $y = 0$ या समीकरणाचे दर्शवितात.

हे करा

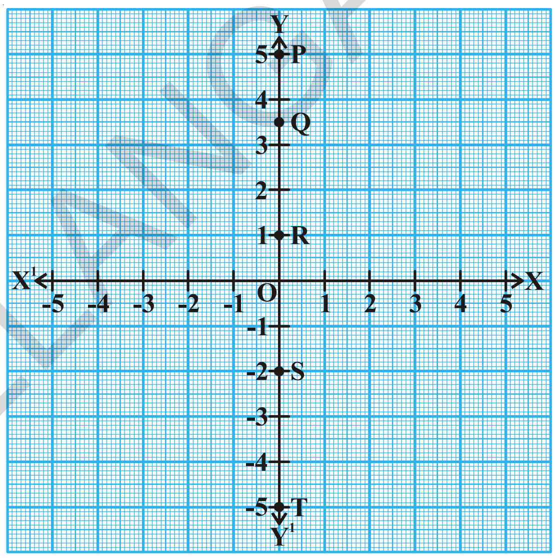
खाली दिलेल्या बिंदुपैकी काही बिंदु X-अक्षावर आहेत ते ओळखा.

(i)	(0,5)	(ii)	(0,0)	(iii)	(3,0)
(iv)	(-5,0)	(v)	(-2,-3)	(vi)	(-6,0)
(vii)	(0,6)	(viii)	(0,a)	(ix)	(b,0)

उदाहरण:4 आलेखावर सुचित केलेल्या बिंदुचे निर्देशक लिहा.

सोडवणुक:

(i) P बिंदु हा X-अक्षावर +5 एकक अंतरावर आहे. आणि Y-अक्षावर 0 अंतरावर आहे. म्हणुन P चा x-निर्देशक 0 आणि y- निर्देशक 5 आहे. म्हणुन P चे निर्देशक (0,5) आहेत.



आता विचार करा आणि चर्चा करा.

(ii) Q निर्देशक (0, 3.5) आहे का?

(iii) R निर्देशक (0,1) आहे का?

(iv) S निर्देशक (0, –2) आहे का?

(v) T निर्देशक (0, –5) आहे का?

Y-अक्षावरील प्रत्येक बिंदुस Y- अक्षाच्या शुन्यावर आहे. Y-अक्षावर असलेल्या बिंदुचे निर्देशक नेहमी शुन्य असते. Y- अक्षास $x = 0$ या समीकरणाने दर्शवितात.

5.2.3 आरंभीबंदुचे निर्देशक

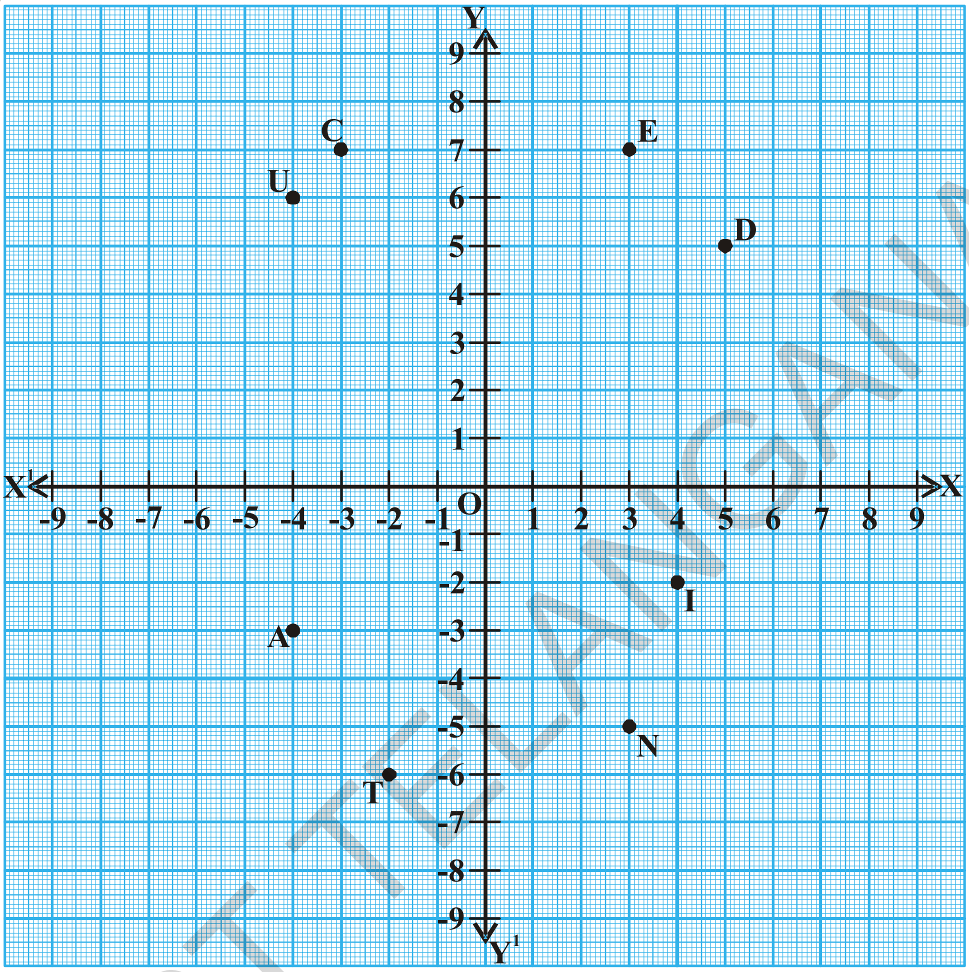
O बिंदु Y-अक्षावर स्थित आहे. त्याच्या Y-अक्षापासुन अंतर शुन्य आहे. म्हणुन त्याचा x-निर्देशक शुन्य आहे. आणि तो X- अक्षावर सुध्दा स्थित आहे. त्याचे X-अक्षापासुन अंतर शुन्य आहे. म्हणुन त्याच्या y- निर्देशक शुन्य आहे.

म्हणुन आरंभबिंदु 'O' चे निर्देशक (0,0) आहेत.

प्रयत्न करा.

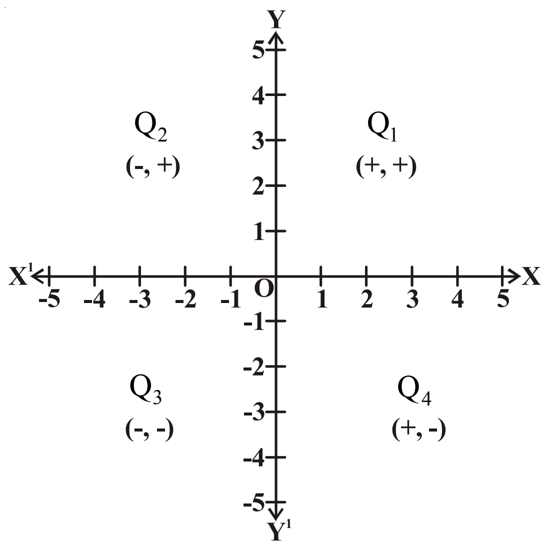
1. $(0, x)$ $(0, y)$ (0,2) आणि (0,–5) हे बिंदु कोणत्या अक्षावर आहे का?
2. X- अक्षावर असणाऱ्या बिंदुचे सामान्य रुप काय आहे?

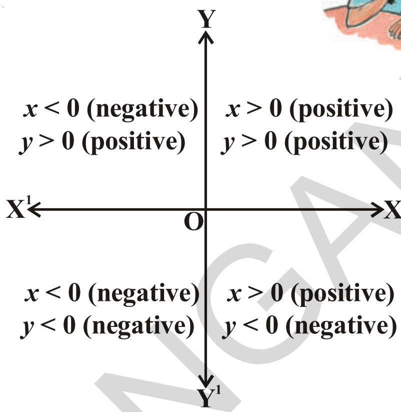
उदाहरण-5: खालील आलेखाच्या आधारावरुन तक्ता पुर्ण करा.



बिंदु	प्रथम नि.	व्दितीयनि.	निर्देशक	पाद	निर्देशकाचे चिन्ह
E	3	7	E (3,7)	Q_1	(+, +)
D	.....	.....	.....	.....	.....
U	–4	6	U (–4,6)	.....	(–,+)
C	.....	.....	.....	.....	.....
A	–4	–3	A (–4, –3)	.....	(–,–)
T	.....	.....	.....	.....	.....
I	4	–2	I (4, –2)	.....	(+,–)
O	.....	.....	.....	.....	.....
N	.....	.....	.....	.....	.....

वरील तक्तावरुन बिंदुचे निर्देशांक आणि बिंदुच्या पादाचे स्थान यामधील संबंध स्थित आहे. हे तुमच्या लक्षात येईल.





अभ्यास 5.2

1. खालील बिंदु कोणत्या पादात आहे ते लिहा.

   i) $(-2, 3)$ ii) $(5, -3)$ iii) $(4, 2)$ iv) $(-7, -6)$

   v) $(0, 8)$ vi) $(3, 0)$ vii) $(-4, 0)$ viii) $(0, -6)$

2. खालील बिंदुचे प्रथम निर्देशक आणि व्दितीय निर्देशक लिहा.

   i) $(4, -8)$ ii) $(-5, 3)$ iii) $(0, 0)$ iv) $(5, 0)$

   v) $(0, -8)$

3. खालील पैकी कोणते बिंदु अक्षावर आहेत? अक्षाचे नाव द्या.

   i) $(-5, -8)$ ii) $(0, 13)$ iii) $(4, -2)$ iv) $(-2, 0)$

   v) $(0, -8)$ vi) $(7, 0)$ vii) $(0, 0)$

4. खालील दिलेले आलेखाच्या आधारावरुन लिहा.

   i) L चा व्दितीय निर्देशक

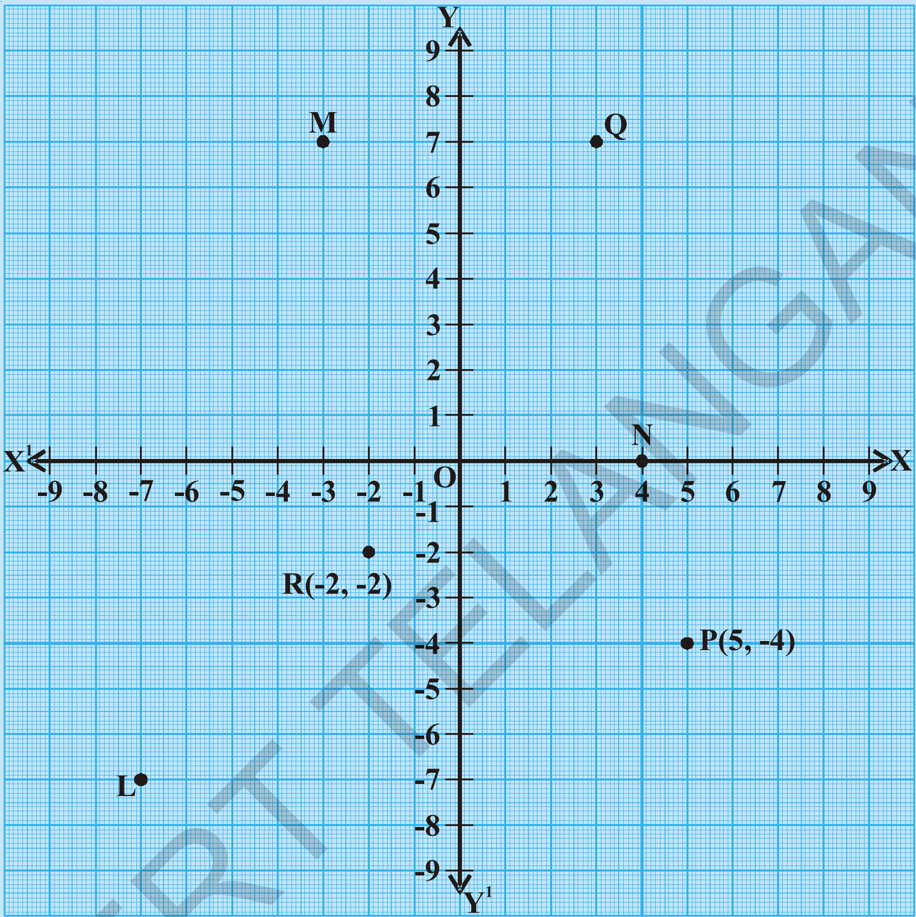
   ii) Q चा व्दितीय निर्देशक

   iii) $(-2, -2)$ ने दर्शविणारा बिंदु

iv) (5, –4) ने दर्शविणारा बिंदु

v) N चा प्रथम निर्देशक

vi) M चा प्रथम निर्देशक



5. सत्य किंवा असत्य सांगुन अचुक विधान लिहा.
   i. कार्तेशियन प्रतलातील आडव्यारेषा Y - अक्ष म्हणतात.
   ii. कार्तेशियन प्रतलातील उभ्या रेषेला Y - अक्ष म्हणतात.
   iii. दोन्ही अक्षावर असणाऱ्या बिंदुला आरंभबिंदु म्हणतात.
   iv. (2, –3) हा बिंदु तिसऱ्या पादात असतो.
   v. (–5, –8) बिंदु चवथ्या पादात असतो.
   vi. (–x , –y) बिंदुला पहिल्या पादात असतो जेथे $x < 0$, $y < 0$.
6. खालील क्रमीक जोडयांना आलेखाच्या कागदावर स्थापन करा? तुम्हाला काय दिसते?
   i.. (1, 0), (3 , 0), (–2 , 0), (–5, 0), (0, 0), (5, 0), (–6, 0)
   ii. (0, 1), (0 , 3), (0 , –2), (0, –5), (0, 0), (0, 5), (0, –6)

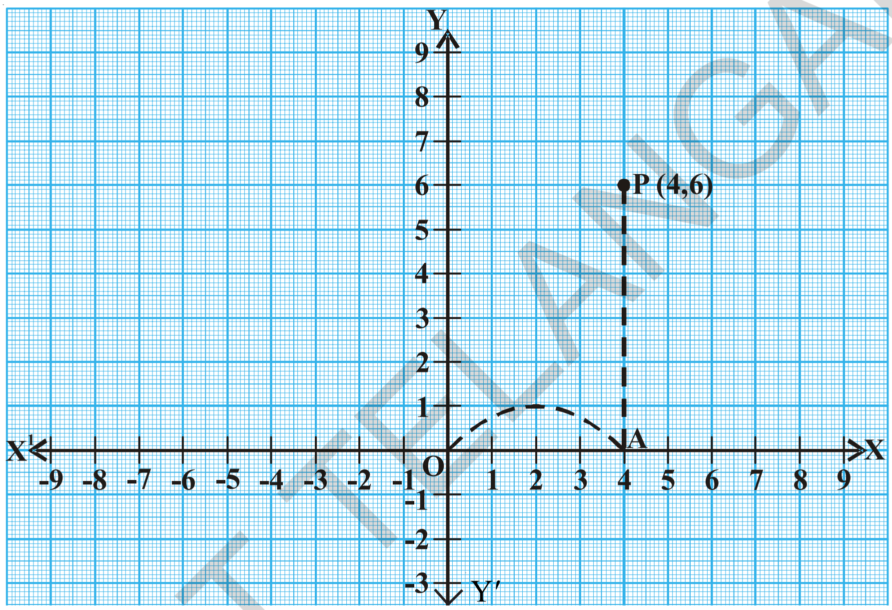
5.3 बिंदुचे निर्देशक दिले असता कार्तेशियन प्रतलात त्या बिंदुना स्थापन करणे.

कार्तेशियन प्रतलात सुचित केलेल्या बिंदुना कसे वाचतो. हे आपण आतापर्यंत पाहिलोत. आता. बिंदुचे निर्देशक दिले असता. सुचित करणे शिकुया.

उदा. (4, 6) हा बिंदु कसा स्थापन करतो?

P बिंदु कोणत्या पादात स्थित आहे तुम्ही सांगु शकता काय?

आपणास माहित आहे. की, प्रथम निर्देशक (x-निर्देशक) 4 आहे. आणि व्दितीय निर्देशक y-निर्देशक 6 आहे.



∴ P हा पहिल्या पादात आहे.

P (4, 6) बिंदु स्थापना करण्यासाठी खालील पध्दत वापरली पाहिजे.

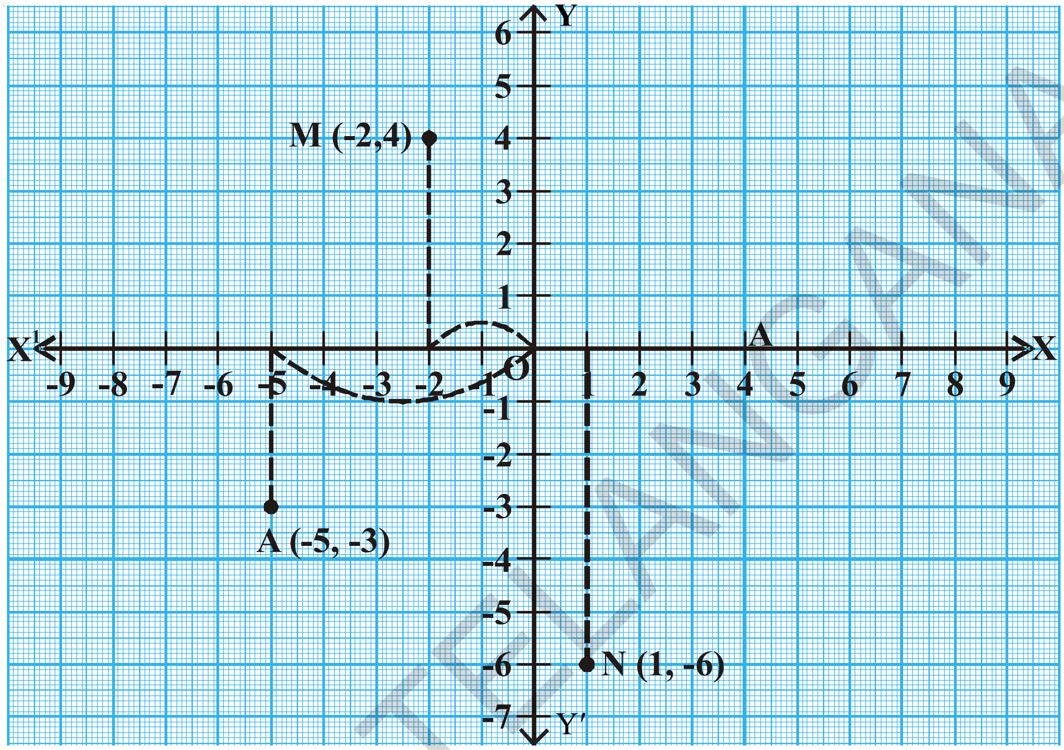
- त्यांच्या शुन्यावर छेदणाऱ्या एकमेकांस लंब असणाऱ्या दोन संख्या रेषा आलेखावर काढा. आडव्या रेषला X-अक्ष आणि उभ्या रेषेला Y- अक्ष असे नाव द्या. आणि दोघांचा छेदन बिंदुचे स्थान माहित करुन त्यास 0 (आरंभ बिंदु) नाव द्या.
- x-निर्देशक लक्षात ठेऊन शुन्यापासुन सुरुवात आरंभाबिंदुपर्यंत जा.
- X-अक्षाच्या धनभागाकडे 4 एकक सरका. म्हणजे त्याला उजव्या बाजु कडे आणि A बिंदु सुचित करा
- Y-अक्षाच्या धन भागास समांतर वरच्या दिशेने A पासुन 6 एकक सरका(चला)
- 'P' चे स्थान निश्चीत करा म्हणजे (4, 6) सारखे

त्यांच्या निर्देशकाच्या साहाय्याने वरील पध्दतीनुसार बिंदुना कार्तेशियन प्रतलात सुचित केल्यास त्यास बिंदुचे विस्थापण म्हणतात.

उदाहरण-7: कार्तेशियन प्रतलात खालील बिंदु स्थापन करा.

(i) M (–2, 4), (ii) A (–5, -3), (iii) N (1, –6)

सोडवणुक: X-अक्ष आणि Y-अक्ष काढा.



(i) M कोणत्या पादात आहे तुम्ही सांगु शकता का?

जर $x < 0$, $y > 0$ तो दुसऱ्या पादात आहे. त्याचे स्थान निश्चित करु या.

M (–2,4) : शुन्यापासुन सुरु करुन X- अक्षावर ऋणात्मक दिशेत म्हणजे डाव्याबाजुला 2 एकक सरका(चला) तिथुन Y- अक्षाला समांतर म्हणजेच वरती 4 एकक सरका. आणि त्याला M (-2,4) असे नाव द्या.

(ii) A (–5, –3) :

A बिंदु तिसऱ्या पादात आहे. शुन्यापासुन आरंभबिंदु पासुन सुरु करा.

X-अक्षावर ऋणात्मक दिशेत शुन्यापासुन त्याच्या डाव्याबाजुस 5 एकक सरका इथुन Y- अक्षास समांतर असलेल्या म्हणजेच खालच्या दिशेने रेषेवर 3 एकक सरका.आणि त्याला A (-5,-3) असे नाव द्या.

(iii) N (1, –6): हे कोणत्या पादात आहे.

N बिंदु चवथ्या पादात आहे.

X-अक्षाच्या धन दिशेत म्हणजे शुन्याच्या उजव्या बाजुला 1 एकक सरका. इथुन Y-अक्षाला समांतर ऋणदिशेत म्हणजे खाली रेषेवर 6 एकक सरका. आणि त्या बिंदुला N (1,-6) असे नाव द्या.

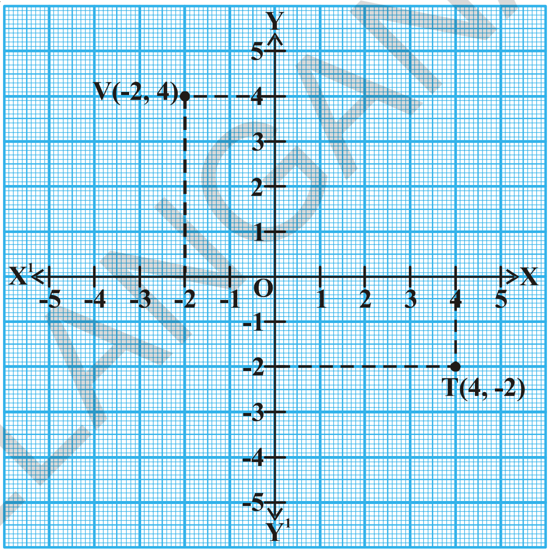
हे करा

कार्तेशियन प्रतलात खालील बिंदुना विस्थापन करा.

1. B (–2, 3) 2. L (5, –8) 3. U (6, 4) 4. E (–3, –3)

उदाहरण8: कार्तेशियन प्रतलात T(4, –2) आणि V(–2, 4) या बिंदुना विस्थापन करा. हे दोन्ही सारखेच स्थान दर्शविते का ?

सोडवणुक: या उदाहरणात दोन बिंदु T (4, –2) आणि V(–2, 4) विस्थापन करत आहो हे दोन्ही बिंदु भिन्न आहेत का समान आहे? विचार करा.



आपणास दिसुन येते की, (4, –2) आणि (–2, 4) वेगवेगळ्या स्थानी आहेत. वरील क्रिया P (8, 3), Q(3, 8) आणि A (4, –5), B(–5 , 4) या बिंदुंसाठी पुन्हा करा आणि सांगा की, (x, y) हा बिंदु (y, x) च्या वेगळा आहे कि नाही ?

वरील विस्थापनावरुन आपणास पुरावा मिळतो की, (x, y) चे कार्तेशियन प्रतलातील स्थान (y, x) बिंदुच्या कार्तेशियन स्थानाच्या वेगळा आहे. म्हणजे x आणि y चा क्रम महत्वाचा आहे.

म्हणुन (x, y) ला क्रमीक जोडी म्हणतात.

जर $x \neq y$, तर $(x, y) \neq$ क्रमीक जोडी (y, x).

जर $x = y$, तर $(x, y) = (y, x)$

उदाहरण9: आलेखाच्या कागदावर A(2, 2), B(6, 2), C (8, 5) आणि D (4, 5) या बिंदुचे विस्थापन करा. समांतरभुज चौकोन तयार करण्यासाठी सर्व बिंदुना जोडा आणि त्याचे क्षेत्रफळ काढा.

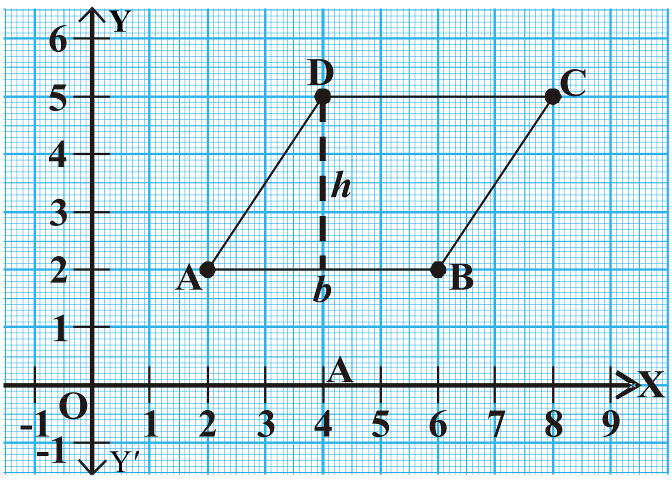
सोडवणुक: दिलेले सर्व बिंदु Q_1 पादात आहे. आलेखावरुन b = AB = 4एकक

उंची h = 3 एकक

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ

= पाया × उंची

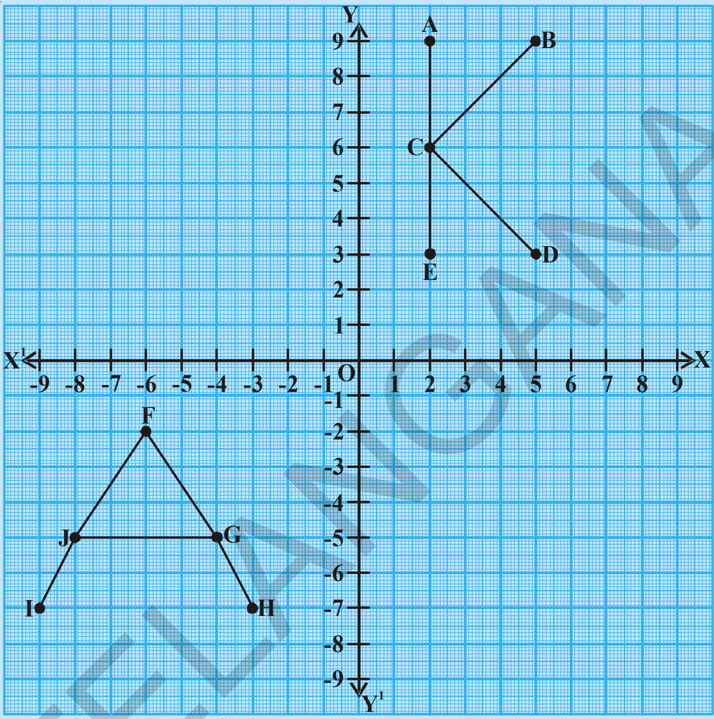
$= 4 \times 3 = 12$ एकक^2



हे करा

(i) A, B, C, D, E या बिंदुचे निर्देशक लिहा.

(ii) F, G, H, I, J चे निर्देशक लिहा.



अभ्यास 5.3

1. खाली दिलेल्या बिंदुच्या x , y निर्देशकांना कार्तेशियन प्रतलात विस्थापन करा

x	2	3	−1	0	−9	−4
y	−3	−3	4	11	0	−6
(x, y)						

2. (5, −8) आणि (−8, 5) चे स्थान सारखे आहे का? तुमच्या उत्तराचा पडताळा करा.

3. आलेखाच्या कागदावर विस्थापन केल्यास (1, 2), (1, 3), (1, −4), (1, 0), आणि(1, 8). बिंदुचे स्थान सारखे आहे का?

4. (5, 4), (8, 4), (3, 4), (0, 4), (−4, 4), (−2, 4) या बिंदुच्या स्थाना बद्दल तुम्ही काय म्हणता? या बिंदुना आलेखाच्या कादगावर दर्शवुन तुमचे उत्तर सिध्द करा

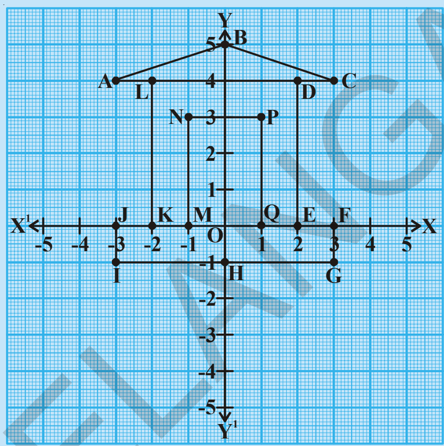
5. (0, 0) (0, 3) (4, 3) (4, 0) या बिंदुना आलेखाच्या कागदावर विस्थापन करा. आयत तयार करण्यासाठी त्या बिंदुना सरळ रेषेने जोडा. आयताचे क्षेत्रफळ काढा.

6. (2, 3), (6, 3) आणि (4, 7) या बिंदुना आलेखाच्या कागदावर विस्थापन करा. त्रिकोण तयार करण्यासाठी त्या बिंदुना जोडा. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

7. प्रत्येकातील निर्देशांकाची बेरीज 5 असलेल्या कमीत कमी सहा बिंदुना आलेखावर विस्थापन करा.

सुचना : (–2, 7) (1, 4) ....

8. आलेखाकडे बघा, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, L, M. N, P, O आणि Q बिंदुचे निर्देशांक लिहा.



9. आलेखाच्या कागदावर प्रत्येक बिंदुच्या जोंड्यांना विस्थापना करा. रेषोच्या साहाय्याने त्यांना जोडा.

i.	(2, 5), (4, 7)	ii.	(–3, 5), (–1, 7)	iii.	(–3, –4), (2, –4)
iv.	(–3, –5), (2, –5)	v.	(4, –2), (4, –3)	vi.	(–2, 4), (–2, 3)
vii.	(–2, 1), (–2, 0)	viii.	(–3, 5), (–3, 4)	ix.	(2, 5), (2, –4)
x.	(2, –4), (4, –2)	xi.	(2, –4), (4, –3)	xii.	(4, -2), (4, 7)
xiii.	(4, 7), (–1, 7)	xiv.	(–3, 2), (2, 2)		

10 खालील बिंदुच्या जोडींना सरळ रेषेच्या साहाय्याने सारख्या आलेखात जोडा. तुम्हाला आश्चर्यचकीत करणारी आकृती येते, ती काय आहे?

(1, 0) (0.9) ; (2, 0) (0, 8); (3, 0) (0, 7); (4, 0) (0, 6);

(5, 0) (0.5); (6, 0) (0, 4); (7, 0) (0, 3); (8, 0) (0, 2) ; (9, 0) (0, 1).

तुमच्या निरिक्षणास काय आले?

कृती

हैद्राबाद, नवि दिल्ली, चेन्नुर, आणि विशाखापट्टनम त्याच्या रेखावृत्त आणि अंक्षांवरुन ग्लोबलवर त्यांच्या स्थानाचा अभ्यास करु या.

सृजनात्मक कार्य

एका आलेखाच्या कागदावर खालील बिंदुच्या जोड्या अक्षांवर विस्थापन करा आणि त्यांना रेषेच्या साहाय्याने जोडा.

(1, 0) (0.9) ; (2, 0) (0, 8); (3, 0) (0, 7); (4, 0) (0, 6);

(5, 0) (0.5); (6, 0) (0, 4); (7, 0) (0, 3); (8, 0) (0, 2) ; (9, 0) (0, 1).

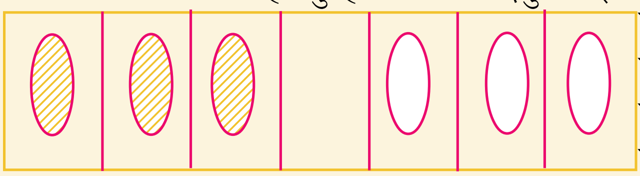
वरील बिंदुचा वापर करुन चित्र पुर्ण करा. तुम्हाला काय दिसुन यते?

आपण काय चर्चा केली?

- प्रतलात बिंदुचे निश्चत स्थान दर्शविण्यासाठी आपणास दोन सुचकांची गरज आहे.
- प्रतलातील बिंदु किंवा वस्तुस दोन लंब रेषेच्या साहाय्याने निश्चीत केल्या जाते. त्यापैकी एक अडवी (X-अक्ष) आणि दुसरी उभी रेषा (Y-अक्ष) आहे.
- रेने डिसकार्टेस च्या नावावरुन या प्रतलाला कार्तेशियन प्रतल हे नाव आले.
- X-अक्ष आणि Y-अक्ष यांच्या छेदन बिंदुस आरंभ बिंदु म्हणतात. आरंभ बिंदुचे निर्देशांक (0,0) असतात.
- क्रमीक जोडी (x, y) ही क्रमीक जोडी (y, x) पेक्षा वेगळी आहे.
- X-अक्षाचे $y = 0$ या समीकरणाने दर्शवितात.
- Y-अक्षाला $x = 0$ या समीकरणाने दर्शवितात.

मेंदुची गंमत

खालील कोडयाकडे पहा तुम्हाला गंमत दिसुन येईल.



खालील नियमावरुन पांढऱ्या कार्डचा तुकडा गडद कार्डच्या तुकड्याच्या जागी ठेवला पाहिजे (1) सारख्या रंगाचे तुकडे एकमेकांवर उडी मारु नये(2) एक तुकडा एकाचवेळी, एकाच जागी, बदलली पाहिजे. तर बदलल्यानीची कमीत कमी संख्या काढा. बदललेली कमीत कमी संख्या 15ते 20 आहे. तुम्ही त्यास व्यवस्थीत पणे करु शकता का? खेळ चांगला मजेदार बनन्यासाठी कार्डच्या तुकड्याची संख्या वाढवा.

06 दोन चल राशीतल रेषीय समीकरणे

6.1 प्रस्तावना

खालच्या सारखे प्रश्न आपल्याला नेहमी येत असतात.

(i) जर पाच पेनची किंमत 60 रुपये तर एका पेनची किंमत माहित करा.

(ii) एका संख्येत 7 मिळविले असता 51 मिळते तर ती संख्या कोणती?

संदर्भ (i) मध्ये पेनची किंमत माहित नाही. संदर्भ (ii) मध्ये संख्या माहित नाही, या सारखे प्रश्न तुम्ही कसे सोडवाल? माहित नसलेल्या राशीसाठी x, y किंवा z घेतो आणि त्या संदर्भासाठी समीकरण लिहितो.

संदर्भ (i) साठी, आपण लिहु शकतो,

$5 \times$ एका पेनची किंमत $= 60$

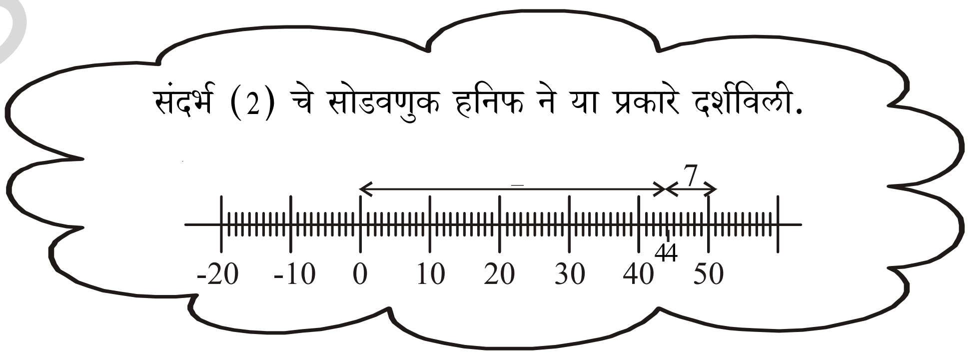
जर एका पेनची किंमत y असेल,

तर $5y = 60$

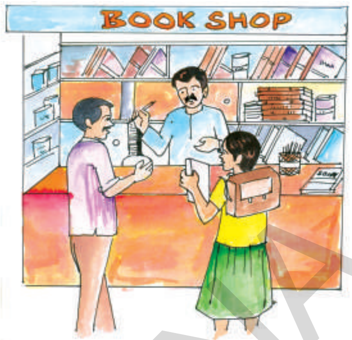
आता हे y साठी सोडवा.

या सारखेच संदर्भ (1) साठी आपण समीकरण लिहु शकतो आणि अनओळखी संख्या माहित करु शकतो. अशा प्रकारचे समीकरणे हे रेषीय समीकरणे होत.

एका चल राशीतील रेषीय समीकरणाचे उदाहरणे $x + 3 = 0$, $x + \sqrt{3} = 0$ आणि $\sqrt{2}x + 5 = 0$ अशा समीकरणाचे सोडवणुक अव्दितीय असते हे तुम्हाला सुध्दा माहित आहे. संख्या रेषेवर सोडवणुक कसे दर्शवावे याचे सुध्दा तुम्ही आठवण करा.



6.2 दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणे



आता खालील संदर्भ विचारात घेऊ या.

एका दिवशी काव्या तिच्या वडीलासोबत दुकानात गेली. ती 4 वह्या आणि 2 पेनी विकत घेतल्या. तिच्या वडीलांनी या साठी दुकानदाराला 100 रुपये दिले.

काव्या ला वही आणि पेनची किंमत माहित नव्हती. आता तुम्ही या माहितीला समीकरणाच्या रुपात व्यक्त करु शकता का?

येथे एका पेन आणि वहीची किंमत अनोळखी आहे. म्हणजेच येथे दोन राशी अज्ञात आहेत. त्यांना दर्शविण्यासाठी समजा x आणि y चा वापर करु या. म्हणुन एका वहिची किंमत x रुपये आणि एका पेनची किंमत y रुपये

वरील माहितीला आपण समीकरणाच्या रुपात दर्शवु शकतो. $4x + 2y = 100$,

समीकरणात x आणि y चे घातांकाचे निरिक्षण तूम्ही केलेत का?

अशा प्रकारे 'x' आणि 'y' चलात वरील समीकरण रेषीय रुपात आहे.

जर एका रेषीय समीकरणात दोन चल असतील तर त्याला दोन चल राशीतील रेषीय समीकरणे म्हणतात.

म्हणजेच $4x + 2y = 100$ हे दोन चल राशीतील रेषीय समीकरणाचे उदाहरण होय. हे साधरणता: 'x' आणि 'y'. या चल राशीने दर्शवितात.पण इतर अक्षर सुध्दा वापरु शकतो.

$p + 3q = 50$, $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v = \sqrt{11}$, $\frac{s}{2} - \frac{t}{3} = 5$ आणि $3 = \sqrt{5}x - 7y$ हे दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाचे उदाहरणे होय.

वरील समीकरणांना तुम्ही अनुक्रमे $p + 3q - 50 = 0$, $\sqrt{3}u + \sqrt{2}v - \sqrt{11} = 0$, $\frac{s}{2} - \frac{t}{3} = 5$ आणि $\sqrt{5}x - 7y - 3 = 0$ या प्रकारे पण ठेऊ शकतो याची नोंद घ्या.

म्हणुन x, y या दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाचे सामान्य रुप $ax + by + c = 0$ येथे a, b, c हे वास्तव संख्या आणि a, b एकदाच शुन्य नसतात.

उदाहरण-1: सचिन आणि सहवाग यांनी एकत्र 137 धावा केल्यात या माहितीला समीकरणाच्या रुपात व्यक्त करा.

सोडवणुक : समजा सचिन ने केलेल्या धावा 'x' आणि सहवाग ने केलेल्या धावा 'y'.

तर वरील माहिती समीकरणाचा रुपात

$x + y = 137$

उदाहरण2. हेमाचे वय मेरीच्या वयापेक्षा 4 पटीने जास्त आहे. या माहितील दर्शविण्यासाठी दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणात लिहा.

सोडवणुक: समजा हेमाचे वय 'x' वर्ष आणि मेरीचे 'y' वर्ष

जर मेरीचे वय y तर हेमाचे वय '$4y$'.

दिलेल्या माहिती नुसार $x = 4y$

$\Rightarrow x - 4y = 0$ (किती ?)

उदाहरण 3: एखादी संख्या, ज्या संख्याचे उलटे केल्यानंतर मिळालेल्या संख्या पेक्षा 27 ने जास्त आहे. जर त्याचा एकम स्थानचा अंक आणि दहम स्थानचा अंक अनुक्रमे x आणि y असेल तर या विधानाला दर्शविणारी रेषीय समीकरण लिहा.

सोडवणुक: एकम स्थानचा अंक x आणि दहम स्थानचा अंक y दर्शवत असेल तर ती संख्या $10y + x$

जर आपण अंकाची अदला बदल केली तर नविन संख्या $10x + y$ असु शकते (दोन अंकी संख्या मधील अंकाच्या स्थान किमतीची आठवण करा)

म्हणुन दिलेल्या विधाना नुसार

(दोन अंकी संख्या)- (अंक उलटे केल्यानंतर मिळालेली संख्या)=27

म्हणजेच $10y + x - (10x + y) = 27$

$\Rightarrow 10y + x - 10x - y - 27 = 0$

$\Rightarrow 9y - 9x - 27 = 0$

$\Rightarrow y - x - 3 = 0$

$\Rightarrow x - y + 3 = 0$ हे अपेक्षीत समीकरण होय.

उदाहरण 4: खालील प्रत्येक समीकरणाला $ax + by + c = 0$ च्या रुपात व्यक्त करा. आणि a, b आणि c च्या किमती काढा.

i) $3x + 4y = 5$ ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$

iii) $3x = y$ iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$

v) $3x - 7 = 0$

सोडवणुक : (i) $3x + 4y = 5$ ला

$3x + 4y - 5 = 0$.लिहु शकतो.

येथे $a = 3, b = 4$ आणि $c = -5$.

(ii) $x - 5 = \sqrt{3}y$ ला

$1.x - \sqrt{3}y - 5 = 0$ लिहु शकतो.

येथे $a = 1, b = -\sqrt{3}$ आणि $c = -5$.

(iii) $3x = y$ समीकरण

$3x - y + 0 = 0$ लिहु शकतो.

येथे $a = 3, b = -1$ आणि $c = 0$.

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$ समीकरणाला

$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{6} = 0$ लिहु शकतो.

$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ आणि $c = \frac{-1}{6}$

(v) $3x - 7 = 0$ समीकरणाला

$3x + 0.y - 7 = 0$ लिहु शकतो.

$a = 3, b = 0; c = -7$

उदाहरण5: खालील प्रत्येकाला $ax + by + c = 0$ च्या रुपात लिहा. आणि a, b आणि c च्या किंमती माहित करा.

i) $x = -5$
ii) $y = 2$
iii) $2x = 3$
iv) $5y = -3$

सोडवणुक:

क्र.स.	दिलेले समीकरण	$ax + by + c = 0$ मध्ये व्यक्त	a, b, c च्या किंमती		
			a	b	c
1	$x = -5$	$1.x + 0.y + 5 = 0$	1	0	5
2	$y = 2$	$0.x + 1.y - 2 = 0$	0	1	–2
3	$2x = 3$	---	---	---	---
4	$5y = -3$	----	----	---	---

प्रयत्न करा

1. खालील रेषीय समीकरणाना ax + by + c = 0 च्या रुपात व्यक्त करा. आणि प्रत्येक संदर्भात a, b, c च्या किंमती दर्शवा?

i) $3x + 2y = 9$ ii) $-2x + 3y = 6$ iii) $9x - 5y = 10$

iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 5 = 0$ v) $2x = y$

अभ्यास 6.1

1. खालील रेषीय समीकरणाना ax+by+c=0 च्या रुपात व्यक्त करा आणि प्रत्येक संदर्भात a, b ,c च्या किंमती दर्शवा?

i) $8x + 5y - 3 = 0$ ii) $28x - 35y = -7$ iii) $93x = 12 - 15y$

iv) $2x = -5y$ v) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$ vi) $y = \frac{-3}{2}x$

vii) $3x + 5y = 12$

2. खालील प्रत्येकाला ax + by + c = 0 च्या रुपात लिहा अणि a, b आणि c च्या किंमती माहित करा.

i) $2x = 5$ ii) $y - 2 = 0$ iii) $\frac{y}{7} = 3$ iv) $x = \frac{-14}{13}$

3. खालील विधानांना दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणात व्यक्त करा.

(i) दोन संख्याची बेरीज 34 आहे.

(ii) बॉलपेन ची किंमत शाईच्या पेनच्या किमतीच्या अर्ध्यापेक्षा 5 ने कमी आहे.

(iii) सिंधुच्या गुणाच्या दुपटीपेक्षा 10 ने जास्त गुण भार्गवीने मिळाल्या.

(iv) एका पेन्सीलची किंमत 2 रुपये आहे आणि एकाबॉलपेनची किंमत 15 रुपये आहे. शिला ने खरेदी केलेल्या पेन्सील आणि पेनीसाठी 100 रुपये चुकते केले.

(v) प्रधानमंत्री साह्यनिधि साठी 9 व्या वर्गातील यामीनी आणि फातीमा दोघीनी मिळुन 200 रुपये दिले.

(vi) एका संख्येतील अंकाची अदला बदल केली असता त्या संख्याची बेरीज 121 होते (जर एकम स्थानचा अंक 'x' आणि दहम स्थानाचा अंक 'y')

6.3 दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाचे सोडवणुक

एक चलराशीतील रेषीय समीकरणाचे अद्वितीय उकल असते. हे तुम्हाला माहित आहे.

$3x - 4 = 8$ या समीकरणाचे उकल काय आहे?

$3x - 2y = 5$ हे समीकरण विचारात घेऊ

दोन चलराशीतील या रेषीय समीकरणाच्या बाबतीत आपण काय सांगु शकतो? सोडवणुका मध्ये आपल्याला फक्त एकच किमत मिळते. का किंवा अनेक मिळतात का? चला स्पष्ट करु.

या समीकरणाचे सोडवणुक $x = 3$ असे तुम्ही म्हणु शकता का?

चला तपासणी करु या. जर समीकरणात $x = 3$ आपण प्रतिक्षेपीत केलो.

$$3(3) - 2y = 5$$

$$9 - 2y = 5$$

म्हणजेच दिलेल्या समीकरणाचे उकल अजुन आपण माहित केलेले नाही. म्हणुन उकल माहित करण्यासाठी 'x' च्या किंमती बरोबर आपल्याला 'y' च्या किंमतीची पण गरज आहे. वरील समीकरणावरुन आपण y ची किंमत माहित करु शकतो. $9 - 2y = 5. \Rightarrow 2y = 4$ किंवा $y = 2$

$x = 3$ आणि $y = 2$ या 'x' आणि y च्या किंमती $3x - 2y = 5$ या समीकरणाला पुर्ण करतात. अशाप्रकारे दोन चलाराशीतील समीकरण पुर्ण करण्यासाठी आपल्याला दोन किमतीची आवश्यकता आहे. एक 'x' ची किंमत आणि दुसरी y ची किंमत.

म्हणुन दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाला पुर्ण करण्यासाठी ‘x’ आणि ‘y’ च्या किंमतीच्या कोणत्याही जोडीला त्या समीकरणाची सोडवणुक म्हणतात.

$3x - 2y = 5$ ची उकल $x = 3, y = 2$ आहे हे आपल्या निरिक्षणात आले आहे. या सोडवणुकीला जोडीच्या क्रमात$(3, 2)$ असे लिहिले जाते. सुरुवातील ‘x’ ची किंमत आणि नंतर ‘y’ ची किंमत लिहिल्या जाते. समीकरणासाठी आणखी इतर कोणते तरी उकल आहे का? तुमच्या आवडीने एक किंमत घ्या. समजा $x = 4$ घ्या. आणि ती किंमत $3x - 2y = 5$ या समीकरणात प्रतिक्षेपीत करा. तर समीकरण $12 - 2y = 5$ असे बनते. जे एका चला राशीतील समीकरण आहे. याला सोडविल्या नंतर

$$y = \frac{12-5}{2} = \frac{7}{2}\text{, म्हणुन } \left(4, \frac{7}{2}\right) \text{ हे } 3x - 2y = 5 \text{ चे इतर उकल आहे.}$$

$3x - 2y = 5$ साठी तुम्ही आणखी काही उकल माहित करु शकता का? तपासणी करा. $(1, -1)$ हे उकल आहे का?

अशा प्रकारे दोन चल राशीतील रेषीय समीकरणासाठी आपण अनेक उकल माहित करु शकतो.

सुचना: दोन उकल मिळविण्याचा सोपा प्रकार म्हणजे $x = 0$ ठेवा आणि संबंधीत ‘y’ ची किंमत मिळवा. याच प्रमाणे $y = 0$ ठेवुन संबंधीत ‘x’ ची किंमत माहित करु शकतो.

प्रयत्न करा

वरील समीकरणासाठी उकलच्या किमतींच्या 5 जोड्या माहित करा

उदाहरण 6: $4x + y = 9$ च्या चार वेगवेगळ्या उकल माहित करा(तक्ता पुर्ण करा)

उकल :

क्र.स	x किंवा y चला साठी निवडलेली किंमत	दुसऱ्या चलराशीची किंमत		उकल
1.	$x = 0$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4 \times 0 + y = 9$ $\Rightarrow y = 9$	$(0,9)$
2.	$y = 0$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4x + 0 = 9$ $\Rightarrow 4x = 9$ $\Rightarrow x = 9/4$	$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$
3.	$x = 1$	$4x + y = 9$	$\Rightarrow 4 \times 1 + y = 9$ $\Rightarrow 4 + y = 9$ $\Rightarrow y = 5$	——
4.	$x = -1$	——		$(-1, 13)$

$\therefore$ वरील समीकरणासाठी $(0, 9)$, $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$, $(1, 5)$ आणि $(-1, 13)$ हे काही उकल आहेत.

उदाहरण-7: $x + 2y = 4$ या समीकरणाचे खालील पैकी कोणते उकल आहे याची तपासणी करा (तक्ता पुर्ण करा)

i) $(0, 2)$ ii) $(2, 0)$ iii) $(4, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

v) $(1, 1)$ vi) $(-2, 3)$

सोडवणुक: जेव्हा आपण दिलेल्या समीकरणात किमतीची जोडी प्रतिक्षपीत केलो आणि जर आपल्याला LHS = RHS मिळाले ते उकल असते.

$x + 2y = 4$ हे दिलेले समीकरण आहे.

क्र.स.	किमतीची जोडी	**LHS** ची किंमत	**RHS** ची किंमत	**LHS** आणि **RHS** मधील संबंध	उकल आहे/नाही
1.	$(0, 2)$	$x + 2y = 0 + (2 \times 2)$ $= 0 + 4 = 4$	4	$\therefore$ LHS=RHS	$\therefore (2, 0)$ हे उकल आहे.
2.	$(2, 0)$	$x + 2y = 2 + (2 \times 0)$ $= 2 + 0 = 2$	4	......	$(0, 2)$ हे उकल नाही
3.	$(4, 0)$	$x + 2y = 4 + (2 \times 0)$ $= 4 + 0 = 4$	4	LHS = RHS	___
4.	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$	$x + 2y = \sqrt{2} + 2(-3\sqrt{2})$ $= \sqrt{2} - 6\sqrt{2}$ $= -5\sqrt{2}$	___	LHS $\neq$ RHS	$(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ हे उकल नाही
5.	$(1, 1)$	___	4	LHS $\neq$ RHS	$(1, 1)$ हे उकल नाही
6.	___	$x + 2y = -2 + (2 \times 3)$ $= -2 + 6 = 4$	4	LHS = RHS	$(-2, 3)$हे उकल आहे

उदाहरण-8: जर $5x - 7y = k$, या समीकरणाची उकल $x = 3, y = 2$ तर k ची किंमत माहित करा आणि परिणामी समीकरण लिहा.

सोडवणुक: जर $x = 3, y = 2$ हे $5x - 7y = k$

समीकरणाचे उकल असेल तर $5 \times 3 - 7 \times 2 = k$

$$\Rightarrow 15 - 14 = k$$

$$\Rightarrow 1 = k$$

$$\therefore k = 1$$

$5x - 7y = 1$ हा परिणामी समीकरण आहे.

उदाहरण-9: जर $5x + 3y - 7 = 0$ या समीकरणाची उकल $x = 2k + 1$ आणि $y = k$ असेल तर k ची किंमत माहित करा.

सोडवणुक: $5x + 3y - 7 = 0$ या समीकरणाची उकल $x = 2k + 1$ आणि $y = k$ दिलेली आहे. तर x आणि y च्या किंमती समीकरणात प्रतिक्षेतीत करुन

$$\Rightarrow 5(2k + 1) + 3k - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 10k + 5 + 3k - 7 = 0$$

$\Rightarrow 13k - 2 = 0$ (हे एका चलराशीतील रेषीय समीकरण आहे)

$$\Rightarrow 13k = 2$$

$$\therefore k = \frac{2}{13}$$

अभ्यास - 6.2

1. खालील प्रत्येक समीकरणाचे तिन वेगवेगळे उकल माहित करा?
   i) $3x + 4y = 7$ ii) $y = 6x$ iii) $2x - y = 7$
   iv) $13x - 12y = 25$ v) $10x + 11y = 21$ vi) $x + y = 0$
2. खालील रेषीय समीकरणाचे जर $(0, a)$ आणि $(b, 0)$ उकल असेल तर 'a' आणि 'b' ची किंमत माहित करा.
   i) $8x - y = 34$ ii) $3x = 7y - 21$ iii) $5x - 2y + 3 = 0$
3. $2x - 5y = 10$ या समीकरणाचे खालील पैकी कोणते उकल आहे. तपासणी करा.
   i) $(0, 2)$ ii) $(0, -2)$ iii) $(5, 0)$ iv) $(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ v) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
4. $2x + 3y = k$ या समीकरणाची उकल जर $x = 2, y = 1$ असेल तर k ची किंमत माहित करा. आणि परिणामी समीकरणाचे दोन उकल माहित करा.

5. $3x - 2y + 6 = 0$ या समीरकणात उकल जर $x = 2 - \alpha$ आणि $y = 2 + \alpha$ असेल तर 'α'ची किंमत माहित करा आणि परिणामी समीकरणाचे तिन उकल माहित करा.
6. $3x + ay = 6$ या समीकरणाची उकल जर $x = 1, y = 1$ असेल तर 'a' ची किंमत माहित करा.
7. दोन चल राशीतील वेगवेगळे पाच रेषीय समीकरणे लिहा. आणि त्या प्रत्येकासाठी तीन -तीन उकल माहित करा.

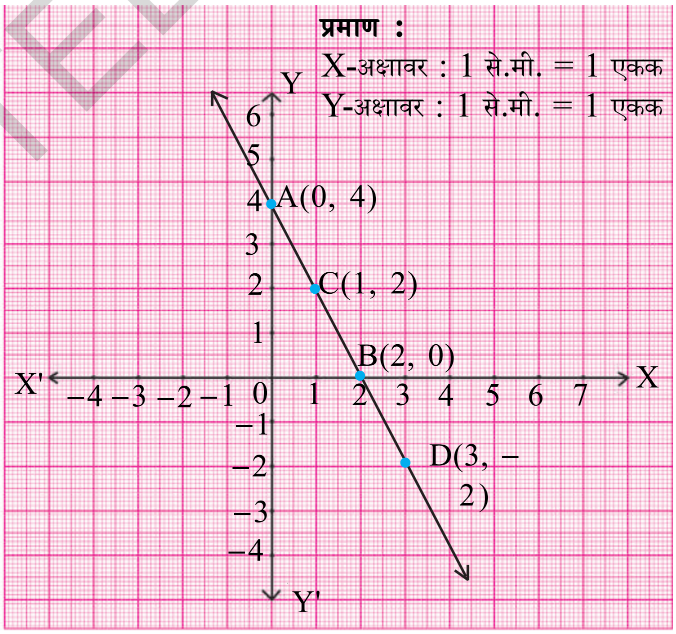
6.4 दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाचे आलेख

दोन चलराशीतील प्रत्येक समीकरणाला बरेचशे उकल असतात हे आपण शिकले आहोत. रेषीय समीकरणाचे जर आपण संभाव्य सोडवणुक घेतल्या तर त्यांना आपण आलेखा वर दर्शवु शकतो का? उकलची प्रत्येक जोडी वास्तविक संख्या आहे आणि आलेखावर त्याला एक बिंदु म्हणुन व्यक्त करु शकतो. हे आपल्याला माहित आहे

$4 = 2x + y$ या दोन चलराशीतील रेषीय समीकरण विचारात घेऊ याला. $y = 4 - 2x$. म्हणुन सुध्दा व्यक्त करु शकतो. या समीकरणासाठी x च्या विशिष्ठ किमती साठी 'y' ची किंमत आपण माहित करु शकतो. उदा. जर $x = 2$ तर $y = 0$. म्हणुन $(2, 0)$ हे उकल आहे. याप्रकारे आपण बरेचशे उकल माहित करु शकतो. x च्या किंमती च्याखाली त्यांच्या संबंधीत 'y'ची किंमत लिहत सर्व उकल खालील तक्त्यात लिहा

उकलाचा तक्ता

x	$y = 4 - 2x$	(x, y)
0	$y = 4 - 2(0) = 4$	(0, 4)
2	$y = 4 - 2(2) = 0$	(2, 0)
1	$y = 4 - 2(1) = 2$	(1, 2)
3	$y = 4 - 2(3) = -2$	(3, –2)



x च्या प्रत्येक किंमतीसाठी तिथे y ची एक किंमत आहे हे आपण पाहिलो. x- अक्षावर X ची किंमत आणि y-किंमतY अक्षावर घेऊ या. आलेखावर (0, 4), (2, 0), (1, 2) आणि (3, -2) हे बिंदु स्थापु या. यापैकी जर कोणत्याही दोन बिंदुला आपण जोडलो तर आपल्याला एक सरळ रेषा AD मिळते.

इतर सर्व उकल रेषा AB वर आहेत का?

(4,– 4) हा रेषेवरचा इतर बिंदु घेऊ. हे उकल आहे का?

जर $x = 0$;
$y = 4 - 2x = 4 - 2(0)=4$
जर $x = 2$
$y = 4 - 2(2) = 0$

AD वरचे कोणतेही बिंदु घ्या आणि तपासणी करा की त्याचे निर्देशांक समीकरणाला पुर्ण करतात की नाहीत?

आता, रेषा AD वरचे (1, 1) बिंदु घ्या. हे समीकरणाला पुर्ण करतात का?

AD वर तुम्ही असे बिंदु माहित करु शकता का जे समीकरणाला पुर्ण करत नाही.

आपल्या निरिक्षणाची यादी करु या.

1. रेषीय समीकरणाची प्रत्येक उकल त्या समीकरणाच्या रेषेवरचे बिंदु असतात.
2. या रेषेवरचे प्रत्येक बिंदु रेषीय समीकरणाची उकल आहे.
3. समीकरणाची उकल न करणारे कोणतेही बिंदु या रेषेवर नसतात.
4. समीकरणाच्या उकलच्या बिंदुच्या समुह म्हणजे आलेख होय

दोन चलराशीतील रेषीय समीकरणाचे आलेखाव्दारे दर्शवणुक एका सरळ रेषा असते हे आपल्या लक्षात आले असेल अशाप्रकारे $ax + by + c = 0$(a आणि b शुन्य नसतात.) ला दोन चल राशीतील रेषीय समीकरण म्हणतात.

6.4.1 रेषीय समीकरणाचे आलेख कसे काढावे?

पायऱ्या :

1. रेषीय समीकरण लिहा.
2. दिलेल्या समीकरणात $x = 0$ ठेवा आणि त्याच्या संबंधीत y ची किंमत माहित करा.
3. दिलेल्या समीकरणात $y = 0$ ठेवा आणि त्यांच्या संबंधीत 'x' ची किंमत माहित करा.
4. x च्या किंमती लिहा आणि त्याच्या संबधीत y च्या किंमती लिहा. x आणि y चे निर्देशांक (x, y) च्या रुपात लिहा.
5. आलेख कागदावर बिंदु स्थापा.
6. या बिंदुना जोडा.

अशा प्रकारे दोन चल राशी मधील रेषीय समीरकणाचे आलेखावर काढलेली रेषा असते.काढलेली रेषा बरोबर आहे की, नाही याची तपासणी साठी दोन बिंदु च्या जोड्यापेक्षा जास्त बिदुंच्या जोड्या घेतल्यातर चांगले राहते. दिलेल्या समीकरणाचे इतर उकल माहित करण्यासाठी 'x' वेगवेगळ्या किंमती प्रतेक्षेपीत करा आणि'y' संबंधीत किंमत माहित करा.

प्रयत्न करा.

एक आलेखाचा कागद घ्या. त्यावर (2,4) बिंदु स्थापा आणि त्यामधुन जाणारी एक रेषा काढा. आता खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

1. (2, 4) बिंदुतुन जाणारी अजुन काही रेषा तुम्ही काढु शकता का?
2. अशा किती रेषा तुम्ही काढु शकता?
3. (2, 4) या उकलसाठी दोन चलराशीतील किती रेषीय समीकरणे अस्तीत्वात आहेत?

उदाहरण-10: $y - 2x = 4$ या समीकरणाचे आलेख काढा आणि खालील प्रश्नांचे उत्तरे द्या.

(i) रेषेवर (2, 8) हे बिंदु आहेत का? (2, 8) हे समीकरणाची उकल आहे का? समीकरणात (2, 8) प्रतिक्षेपीत करुन तपासणी करा.

(ii) रेषेवर (4, 2) हे बिंदु आहेत का?(4, 2) हे समीरकणाची उकल आहे का? बैजिक पध्दतीने सुध्दा तपासणी करा.

(iii) आलेखावरुन समीकरणाचे आणखी तीन उकल माहित करा आणि असे तिन उकल माहित करा जे नाही आहे.

सोडवणुक: दिलेले $y - 2x = 4 \Rightarrow y = 2x + 4$

उकलचा तक्ता

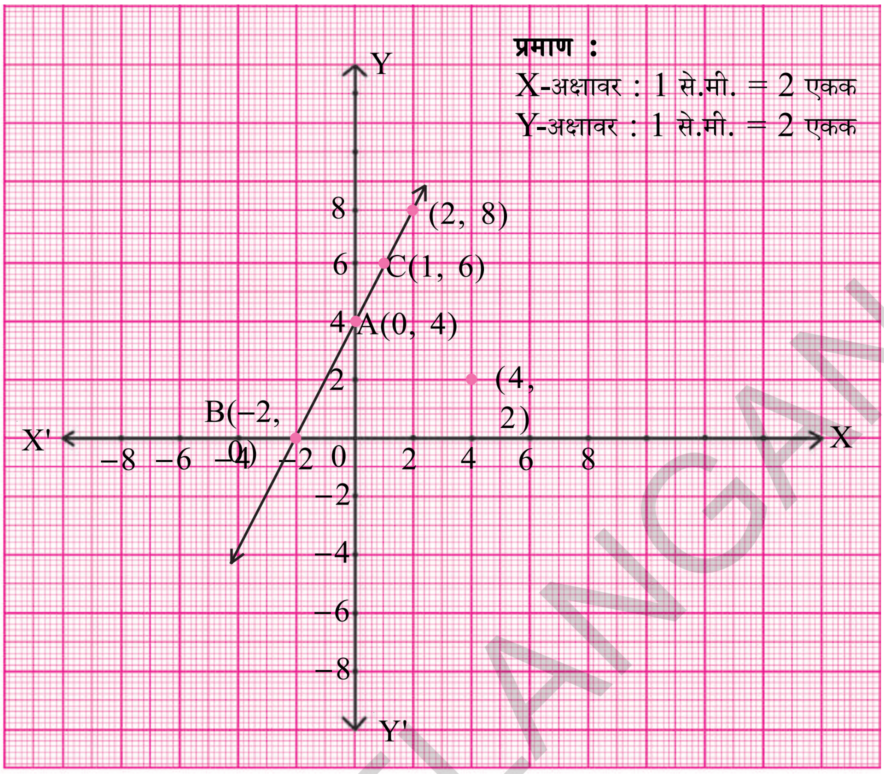
x	$y = 2x + 4$	(x, y)	बिंदु
0	$y = 2(0) + 4 = 4$	(0, 4)	A(0, 4)
-2	$y = 2(-2)+4 = 0$	(–2, 0)	B(–2, 0)
1	$y = 2(1) + 4 = 6$	(1, 6)	C(1, 6)

आलेख कागदावर A, B आणि C हे बिंदु स्थापा आणि त्यांना जोडा. आलेखात दाखवलेल्या प्रमाणे एक रेषा BC मिळवा. $y - 2x = 4$.

(i) आलेख कागदावर (2, 8) बिंदु स्थापा. आलेखा वरुन (2, 8) हे बिंदु रेषेवरचे आहेत.

बैजिक पणे तपासणी : समीकरणात (2, 8) प्रतिक्षेपीत करुन

$LHS = y - 2x = 8 - 2x2 = 8 - 4 = 4 = RHS$, म्हणुन (2, 8) हे उकल आहे.



(ii) आलेख कागदावर (4, 2) बिंदु स्थापा. तुम्हाला असे दिसेल की, (4, 2) हे बिंदु रेषेवर नाही. बैजिक पणे तपासणी : दिलेल्या समीकरणात (4, 2) प्रतिक्षेपीत करुन

$LHS = y - 2x = 2 - 2\times4 = 2 - 8 = -6 \neq RHS$, म्हणुन (4, 2) हे उकल नाही.

(iii) रेषेवरचा प्रत्येक बिंदु हा दिलेल्या समीकरणाचा उकल आहे. हे आपल्याला माहित आहे. म्हणुन दिलेल्या समीकरणाची उकल म्हणुन रेषेवरचे कोणतेजही तिन बिंदु आपण घेऊ या. उदा. (-4, -4). आणि आपल्याला हे सुध्दा माहित आहे की, रेषेवर नसलेले बिंदु हे दिलेल्या समीकरणाचे उकल होत नाही.म्हणुन आपण असे तिन बिंदुच्या जोड्या घेऊ जे $y - 2x = 4$ चे उकल नाही.

उदा. : (i) (1, 5); ....; ....

आपल्याला माहित आहे की, रेषेवरील प्रत्येक बिंदु समीकरणाचे उकल आहे. (-4,-4), (-3,-2) आणि (-1,2) हे $y = 2x + 4$ या समीकरणाचे उकल आहे यावरुन बिंदु वर दिलेल्या आलेखात रेषेवर आहेत. जेथे (1,5), (2,1) आणि (-4,1) हे दिलेल्या समीरकणाचे उकल होत नाही. यावरुन हे बिंदु दिलेल्या आलेखात रेषेवर नाही.

उदाहरण-11: $x - 2y = 3$ या समीकरणाचे आलेख काढा.

आलेखावरुन माहित करु (i) (x, y) चे उकल येथे $x = -5$

(ii) (x, y) चे उकल येथे $y = 0$

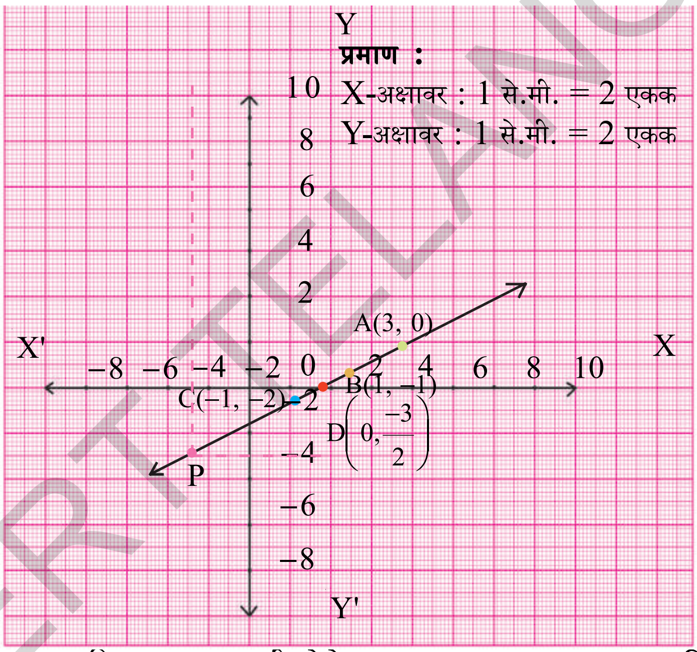
(iii) (x, y) चे उकल येथे $x = 0$

सोडवणुक: दिले आहे. $x - 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2}$

उकलचा तक्ता

x	$y = \frac{x-3}{2}$	(x, y)	बिंदु
3	$y = \frac{3-3}{2} = 0$	(3, 0)	A
1	$y = \frac{1-3}{2} = -1$	(1, – 1)	B
– 1	$y = \frac{-1-3}{2} = -2$	(– 1, – 2)	C

आलेखा कागदावर A, B, C बिंदु स्थापा. आणि त्यांना जोडा. खालील आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे आपल्याला एक रेषा मिळते. $x - 2y = 3$ या समीकरणाची अपेक्षीत आलेखाची रेषा आहे



(i) (x, y) चे उकल माहित करण्यासाठी येथे $x = -5$, आपल्याला असा बिंदु माहित करावा लागणार जो सरळ रेषेवर आहे आणि ज्याचे x-निर्देशांक '– 5' आहे. असा बिंदु माहित करण्यासाठी $x = -5$ येथे y-अक्षाला समांतर असाणारी रेषा काढावी लागेल. (आलेखात ते डॉटेड ने दाखविले आहे) रेषा आलेखाला 'P' बिंदुत भेटते तेथून आपण X-अक्षा ला समांतर असणारी दुसरी रेषा काढा जी Y-अक्षाच्या $y = -4$ येथे भेटते.

P चे निर्देशांक = (– 5, – 4)

$x - 2y = 3$ रेषेवर P(– 5, – 4) आहेत. हे $x - 2y = 3$ चे सोडवणुक आहे.

(ii) आपल्याला (x, y) चे सोडवणुक माहित करायचे आहे येथे $y = 0$.

$y = 0$ पासुन (x, 0)हे बिंदु X-अक्षावर आहेत.X-अक्षावर आणि $x - 2y = 3$ च्या आलेखावर असलेले बिंदु आपल्याला माहित करायचे आहे.

आलेखावरुन (3,0) हे अपेक्षीत बिंदु आहेत हे स्पष्ट होते
म्हणुन (3,0) हे उकल आहे.

(iii) (x, y) सोडवुणक माहित करण्यासाठी येथे $x = 0$.
$x = 0$ हे बिंदु (0, y) Y- अक्षावर आहेत. म्हणुन Y-अक्षावर आणि $x - 2y = 3$ आलेखावर असणारे बिंदु माहित करु.

आलेखा वरुन $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ हे बिंदु आहेत म्हणुन स्पष्ट होते.

त्याची उकल $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$.

अभ्यास - 6.3

1. खालील प्रत्येक रेषीय समीकरणाचे आलेख काढा

i) $2y = -x + 1$ ii) $-x + y = 6$ iii) $3x + 5y = 15$ iv) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3$

2. खालील प्रत्येक रेषीय समीकरणाचे आलेख काढा आणि खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

i) $y = x$ ii) $y = 2x$iii) $y = -2x$ iv) $y = 3x$ v) $y = -3x$

i) सर्व समीकरण $y = mx$ च्या रुपात आहेत का? (येथे m हे वास्तव संख्या आहे)

ii) सर्व आलेख आंरभबिंदुतन जातात का?

iii) या आलेखावरुन तुम्ही काय निष्कर्ष काढु शकता?

3. $2x + 3y = 11$ या समीकरणाचे आलेख काढा. जेव्हा $x = 1$ असतांना y ची किंमत आलेखावरुन माहित करा.

4. $y - x = 2$. समीकरणाचे आलेख काढा. आलेखावरुन माहित करा.

i) जेव्हा $x = 4$ असेल तर y ची किंमत काढा.

ii) जेव्हा $y = -3$ असेत तर x ची किंमत काढा

5. $2x+3y=12$ या समीकरणाचा आलेख माहित करा.

i) y-निर्देशांक 3 असलेले

ii) x-निर्देशांक -3 असलेले

6. खाली दिलेल्या प्रत्येक समीकरणाचे आलेख काढा.

i) $6x - 3y = 12$ ii) $-x + 4y = 8$ iii) $3x + 2y + 6 = 0$

7. नैसर्गिक आपत्तीमध्ये बळी पडलेल्यासाठी प्रधानमंत्री साह्य निधित 9 व्या वर्गातील रजिया आणि प्रिती या दोन्ही विद्यार्थिनीनी 1000 रुपये जमा केले. रेषीय समीकरण लिहुन आलेख काढा.
8. गोपय्या ने त्याच्या दोन्ही शेतात गहु आणि साळ ची पेरणी केली तर ते एकुण 5000 चौरस मिटर क्षेत्रफळाचे शेत आहे. ते दर्शविण्यासाठी रेषीय समीकरण लिहा आणि आलेख काढा.
9. 6 कि.ग्र. वस्तुमान असलेल्या वस्तु वर लावलेले बळ हे त्या वस्तु मध्ये उत्पन्न झालेल्या त्वरणेच्या सम प्रमाणात आहे. हे निरिक्षण स्पष्ट करण्यासाठी समीकरण लिहा आणि समीकरणाचे आलेख काढा.
10. शिखरावरुन एक दगड खाली पडत आहे. दगडाचे वेग $V = 9.8t$. दिलेले आहे. त्याचे आलेख काढा आणि सुरुवात झाल्यानंतर 4 सेंकदानी दगडाचे वेग माहित करा.

उदाहरण-12: शाळेत एकुण 25% मुली आहे. आणि बाकीचे मुले आहेत. समीकरण तयार करा आणि यासाठी आलेख काढा. आलेखाचे निरिक्षण करुन खालील प्रश्नांचे उत्तर द्या.

(i) जर मुलींची संख्या 25 असेल तर मुलांची संख्या माहित करा.

(ii) जर मुलांची संख्या 45 असेल तर मुलींची संख्या माहित करा.

(iii) मुलांच्या संख्या साठी तिन वेगवेगळ्या किंमती घ्या. आणि मुलींची संख्या माहित करा. याच प्रमाणे मुलींच्या संख्येसाठी तिन वेगवेगळ्या किंमती घ्या आणि मुलांची संख्या माहित करा.

सोडवणुक: समजा मुलींची संख्या ‘x’ आणि मुलांची संख्या ‘y’ तर

शाळेतील एकुण विद्यार्थ्यांची संख्या = $x + y$

दिलेल्या माहिती नुसार

मुलींची संख्या = विद्यार्थ्यांच्या 25%

$x = 25\%$ चे $(x + y)$

$= \frac{25}{100}$ चे $(x + y) = \frac{1}{4}(x + y)$

$$x = \frac{1}{4}(x+y)$$

$$4x = x + y$$

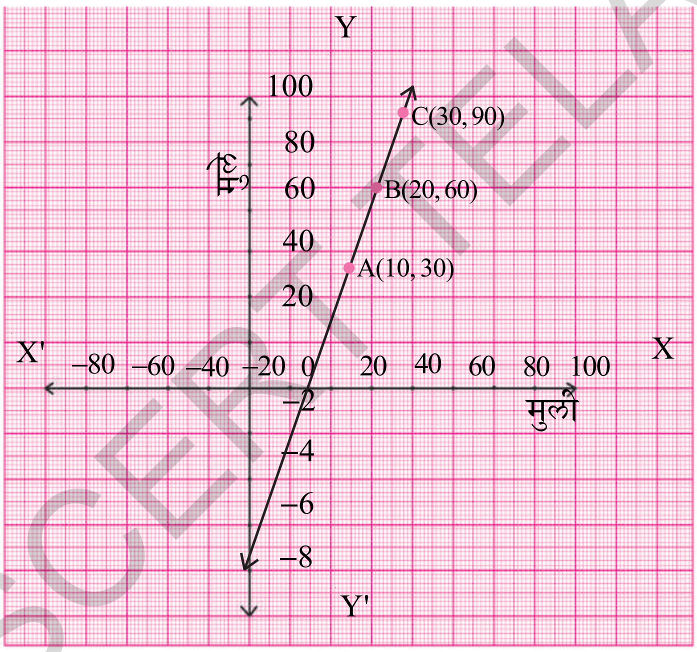
$$3x = y$$

अपेक्षीत समीकरण $3x = y$ किंवा $3x - y = 0$.

उकलचा तक्ता

x	y = 3x	(x, y)	बिंदु
10	30	(10, 30)	A
20	60	(20, 60)	B
30	90	(30, 90)	C

आलेखा वर A, B आणि C बिंदु स्थापा आणि त्यांना जोडा. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आपल्याला एक रेषा मिळते.



प्रमाण :
X-अक्षावर : 1 से.मी. = 20 एकक
Y-अक्षावर : 1 से.मी. = 20 एकक

आलेखावरुन आपल्याला माहित होते.

(i) जर मुलींची संख्या 25 असेल तर मुलांची संख्या 75 असते.
(ii) जर मुलांची संख्या 45असेल तर मुलींची संख्या 15 असते.
(iii) मुलींसाठी तुम्ही एक संख्या निवडा आणि त्या संबंधीत मुलांची संख्या माहित करा.

याच प्रमाणे मुलांसाठी तुम्ही एक संख्या निवडा आणि त्यासंबंधीत मुलींची संख्या माहित करा. येथे तुम्ही समीकरण आणि आलेखाचे निरिक्षण केले का? जर समीकरण $y = mx$ च्या रुपात असेल तर रेषा आरंभबिंदुतुन जात आहे. येथे m हे वास्तविक संख्या जे आरंभबिंदुतुन जात आहे.

उदाहरण-13: चार रेषीय समीकरण दिलेली आहेत. प्रत्येकाचे आलेख खाली दिलेले आहेत. दिलेला आलेख यापैकी कोणत्या समीकरणाला दर्शविते.

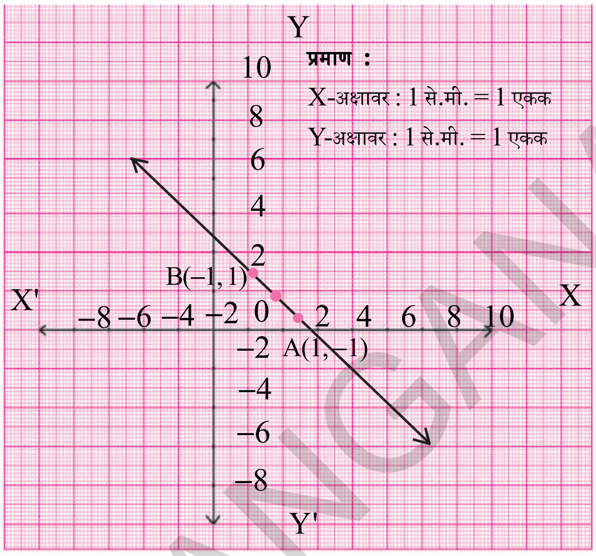
(i) समीकरण

A) $y = x$

B) $x + y = 0$

C) $y = 2x$

D) $2 + 3y = 7x$



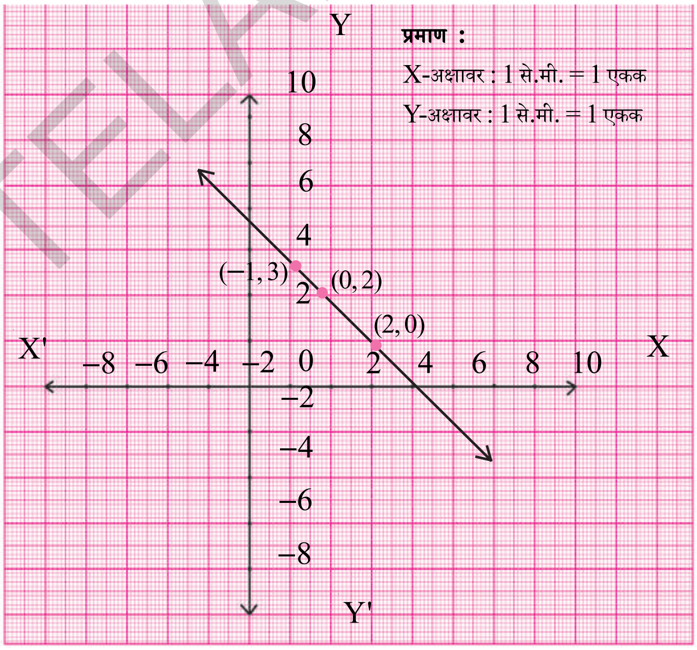
(ii) समीकरण

A) $y = x + 2$

B) $y = x - 2$

C) $y = -x + 2$

D) $x + 2y = 6$



सोडवणुक:

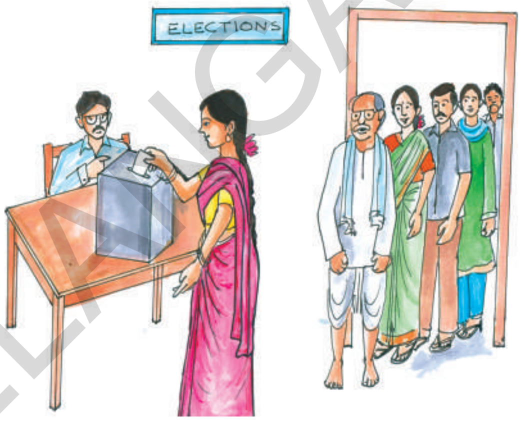
(i) आलेखावरुन $(1, -1)$ $(0, 0)$ $(-1, 1)$ हे सारख्याच रेषेवर आहेत. हे आपण पाहतो. म्हणुन अपेक्षीत समीकरणाचे हे सोडवणुक आहेत. म्हणजेच जर आपण या बिंदुना अपेक्षीत समीकरणात प्रतिक्षेपीत केले. तर समीकरण पुर्ण होते. म्हणुन या बिंदु जोडीने समाधान होणारे समीकरण आपल्याला माहित करायचे आहे. $y = x$ या पाहिल्या समीकरणात जर आपण$(1,-1)$ प्रतिक्षेपीत केलो तर ते समाधान होत नाही म्हणुन $y = x$ हे अपेक्षीत समीकरण नाही आहे.

$x + y = 0$ मध्ये $(1,-1)$ समीकरण समाधान होते हे आपल्याला माहित होते. दुसऱ्या समीकरणाला सर्व तीन बिंदु समाधान करत आहेत. म्हणुन $x + y = 0$ हे अपेक्षीत समीकरण

आता $y = 2x$ आणि $2 + 3y = 7x$ हे सुध्दा $(1, -1)$ $(0, 0)$ आणि$(-1, 1)$ या बिंदुने समाधान होतात की, याची तपासणी करा. एका ही जोडीसोबत ते समाधान कारक नाहीत हे आपल्याला माहित होते. म्हणुन ते अपेक्षीत समीकरण नाही आहे.

(ii) रेषेवरील $(2, 0)$, $(0, 2)$ आणि $(-1, 3)$हे रेषेवरचे बिंदु आहेत. हे सर्व बिंदु पहिल्या आणि दुसऱ्या समीकरणाला समाधान करत नाही. तिसरे समीकरण $y = -x + 2$ घेऊ या. समीकरणात जर आपण तीन ही बिंदु प्रतिक्षेपीत केले तर ते सामाधान होते. म्हणुन $y = -x + 2$. हे अपेक्षीत समीकरण आहे. $x + 2y = 6$ या समीकरणाला या बिंदु समाधान करतात का? याची तपासणी करा.

अभ्यास - 6.4



1. एका निवडणुकीत 60 मतदार त्यांचे मत टाकलेत. या माहितीसाठी समीकरण तयार करा आणि आलेख काढा. आलेखावरुन खालील माहित करा.
   (i) जर 1200 मतदार त्यांचे मत टाकले असेल तर एकुण मतदाराची संख्या
   (ii) जर एकुण मतदाराची संख्या 800 असेल तर मतदान टाकलेल्याची संख्या.
   [सुचना : जर मत टाकलेल्या मतदाराची संख्या 'x' आणि एकुण मतदाराची संख्या'y' तर $x = y$ चे60%]
2. जेव्हा रुपाचा जन्म झाल तेव्हा तिच्या वडीलांचे वय 25 वर्ष होते. या माहितीसाठी समीकरण तयार करा आणि आलेख काढा. आलेखावरुन माहित करा.
   (i) जेव्हा रुपाचे वय 25 वर्ष असेल तर वडीलांचे वय
   (ii) जेव्हा तिच्या वडीलांचे वय 40 वर्ष असेल तर रुपाचे वय
3. पाहिल्या किलोमिटर साठी ॲटो चे भाडे 15 रुपये. आणि नंतरच्या प्रत्येक किलोमिटर साठी 8 रुपये 'x' किलोमिटर अंतरासाठी 'y' रु. चुकते केले.
   ही माहिती दर्शविणारी रेषीय समीकरण लिहा आणि आलेख काढा. जर भाडे 55 रुपये चुकते केले तर आलेखाच्या मदतीने प्रवास केलेला अंतर माहित करा. 7 किलो.मीटर साठी किती रुपये चुकते करावे लागणार आहे?
4. ग्रंथालयात एक पुस्तकासाठी पहिल्या तिन दिवसाचे भाडे ठराविक असते. आणि नंतरच्या प्रत्येक दिवसाला अतिरिक्त भाडे द्यावे लागते. जॉन ने एक पुस्तक 7 दिवस ठेऊन घेतले आणि त्यासाठी त्याने 27 रुपये चुकते केले. जर ठराविक भाडे x रुपये आणि प्रत्येक दिवसाचे भाडे y रु. असेल तर या माहितीसाठी रेषीय समीकरण लिहा. आणि त्याचा आलेख काढा. आलेखावरुन जर ठराविके भाडे 7 रुपये असेल तर दररोजचे भाडे किती? आणि जर एक दिवसाचे भाडे 4 रुपये असेल तर ठराविक भाडे किती?

5. हैद्राबाद रेल्वे स्थानकावर पहिल्या दोन तासासाठी पार्कींग भाडे 50 रुपये आहे. आणि त्या नंतरच्या प्रत्येक तासाला 10 रुपये आहे. समीकरण लिहा आणि आलेख काढा. आलेखा वरुन खालील भाडे माहित करा.

   (i) तीन तासासाठी (ii) सहा तासासाठी

   (iii) रेखाने पॉर्कींग भाडे म्हणुन 80 रुपये दिले तर तिने तिची कार किती तास पार्क केली?

6. 60 कि.मी./तास या एकाच वेगाने समीरा कार चालवते. अंतर-वेळ चे आलेख काढा. आलेखावरुन समीराने खालील वेळा मध्ये प्रवास केलेले अंतर माहित करा.

   (i) $1\frac{1}{2}$ तास (ii) 2 तास (iii) $3\frac{1}{2}$ तास

7. पाण्यातील हायड्रोजन आणि ऑक्सीजनच्या अनुभार चे गुणोत्तर 1:8 आहे. हायड्रोजन आणि ऑक्सीजन मधील समीकरण लिहा आणि त्याचे आलेख काढा. आलेखावरुन जर ऑक्सीजन 12 ग्राम असेल तर हायड्रोजन चे परिमाण माहित करा. आणि जर हायड्रोजन $\frac{3}{2}$ ग्राम असेल तर ऑक्सीजन चे परिमाण किती?

   [सुचना: जर हायड्रोजन आणि ऑक्सीजन चे परिमाण अनुक्रमे 'x' आणि 'y' असेल तर $x : y = 1:8 \Rightarrow 8x = y$]

8. 28 लिटर च्या मिश्रणात दुध आणि पाण्याचे गुणोत्तर 5:2 आहे. मिश्रण आणि दुधाचे मधील समीकरण तयार करा. आलेखाच्या निरिक्षणवरुन मिश्रणातील दुधाचे परिमाण माहित करा.

   [सुचना: मिश्रण आणि दुधाचे गुणोत्तर $= 5 + 2 : 5 = 7 : 5$]

9. USA आणि कॅनडा सारख्या देशात तापमान फॅननाईट मध्ये मोजले जाते आणि भारत सारख्या देशात सेल्सीयस मध्ये मोजल्या जाते. फॅरनाईट मधुन सेल्सीयस मध्ये रुपांतरचे रेषीय समीकरण $F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$

   (i) x-अक्षावर सेल्सीयस घ्या आणि Y-अक्षावर फॅरनाईट घेऊन वरील रेषीय समीकरणाचे आलेख काढा.

   (ii) जर तापमान 30°C असेल तर ते तापमान फॅरनाईट मध्ये किती असेल?

   (iii) जर तापमान 95°F तर ते तापमान सेल्सीयसमध्ये किती असेल?

   (iv) अशा एखाद्या सारख्या संख्या मध्ये तापमान आहे का जे फॅरनाईट आणि सेल्सीयसमध्ये असेल? असेल तर माहित करा.

6.5 X-अक्ष आणि Y-अक्षाला समांतर असणाऱ्या रेषेचे समीकरण

$x = 3$ समीकरण विचारात घेऊ या. जर हे एक चल राशीतील समीकरण असेल तर त्याचे अव्दितीय सोडवणुक $x = 3$ जे संख्या रेषेवरील बिंदु आहे.

$$\longleftarrow \; -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \; \longrightarrow$$

जर ते दोन चल राशीतील समीकरण असेल आणि निर्देशांक प्रतलावर स्थापा त्याला $x + 0.y - 3 = 0$ म्हणुन व्यक्त करु शकतो.

याला अनंत उकल असतात. त्यापैकी काही माहित करु या. येथे y चे निर्देशाक शुन्य आहे. म्हणुन y च्या सर्व किमती साठी x हे 3 होते.

उकलचा तक्ता

x	3	3	3	3	3	3	……
y	1	2	3	–1	–2	–3	…..
(x, y)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, –1)	(3, –2)	(3, –3)	…..
बिंदु	A	B	C	D	E	F	…..

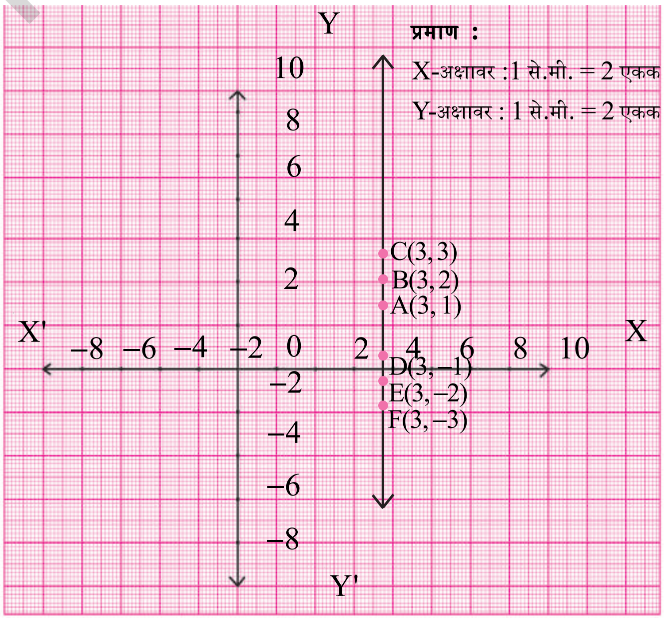
तक्तावरुन हे स्पष्ट होते की, (3, a) या रुपातील या समीकरणाला अनंत उकल आहेत येथे a हे वास्तविक संख्या आहे.

आता, वरील उकलीचा वापर करुन आलेख काढा. आलेख वरुन तुमच्या काय लक्षात आले?

हे सरळ रेषा आहे का? हे रेषा किंवा Y-अक्ष आहे का? काढलेली रेषा ही सरळ रेषा आहे आणि ती Y-अक्षावर समांतर आहे?

y-अक्षावरुन या रेषेचे अंतर किती आहे?

अशाप्रकारे $x = 3$ च्या आलेखाची रेषा y-अक्षाला त्याच्या उजव्या बाजुला 3 एकक अंतरावर समांतर आहे.



हे करा

1. i) खालील समीकरणाचे आलेख काढा.

   a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 4$ d) $x = -4$

   ii) तिन्ही समीकरणाचे आलेख Y-अक्षाला समांतर आहे का?

   iii) प्रत्येक संदर्भात आलेख वरील रेषा मधील अंतर आणि Y-अक्षाचे अंतर माहित करा.

2. i) खालील समीकरणाचे आलेख काढा.

   a) $y = 2$ b) $y = -2$ c) $y = 3$ d) $y = -3$

   ii) हे सर्व X-अक्षाला समांतर आहेत का?

   iii) प्रत्येक संदर्भात X-अक्ष आणि आलेखामधील अंतर माहित करा.

वरील निरिक्षणावरुन आपण खालील निष्कर्ष काढु शकतो.

1. $x = k$ च्या आलेखाची रेषा Y-अक्षाला k एकक अंतरावर समांतर आहे आणि $(k, 0)$या बिंदुतुन जात आहे.

2. $y = k$ च्या आलेखाची रेषा X-अक्षाला k एकक अंतरावर समांतर आहे आणि $(0, k)$या बिंदुतुन जात आहे.

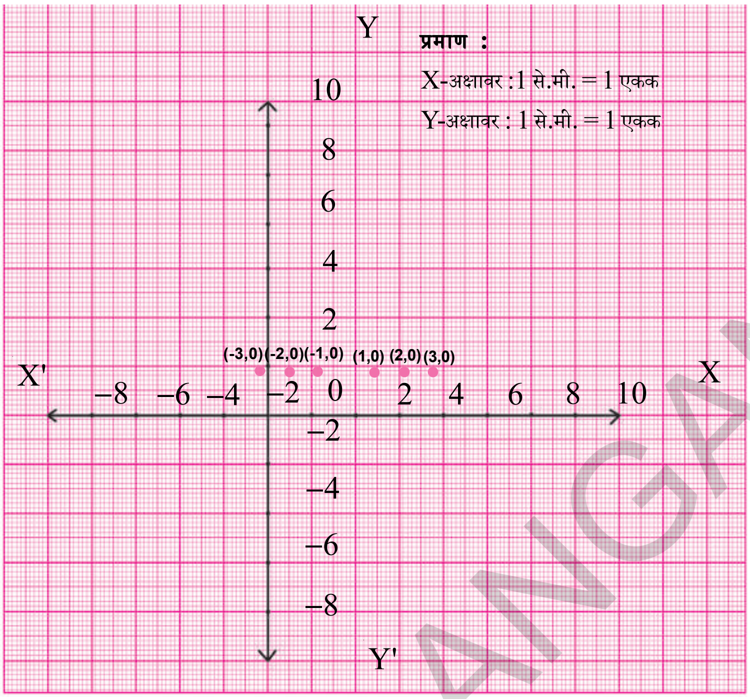
6.5.1 X-अक्ष आणि Y-अक्षाचे समीकरण

$y = 0$ हे समीकरण विचारात घेऊ या. याला $0.x + y = 0$ लिहु शकतो. या समीकरणासाठी आलेख काढु या.

उकलचा तक्ता

x	1	2	3	–1	–2	…...
y	0	0	0	0	0	…..
(x, y)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(–1, 0)	(–2, 0)	…..
बिंदु	A	B	C	D	E	…..

आलेख कागदावर हे सर्व बिंदु स्थापल्याने, आपल्याला खालील आकृती मिळते. आलेखा वरुन आपल्याला काय लक्षात येते?



आपल्याला असे लक्षात येते की, सर्व बिंदु X-अक्षावर आहे. आणि या सर्वांचेy- निर्देशांक 0 आहे.

म्हणुन $y = 0$ समीकरण X-अक्षाला दर्शविते. दुसऱ्या शब्दात$y = 0$हे X-अक्षाचे समीकरण आहे.

प्रयत्न करा.

y-अक्षाचे समीकरण माहीत करा.

अभ्यास - 6.4

1. खालील समीकरणाचे आलेखणीय दर्शवणुक द्या.

   a) संख्यारेषे वर आणि b)कार्टेशियन प्रतलावर

   i) $x = 3$ ii) $y + 3 = 0$ iii) $y = 4$ iv) $2x - 9 = 0$

   v) $3x + 5 = 0$

2. $2x - 11 = 0$ चे आलेखनीय दर्शवणुक द्या.

   i) एक चल राशीत ii) दोन चल राशीत

3. $3x + 2 = 8x - 8$ या समीकरणाला सोडवा आणि उकलीला
   i) संख्या रेषेवर दर्शवा ii) कार्टेशियन प्रतल वर दर्शवा
4. X-अक्षाला समांतर असलेली आणि खालील बिंदुतुन जात असलेली रेषेची समीकरण लिहा
   i) (0, –3) ii) (0, 4) iii) (2, –5) iv) (3, 4)
5. Y-अक्षाला समांतर असलेली आणि खालील बिंदुतुन जात असलेली रेषेची समीकरण लिहा
   i) (–4, 0) ii) (2, 0) iii) (3, 5) iv) (–4, –3)
6. तिन रेषांचे समीकरण लिहा ते
   (i) X- अक्षाला समांतर असलेली (ii) Y-अक्षाला समांतर असलेली.

आपण काय चर्चा केलो

1. दोन चल राशीत जर रेषीय समीकरण असेल तर त्याला दोन चल राशीतील रेषीय समीकरण म्हणतात.
2. 'x' आणि 'y' किंमतीची कोणतीही जोडी जे दोन चलराशीतील समीकरण समाधान करते त्यांना उकल म्हणतात.
3. दोन चल राशीतील रेषीय समीकरणाला बरेचशा उकली असतात.
4. दोन चल राशीतील प्रत्येक रेषीय समीकरणाचा आलेख सरळ रेषा असते.
5. $y = mx$ सारखे समीकरण रेषाला दर्शविते आणि आरंभबिंदुतुन जाते.
6. $x = k$ च्या आलेखाची रेषा Y -अक्षाला k एकक अंतरावर समांतर आहे आणि(k, 0) या बिंदुतनु जाते.
7. $y = k$ च्या आलेखाची रेषा X-अक्षाला k एकक अंतरावर समांतर आहे आणि(0, k) या बिंदुतुन जाते.
8. X-अक्षाचे समीकरण $y = 0$ आहे.
9. Y-अक्षाचे समीकरण $x = 0$ आहे.

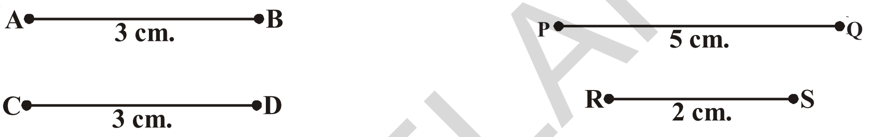
07

त्रिकोण

7.1 प्रस्तावना

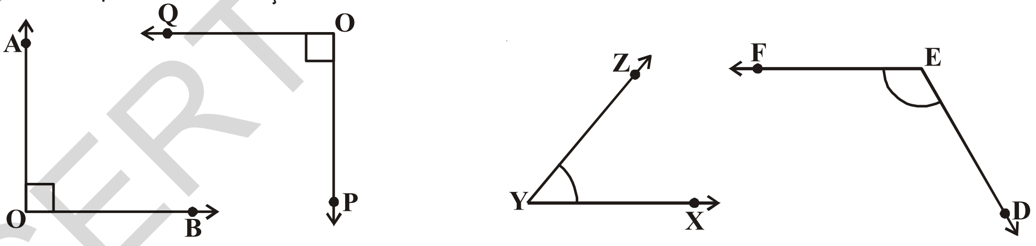
आपण रेषांनी आणि वक्रांनी काही आकृत्या काढल्या आहेत. आणि त्यांच्या गुणधर्मांचा अभ्यास केला आहे. तुम्हाला माहित आहे का, दिलेल्या लांबीचा वापर करुन रेषाखंड कसे काढायचे? सर्व रेषाखंड आकारात सारखे नसतात. ते वेगवेगळ्या लांबीचे असतात. आपण वर्तुळ देखील काढु शकतो. तुम्हाला वर्तुळ काढण्यासाठी कशाची गरज भासली आणि काय माप घेतले? ते म्हणजे वर्तुळाचा व्यासार्ध आहे. आपण समान कोन दिलेल्या कोनाच्या समान काढु शकतो.

आपणास माहित आहे की, जर दोन रेषाखंडाची लांबी समान असेल तर ते एकरुप असतात.



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (एकरुप) $\qquad$ $\overline{PQ} \ncong \overline{RS}$ (एकरुप नाही)

दोन त्रिकोण एकरुप असतात जर त्यांच्या कोणाचे माप समान असतील



$\angle AOB \cong \angle POQ$ (एकरुप) $\qquad$ $\angle XYZ \ncong \angle DEF$ (एकरुप नाही)

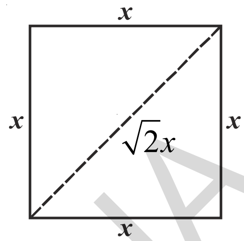
वरील उदाहरण वरुन आपण सांगु शकतो की, दिलेल्या आकृत्या काढण्यासाठी किंवा तपासणीसाठी की ते आकारात समान आहेत आपणास त्यांच्या आकृतीबद्दल मोजकी आणि महत्वाची माहितीची गरज असते.

चला आता एक चौरस गृहीत धरु: यासाठी कोणत्या कमीत कमी माहिती गरज आहे? दोन चौरस एकाच आकाराचे आहेत. की नाहीत.

सत्या म्हणला- " मला फक्त दिलेल्या चौरसाची बाजुचे माप गरज आहे. जर दिलेल्या चौरसाच्या बाजु समान असतील तर चौरस एकच मापाचे असतात".

श्री म्हणाली " ते बरोबर आहे परंतु जर दोन चौरसाचे कर्ण समान असतील तर आपण म्हणु शकतो की, दिलेले चौरस एक सारखे आणि आकारात सारखे आहेत.".

तुम्ही विचार करता का ते दोन्ही बरोबर आहेत?



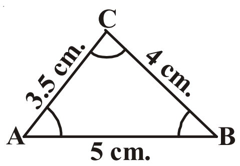
चौरसाच्या गुणधर्माला पुन्हा आठवण करा. सारखे माप असलेल्या बाजुंना घेऊन तुम्ही दोन वेगवेगळे चौरस काढु शकत नाही. काढु शकता का? आणि चौरसाचे कर्ण समान असतात जेव्हा त्यांच्या बाजु समान असतात. दिलेली आकृती पहा.

ज्या आकृत्या आकारात आणि रुपात मध्ये सारख्या असतात. त्यांना एकरुप आकृत्या म्हणतात. (एकरुपता म्हणजे सर्व क्षेत्रात समान असते.) म्हणुन चौरस ज्यांना समान बाजु समान मापा बरोबर असलेल्या आकृतीला एकरुप म्हणतात आणि समान कर्ण असलेल्यांना देखील एकरुप म्हणतो.

सुचना: साधारण पणे, बाजु आकार निश्चित करतात आणि आकार कोन निश्चित करतात.

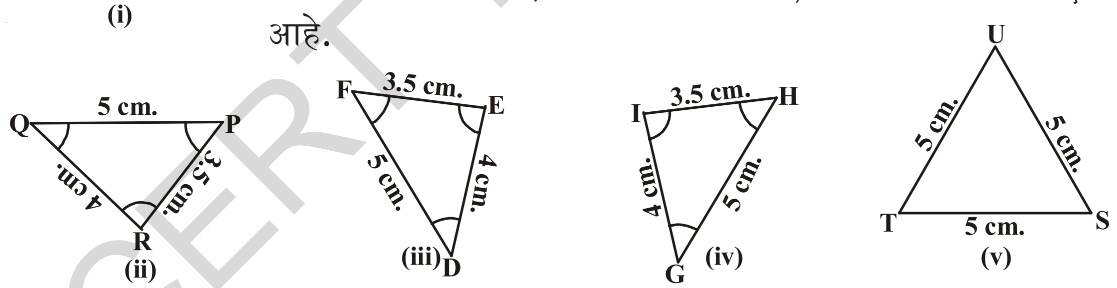
आपणास माहित आहे जर दोन चौरस एकरुप आहेत आणि त्यातील एकाला आपण कापुन कागदावर घेतले आणि त्याला दुसऱ्यावर ठेवले तर ते दुसऱ्याला एकदम व्यापुन घेते.

नंतर आपण सांगु शकतो बाजु, कर्ण, कोन, अनुक्रमे एका चौरसाचे दुसऱ्या चौरसाच्या बाजु, कोन आणि कर्ण यांच्याशी एकरुप असतात.



(i)

आता चला दोन त्रिकोणाची एकरुपता गृहीत धरा. आपणास माहित आहे की, जर दोन त्रिकोण एकरुप आहेत तर एका त्रिकोणाच्या बाजु आणि कोन दुसऱ्या चौरसाच्या संगत बाजु आणि कोनाच्या समान असतात. खालील दिलेल्या कोन त्रिकोण, ABC त्रिकोणाच्या एकरुप आहे.



जर आपण हे त्रिकोण आकृती.(ii) ते (v) पर्यंत काढुन घेतल्या जर आणि ΔABC ला व्याप्त करण्याचा प्रयत्न करा. आपणास आढळुन येईल की, आकृती (ii), (iii) आणि (iv) हे एकरुप आहेत. तर ΔTSU आकृती (v) मध्ये ΔABC बरोबर एकरुप नाही. जर ΔABC. हे बरोबर एकरुप नाही.

जर ΔPQR हे ΔABC बरोबर एकरुप नाही तर आपण $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ लिहितो.

निरिक्षण करा की,$\Delta PQR \cong \Delta ABC$ नंतर ΔPQR च्या बाजु ΔABC च्या संगत बाजु व्याप्त करा आणि कोन करा.

म्हणजे PQ, AB वर QR, BC वर आणि RP, CA वर $\angle P$, $\angle A$ ला $\angle Q$, $\angle B$ आणि $\angle R$, $\angle C$ ला झाकतो, देखील एकसंग संगती शिरोंबिंदु मध्ये आहेत. म्हणजे P हा A सी संगत Q, B शी R, C शी संगत असतो आणि खालील प्रमाणे.

$P \leftrightarrow A, Q \leftrightarrow B, R \leftrightarrow C$ असे दर्शविते.

संगत क्रमावारच्या मध्ये नोंद करा, $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ परंतु हे लिहिने बरोबर राहणार नाही. $\Delta QRP \cong \Delta ABC, Q \leftrightarrow A, R \leftrightarrow B, P \leftrightarrow C$ आणि जसे आपणास येते $QR = AB, RP = BC$ आणि $QP = AC$ जे की, दिलेल्या आकृतीसाठी बरोबर नाही.

त्याच प्रमाणे आकृती (iii) साठी

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$

$FD \leftrightarrow AB, DE \leftrightarrow BC$ आणि $EF \leftrightarrow CA$

आणि $F \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B$ आणि $E \leftrightarrow C$

म्हणुन $\Delta FDE \cong \Delta ABC$ परंतु $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ असे लिहने बरोबर नाही.

आता, तुम्ही आकृती (iv) मध्ये आणि ΔABC मध्ये असलेल्या संबंध द्या.

म्हणुन हे गरजेच आहे की, त्रिकोणाच्या एकरुपतेसाठी शिरोबिंदुचे बरोबर लिहणे आणि त्याचा एकमेकांशी संगत लिहणे.

नोंद करा की, एकरुप त्रिकोणाचे संगत बाजु हे समान असतात. आणि त्याला संक्षिप्त मध्ये 'CPCT' असे लिहतात. हे त्रिकोणाच्या संगत भागाच्या एकरुपते साठी लिहतो.

हे करा

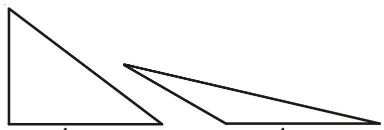
1. खाली काही विधाने दिले आहेत ते बरोबर किंवा चुक आहेत ते लिहा.
   - i. दोन वर्तुळ नेहमी एकरुप असतात. ( )
   - ii. सारख्या लांबीचे दोन रेषाखंड नेहमी एकरुप असतात. ( )
   - iii. दोन काटकोन त्रिकोण काही वेळी एकरुप असतात. ( )
   - iv. सर्व बाजु समान असलेल्या समबाहु त्रिकोण नेहमी एकरुप असते. ( )
2. कोणते कमीत कमी माप तपासणी करण्यासाठी आवश्यक आहेत जर दिलेल्या आकृत्या एकरुप आहेत.
   - i. दोन आयत
   - ii. दोन समांतर चौकोन

7.2 त्रिकोणाच्या एकरुपते साठी

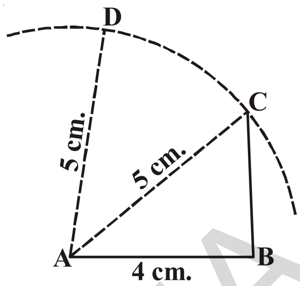
तुम्ही शिकला आहात की, मागील वर्गात त्रिकोणाची एकरुपता कशी असते.

त्रिकोणाच्या रचनेसाठी त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजु माहित असणे आवश्यक आहे का? एकाच मापनाने आपण वेगवेगळे त्रिकोण काढु शकतो का?

एक बाजु 4 से.मी. घेऊन एक त्रिकोण काढा. तुम्ही एक बाजु 4 से.मी. घेऊन वेगवेगळे त्रिकोण काढु शकता का? तुम्ही तुमच्या वर्ग मित्रासोबत काढा. तुम्हाला सर्व त्रिकोण एकरुप काढता येते का? तुम्ही काढु शता की, वेगवेगळ्या प्रकारचे त्रिकोणाची बाजु जर एक बाजु त्रिकोणाला एकरुप बनवु शकतो का? जर दिलेली बाजु 4 से.मी. होतो.

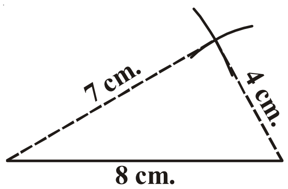


आता, 4 से.मी. आणि 5 से.मी बाजु घ्या आणि जेवढे त्रिकोण तुम्ही काढु शकता का?



तेवढे त्रिकोण तुम्ही काढा. तुम्हाला एकरुप त्रिकोण काढता येतात का?

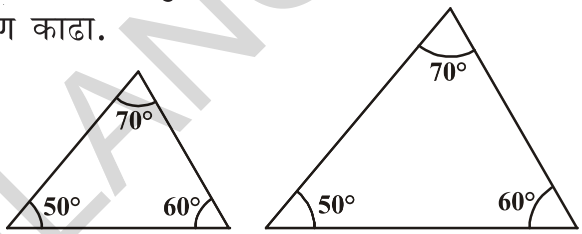
आपणास याच दोन मापा सोबत वेगवेगळे त्रिकोण काढता येतात का? आता 4 से.मी. आणि 7 से.मी, 8 से.मी. बरोबर त्रिकोण काढा. तुम्ही दोन वेगवेगळ्या त्रिकोण काढु शकता का? आपण दिलल्या तिन मापाला वापरुन एकच प्रकारचा त्रिकोण काढु शकतो. जर तुम्ही याच मापांना वापरुन एक त्रिकोण काढला. तर तो एकाच त्रिकोणाशी एकरुप होईल.



आता, तुमच्या आवडीचे तिन त्रिकोण घ्या. बिलकुल कोनाची बेरीज 180^0 झाली पाहिजे, तुमच्या कोनाच्या मापाने दोन त्रिकोण काढा.

तिन केानाचे माप वापरुन महिमाने वेगवेगळ्या प्रकारचे त्रिकोण माहित करते.

$\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$



म्हणुन हे दिसुन पडते की, तिन कोन त्रिकोण काढण्यासाठी पुरे नाहीत.

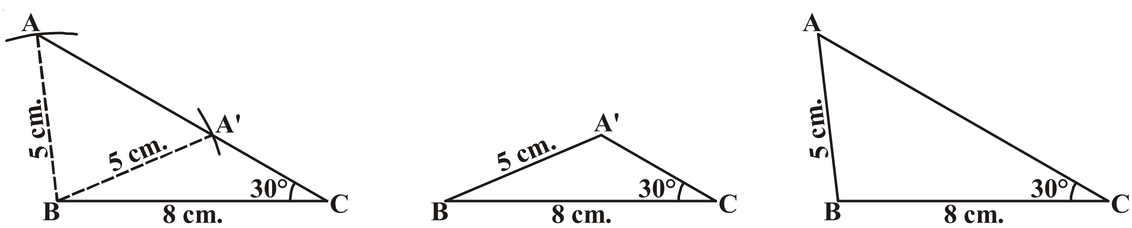
शरीफ ने विचार केला जर दोन केान दिले आहेत नंतर तो कोनाची एकुण बेरीज चा गुणधर्म वापरुन तिसरा कोन माहित करु शकतो म्हणुन एक त्रिकोन काढण्यासाठी दोन कोनांचीच गरज आहे परंतु ते एक सारखे नसले पाहिजे. म्हणुन 3 किंवा 2 कोन पुरेशी नाहीत. आपणास तिन स्वतंत्र मापणाची गरज आहे (घटक) एक एकच त्रिकोण काढण्यासाठी आहे.

आता, दोन भिन्न त्रिकोण काढण्याचा प्रमाण करा प्रत्येकी या तिन मापाचा वापर करुन माहित करा

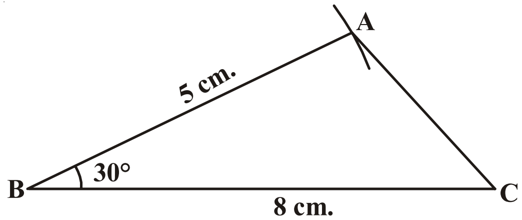
i. ΔABC जेथे $AB = 5$ से.मी., $BC = 8$ से.मी., $\angle C = 30°$

ii. ΔABC जेथे $AB = 5$ से.मी., $BC = 8$ से.मी., $\angle B = 30°$

(i) तुम्ही विशिष्ट त्रिकोण काढण्यासाठी समर्थ आहात का? दिलेल्या मापाचा वापर करुन त्रिकोन काढा, तपासणी करा आणि तुमच्या मित्रा सोबत चर्चा करा.



येथें आपण दोन वेगवेगळे त्रिकोण काढु शकतो. ΔABC आणि $\Delta A'BC$ दिलेल्या मापाचा वापर करुन काढा. आता दिलेल्या माहितीचा वापर करुन दोन त्रिकोण काढा. (ii) तुम्हाला काय आढळुन येईल? ते एकरुप त्रिकोण आहेत का नाही?



दुसऱ्या शब्दात संदर्भ (ii) मधील दिलेल्या मापाचा वापर करुन तुम्ही विशिष्ट त्रिकोण काढु शकता. तुम्ही संदर्भ (i) आणि संदर्भ (ii) मधील क्रमाचा विचार करा. संदर्भ (1) मध्ये दोन बाजु आणि एक कोन दिलेले आहेत. ते सामविष्ठ कोन नाही परंतु संदर्भ (11) मध्ये समाविष्ठ कोनाबरोबर दोन बाजु दिलेल्या आहेत. अशा प्रकारे दिलेल्या दोन बाजु आणि एक कोन म्हणजे तिन स्वतंत्र माप हा एकच त्रिकोन काढण्याचा आधार आहे. परंतु दिलेल्या मापाचा क्रम त्रिकोणाची रचना करण्याकरीता देखील एक महत्वाची पात्र एकच त्रिकोण तयार करण्यासाठी आहे.

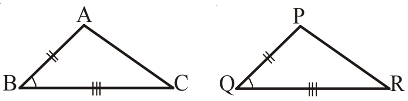
7.3 त्रिकोणाची एकरुपता.

त्रिकोनाची एकरुपतेची तपासणी करण्यासाठी वरील तात्पर्य वापरतो. जर आपणास दोन त्रिकोण आहेत. एका बाजु बरोबर समान किंवा दोन त्रिकोण तिन सर्व कोनासमान आपण ते त्रिकोन समाविष्ठ करु शकत नाही. आपणास या मापाव्दारे ठराविक एक त्रिकोण काढण्याची शक्यता असते. जर आपणास दोन बाजु आहेत आणि एक कोन आहे आपण म्हणु शकत नाही की त्रिकोण एकरुप नाहीत जोपर्यंत दोन बाजु मधील कोन दिलेले नाहीत. आपण असे सांगु शकतो की, (SAS बाजु कोन बाजु)एकरुपतेचा नियम लागु पडतो.परंतु SSA किंवा ASS ला नाही.

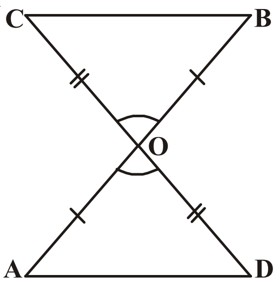
आपणास त्रिकोणाच्या एकरुपतेचा पहिला आधार समजतो आणि दुसरा आधार या व्दारे सिध्द करतो.

स्वंय सिध्द (SAS एकरुपतेचा नियम): दोन त्रिकोण एकरुप आहेत जर दोन बाजु आणि एक समाविष्ठ कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन बाजु आणि एक समाविष्ठ कोनाच्या बरोबर असतात.
उदा. ΔABC आणि ΔPQR मध्ये

$AB=PQ$, $BC=QR$ आणि $\angle CBA=\angle RQP$, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$



उदाहरण1: दिलेल्या आकृतीत AB आणि CD या रेषा 'O'बिंदु जवळ छेदन करतात. $OA = OB$ आणि $OD = OC$ तर दाखवा
(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ आणि (ii) $AD \parallel BC$.



सोडवणुक: (i)तुम्ही निरिक्षण करु शकता की, ΔAOD आणि ΔBOC,

$OA = OB$ (दिले आहे)

$OD = OC$ (दिले आहे)

देखील म्हणुन $\angle AOD$ आणि $\angle BOC$ विरुध्द लंब जोडीचे कोन तयार होतात आपणास माहित आहे की, $\angle AOD = \angle BOC$.

म्हणुन, $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (SAS एकरुपतेच्या नियमाव्दारे)

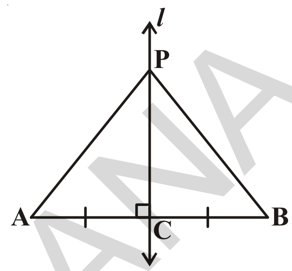
(ii) AOD आणि BOC एकरुप त्रिकोणात दुसरे संगत भाग देखील समान असतात.

म्हणुन $\angle OAD = \angle OBC$ आणि हे जोडीचे पर्यायी त्रिकोण रेषाखंड AD आणिBCसाठी तयार करतात.

म्हणुन $AD \parallel BC$

उदाहरण 2: AB एक रेषाखंड आहे आणि l ही त्याचा लंब दुभाजक आहे. जर बिंदु P हा रेषा l वर आहे तर दाखवा की P हा A आणि B पासुन समअंतरावर आहे.

सोडवणुक: रेषा $l \perp AB$ आणि C मधुन जाते जे की AB चा मध्य बिंदु आहे.



आपणास दाखवयाचे आहे की, $PA = PB$.

गृहीत धरा ΔPCA आणि ΔPCB.

आपणास $AC = BC$ (C हा AB चा मध्य बिंदु आहे.)

$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (दिलेले आहे)

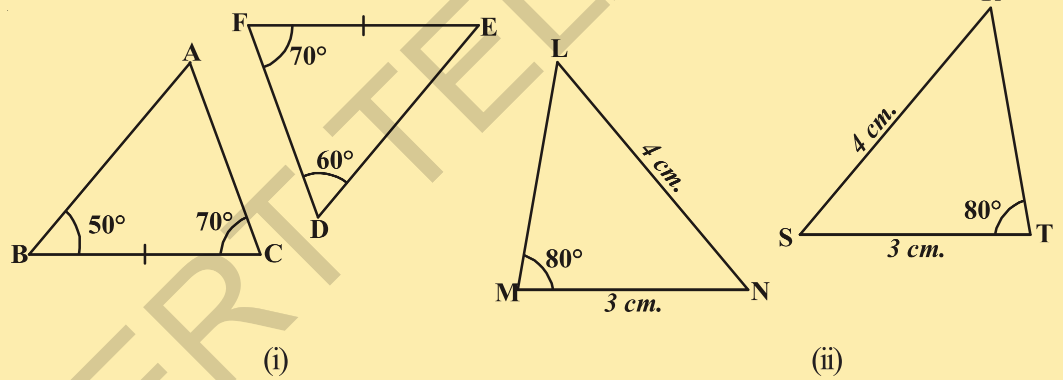
$PC = PC$ (साधारण) बाजु

म्हणुन, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS नियम)

आणि, $PA = PB$, ते एकरुप त्रिकोणाच्या संगत बाजु आहेत.

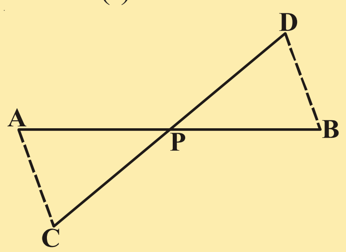
हे करा

1. खालील त्रिकोण एकरुप आहेत का नाही हे सांगा? तुमच्या उत्तराचे कारणे द्या.



2. दिलेल्या आकृतीत बिंदु P हा AB आणि DC ला दुभाजतो. सिध्द करा.

$\Delta APC \cong \Delta BPD$

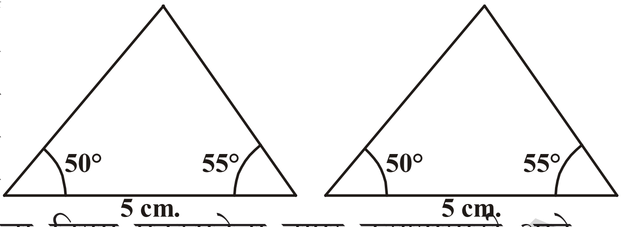


7.3.1 एकरुपतेचे दुसरे नियम

दोन त्रिकोणाची रचना करण्याचा प्रयत्न करा ज्यामध्ये दोन कोन 50^0 आणि 55^0 आहेत आणि बाजु ज्यावर दोन्ही कोण पडतात. ती 5 से.मी. आहे.

या त्रिकोणांना कापा आणि एकावर दुसरे ठेवा. तुम्हाला काय आढळुन येईल? तुम्हाला माहित होईल की, दोन्ही त्रिकोण एकरुप आहेत. हा निकाल कोन- बाजु - कोन एकरुपतेचा आधार आहे.

आणि त्याला ASA असे लिहले जाते. तुम्ही याला मागील वर्गात पाहिले असाल. आता चला सांगा आणि निकाल सिध्द करा. म्हणुन हा निकाल सिध्द करता येतो. याला एक प्रमेय म्हणतात. आणि याला सिध्द करा. आपण SAS स्वयंसिध्द चा नियम एकरुपतेचा वापर करण्यासाठी आहे.



प्रमेय 7.1 (ASA एकरुपतेचा नियम) : दोन त्रिकोण एकरुप आहेत जर दोन कोन आणि एक समाविष्ठ बाजु आणि दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन कोन आणि समाविष्ठ बाजुच्या समान असतात.

दिले आहे ΔABC आणि ΔDEF मध्ये

$$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F \text{ आणि } \overline{BC} = \overline{EF}$$

सिध्दता: (RTP): $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

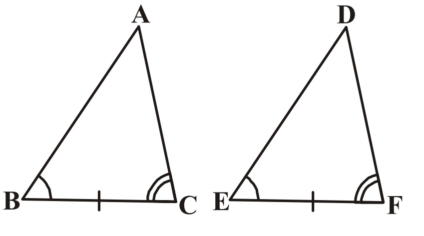
सिध्द करा: तिन शक्यता आहेत. AB आणि DE मधील शक्यता आहे. AB > DE किंवा AB > DE किंवा AB = DE.

आपण सर्व संदर्भ गृहीत धरु या आणि ΔABC आणि ΔDEF चा अर्थ काय आहे.

संदर्भ (i): समजा $\overline{AB} = \overline{DE}$ आता तुम्ही काय निरिक्षण करता?

गृहीत धरा ΔABC आणि ΔDEF

$AB = DE$	(समजले)
$\angle B = \angle E$	(दिले आहे)
$BC = EF$	(दिले आहे)



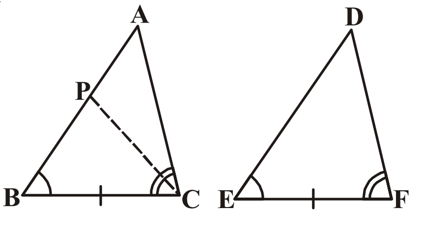
म्हणुन $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS एकरुपतेचा नियम)

संदर्भ (ii): दुसरी शक्यता AB > DE आहे.

म्हणन आपण बिंदु P हा AB वर छेदु शकतो. अशाप्रकारे की, PB = DE.

आता गृहीत धरा ΔPBC आणि ΔDEF

$PB = DE$	(रचनेव्दारे)
$\angle B = \angle E$	(दिले आहे)
$BC = EF$	(दिले आहे)



म्हणुन $\Delta PBC \cong \Delta DEF$ (SAS एकरुपतेचा नियमाव्दारे)

कारण त्रिकोण एकरुप आहेत म्हणुन त्यांचे संगत भाग समान आहेत.

म्हणुन $\angle PCB = \angle DFE$

परंतु $\angle ACB = \angle DFE$ (दिले आहे)

म्हणुन $\angle ACB = \angle PCB$ (वरील प्रमाणे)

हे शक्य आहे का?

हे शक्य आहे फक्त जर P ला A बरोबर तंतोतंत घेत असेल तर

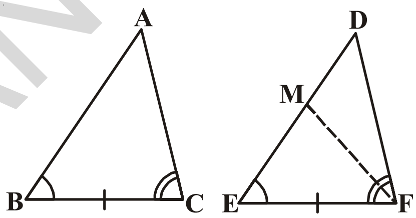
(किंवा) $BA = ED$

म्हणुन $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS एकरुपतेच्या नियमाव्दारे)

(सुचना: आपण वरील दाखविले की, जर $\angle B = \angle E$ आणि $\angle C = \angle F$ आणि $\overline{BC} = \overline{EF}$ नंतर $\overline{AB} = \overline{DE}$ आणि दोन त्रिकोण एकरुप आहेत SAS नियमाव्दारे)

संदर्भ (iii): तिसरी शक्यता ही आहे की, $AB < DE$

आपण बिंदु M हा DE वर अशाप्रकारे निवडा की, $ME = AB$ होते. आणि वादावरुन संदर्भ (ii) मध्ये दिल्याप्रमाणे वारंवार करा. आपण निष्कर्श काढु शकतो की, $AB = DE$ आणि म्हणुन, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. खालील आकृतीकडे पहा आणि स्वत:हा सिध्द करण्याचा प्रयत्न करा.



समजा, दोन त्रिकोणातील कोनांच्या जोड्या आणि एक समान बाजुंची जोडी समान असते. परंतु ती बाजु त्रिकोणाच्या समान संगत जोडीमध्ये नसते आता ते त्रिकोण एकरुप आहेत का? ते एकरुप आहेत असे तुम्हाला दिसुन येते. याच कारण सांगु शकता का?

तुम्हाला माहित आहे की, त्रिकोणाच्या तिन कोनांची बेरीज 180^0 असते म्हणुन जर कोणतेही दोन जोडीचे /कोन आणि एक जोडीची बाजु समान असतात. त्यास को.को.बा. एकरुपतेचे नियम म्हणतो. चला काही उदाहरणे घेऊ या.

उदाहरण-3: दिलेल्या आकृतीत $AB \| DC$ आणि $AD \| BC$

दाखवा की, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

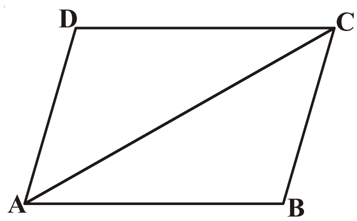
सोडवणुक: गृहीत धरा की, ΔABC आणि ΔCDA

$\angle BAC = \angle DCA$ (पर्यायी अंतर ठेवा)

$AC = CA$ (सामान्य बाजु)

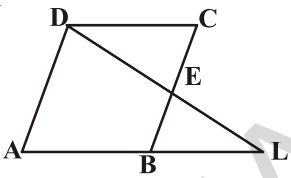
$\angle BCA = \angle DAC$ (पर्यायी अंतर कोन)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$(ASA एकरुपतेचा नियमाव्दारे)



उदाहरण-4: दिलेल्या आकृतीत $AL \parallel DC$ आहे.E हा BC चा मध्यबिंदु आहे.तर $\Delta EBL \cong \Delta ECD$ दाखवा.

सोडवणुक:गृहीत धरा की,ΔEBL आणि ΔECD



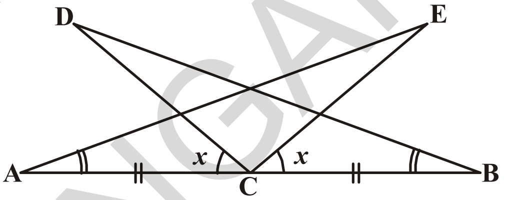
$\angle BEL = \angle CED$ (लंब विरुध्द कोन)

BE = CE (म्हणुन E हा BC चा मध्य बिंदु आहे.)

$\angle EBL = \angle ECD$ (पर्यायी अंतर कोन)

$\Delta EBL \cong \Delta ECD$ (ASA एकरुपतेच्या नियमाव्दारे)

उदाहरण-5: बाजुला दिलेल्या आकृतीमधील माहिती वापरा आणि सिध्द करा.



(i) $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

(ii) DC = EC.

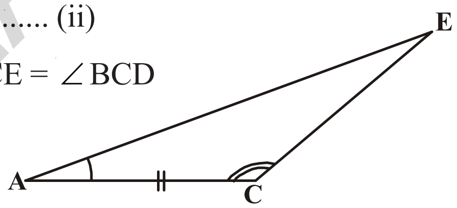
सोडवणुक: समजा $\angle ACD = \angle BCE = x$

$\therefore \angle ACE = \angle DCE + \angle ACD = \angle DCE + x$ ...... (i)

$\therefore \angle BCD = \angle DCE + \angle BCE = \angle DCE + x$ ...... (ii)

(i) आणि (ii) पासुन, आपणास येते की, $\angle ACE = \angle BCD$

आता ΔDBC आणि ΔEAC,

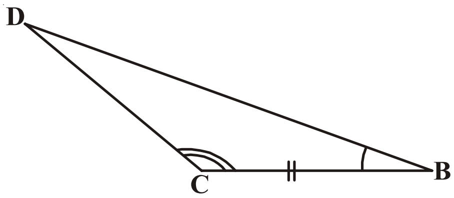


$\angle ACE = \angle BCD$ (वर सिध्द केले आहे)

BC = AC (दिलेले आहे)

$\angle CBD = \angle EAC$ (दिलेले आहे)

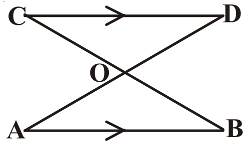
$\Delta DBC \cong \Delta EAC$ [A.S.Aवरुन]



म्हणुन $\Delta DBC \cong \Delta EAC$

DC = EC.(CPCT वरुन)

उदाहरण-6: रेषा खंड AB हे दुसऱ्या रेषाखंडाला CD ला समांतर आहे. O हा AD चा मध्य बिंदु आहे.



(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O हा देखील BC चा मध्यबिंदु आहे.

सोडवणुक: (i) गृहीत धरा की, ΔAOB आणि ΔDOC.

$\angle ABO = \angle DCO$ (पर्यायी कोन जसे $AB \parallel CD$ आणि BC एक छेदीत रेषा)

$\angle AOB = \angle DOC$ (लंब विरुध्द बाजु)

OA = OD (दिलेले आहे)

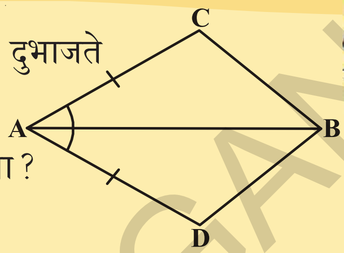
म्हणुन $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS नियमाव्दारे)

(ii) $OB = OC$ (CPCT)

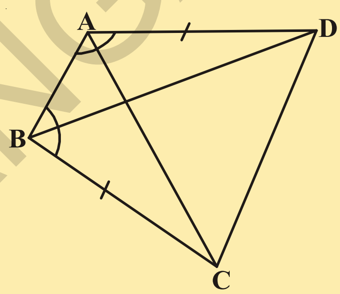
म्हणुन O हा BC चा मध्य बिंदु आहे.

अभ्यास - 7.1

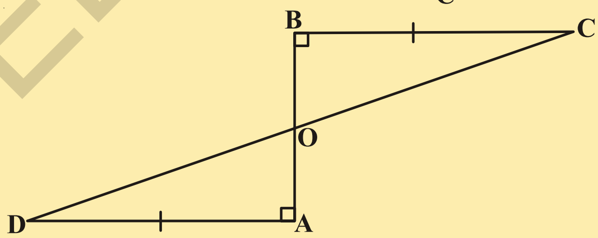
1. ACBD चौकोनात $AC = AD$ आणि $\angle A$ ला AB दुभाजते तर $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ दाखवा.
तुम्ही BC आणि BD बद्दल काय सांगु शकता ?



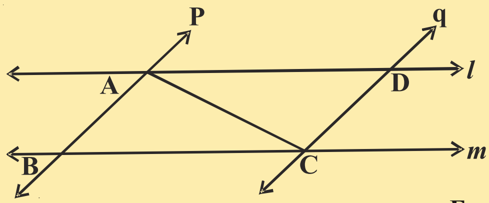
2. ABCD एक चौकोण आहे ज्यामध्ये $AD = BC$ आणि $\angle DAB = \angle CBA$ सिध्द करा की,
(i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$
(ii) $BD = AC$
(iii) $\angle ABD = \angle BAC$



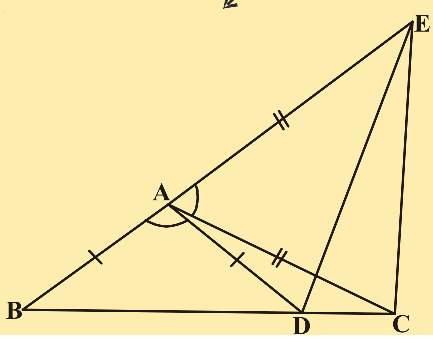
3. AD आणि BC समान आहेत आणि AB रेषा खंडाला लंब आहे. तर CD , AB ला दुभाजते हे दाखवा.



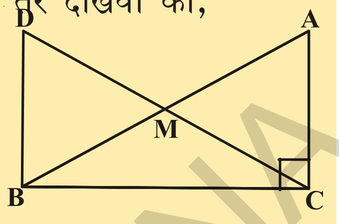
4. l आणि m दोन समांतर रेषा आहेत अणि दुसऱ्या p आणि q जोडी समांतर रेषांनी छेदन करता तर दाखवा की, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



5. बाजुच्या आकृतीमध्ये $AC = AE, AB = AD$ आणि $\angle BAD = \angle EAC$ दाखवा की, $BC = DE$.



6. काटकोन त्रिकोण ABC मध्ये काटकोण C बिंदु जवळ आहे. M हा कर्ण AB चा मध्य बिंदु आहे. C ला M बरोबर जोडा आणि D पर्यंत वाढवा. अशाप्रकारे की, DM = CM. D बिंदुला B बिंदु सोबत जोडले (आकृती पहा) तर दाखवा की,



(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

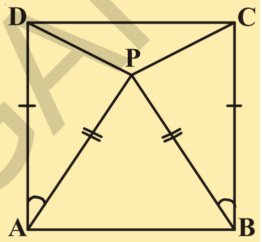
(ii) $\angle DBC$ काटकोण त्रिकोण आहे.

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

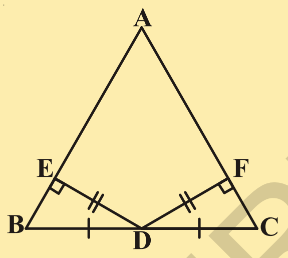
(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$

7. बाजुच्या आकृतीमध्ये ABCD हा एक चौरस आहे आणि ΔAPB एक समबाहु त्रिकोण आहे. तर सिध्द करा की, $\Delta APD \cong \Delta BPC$.

(सुचना : ΔAPD मध्ये आणि ΔBPC $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AP} = \overline{BP}$ आणि $\angle PAD = \angle PBC = 90^o - 60^o = 30^o$]



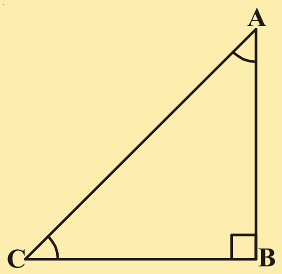
8. बाजुच्या आकृतीमध्ये ΔABC, D हा BC चा मध्य बिंदु आहे. $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ तर DE = DF दाखवा $\Delta BED \cong \Delta CFD$.



9. त्रिकोणाच्या कोणाचा दुभाजक देखील विरुध्द बाजुला दुभागले तर सिध्द करा की, त्रिकोण हा समव्दिभुज आहे.

10. दिलेल्या आकृतीमध्ये ABC हा काटकोण त्रिकोण आहे. अणि B जवळ काटकोण अशा प्रकारे आहे की $\angle BCA = 2\angle BAC$ तर दाखवा AC = 2BC.

(सुचना : CB ला D बिंदु पर्यंत अशाप्रकारे वाढवा की, BC = BD)

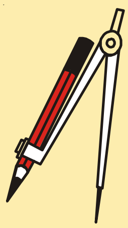


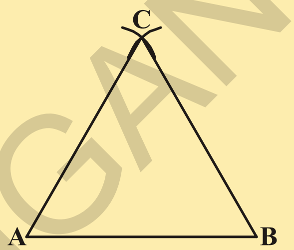
7.4 त्रिकोणाचे काही गुणधर्म

वरील विभागात तुम्ही दोन criteria शिकलो आहोत ते म्हणजे त्रिकोणाच्या एकरुपतेसाठी चला आता या निकालाला काही गुणधर्माचा अभ्यास करण्यासाठी वापरु या जे की, दोन बाजु समान असलेल्या त्रिकोणाच्या समान आहेत.

कृती

i. कंम्पासाचा वापर करुन एका त्रिकोणाची रचना करण्यासाठी कोणतेही माप घ्या आणि एक रेषाखंड AB काढा. आता पुरेसी अशी लांबी कंम्पास ला उघडुन घ्या आणि त्याला A आणि B वर ठेवा आणि एक चाप काढा. तुम्हाला कोणत्या प्रकारचा त्रिकोण येईल? हो हा समव्दिभुज त्रिकोण आहे. म्हणुन आकृतीमध्ये ΔABC हा समव्दिभुज त्रिकोण आहे जेथे $AC = BC$ आता $\angle A$ आणि $\angle B$ चे माप करा तुम्हाला काय दिसुन येते?

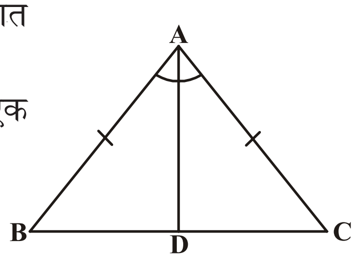




ii. काही समव्दिभुज त्रिकोण मोडा.
आता त्रिकोणाला दुमडा अशा प्रकारे की, दोन एकरुप बाजु मजबुत एका बाजुवर दुसरी बाजु बसेल. तुम्ही $\angle A$ आणि $\angle B$ चे काय निरिक्षण करणार सांगा.
तूम्ही निरिक्षण करणार की, प्रत्येक त्रिकोणात समान बाजुच्या विरुध्दात असलेले कोण समान असतात हा खुप महत्वाचा निकाल आहे. आणि हा कोणत्याही समव्दिभुज त्रिकोणासाठी एकदम सत्य आहे. याला खाली दाखविल्याप्रमाणे सिध्द करता येते.

प्रमेय -7.2: समव्दिभुज त्रिकोणाच्या समान बाजुच्या विरुध्दात असलेले कोण समान असतात.

हा निकाल बरेचशा मार्गाने सिध्द करता येतो त्यातील एक सिध्दता खाली येथे दिली आहे.



दिलेले आहे: ΔABC एक समव्दिभुज त्रिकोण आहे ज्यामध्ये $AB = AC$.

सिध्दता: $\angle B = \angle C$.

रचना: चला $\angle A$ चा दुभाजक काढा आणि दुभाजक $\angle A$ आणि BC चा छेदन बिंदु D आहे.

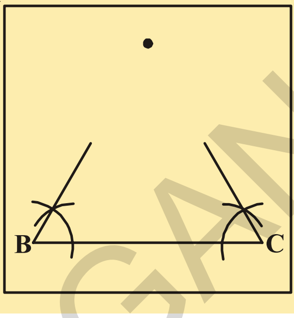
सिध्द करणे: ΔBAD मध्ये आणि ΔCAD मध्ये

$AB = AC$	(दिले आहे)
$\angle BAD = \angle CAD$	(रचनेव्दारे)
$AD = AD$	(सामान्य)
So, $\Delta BAD \cong \Delta CAD$	(SAS एकरुपतेचा गुणधर्म)
So, $\angle ABD = \angle ACD$	(CPCT व्दारे)
i.e., $\angle B = \angle C$	(समान कोन)

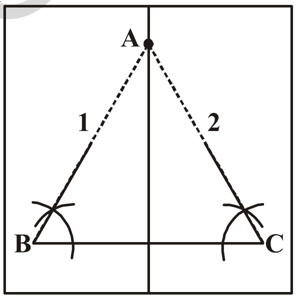
याचा व्यत्यास देखील बरोबर आहे का? ते आहे,जर एका त्रिकोणाचे दोन कोण समान असतील तर आपण एक निष्कर्ष काढु शकतो का त्यांच्या विरुध्दात बाजु देखील समान असतात

कृती

1. एका कागदावर 6 से.मी. लांबी असलेली BC एक रेषा खंड काढा.
2. शिरोबिंदु B आणि C पासुन 60^0 कोनाने प्रत्येकी A किरणे काढा. जेथे ते मिळतात. त्यांना नावे द्या.
3. कागदाला अशाप्रकारे दुमडा की, B आणिC एकमेकांवर मजबुत बसेल तुम्हाला काय आढळुन येईल? AB = AC आहे का?



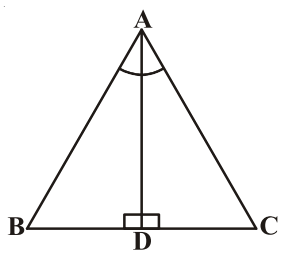
कोण ∠B आणि ∠C च्या ऐवजी वेगवेगळ्या कोण घेऊन या कृतीला पुन्हा करा. प्रत्येक वेळी तुम्हाला आढळुन येईल की, समान कोणाच्या विरुध्द बाजुला असलेल्या बाजु समान असतात. म्हणुन आपणास खालील प्रमाणे आढळते.



प्रमेय-7.3: एका त्रिकोणाच्या समान कोणाच्या विरुध्दात असलेल्या बाजु समान असतात.

हे मागील प्रमेयाचा व्यत्यास आहे. विद्यार्थ्यांना उपदेश दिला आहे. की याला एएसए एकरुपतेचा नियम वापरुन सिध्द करा.

उदाहरण-7: ΔABC मध्ये Aचा दुभाजक AD हा BC बाजुला लंब आहे. म्हणुन दाखवा की, AB = AC आणि ΔABC समव्दिभुज त्रिकोण



उदाहरण: ΔABD आणि ΔACD मध्ये

∠BAD = ∠CAD (दिले आहे)

AD = AD (समान बाजु)

∠ADB = ∠ADC = 90° (दिले आहे)

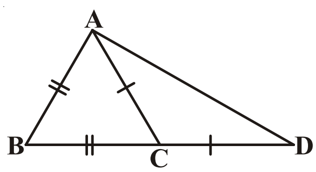
म्हणुन ΔABD ≅ ΔACD (ASA नियम)

म्हणुन AB = AC (CPCT)

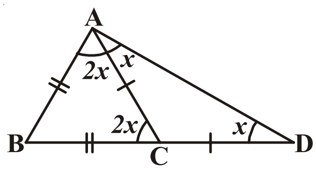
किंवा ΔABC समव्दिभुज त्रिकोण आहे.

उदाहरण-8: बाजुच्या आकृतीमध्ये AB = BC आणि AC = CD.

सिध्द करा की, ∠BAD : ∠ADB = 3 : 1.



सोडवणुक: समजा ∠ADB = x



ΔACD मध्ये $AC = CD$

$\Rightarrow \quad \angle CAD = \angle CDA = x$

आणि बाह्य $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA$

$= x + x = 2x$

$\Rightarrow \quad \angle BAC = \angle ACB = 2x.$ ($\because$ In ABC, AB = BC)

$\therefore \quad \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$

$= 2x + x = 3x$

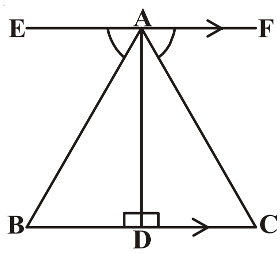
आणि $\quad \dfrac{\angle BAD}{\angle ADB} = \dfrac{3x}{x} = \dfrac{3}{1}$

म्हणजेच $\angle BAD : \angle ADB = 3 : 1.$

म्हणुन सिध्द झाले आहे.

उदाहरण-9: दिलेल्या आकृती मध्ये AD हे BC ला लंब आहे आणि EF || BC जर $\angle EAB = \angle FAC$ दाखवा की त्रिकोण ABD आणि ACD हे एकरुप त्रिकोण आहेत.

देखील x आणि y ची किंमत माहित करा जर $AB = 2x + 3$, $AC = 3y + 1$, $BD = x$ आणि $DC = y + 1$.



सोडवणुक: AD हे EF ला लंब आहे.

$\Rightarrow \quad \angle EAD = \angle FAD = 90^0$

$\angle EAB = \angle FAC$ (दिले आहे)

$\Rightarrow \quad \angle EAD - \angle EAB = \angle FAD - \angle FAC$

$\Rightarrow \quad \angle BAD = \angle CAD$

ΔABD आणि ΔACD मध्ये

$\angle BAD = \angle CAD$ (वर सिध्द केले आहे)

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ [दिले आहे की, AD हे BC वर लंब आहे.]

आणि $\quad AD = AD$

$\therefore \quad \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [ASA व्दारे]

म्हणुन सिध्द झाले आहे.

$\angle ABD = \angle ACD \Rightarrow AB = AC$ आणि $BD = CD$ [C.P.C.T व्दारे]

$\Rightarrow 2x + 3 = 3y + 1$ आणि $x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - 3y = -2$ आणि $x - y = 1$

मांडणी केल्याने $x = 1 + y$

$2(1 + y) - 3y = -2$

$2 + 2y - 3y = -2$

$-y = -2 - 2$

$-y = -4$

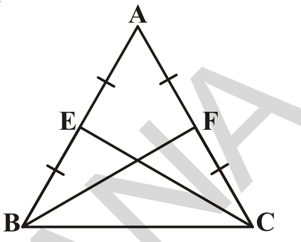
मांडणी केल्याने $y = 4$ मध्ये $x = 1 + y$

$x = 1 + 4$

$x = 5$

उदाहरण-10: एका त्रिकोणाचे E आणि F हे क्रमवार समान असेलेल्या बाजु AB आणि AC चे मध्ये बिंदु ΔABC (आकृती पहा)

दाखवा की, BF = CE



उदाहरण: ΔABF आणि ΔACE मध्ये

AB = AC (दिले आहे)

$\angle A = \angle A$ (समान कोन)

AF = AE (समान बाजुचे अर्धे भाग)

म्हणुन $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (SAS नियम)

म्हणुनच BF = CE (CPCT)

उदाहरण-11: एका समव्दिभुज त्रिकोण ABC मध्ये AB = AC, D आणि E बिंदु BC वर अशाप्रकारे आहेत की, BE = CD (आकृती पहा) दाखवा की, AD = AE,

उदाहरण: ΔABD आणि ΔACE मध्ये

AB = AC (दिले आहे) .... (1)

$\angle B = \angle C$ (समान बाजु विरुध्दात असलेले कोन) .... (2)

देखील BE = CD

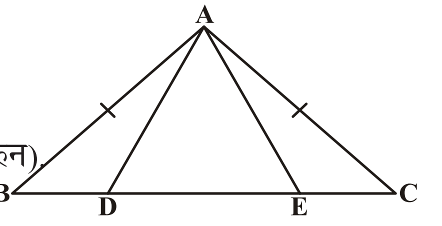
म्हणुन BE – DE = CD – DE

ते म्हणजे BD = CE (3)

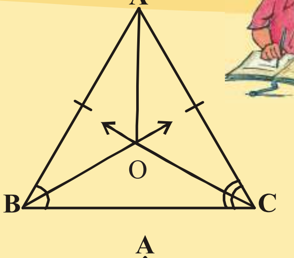
म्हणुन $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

((1), (2), (3) आणि SAS नियम यांना वापरुन)

हे देते AD = AE (CPCT)



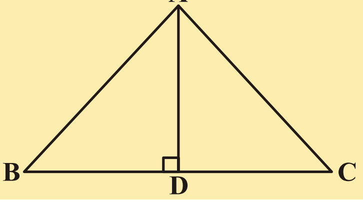
अभ्यास - 7.2



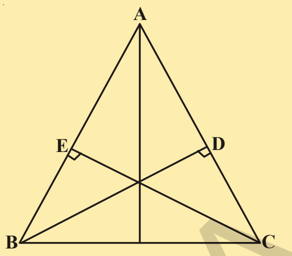
1. समव्दिभुज त्रिकोण ABC, मध्ये AB = AC, $\angle B$ आणि $\angle C$ चे दुभाजक ऐकमेकांस O बिंदु जवळ छेदतात. A पासुन O पर्यंत जोडा.

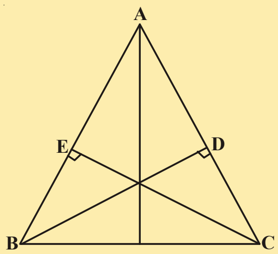
   (i) OB = OC (ii) $\angle A$ ला AO दुभाजते.

2. ΔABC,मध्ये AD हे BC चा लंब दुभाजक आहे. (बाजुच्या आकृती पहा) दाखवा की, ΔABC हा समव्दिभुज त्रिकोण आहे. ज्यामध्ये AB = AC.



3. ABC एक समव्दिभुज त्रिकोण आहे ज्यामध्ये BD आणि CE लंब समान असलेल्या बाजु AC आणि AB ला अनुक्रमे काढले आहेत. (आकृती पहा) दाखवा की हे लंब समान आहेत.

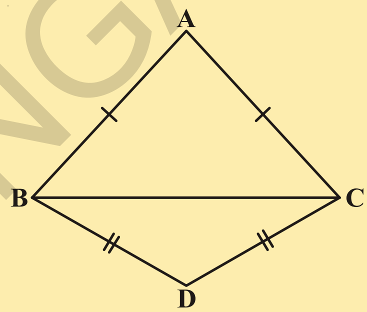




4. ABC एका त्रिकोण आहे. ज्यामध्ये BD आणि CE लंब AC आणि AB बाजुंना समान आहेत (आकृती पहा)

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACE$

(ii) $AB = AC$ म्हणजेच ABC एक समव्दिभुज त्रिकोण आहे.



5. ΔABC आणि ΔDBC हे दोन समव्दिभुज त्रिकोण समान पाया BC वर आहेत(आकृती पहा) दाखवा की, $\angle ABD = \angle ACD$.

7.5 त्रिकोणाच्या एकरुपतेचे अजुन काही निकष

प्रमेय 7.4 (SSS एकरुपतेचा नियम) : रचनेवरुन आपण पाहिले आहे. की, SSS नियम लागु होते. या प्रमेयाला एका योग्य रचनेव्दारे सिध्द करता येते.

दोन त्रिकोणात जर एक त्रिकोणाच्या तिन बाजु अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तिन बाजु संगत बाजु समान असतात. म्हणुन दोन्ही त्रिकोण एकरुप आहेत.

- **SSS** एकरुपतेच्या नियमला सिध्द करणे.

दिले आहे: ΔPQR आणि ΔXYZ अशा प्रकारे आहेत की, $PQ = XY$, $QR = YZ$ आणि $PR = XZ$

सिध्दता : $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

रचना: YW काढा अशाप्रकारे की, $\angle ZYW = \angle PQR$ आणि $WY = PQ$. XW आणि WZ ला जोडा

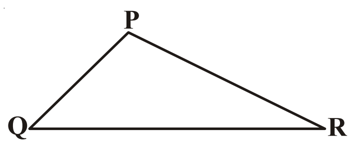
सिध्द करणे: ΔPQR आणि ΔWYZ मध्ये

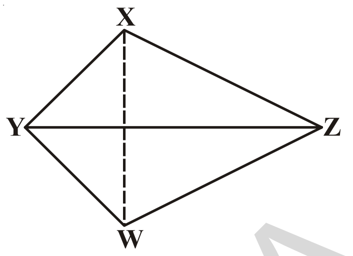
$QR = YZ$ (दिले आहे)

$\angle PQR = \angle ZYW$ (रचना)

$PQ = YW$ (रचना)

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta WYZ$ (SAS एकरुपतेचा गुणधर्म)





$\Rightarrow \angle P = \angle W$ आणि $PR = WZ$ (CPCT)

$PQ = XY$ (दिले आहे)आणि $PQ = YW$ (रचना)

$\therefore XY = YW$

त्याच प्रमाणे $XZ = WZ$

ΔXYW मध्ये $XY = YW$

$\Rightarrow \angle YWX = \angle YXW$ (एका त्रिकोणात समान बाजुच्या विरुध्द बाजुला असलेले कोन समान असतात.)

त्याच प्रमाणे $\angle ZWX = \angle ZXW$

$\therefore \angle YWX + \angle ZWX = \angle YXW + \angle ZXW$

$\Rightarrow \angle W = \angle X$

आता $\angle W = \angle P$

$\therefore \angle P = \angle X$

ΔPQR मध्ये आणि ΔXYZ

$PQ = XY$

$\angle P = \angle X$

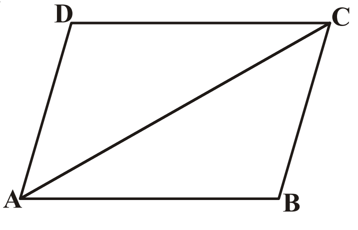
$PR = XZ$

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta XYZ$ (SAS एकरुपतेचा नियम)

त्याच्या वर आधारीत असलेले चला एक खालील उदाहरण पाहु या.

उदाहरण-12: ABCD चौकोणात $AB = CD$, $BC=AD$ आहे तर दाखवा की, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

गृहीत धरा ΔABC आणि ΔCDA



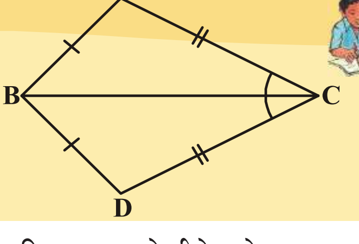
$AB = CD$ (दिले आहे)

$AD = BC$ (दिले आहे)

$AC = CA$ (समान बाजु)

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (SSS एकरुपतेचा नियम)

हे करा



1. बाजुच्या आकृतीमध्ये ΔABC आणि ΔDBC हे दोन त्रिकोण अशाप्रकारे आहेत की, $\overline{AB} = \overline{BD}$ आणि $\overline{AC} = \overline{CD}$ दाखवा की, $\Delta ABC \cong \Delta DBC$.

तुम्ही SAS एकरुपतेच्या नियम मध्ये अगोदरच पाहिले आहे की, समान जोडीचे कोण समान बाजु मधील कोणामध्ये मिळविले पाहिजे आणि जर नाहीतर दोन त्रिकोण एकरुप होऊ नाही शकत.

कृती

एक काटकोण त्रिकोण 5 से.मी. कर्ण आणि 3 से.मी. बाजु किती वेगवेगळ्या त्रिकोणाची रचना करु शकतो? तुमच्या त्रिकोणांना तुमच्या वर्गातील दुसऱ्या मित्राच्या त्रिकोणाबरोबर तुलना करा. त्रिकोण एकरुप आहेत का? त्यांना काढुन घ्या आणि समान बाजु असलेल्या एका त्रिकोणावर दुसरा त्रिकोण ठेवा. जर गरज असेल तर त्रिकोणाला फिरवा तुम्हाला काय आढळुन येईल? तुम्हाला दिसुन येईल की, दोन्ही काटकोन त्रिकोण एकरुप आहेत. जर एका त्रिकोणाची एक बाजु आणि एक कर्ण अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत बाजु आणि कर्णांच्या समान आहे.

याची नोंद घ्या की, काटकोण हा कोण या संदर्भात मिळविला नाही. म्हणुन आपण खालील एकरुपतेच्या नियमा जवळ पोंहचतो.

प्रमेय 7.5 (RHS एकरुपतेचा नियम **) :** जर दोन काटकोण त्रिकोणात कर्ण आणि एका त्रिकोणाची एक बाजु दुसऱ्या त्रिकोणाच्या कर्ण आणि बाजु बरोबर समान असतात तेव्हा दोन त्रिकोण एकरुप होतात.

नोंद करा की, RHS म्हणजे काटकोण - कर्ण - बाजु- दर्शविते.

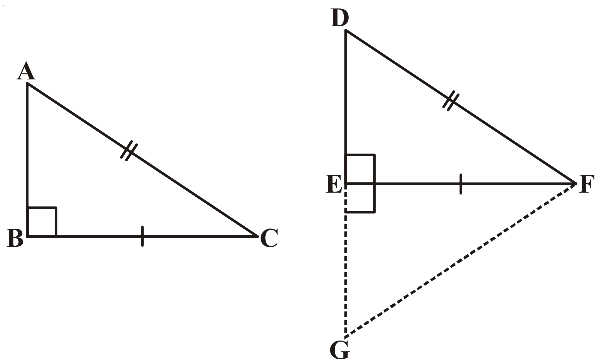
चला सिध्द करु या.

दिले आहे: दोन काटकोण त्रिकोण ΔABC आणि ΔDEF

ज्यामध्ये $\angle B = 90^o$ आणि

$\angle E = 90^o$ $AC = DF$

आणि $BC = EF$.



सिध्दता: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

रचना: DE ला G पर्यंत वाढवा.

म्हणुन $EG = AB$. GF ला जोडा.

सिध्दता:

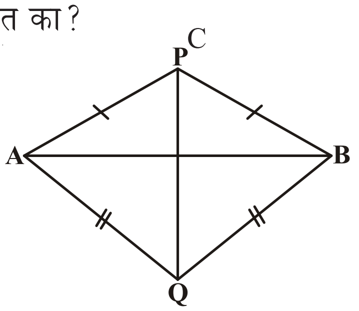
विधान	**कारण**
ΔABC मध्ये आणि ΔGEF आपणास आहे	
$AB = GE$	(रचनेव्दारे)
$\angle B = \angle FEG$	(प्रत्येंक कोण काटाकोन आहे (90^0))
$BC = EF$	(दिले आहे)
$\Delta ABC \cong \Delta GEF$	(SAS एकरुपतेचा नियमा व्दारे)
म्हणुन $\angle A = \angle G \ldots (1)$	(CPCT)

$AC = GF \ldots (2)$	(CPCT)
नंतर $AC=GF$ आणि $AC=DF$	((2) आणि दिलेल्या पासुन)
म्हणुन $DF = GF$	(वरील पासुन)
म्हणुन $\angle D = \angle G \ldots (3)$	(समान बाजुच्या विरुध्द बाजुचे कोण समान)
आपणास येते $\angle A = \angle D \ldots (4)$	((1) आणि (3)पासुन)
त्याच प्रमाणे ΔABC मध्ये आणि ΔDEF $\angle A = \angle D$, ((4)पासुन)	
$\angle B = \angle E$	(दिले आहे)
म्हणुन $\angle A + \angle B = \angle D + \angle E$	(मिळविल्या नंतर)
परंतु $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ and	(त्रिकोणाची कोणाची बेरीज नियम)
$\angle D + \angle E + \angle F = 180^0$	
$180 - \angle C = 180 - \angle F$	($\angle A + \angle B = 180^0 - \angle C$ आणि $\angle D + \angle E = 180^0 - \angle F$)
म्हणुन $\angle C = \angle F, \ldots (5)$	(खारीज करण्याचा नियम)
आता ΔABC मध्ये आणि ΔDEF, आपणास येते की,	
$BC = EF$	(दिले आहे)
$\angle C = \angle F$	((5)पासुन)
$AC = DF$	(दिले आहे)
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	(SAS एकरुपतेचा नियम)

उदाहरण-13: AB एक रेषा खंड आहे.P आणि Q हे बिंदु AB रेषा खंडाच्या दोन्ही बाजुंना अशाप्रकारे आहेत की प्रत्येक रेषा खंड A आणि B पासुन समान अंतरावर आहेत.(आकृती पहा) दाखवा की, PQ हे AB चा दुभाजकाचा लंब आहे.

सोडवणुक: तुम्हाला दिले आहे की, $PA = PB$ आणि $QA = QB$ आणि तुम्हाला दाखवयाचे आहे की,Q हे AB वर लंब आहे. आणि AB ला दुभाजतो. समजा PQ हे AB ला C जवळ छेदन करते.

तुम्ही विचार करु शकता का या आकृती मध्ये दोन त्रिकोण एकरुप आहेत का?



चला याला घ्या ΔPAQ आणि ΔPBQ.

या त्रिकोणात

$AP = BP$ (दिले आहे)

$AQ = BQ$ (दिले आहे)

$PQ = PQ$ (समान बाजु)

म्हणुन $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (SSS नियम)

म्हणुनच $\angle APQ = \angle BPQ$ (CPCT).

आता गृहीत धरु या की, ΔPAC आणि ΔPBC.

तुम्हाला माहित आहे की, $AP = BP$ (दिले आहे)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ (वर सिध्द केले आहे)

$PC = PC$ (समान बाजु)

म्हणुन $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ (SAS नियम)

म्हणुनच $AC = BC$ (CPCT) .... (1)

आणि $\angle ACP = \angle BCP$ (CPCT)

देखील $\angle ACP + \angle BCP = 180°$ (रेषीय जोडी)

म्हणुन $2\angle ACP = 180°$

किंवा $\angle ACP = 90°$ .... (2)

(1) आणि (2) पासुन तुम्ही सोप्या रितीने एका निष्कर्शाला येता की, PQ हे AB च्या दुभाजकाचा लंब आहे.

[नोंद करा की, ΔPAQ आणि ΔPBQ ची एकरुपता न दाखविता तुम्हाला दाखविता येत नाही $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ जरी $AP = BP$ (दिले आहे)

$PC = PC$ (समान बाजु)

आणि $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔAPB मध्ये समान बाजुच्या विरुध्दता असलेले कोण समान असतात)

याचे कारण की हे निकाल आपणास सांगते की, SSA नियम नेहमी लागु होत नाही. किंवा त्रिकोणाच्या एकरुपतेची सत्यता आहे. जसे दिलेल्या त्रिकोणात जोडीच्या समान बाजु मध्ये कोण मिळविला नाही.]

चला आणखी काही उदाहरणे घेऊ या.

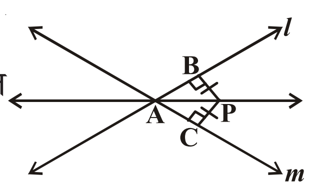
उदाहरण-14: P हा एक बिंदु l आणि m पासुन समान अंतरावर आहे आणि A जवळ छेदन होत आहे.(आकृती पहा) दाखवा की, रेषा AP त्यातील कोनांणा दुभाजते.

सोडवणुक: A वर l आणि m छेदतात. हे दिले आहेत.

समजा PB हे रेषा l वर लंब आहे आणि

$PC \perp m$. हे दिलेले आहे की, $PB = PC$.

तुम्हाला दाखवयाची गरज आहे $\angle PAB = \angle PAC$.



चला गृहीत धरु या की, ΔPAB आणि ΔPAC या दोन त्रिकोणात

$PB = PC$ (दिले आहे)

$\angle PBA = \angle PCA = 90°$ (दिले आहे)

$PA = PA$ (समान बाजु)

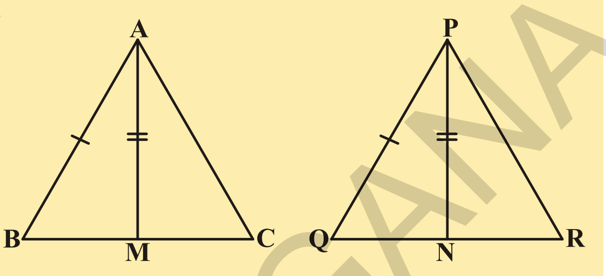
म्हणुन $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (RHS नियम)

म्हणुन $\angle PAB = \angle PAC$ (CPCT)

अभ्यास - 7.3

1. AD हे एका समव्दीभुज त्रिकोण ABC ची लंब रेषा आहे ज्यामध्ये $AB = AC$. दाखवा की, (i) ADहे BC ला दुभाजने (ii) AD हे $\angle A$ दुभाजते.

2. एका त्रिकोण ABC च्या दोन बाजु AB, BC आणि मध्ये रेषा AM या अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोण ΔPQR च्या दोन बाजु PQ आणि QR आणि मध्यरेषा PN समान आहेत(आकृती पहा) दाखवा की,



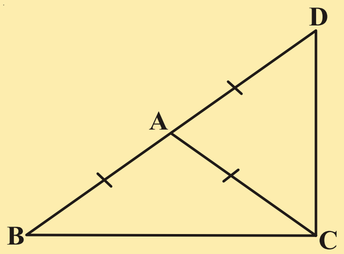
(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

3. BE आणि CF या दोन एका त्रिकोणाच्या लंब रेषा आहेत RHS एकरुपतेचा नियम वापरुन सिध्द करा की, ΔABC हा समव्दिभुज त्रिकोण आहे.

4. ΔABC हा समव्दिभुज त्रिकोण आहे ज्यामध्ये $AB = AC$. दाखवा की, $\angle B = \angle C$. (सुचना: $AP \perp BC$ काढा) (RHS एकरुपतेचा नियम)

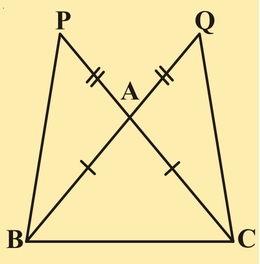
5. ΔABC एक समव्दिभुज त्रिकोण आहे ज्यामध्ये $AB = AC$ बाजु BA ला D पर्यंत अशा प्रकारे वाढविले आहे. की, $AD = AB$ (आकृती पहा) दाखवा की, $\angle BCD$ एक काटकोण आहे.



6. ABC एक काटकोण त्रिकोण आहे ज्यामध्ये $\angle A = 90^0$ आणि $AB = AC$ तर दाखवा की, $\angle B = \angle C$.

7. समभुज त्रिकोणाचे कोण प्रत्येकी 60^0 आहेत हे दाखवा.

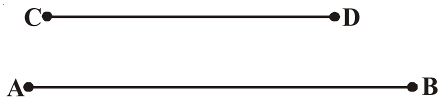
8. बाजुच्या आकृतीमध्ये ΔABC एक समव्दिभुज त्रिकोण आहे. ज्यामध्ये $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BA}$ आणि $\overline{CA}$ ना वाढवुन Q आणि P पर्यंत अशाप्रकारे की, $\overline{AQ} = \overline{AP}$ दाखवा की, $\overline{PB} = \overline{QC}$



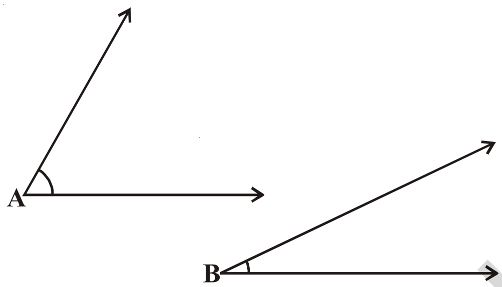
(सुचना : ΔAPB आणि ΔACQ ची तुलना करा)

7.6 त्रिकोणातील असमानता:

आता पर्यंत तुम्ही त्रिकोणात किंवा त्रिकोणातील बाजुच्या आणि कोणाच्या समानते बाबत अभ्यास करीत होता. काही वेळा आपण असमान वस्तुची संपर्कात येतो. आणि त्यांची तुलना करण्याची गरज भासते. जसे उदाहरणार्थ रेषा खंड AB ही लांबी मध्ये रेषा खंड CD पेक्षा जास्त आहे आकृती (i) मध्ये आणि $\angle A$ हा $\angle B$ पेक्षा मोठा आहे. हे आकृती (ii) मध्ये पहा.



(i)



(ii)

चला आता तपासणी करा की, त्रिकोणातील असमान बाजु आणि असमान कोणामध्ये काही संबंध आहे का? यासाठी खालील कृतीला सोडवुण पहा.

कृती

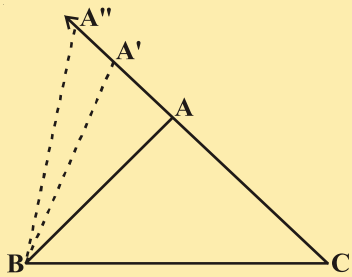
1. एक त्रिकोण ABC काढा आणि A′ बिदुला CA वर खुण करा जे वाढविला आहे

म्हणुन $A'C > AC$ (लांबीची तुलना करणे)

A′ला B सोबत जोडा आणि $A'BC$ ला पुर्ण करा.

तुम्ही काय म्हणु शकता $\angle A'BC$ आणि $\angle ABC$?

त्याची तुलना करा, तुम्हाला काय निरिक्षणास येईल?



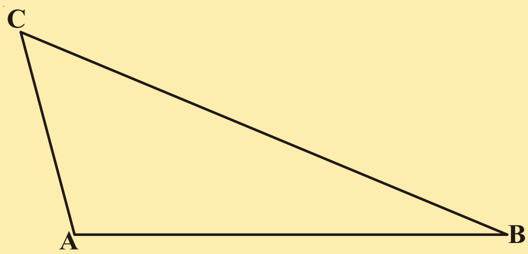
स्पष्ट पणे $\angle A'BC > \angle ABC$

CA वर आणखी काही बिंदुची खुण करणे चालु ठेवा (वाढलेली) आणि बाजु BC सोबत कोण काढा आणि बिंदुची खुण करा. तुम्हाला दिसुन येईल की जसी बाजु AC ची लांबी वाढते (Aचे वेगवेगळे स्थान घेऊन) त्याच्या विरुध्द बाजुला असलेले कोण $\angle B$ देखील वाढते.

आता चला आणखी एक कृती तुम्ही करुन पहा.

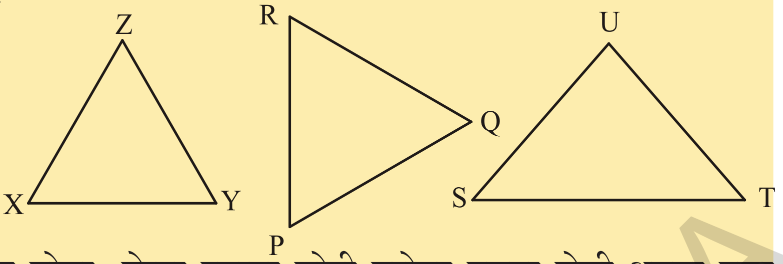
2. विषम भुज त्रिकोण ABC काढा (तो त्रिकोण ज्यामध्ये सर्व बाजुंची लांबी वेगवेगळी असते) बाजुची लांबी मोजा.

आता, कोणाचे माप मोजा, तुम्हाला काय आढळुन येईल?



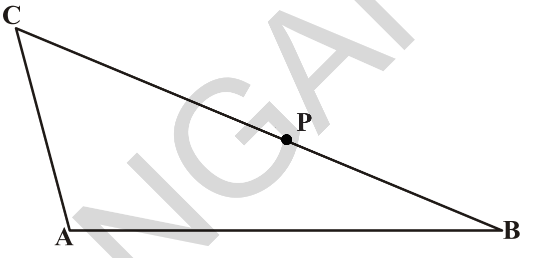
ΔABC आकृतीमध्ये BC ही सर्वात लांब बाजु आणि AC ही सर्वात लहान बाजु आहे.

देखील $\angle A$ हा सर्वात मोठा आणि $\angle B$ सर्वात लहान कोण आहे.



वरील प्रत्येक त्रिकोणातील बाजु आणि कोण मोजा. जेव्हा दुसऱ्या जोडी बरोबर तुलना केली असता एका त्रिकोणाच्या एक बाजु आणि त्याच्या विरुध्द कोण यातील संबंध काय आहे?

प्रमेय-7.6 : जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजु असमान आहेत, सर्वात लांब असलेल्या बाजुच्या विरुध्द असलेला कोण मोठा असतो.

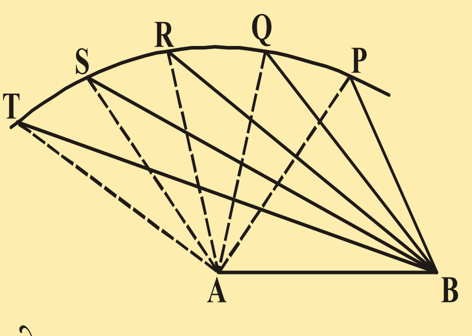


तूम्ही या प्रमेयला BC वर C बिंदु घेऊन सिध्द करु शकता अशाप्रकारे की, $CA = CP$ बाजुच्या आकृतीमध्ये दाखविले आहे.

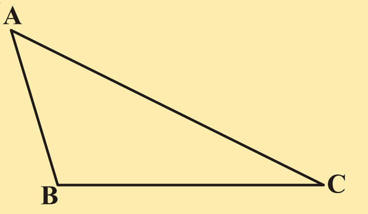
आता, दुसरी कृती करु या.

कृती

एक रेषाखंड AB काढा. A ला केंद्र बिंदु घेऊन काही व्यासाधर्नि एक चॉप काढा आणि वेगवेगळे बिंदु जसे P, Q, R, S, T त्याच्यावर खुण करा.



यातील प्रत्येक बिंदुंना A बरोबर आणि Bबरोबर देखील जोडा(आकृती पहा) निरिक्षण करा कि जेव्हा आपण P पासुन T पर्यंत चलन करतो तेव्हा $\angle A$ मोठा आणि मोठा बनत जातो. त्याच्या विरुध्द बाजुला असलेल्या बाजुस काय होत आहे? निरिक्षण करा की बाजुची लांबी देखील वाढत चालली आहे ते म्हणजे $\angle TAB > \angle SAB > \angle RAB > \angle QAB > \angle PAB$ आणि $TB > SB > RB > QB > PB$.

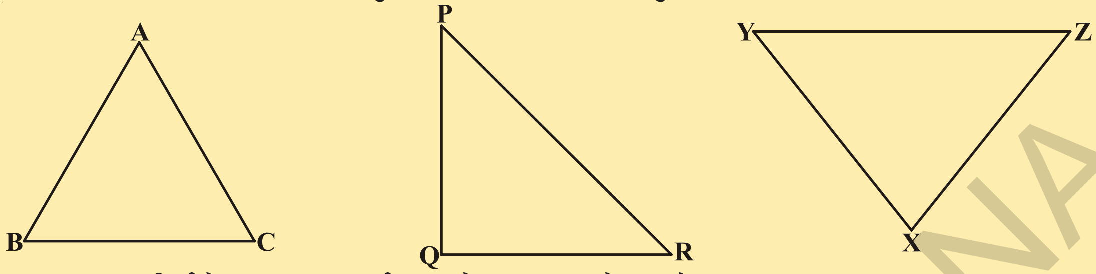


आता असमान कोन घेऊन कोणताही एक त्रिकोण काढा. बाजुची लांबी मापा(आकृती पहा)

निरिक्षण करा की, सर्वात मोठा असलेल्या कोणाच्या विरुध्द असलेली बाजु सर्वात मोठी असते आकृतीमध्ये $\angle B$ हा सर्वात मोठा कोण आहे आणि AC सर्वात मोठी बाजु आहे.

याच कृतीला आणखी काही त्रिकोणाना घेऊन पुन्हा पुन्हा करा आणि पहा की वरील प्रमेयाचा व्यत्यास देखील बरोबर आहे.

खालील दिलेल्या प्रत्येक त्रिकोणात कोन आणि बाजु मापा एका बाजुत आणि त्याच्या विरुध्द एक कोन असलेल्या प्रत्येक त्रिकोणात तुम्हाला कोणता संबंध दिसुन येईल.



अशा रितीने आपण खालील प्रमेयाजवळ पोहचलो.

प्रमेय -7.7 : कोणत्याही त्रिकोणात, सर्वांत मोठ्या कोनाची विरुध्द बाजु सर्वात लांब असते.

या प्रमेयाला नकारात्मक पध्दतीने सिध्द करता येते.

हे करा.

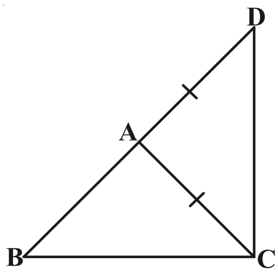
आता त्रिकोण ABC काढा आणि त्याच्या बाजु मापा. त्याच्या बाजुची बेरीज AB + BC, BC + AC आणि AC + AB, करा. याची तुलना तिसऱ्या बाजु बरोबर करा.तुम्हाला काय दिसुन येईल?

तुम्हाला दिसुन येईल की, $AB + BC > AC$,

$BC + AC > AB$ आणि $AC + AB > BC$.

दुसऱ्या त्रिकोणाबरोबर या कृतीला पुन्हा पुन्हा करा आणि यासोबत तुम्ही खालील प्रमेयावर पोहचु शकता.

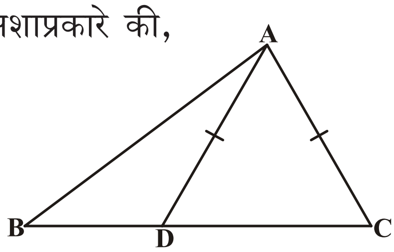
प्रमेय-7.8 : एका त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजुची बेरीज तिसऱ्या बाजु पेक्षा अधिक असते.



बाजुच्या आकृतीत, निरिक्षण करा की, ΔABC ची बाजु BA ला D बिंदु पर्यंत वाढविले आहे. अशाप्रकारे की, $AD = AC$ तुम्ही दाखवु शकता का? $\angle BCD > \angle BDC$ आणि $BA + AC > BC$? तुम्ही वरील प्रमेयाची सिध्दतेजवळ पोंहचला का?

चला आता काही उदाहरण या निकालावर आधारीत असलेले घेऊ या.

उदाहरण-15: ΔABC मध्ये च्या BC बाजुवर बिंदु D आहे. अशाप्रकारे की, $AD = AC$ (आकृती पहा) दाखवा की, $AB > AD$.



सोडवणुक: ΔDAC मध्ये

$AD = AC$ (दिले आहे)

म्हणुन $\angle ADC = \angle ACD$ (समान बाजुच्या विरुध्द बाजुचे कोन)

आता $\angle ADC$ हा बाह्य कोण ΔABD साठी आहे.

म्हणुन , $\angle ADC > \angle ABD$

किंवा, $\angle ACD > \angle ABD$

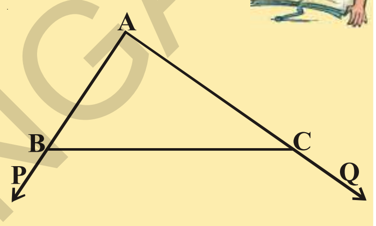
किंवा, $\angle ACB > \angle ABC$

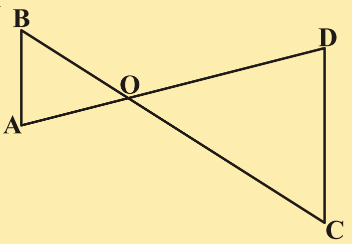
म्हणुन, $AB > AC$ (ΔABC मध्ये मोठ्या कोनाच्या विरुध्द असलेली बाजु)

किंवा, $AB > AD$ $(AD = AC)$

अभ्यास- 7.4

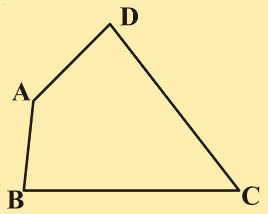
1. काटकोन त्रिकोणात दाखवा की, कर्ण ही सर्वात मोठी बाजु आहे.
2. बाजुच्या आकृती मध्ये ΔABC च्या AB आणि AC बाजु P आणि Q बिंदु पर्यंत अनुक्रमे वाढविल्या आहेत. देखील $\angle PBC < \angle QCB$. दाखवा की, $AC > AB$.

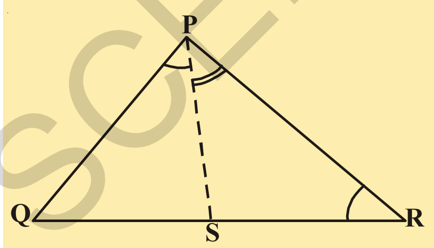




3. बाजुच्या आकृतीमध्ये $\angle B < \angle A$ आणि $\angle C < \angle D$. दाखवा की, $AD < BC$.

4. AB आणि CD अनुक्रमे सर्वात लहान आणि सर्वांत मोठ्या ABCD चौकोणाच्या बाजु आहेत (बाजुची आकृती पहा) दाखवा की, $\angle A > \angle C$ आणि $\angle B > \angle D$.





5. बाजुच्या आकृतीमध्ये $PR > PQ$ आणि $\angle QPR$ ला PS दुभाजते सिध्द करा की, $\angle PSR > \angle PSQ$.

6. जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजु 4 से.मी. आणि 6 से.मी. आहेत. तर तिसऱ्या बाजुचे शक्यतो किती मापे येतात? (धन,पुर्णांक) किती भिन्न त्रिकोण तर तिसऱ्या बाजुचे येऊ शकतात?

7. 5 से.मी.,8 से.मी. आणि 1 से.मी. मापाचे एका त्रिकोणाची रचना करण्याचा प्रयत्न करा.ते शक्य आहे किंवा नाही? कारण काय? तुमचे समाधान कारक योग्य उत्तरे द्या.

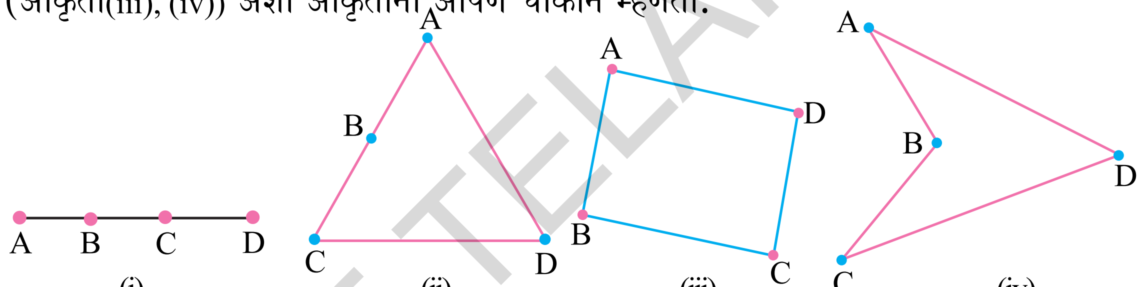
आपण काय चर्चा केलो

- आकृत्या ज्या की, सारख्या आहेत ते म्हणजे सारख्या आकार आणि रुप असणाऱ्यांना एकरुप आकृती म्हणतात.
- तिन स्वंतत्र मापनाच्या आधारे एक त्रिकोण तयार करतात.
- दोन त्रिकोण एकरुप आहेत जर एका त्रिकोणाची बाजु दुसऱ्या त्रिकोणाची सगंत बाजु समान असतील आणि दोन्ही त्रिकोणातील संगत कोन असतील.
- देखील, शिरोबिंदु मध्ये एक-एक चा संबंध असतो.
- एकरुप आकृतीत संगत भाग समान असतात. आणि आपण संक्षिप्त मध्ये 'CPCT' असे ते एकरुप त्रिकोणाच्या संगत भागासाठी लिहतो.
- ASA एकरुप नियम: दोन त्रिकोण एकरुप आहेत जर दोन कोन आणि एक समाविष्ठ बाजु एका त्रिकोणाची दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन कोन आणि एक समाविष्ठ बाजुच्या समान असते.
- SAS एकरुप नियम: दोन त्रिकोण एकरुप असतात जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजु आणि समावेश कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन बाजु आणि समाविष्ठ कोनाच्या समान असतात.
- एक समव्दीभुज त्रिकोणाच्या समान बाजुच्या विरुध्द बाजुस असलेले कोन समान असतात.
- व्यात्यास एका त्रिकोणाच्या समान कोनाच्या विरुध्द बाजुस असलेल्या बाजु समान असतात
- RHS एकरुपतेचा नियम: जर दोन काटकोन त्रिकोणात कर्ण आणि एका त्रिकोणाची एक बाजु दुसऱ्या त्रिकोणाचा कर्ण आणि संगत बाजुसी समान असतील तर, दोन त्रिकोण एकरुप असतात.
- SSS एकरुप नियम: जर एक त्रिकोणाच्या तिन बाजु दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तिन बाजुशी समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरुप होतात.
- जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजु असमान असतील तर लांब बाजुच्या विरुध्द बाजुस असलेला कोन देखील अधिक असतो.
- कोणत्याही त्रिकोणात आधिक कोनाच्या विरुध्द बाजुस असलेली बाजु देखील मोठी असते.
- एका त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजुची बेरीज तिसऱ्या बाजु पेक्षा अधिक असते.
- रेषा, रेषाखंड आणि किरण दर्शवणे $\overline{LM}$ रेषाखंड LM रेषाखंड LM ची लांबी $\overrightarrow{LM}$ किरण LM ; $\overleftrightarrow{LM}$ रेषा LM

08 चौकोन

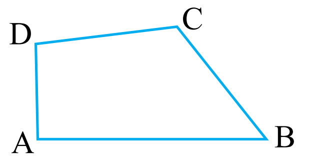
8.1 प्रस्तावना

अगोदरच्या धड्यामध्ये तुम्ही त्रिकोणाचे बरेचश्या गुणधर्म आणि त्यांची सिध्दता विषयी शिकलात. तीन एकरेषीय नसलेल्या बिंदुना जोडण्याची बंदीस्त आकृती म्हणजे त्रिकोण होय हे तुम्हाला माहितच आहे. प्रतला वरील चार बिंदु पासुन कोणती आकृती मिळते तुम्हाला माहित आहे का? जर सर्व बिंदु एकरेषीय असेल तर आपल्याला रेषाखंड मिळते (आकृती (i))जर चार पैकी तिन बिंदु एकरेषीय असेल तर आपल्याला त्रिकोण मिळते (आकृती(ii)) आणि जर कोणतेही तीन बिंदु एकरेषीय नसेल तर आपल्याला चार बाजुंनी बंदीस्त असलेली आकृती मिळते (आकृती(iii), (iv)) अशा आकृतीना आपण चौकोन म्हणतो.



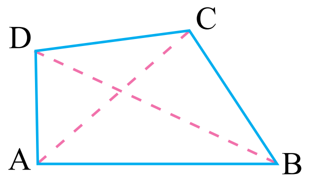
(i) (ii) (iii) (iv)

तुम्ही सहजरित्या बरेचसे चौकोन काढु शकता आणि तुमच्या सभोवती असलेल्या बरेचश्या चौकोना सारख्या आकारांना ओळखु शकता एका महत्वाच्या अंशाने आकृती iii) आणि (iv) मध्ये वेगवेगळ्या चौकोन तयार झाले. ते कसे वेगळे आहेत?



या धड्यात आपण चौकोनाच्या फक्त आकृती(iii) मध्ये दाखविलेल्याचा अभ्यास करणार आहोत. या बर्हीगल चौकोन आहेत.

चौकोन हा प्रतलातील चार रेषांनी बनेलेली साधी बंदीस्त आकृती होय.



चौकोन ABCD ला AB, BC, CD आणि DA या दोन बाजु आहेत A, B, C आणि D चार शिरोबिंदु आहेत. $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ आणि $\angle D$ हे शिरोबिंदु येथे तयार झालेले चार कोन आहेत.

जेव्हा आपण विरुध्द शिरोबिंदु (A, C) आणि(B, D) जोडतो चौकोन ABCD चे AC आणि BD हे दोन कर्ण आहेत.

8.2 चौकोनाचे गुणधर्म

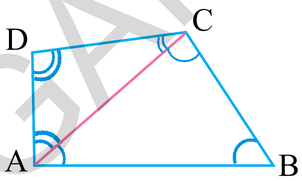
चौकोनाच्या आत मध्ये चार कोन असतात. या चार कोनांची बेरीज आपण माहित करु शकतो का? त्रिकोणाच्या कोनाच्या बेरजेचा गुणधर्माची आठवण करु या. या गुणमर्धाचा वापर करुन आपण चौकोनाच्या चार अंतर कोनाची बेरीज माहित करु शकतो.

ABCD हा चौकोन आहे आणि AC हा कर्ण आहे (आकृती पहा)

ΔABC च्या तिन कोनाची बेरीज आपल्याला माहित आहे.

$\angle BAC + \angle B + \angle ACB = 180^o$ ...(1) (त्रिकोणाच्या कोनाच्या बेरजेचा गुणधर्म)

याच प्रमाणे ΔADC मध्ये



$$\angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^o \quad ...(2)$$

(1) आणि (2) ची बेरीज करुन

$$\angle BAC + \angle B + \angle BCA \quad + \angle CAD + \angle D + \angle DCA = 180^o + 180^o$$

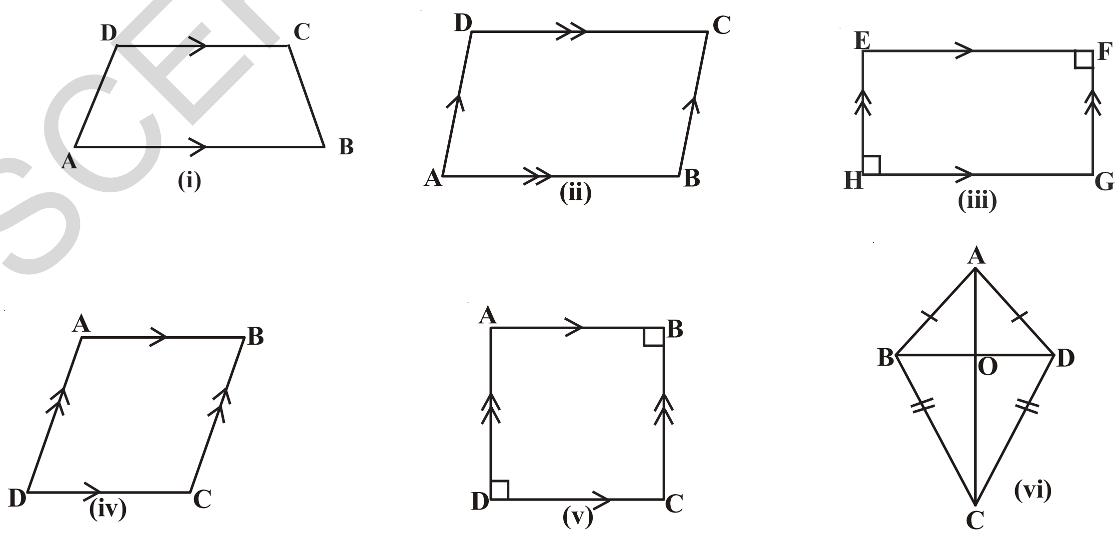
पहा $\angle BAC + \angle CAD = \angle A$ आणि $\angle ACB + \angle DCA = \angle C$

म्हणुन $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$

म्हणजेच चौकोनाच्या चार कोनांची बेरीज 360^o असते किंवा 4 काटकोन असतात.

8.3 चौकोनाचे वेगवेगळे प्रकार

खाली काढलेल्या चौकोनाकडे पहा आपण या पैकी बरेचशे पाहिलेले आहे. यांना आपण लवकर विचारात घेऊ आणि त्यांच्या गुणधर्माच्या आधारावर त्यांच्या विशिष्ट नावाची आठवण करु.



आपण निरिक्षण केलो.

- आकृती (i) मध्ये चौकोनABCD च्या विरुध्द बाजुची एक जोडी AB आणि DC एकमेकांला समांतर आहे. अशा चौकोनांना समलंब चौकोन असे म्हणतात.
  जर समलंब चौकोनाची असमांतर बाजु समान असेल तर त्या समलंब चौकोनाचे समव्दिभुज समलंब चौकोन असे म्हणतात
- आकृती (ii) मध्ये चौकोनाच्या विरुध्द बाजुच्या दोन्ही जोड्या समांतर आहेत. अशा चौकोनाला समांतरभुज चौकोन म्हणतात. आकृती(iii), (iv) आणि (v) सुध्दा समांतर भुज चौकोन आहेत.
- आकृती (iii) मध्ये, समांतर भुज चौकोन EFGH चे चारही कोन काटकोन आहेत. ते आयत आहे.
- आकृती (iv) मध्ये,समांतर भुज चौकोनाच्या लगतच्या बाजु समान आहेत आणि याला समभुज चौकोन म्हणतात.
- आकृती (v) मध्ये समांतर भुज चौकोनाच्या लगतच्या बाजु समान आहेत आणि त्याचा प्रत्येक कोन $90°$ आहे. याला चौरस म्हणतात.
- आकृती(vi) मध्ये चौकोन ABCD मध्ये लगतच्या बाजुच्या दोन जोड्या समान आहेत म्हणजेच $AB = AD$ आणि $BC = CD$. याला पतंग म्हणतात.

निशा काय म्हणता आहे, विचारात घेऊ

समभुज चौकोन हे चौरस होऊ शकते पण सर्व चौरस हे समभुज चौकोन होत नाही.

ललीता आणखी काही अंश त्यात मिळवली

सर्व आयत समांतर भुज चौकोन असतात पण सर्व समांतर भुज चौकोन आयत होत नाहीत कोणत्या विधानाला तुम्ही मान्य करता?

तुमच्या उत्तरासाठी कारण द्या. चौकोनाच्या वेगवेगळ्या प्रकारा विषयी अशे इतर विधान लिहा.

सोडविलेली उदाहरणे

उदाहरण-1: ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे आणि $\angle A = 60^o$ तर इतर कोन माहित करा.

सोडवणुक: समांतरभुज चौकोनाचे विरुध्द कोन समान असतात.

म्हणुन ABCD समांतर भुज चौकोन आहे.

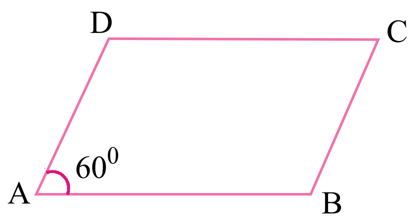
$\angle C = \angle A = 60^o$ आणि $\angle B = \angle D$

आणि समांतरभुज चौकोनाच्या एका पाठीमागुन एक येणाऱ्या कोनांची बेरीज 180^o म्हणुन $\angle A$ आणि $\angle B$ हे एका पाठीमागुन एक येणारे कोन आहेत.

$\angle D = \angle B = 180^o - \angle A$

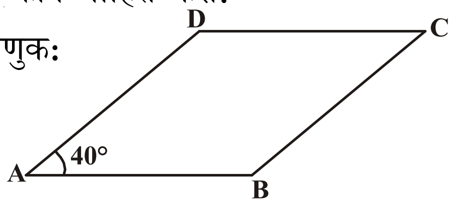
$= 180^o - 60^o = 120^o$.

अशा प्रकारे इतर कोन 120^o, 60^o, 120^o.



उदाहरण-2: ABCD समांतरभुज चौकोनामध्ये, $\angle DAB = 40^o$ तर समांतरभुज चौकोनाचे इतर कोन माहित करा.

सोडवणुक:



ABCD हा समांतर भुज चौकोन

$\angle DAB = \angle BCD = 40°$ आणि $AD \parallel BC$

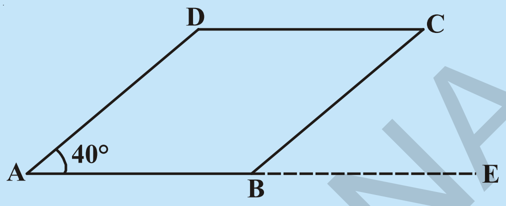
एका पाठीमागुन एक येणाऱ्या कोनाची बेरीज

$\angle CBA + \angle DAB = 180°$

$\therefore \angle CBA = 180 - 40°$

$= 140°$

प्रयत्न करा



AB ला E पर्यंत वाढवा. $\angle CBE$ माहित करा. तुमच्या काय लक्षात आले? $\angle ABC$ आणि $\angle CBE$ हे कोणत्या प्रकारचे कोन आहे?

हे माहित झाल्यामुळे आपण माहित करु शकतो $\angle ADC = 140°$ आणि $\angle BCD = 40°$

उदाहरण3: समांतरभुज चौकोनाच्या दोन लगतच्या बाजु 4.5 से.मी. आणि 3 से.मी. आहेत. तर त्याची परिमीती माहित करा.

सोडवणुक: समांतर भुज चौकोनाची विरुध्द बाजु समान असते. इतर दोन बाजु 4.5 से.मी. आणि 3 से.मी. आहेत.

म्हुणन परिमीती $= 4.5 + 3 + 4.5 + 3 = 15$ से.मी.

उदाहरण-4: समांतर भुज चौकोनABCD मध्ये, एका पाठीमागुन एक येणारे कोन $\angle A$ आणि $\angle B$ चे कोनदुभाजक P येथे छेदतात. तर सिध्द करा. $\angle APB = 90^o$.

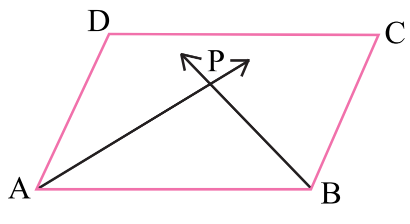
सोडवणुक: ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. $\overrightarrow{AP}$ आणि $\overrightarrow{BP}$ हे एका पाठीमागुन एक येणाऱ्या $\angle A$ आणि $\angle B$ कोन दुभाजक आहेत.

समांतर भुज चौकोनाच्या एका पाठीमागुन एक येणाऱ्या कोनाची बेरीज पुरक असते.

$\angle A + \angle B = 180^o$

$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180}{2}$

$\Rightarrow \angle PAB + \angle PBA = 90^o$



Δ APB मध्ये

$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^o$ (त्रिकोणाच्या कोनाच्या बेरजेच्या गुणधर्म)

$\angle APB = 180^0 - (\angle PAB + \angle PBA)$

$= 180^o - 90^o$

$= 90^o$

असे सिध्द होते.

अभ्यास - 8.1

1. विधाने सत्य आहेत की असत्य ते सांगा.
   - (i) प्रत्येंक समांतरभुज चौकोन हा समलंब चौकोन असतो. ( )
   - (ii) सर्व समांतरभुज हे चौकोन असतात. ( )
   - (iii) सर्व समलंब चौकोन हे समांतर भुज चौकोन असतात. ( )
   - (iv) चौरस हा समभुज चौकोन आहे. ( )
   - (v) प्रत्येक समभुज चौकोन हा चौरस आहे ( )
   - (vi) सर्व समांतरभुज चौकोन आयत आहेत. ( )
2. जर त्या चौकानाला तो गुणधर्म लागु होत असेल तर (होय) आणि लागु होत नसेल तर (नाही) लिहत हा खालील तक्ता पुर्ण करा.

गुणधर्म	समलंब चौ.	समांतरभुज चौ.	समभुज चौ.	आयत	चौरस
a. विरुध्द बाजुंची फक्त एक जोडी समांतर असते	होय				
b. विरुध्द बाजुच्या दोन जोड्या समांतर असतात					
c. विरुध्द बाजु समान असतात.					
d. विरुध्द कोन समान असतात.					
e. एका पाठीमागुन एक येणारे कोन पुरक असतात.					
f. कर्ण एकमेकांचे दुभाजक असतात.					
g. कर्ण समान असतात					
h. सर्व बाजु समान असतात.					
i. प्रत्येक कोन काटकोन असते.					
j. कर्ण एकमेकांचे लंब असतात.					

3. ABCD समलंब चौकोनामध्ये $AB \parallel CD$ आहे. जर $AD = BC$ तर दखावा $\angle A = \angle B$ आणि $\angle C = \angle D$
4. चौकोनाचे चार कोन 1:2:3:4 या गुणोत्तरात आहेत. चौकोनाचा प्रत्येक कोन माहित करा.
5. आयत ABCD चे AC हा कर्ण आहे. ΔACD चे कोन माहित करा. कारणे द्या.

8.4 समांतरभुज चौकोन आणि त्याचे गुणधर्म

समांतरभुज हे चौकोन आहे हे आपण पाहिले अहोत. समांतर भुज चौकोनाचे गुणधर्म विचारात घेऊ.

हे करा

समांतरभुज चौकोनाच्या आकाराचा एक कागद कापुन घ्या. पुन्हा त्याच्या कर्णाविरुन त्याला कापा. तुम्हाला कोणत्या प्रकाराच्या आकार मिळेल? या त्रिकोणाच्या बाबतीत तुम्ही काय म्हणुन शकाल?

एका त्रिकोण दुसऱ्या वर ठेवा. प्रत्येक बाजु दुसऱ्या वर अगदी बरोबर बसु शकेल का? जुळत्या बाजु कडे त्रिकोण फिरवण्याची गरज तुम्हाला आहे. आता, दोन्ही त्रिकोण अगदी बरोबर जुळालेत. ते एकमेकांचे एकरुप आहेत.

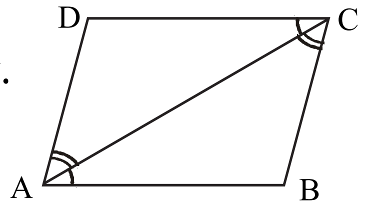
आणखी काही समांतरभुज चौकोनासाठी हे करा. कर्णाविरुन कापण्यासाठी तुम्ही कोणताही कर्ण निवडु शकता.

समांतरभुज चौकोनाला प्रत्येक कर्ण दोन एकरुप त्रिकोणात विभागतो. हे आपण पाहतो.

आता चला सिध्द करु या.

प्रमेय-8.1 : समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण त्याला दोन एकरुप त्रिकोणात विभागतो.

सिध्दता: ABCD समांतरभुज चौकोन विचारात घेऊ



A आणि C जोडा.समांतरभुज चौकोनाचा AC हा कर्ण आहे.

$AB \parallel DC$ आणि AC हा छेदिका आहे.

$\angle DCA = \angle CAB$ (अंतर व्युत्क्रम कोन)

याच प्रमाणे $DA \parallel CB$ आणि AC हा छेदिका आहे. म्हणुन $\angle DAC = \angle BCA$.

ΔACD आणि ΔCAB मध्ये

$\angle DCA = \angle CAB$ आणि $\angle DAC = \angle BCA$

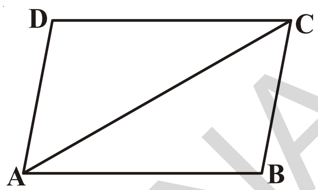
$AC = CA$ सुध्दा (सामाईक़ बाजु)

म्हणुन $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

याचा अर्थ, को.बा.को. नियमाने (कोन, बाजु, कोन) दोन त्रिकोण एकरुप आहेत. याचा अर्थ, कर्ण AC समांतरभुज चौकोनाला दोन एकरुप त्रिकोणात विभागत आहे.

प्रमेय-8.2 : समांतरभुज चौकोनात विरुध्द बाजु समान असतात.

सिध्दता: समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण त्याला दोन एकरुप त्रिकोणात विभागतो हे आपण अगोदरच सिध्द केलेले आहे.



या प्रकारे आकृती मध्ये $\Delta ACD \cong \Delta CAB$

म्हणुन $AB = DC$ आणि $\angle CBA = \angle ADC$

$AD = BC$ आणि $\angle DAC = \angle ACB$ सुध्दा

$\angle CAB = \angle DCA$

$\therefore \angle ACB + \angle DCA = \angle DAC + \angle CAB$

म्हणजेच $\angle DCB = \angle DAB$

या प्रकारे समांतरभुज चौकोनामध्ये

i. विरुध्द बाजु समान असतात.

ii. विरुध्द कोन समान असतात.

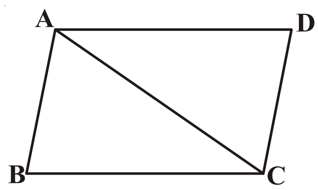
बहींगोल चौकोनाचे विरुध्द बाजु समांतर असले तरी आपण विरुध्द बाजु आणि विरुध्द कोन समान आहेत म्हणुन दाखवत आहे याची नोंद करा.

आता आपण सिध्दतेचा व्यत्यास दाखवण्याचा प्रयत्न करु म्हणुजेच चौकोनाच्या विरुध्द बाजु समान असेल तर तो चौकोन समांतरभुज चौकोन असतो.

प्रमेय-8.3 : चौकोनाच्या विरुध्द बाजुची प्रत्येक जोडी समान असेल तर ती समांतरभुज चौकोन असते.

सिध्दता: चौकोन ABCD विचारात घेऊ, $AB = DC$ आणि $BC = AD$.

कर्ण AC काढा



ΔABC आणि ΔCDA विचारात घेऊ

$BC = AD$, $AB = DC$ आणि $AC = CA$ (सामाईक बाजु)

म्हणुन $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (का ?)

म्हणुन $\angle BCA = \angle DAC$, AC हे छेदीका आहे.

किंवा $AB \parallel DC$ ...(1)

$\angle ACD = \angle CAB$, CA हे छेदीका आहे.

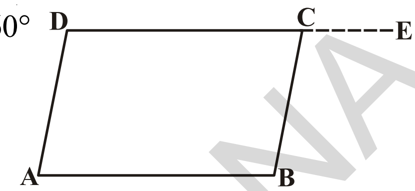
$BC \parallel AD$ ...(2)

म्हणुन(1) अणि (2) वरुन ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

तुम्ही आताच पाहिले की समांतरभुज चौकोनाच्या विरुध्द बाजुच्या दोन्ही जोड्या समान असतात आणि व्यत्यास जर चौकोनाच्या विरुध्द बाजुंच्या दोन्ही जोड्या समान असेल तर ते चौकोन समांतरभुज भुज चौकोन असते. अशाच प्रकारे एका चौकानाच्या विरुध्द कोनांच्या जोड्या समान असेत तर ते समांतरभुज चौकोन होते म्हणुन तुम्ही सिध्द करु शकता का?

प्रमेय-8.4 : चौकोनामध्ये विरुध्द कोनांची प्रत्येक जोडी समान असेल तर ते समांतरभुज चौकोन असते.

सिध्दता: ABCD चौकोनामध्ये $\angle A = \angle C$ आणि $\angle B = \angle D$ तर सिध्द करा की, ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.



आपल्याला माहित आहे. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \frac{360°}{2}$$

म्हणजेच $\angle A + \angle B = 180°$

DC ला E पर्यंत वाढवा

$\angle BCA + \angle BCE = 180°$ म्हणुन $\angle BCE = \angle ADC$

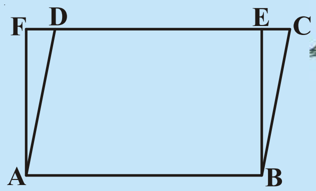
जर $\angle BCE = \angle ADC$ जर $AD \parallel BC$ (का?)

DC हा छेदीका आहे.

याप्रकारे आपण दाखवु शकतो की, $AB \parallel DC$ किंवा ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

अभ्यास- 8.2

1. बाजुच्या आकृती मध्ये ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.ABEF हा आयत आहे तर दाखवा $\Delta AFD \cong \Delta BEC$.



2. समभुज चौकोनाचा कर्ण त्याला चार एकरुप त्रिकोणात विभागतो. हे सिध्द करा.
3. ABCD चौकोनामध्ये $\angle C$ आणि $\angle D$ चे दुभाजक O येथे छेदतात. सिध्द करा $\angle COD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

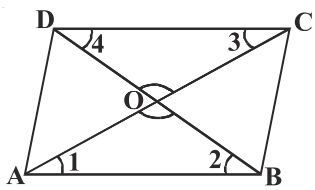
8.5 समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण

प्रमेय-8.5 : समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांला दुभागतात.

सिध्दता: समांतरभुज चौकोन ABCD काढा.

त्याचे AC आणि BD दोन्ही कर्ण काढा ते बिंदु 'O' येथे छेदतात.

ΔOAB आणि ΔOCD मध्ये



तयार झालेल्या कोनांना $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ म्हणुन खुण करा.

$\angle 1 = \angle 3$ ($AB \parallel CD$ आणि AC ही छेदीका आहे.)

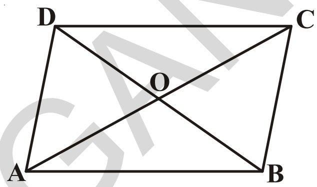
$\angle 2 = \angle 4$ (का) (अंतर व्युत्क्रम कोन)

आणि AB = CD (समांतरभुज चौकोनाचा विरुध्द बाजु)
को.बा.को. नियम
$\Delta OCD \cong \Delta OAB$
CO= OA, DO = OB किंवा कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

म्हणुन जर व्यत्यास सुध्दा खरे असेल याची आपण तपासणी करु. व्यत्यास जर चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना दुभागत असेल तर ते समांतरभुज चौकोन असते.

प्रमेय-8.6 : चौकोनाचे कर्ण जर एकमेकांना दुभागत असेल तर ते समांतरभुज चौकोन असते.

सिध्दता: ABCD हा चौकोन आहे.
AC आणि BD कर्ण 'O' येथे छेदतात.
OA = OC आणि OB = OD
ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.



(सुचना : ΔAOB आणि ΔCOD विचारात घेऊ, हे त्रिकोण एकरुप आहेत का? होत असेल तर ΔBCD कसा समांतर भुज चौकोण असेल)

8.5.1 आणखी काही भुमीतीय विधाने

आता पर्यंत आपण सिध्द केलेले आणि उदारहणे एका आकृतीला (समांतरभुज चौकोन) आधारावर काही विधान मिळविण्यात आले. याच्या मापाच्या आधारे प्रत्येक वेळेस सिध्द करण्याची गरज नाही आहे. ते शास्त्रीय दृष्टीने सिध्द झाले. सर्व संदर्भात सत्य विधान म्हणुन सिध्द झाले.

तर मुळ प्रमेय वरुन जेव्हांच्या तेव्हा नविन पुन्हा नविन आधार देऊन सिध्द करतो याला उपप्रमेय म्हणतात. एक सिध्द झालेल्या प्रमेयावरुन सत्य म्हणुन समजले की, विधानाला उपप्रमेय म्हणुन समजु शकतो.

उपप्रमेय-1 : आयताचा प्रत्येक कोन हा काटकोन असतो. हे सिध्द करा.

सोडवणुक: आयत हे समांतरभुज चौकोन आहे आणि एक कोन काटकोन आहे.

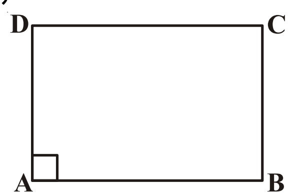
दिलेले: ABCD हा आयत आहे. समजा एक कोन $\angle A = 90^o$

आपल्याला सिध्द करायचे आहे $\angle B = \angle C = \angle D = 90^o$

सिध्दता: ज्या अर्थी ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

या प्रकारे $AD \parallel BC$ आणि AB ही छेदीका आहे.

म्हणुन $\angle A + \angle B = 180^o$ (छेदिकाच्या एका बाजुला असलेले आतील कोन)



म्हणुन $\angle A = 90^o$ (दिलेले आहे)

$\therefore \angle B = 180^o - \angle A$
$= 180^o - 90^o = 90^o$

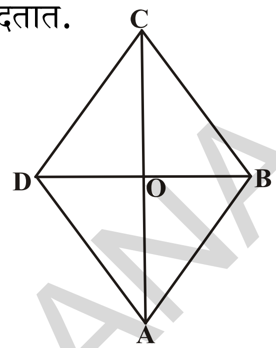
आता $\angle C = \angle A$ आणि $\angle D = \angle B$ (समांतरभुज चौकोनाचे विरुध्द कोन)

म्हणुन $\angle C = 90^o$ आणि $\angle D = 90^o$.

म्हणुन आयताचा प्रत्येक कोन काटकोन आहे.

उपप्रमेय-2 : समभुज चौकोंनाचे कर्ण एकमेकांला लंब असतात. हे सिध्द करा.
सिध्दता: समभुज चौकोन हा सर्व बाजु समान असलेला समांतरभुज चौकोन आहे.

ABCD हा समभुज चौकोन आहे,AC आणि BD कर्ण O येथे छेदतात.



AC हा BD वर लंब आहे हे आपल्याला दाखवयाचे आहे.

ΔAOB आणि ΔBOC विचारात घेऊ

$OA = OC$ (समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकाला दुभागतात)

$OB = OB$ (ΔAOB आणि ΔBOCची सामाईक बाजु)

$AB = BC$ (समभुज चौकोनाचे बाजु)

म्हणुन $\Delta AOB \cong \Delta BOC$ (बा.बा.बा. चा नियम)

म्हणुन $\angle AOB = \angle BOC$

परंतु $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ (रेषीय जोडी)

म्हुणन $2\angle AOB = 180^\circ$

किंवा $\angle AOB = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

याच प्रमाणे $\angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^\circ$ (सारखे कोन)

म्हणुन AC हा BD वर लंब आहे.

म्हणुन, समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांला लंब असतात.

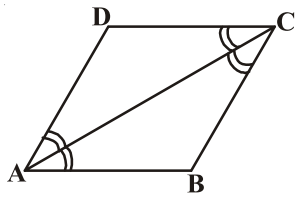
उपप्रमेय-3 : ABCD समांतरभुज चौकोना मध्ये, जर कर्ण AC कोन A ला दुभागत असेल तर ABCD हा समभुज चौकोन आहे.

सिध्दता: ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

म्हणुन $AB \parallel DC$. $\angle A$ आणि $\angle C$ ला AC ही छेदिका छेदते.

म्हणुन $\angle BAC = \angle DCA$ (अंतर व्युत्क्रम कोन) ...(1)

$\angle BCA = \angle DAC$ ...(2)



पण AC हा $\angle A$ ला दुभागते म्हणुन दिलेले आहे.

म्हणुन $\angle BAC = \angle DAC$

$\therefore$ $\angle DCA = \angle DAC$ ...(3)

या प्रकारे AC , $\angle C$ ला सुध्दा दुभागते.

(1), (2) आणि (3) वरुन

$\angle BAC = \angle BCA$

ΔABC मध्ये $\angle BAC = \angle BCA$ चा अर्थ $BC = AB$ (समद्विभुज त्रिकोण)

परंतु $AB = DC$ आणि $BC = AD$ (ABCD समांतरभुज चौकोनाचे विरुध्द बाजु)

$\therefore \; AB = BC = CD = DA$

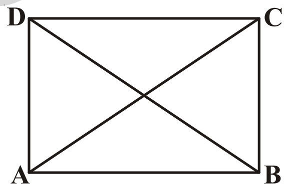
म्हणुन ABCD हा समभुज चौकोन आहे.

उपप्रमेय-4 : आयताचे कर्ण समान लांबीचे असतात ते दाखवा.

सिध्दता : ABCD हा आयत आहे. AC आणि BD त्याचे कर्ण आहेत.

$AC = BD$ हे आपल्याला सिध्द करायचे आहे.

ABCD हा एक आयत आहे. म्हणजे चारही कोन काटकोन असलेला ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.



ΔABC आणि ΔBAD विचारात घेऊ.

$AB = BA$ (सामाईक)

$\angle B = \angle A = 90^o$ (आयताचा प्रत्येक कोन)

$BC = AD$ (आयताचे विरुध्द बाजु)

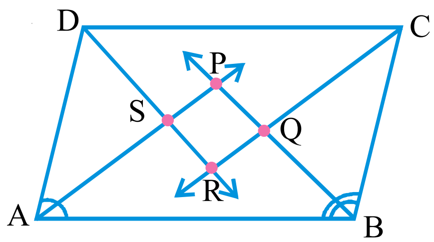
म्हुणन $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (बा.को.बा. नियम)

$AC = BD$

किंवा आयताचे कर्ण समान असतात.

उपप्रमेय-5 : समांतरभुज चौकोनाच्या कोन दुभाजका नी एक आयत बनतो. हे सिध्द करा.

सिध्दता: ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ आणि $\angle D$ चे कोनदुभाजक P, Q, R, S येथे छेदत आहे. तेथे एक चौकोन तयार होते (आकृती पहा)



ज्या अर्थी ABCD हा समांतरभुज चौकोन असल्यानेAD || BC जर AB ला छेदिका त्याना छेदत असेल तर$\angle BAD + \angle ABC = 180^o$(समांतरभुज चौकोनाचे एका पाठीमागुन एक येणारे कोन)

आपल्याला माहित आहे. $\angle BAP = \frac{1}{2} \angle BAD$ आणि $\angle ABP = \frac{1}{2} \angle CBA$ [ज्या अर्थी $\angle A$ आणि $\angle B$ चे कोन दुभाजक अनुक्रमे AP आणि BP आहेत]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2} \times 180^o$$

किंवा $\angle BAP + \angle ABP = 90^o \quad ...(1)$

परंतु ΔAPB मध्ये

$$\angle BAP + \angle APB + \angle ABP = 180^\circ \text{ (त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेच्या गुणधर्म)}$$

म्हणुन $\angle APB = 180^\circ - (\angle BAP + \angle ABP)$

$\Rightarrow \angle APB = 180^\circ - 90^\circ$ ((1)वरुन)

$= 90^\circ$

आपण पाहु शकतो $\angle SPQ = \angle APB = 90^\circ$

या प्रमाणे आपण दाखवु शकतो की, $\angle CRD = \angle QRS = 90^\circ$ (सारखे कोन)

परंतु $\angle BQC = \angle PQR$ आणि $\angle DSA = \angle PSR$ (का ?)

$\therefore \angle PQR = \angle QRS = \angle PSR = \angle SPQ = 90^\circ$

म्हणुन PQRS चे सर्व कोन सारखे म्हणजेच 90° आहेत.

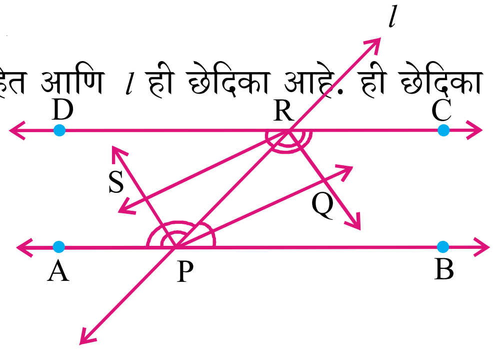
त्यामुळे आपण PQRS ला आयत म्हणु शकतो.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

1. चौरसाचे कर्ण समान असतात आणि ते एकमेकांचे लंब दुभाजक असतात.
2. समभुज चौकोनाचे कर्ण त्याला चार एकरुप त्रिकोणात विभागतो.

काही सोडवलेली उदारहणे

उदाहरण-5: $\overleftrightarrow{AB}$ आणि $\overleftrightarrow{DC}$ हे दोन समांतर रेषा आहेत आणि l ही छेदिका आहे. ही छेदिका $\overleftrightarrow{AB}$ ला P येथे आणि $\overleftrightarrow{DC}$ ला R येथे छेदते. आतील कोनांच्या कोनदुभाजकांनी एका आयत तयार होतो. हे सिध्द करा.



सिध्दता : $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, l ही छेदिका $\overleftrightarrow{AB}$ ला P येथे आणि $\overleftrightarrow{DC}$ ला R येथे छेदते.

समजा $\angle RPB$, $\angle CRP$, $\angle DRP$ आणि $\angle APR$ चे कोन दुभाजक अनुक्रमे $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{RS}$ आणि $\overrightarrow{PS}$ हे दुभाजक आहेत.

$\angle BPR = \angle DRP$ (अंतर व्युत्क्रम कोन) ...(1)

परंतु $\angle RPQ = \frac{1}{2}\angle BPR$ ($\because$ $\overrightarrow{PQ}$ हा $\angle BPR$ चा दुभाजक आहे)

तसेच $\angle PRS = \frac{1}{2}\angle DRP$ ($\because$ $\overrightarrow{RS}$ हा $\angle DPR$ हा दुभाजक आहे.) ...(2)

(1) आणि (2) वरुन

$\angle RPQ = \angle PRS$

$\overrightarrow{PQ}$ आणि $\overrightarrow{RS}$ मधील $\overline{PR}$ ने ह्या अंतरव्युत्क्रम कोन तयार होतात.

$\therefore \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$

याच प्रमाणे

$\angle PRQ = \angle RPS$, म्हणुन $\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{RQ}$

म्हणुन PQRS हे समांतरभुज चौकोन आहे. ... (3)

आपणास $\angle BPR + \angle CRP = 180^o$ ($\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ मधील l ची छेदीकाच्या सारख्या बाजुवरील अंतरव्युत्क्रम कोन)

$$\frac{1}{2}\angle BPR + \frac{1}{2}\angle CRP = 90^o$$

$$\Rightarrow \angle RPQ + \angle PRQ = 90^o$$

पण Δ PQR मध्ये

$\angle RPQ + \angle PQR + \angle PRQ = 180^o$ (त्रिकोणाचे तीन कोन)

$\angle PQR = 180^o - (\angle RPQ + \angle PRQ)$

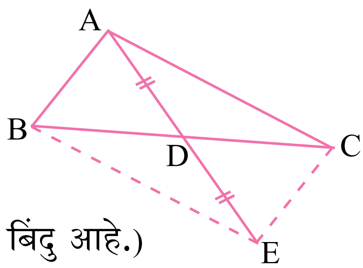
$= 180^o - 90^o = 90^o$ ... (4)

(3)आणि(4) वरुन

PQRS हा काटकोन असलेला समांतरभुज चौकोन आहे.

म्हणुन PQRS हा आयत आहे.

उदाहरण-6: त्रिकोण ABC मध्ये, बाजु BC वर AD मध्यगा ही E पर्यंत अशी वाढलेली आहे की, AD = ED ,ABEC हा समांतरभुज चौकोन आहे सिध्द करा.



सिध्दता: Δ ABC ची AD ही मध्यगा आहे.

AD = ED होईल असा AD ला E पर्यंत वाढवा.

BE आणि CE जोडा

आता Δ^s ABD आणि ECD मध्ये

BD = DC (D हा BC चा मध्य बिंदु आहे.)

$\angle ADB = \angle EDC$ (विरुध्द शिरों कोन)

AD = ED (दिलेले)

म्हणुन $\Delta ABD \cong \Delta ECD$ (बा.को.बा.नियम)

म्हणुन AB = CE (एकरुप त्रिकोणाचे संगत बाजु)

तसेच $\angle ABD = \angle ECD$

$\overleftrightarrow{AB}$ आणि $\overleftrightarrow{CE}$ रेषाची छेदीका $\overline{BC}$ ने अंतर व्युत्क्रम कोन तयार होतो.

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$

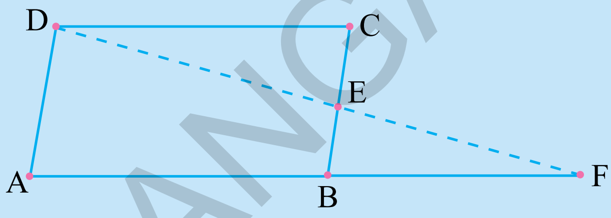
या प्रकारे ABEC चौकोना मध्ये

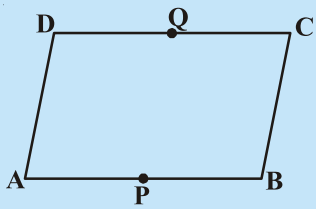
AB || CE आणि AB = CE

म्हणुन ABEC हा समांतरभुज चौकोन आहे.

अभ्यास - 8.3

1. $(3x - 2)^o$ आणि $(x + 48)^o$ हे समांतरभुज चौकोनाचे विरुध्द कोन आहेत. तर समांतरभुज चौकोनाचा प्रत्येक कोन माहित करा.
2. जर समांतरभुज चौकोनाचा एक कोन त्याच्या सर्वात लहान कोनाच्या दुप्पटी पेक्षा 24^o ने कमी असेल तर त्या समांतरभुज चौकोनाचे सर्व कोन माहित करा.
3. बाजुच्या आकृतीत ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे आणि बाजु BC चा E हा मध्य बिंदु आहे. जर DE आणि AB वाढवली आणि ते F येथे भेटल्या. तर दाखवा AF = 2AB.

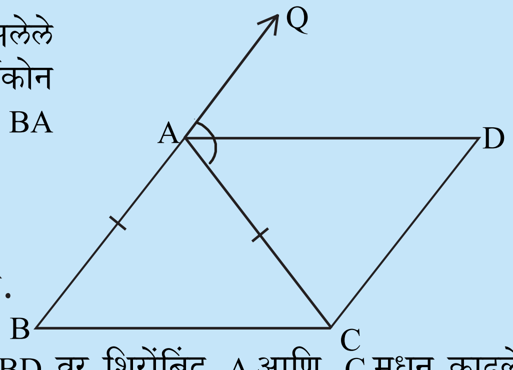




4. बाजुच्या आकृतीत ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. बाजु AB आणि DC चे मध्यबिंदु अनुक्रमे P, Q आहेत. तर PBCQ हे सुध्दा समांतरभुज चौकोन आहे हे सिध्द करा.
5. आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे AB = AC असलेले ABC हा समद्विभुज त्रिकोण आहे. बर्हीकोन QAC ला AD हा दुभागत आहे आणि CD || BA सिध्द करा

   (i) $\angle DAC = \angle BCA$

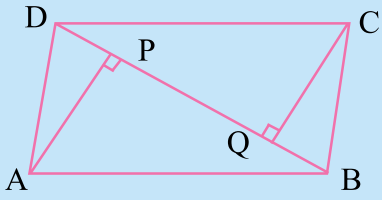
   (ii) ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.



6. ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. कर्ण BD वर शिरोंबिंदु A आणि C मधुन काढलेले APअणि CQ हे लंब आहेत(आकृती पहा) सिध्द करा.

   (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

   (ii) AP = C Q



7. Δ^s ABC आणि DEF मध्ये AB = DE; BC = EF आणि BC || EF शिरोबिदु A, B आणि C हे शिरोबिंदु

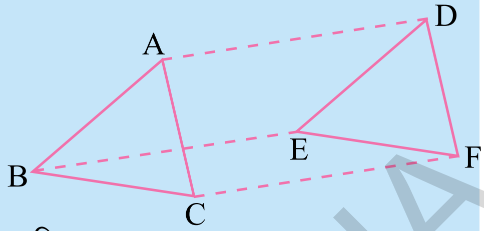
अनुक्रमे D, E आणि F शी जोडल्या गेंले (आकृती पहा) सिध्द करा.

(i) ABED हा समांतरभुज चौकोन आहे.

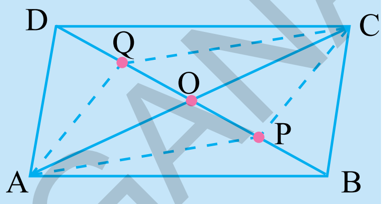
(ii) BCFE हा समांतरभुज चौकोन आहे.

(iii) AC = DF

(iv) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



8. ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे. कर्ण AC आणि कर्ण BD, O येथे छेदत आहेत. कर्ण BD चे P आणि Q हे त्रिछेदन बिंदु आहेत. सिध्द करा. CQ || AP आणि तसेच AC हा PQ चा दुभाजक आहे. (आकृती पहा)



9. ABCD हा चौरस आहे.AB, BC, CD आणि DA चे मध्यबिंदु अनुक्रमे E, F, G आणि H हे असे आहेत की, AE = BF = CG = DH सिध्द करा EFGH हे चौरस आहे.

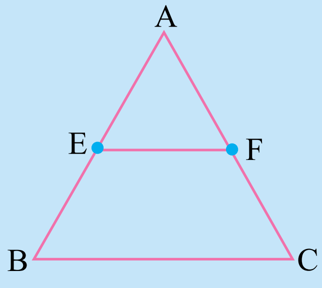
8.6 त्रिकोणाच्या मध्यबिंदुचा प्रमेय

आपण त्रिकोण आणि चौकोनाच्या गुणधर्मांचा अभ्यास केलेला आहे. त्रिकोणाचे बाजुच्या मध्यबिंदु विचारात घेऊ आणि त्यापासुन काय निघते माहित करण्याचा आपण प्रयत्न करु या.

प्रयत्न करा

त्रिकोण ABC काढा. त्रिकोणाच्या दोन बाजुच्या $\overline{AB}$ आणि $\overline{AC}$ अनुक्रमे E आणि F ची खुण करा. आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे बिंदु E आणि F जोडा. त्रिकोणाची तिसरी बाजु EF आणि BC मोजा. तसेच

$\angle AEF$ आणि $\angle ABC$सुध्दा मोजा.



आपल्याला माहित होते $\angle AEF = \angle ABC$ आणि $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$

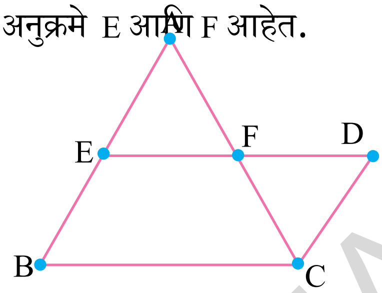
EF आणि BC ची छेदीका AB ने तयार झालेले तो दोन संगत कोन असल्याने आपण म्हणुन शकतो EF || BC.

इतर काही त्रिकोण घेऊन ही कृती पुन्हा करा.

म्हणुन आपण खालील प्रमेया पर्यंत पोहचतो.

प्रमेय-8.7 : त्रिकोणाच्या दोन बाजुच्या मध्यबिंदु ला जोडलेला रेषाखंड हा त्रिकोणाच्या तिसऱ्या बाजुला समांतर असतो आणि त्याचे अर्धे असतो.

दिलेले : ABC हा त्रिकोण आहे. AB आणि AC चे मध्यबिंदु अनुक्रमे E आणि F आहेत.



आपल्याला हे सिध्द करायचे आहे (i) EF || BC (ii) $EF = \frac{1}{2}BC$

सिध्दता:- EF ला जोडा आणि त्याला D पर्यंत वाढवा. BA ला समांतर असणारी C मधुन रेषा काढा ती EF वाढलेली रेषा D बिंदुला मिळते.

Δ^s AEF आणि ΔCDF मध्ये

AF = CF (F हा AC चा मध्यबिंदु आहे.)

$\angle AFE = \angle CFD$ (विरुध्द शिरो कोन)

आणि $\angle AEF = \angle CDF$ (CD || BA ची छेदीका ED वरचे अंतर व्यत्क्रम कोन)

को.बा.को.एकरुप नियमाने

$\therefore \Delta AEF \cong \Delta CDF$ को.बा.को.एकरुप नियम

याप्रकारे AE = CD आणि EF = DF (एकरुप त्रिकोणाचे संगत बाजु)

आपल्याला माहित आहे. AE = BE

म्हणुन BE = CD

च्या अर्थी BE || CD आणि BE = CD, BCDE समांतरभुज चौकोन आहे.

म्हणुन ED || BC

$\Rightarrow$ EF || BC

BCDE हा समांतरभुज चौकोन असल्याने ED = BC (कसे ?) ($\because$ DF = EF)

आपल्याला FD = DF दाखवायचे आहे.

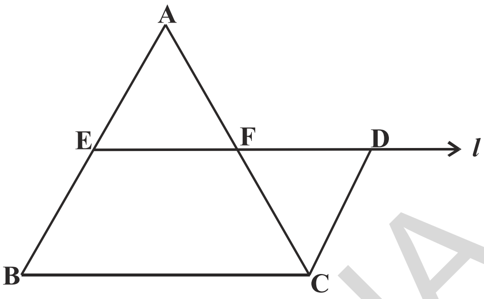
$\therefore$ 2EF = BC

म्हणुन $EF = \frac{1}{2}BC$

वरील विधानाचा व्यत्यास पण सत्य आहे. हे आपण दाखवु शकतो. त्याला लिहु या. आणि नंतर त्याला कसे सिध्द करता येईल ते पाहु या.

प्रमेय-8.8 : त्रिकोणाच्या एका बाजुच्या मध्यबिंदुतुन रेषा काढली आणि ती दुसऱ्या बाजुला समांतर असते आणि तिसऱ्या बाजुला दुभागते.

सिध्दता: ΔABC काढा. बाजु AB वर E हा मध्य बिंदु घ्या. E मधुन जाणारी आणि BC ला समांतर असणारी रेषा काढा. ती रेषा AC ला F वर छेदते.



CD || BA ची रचना करा.

आपल्याला AF = CF दाखवयाचे आहे.

ΔAEF आणि ΔCFD विचारात घेऊ

$\angle$EAF = $\angle$DCF (BA || CD आणि AC हा छेदीका आहे?) (कसे?)

$\angle$AEF = $\angle$D (BA || CD आणि ED हा छेदिका आहे) (कसे?)

त्रिकोणाची एकरुपता आपण सिध्द करु शकत नाही म्हणुन त्रिकोणामध्ये केाणत्याही बाजुची जोडी सारखी नाही असे दाखवत आहे.

हे करण्यासाठी EB || DC विचारात घेऊ

आणि ED || BC

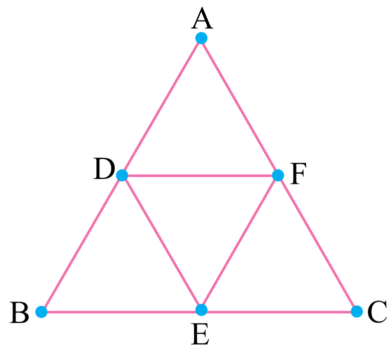
या प्रकारे EDCB हे समांतरभुज BE = DC.

ज्या अर्थी BE = AE , AE = DC.

म्हणुन ΔAEF ≅ ΔCFD

∴ AF = CF

आणखी काही उदाहरणे



उदाहरण-7: ΔABC मध्ये बाजु AB, BC आणि CA चे मध्यबिंदु अनुक्रमे D, E आणि F आहेत. जेव्हा तीनही मध्य बिंदु एकमेकाला जोडले असता सिध्द करा की, ΔABC हा चार एकरुप त्रिकोणाने विभागते (ΔDEF ला मध्य ߉Bक्रोण म्हणतात)

सिध्दता: त्रिकोण ABC मध्ये $\overline{AB}$ आणि $\overline{AC}$ चे मध्यबिंदु अनुक्रमे D, E आहेत.

म्हणुन मध्यबिंदु प्रमेया ने

DE || AC

या प्रमाणे DF || BC आणि EF || AB.

म्हणुन ADEF, BEFD, CFDE हे समांतरभुज चौकोन आहे.

ADEF समांतरभुज चौकोना मध्ये, DF हा कर्ण आहे.

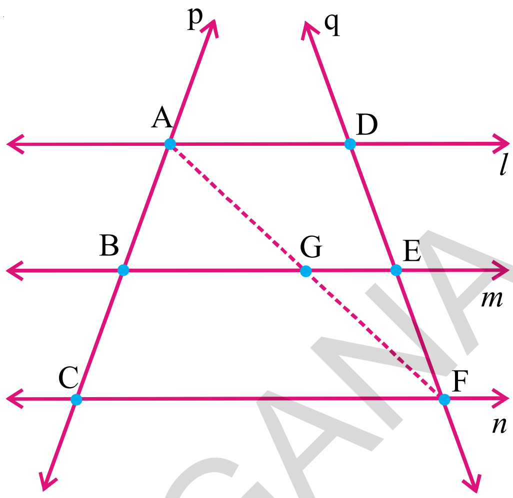
म्हणुन ΔADF ≅ ΔDEF (समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण त्याला दोन एकरुप त्रिकोणाता विभागतं)

या प्रमाणे ΔBDE ≅ ΔDEF

आणि $\Delta CEF \cong \Delta DEF$

म्हणुन चार ही त्रिकोण एकरुप आहेत.

बाजुच्या मध्यबिंदु जोडल्याने त्रिकोण ABC एकरुप त्रिकोणात विभागते हे आपण सिध्द केले अहोत.



उदाहरण-8. l, m आणि n या तिन समांतर रेषाला p आणि q छेदीकाने A, B, C आणि D,E, F येथे छेदते. छेदीका p,AB आणि BC ला समान अंतरखंडात विभागते. तर छेदीक q ने DE आणि EF ला समान अंतरखंडात विभागलेले हे सुध्दा त्याच्या समान आहे. हे सिध्द करा.

सिध्दता: DE आणि EF च्या तुलनेत AB आणि BC समानतेत जोडण्याची आपल्याला गरज आहे. A आणि F ला आपण जोडु आणि 'm' ला छेदलेल्या बिंदुला G हे नाव देऊ

ΔACF मध्ये $AB = BC$ (दिलेले)

म्हणुन B हा AC चा मध्यबिंदु आहे.

आणि $BG \parallel CF$ (कसे ?)

म्हणुन G हाAF चा मध्यबिंदु आहे. (प्रमेया नुसार)

आता Δ AFD मध्ये, G हा AF चा मध्य बिंदु आहे आणि $GE \parallel AD$,

DF चा मध्यबिंदु E आहे.

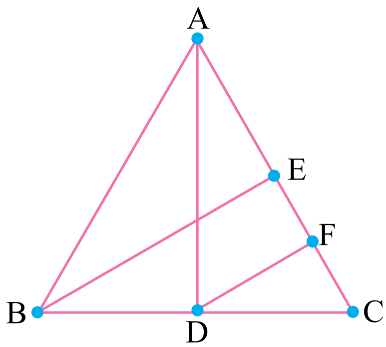
अशा प्रकारे $DE = EF$.

म्हणुन l, m आणि n हे q वर सुध्दा समान अंतराने छेदते.

उदाहरण=9: आकृतीमध्ये AD आणि BE हे ΔABC चे मध्यगा आहे आणि $BE \parallel DF$ तर सिध्द करा

$$CF = \frac{1}{4} AC.$$

सिध्दता: Δ ABC मध्ये D हा BC चा मध्यबिंदु आहे आणि $BE \parallel DF$ प्रमेयानुसार F हा CE चा मध्यबिंदु आहे.

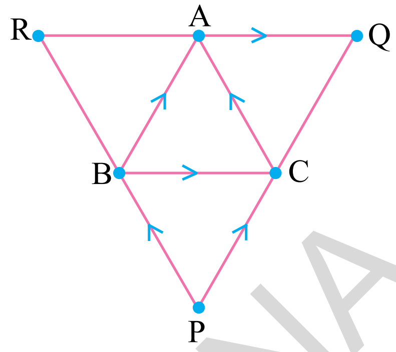


$$\therefore CF = \frac{1}{2} CE$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} AC\right) \quad \text{(कसे ?)}$$

म्हणुन $CF = \frac{1}{4} AC$.

उदाहरण-10: ABC चा A, B, C मधुन BC, CA आणि AB ला समांतर असणारी रेषा काढल्या जे अनुक्रमे P, Q आणि R. येथे छेदतात. तर सिध्द करा की, ΔPQR च्या परिमीती ही ΔABC च्या परिमीती पेक्षा दुप्पट असते.



सिध्दता : AB || QP आणि BC || RQ म्हणुन ABCQ हा समांतरभुज चौकोन आहे.

याच प्रमाणे BCAR, ABPC हे समांतरभुज चौकोन

$\therefore$ BC = AQ आणि BC = RA

$\Rightarrow$ A हा QR चा मध्य बिंदु आहे.

याच प्रमाणे PR आणि PQ चे मध्यबिंदु अनुक्रमे B आणि C आहेत.

$\therefore AB = \frac{1}{2}PQ;\quad BC = \frac{1}{2}QR$ आणि $CA = \frac{1}{2}PR$ (कसे?)

(संबंधीत प्रमेय सांगा)

आता ΔPQR ची परिमती $= PQ + QR + PR$

$= 2AB + 2BC + 2CA$

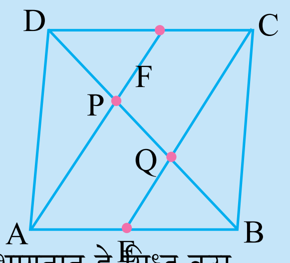
$= 2(AB + BC + CA)$

$= 2$ (ΔABC ची परिमीती)

अभ्यास - 8.4

1. ABC हा एक त्रिकोण आहे. AB वर D हा असा बिंदु आहे की, $AD = \frac{1}{4}AB$ आणि E आणि AC वर असा आहे की, $AE = \frac{1}{4}AC$. जर DE = 2 से.मी. तर BC माहित करा.

2. ABCD हा चौकोन आहे. AB, BC, CD आणि DA चे मध्यबिंदु अनुक्रमे E, F, G आणि H आहेत. तर सिध्द करा EFGH हा समांतरभुज चौकोन आहे.



3. समभुज चौकोनाच्या बाजुच्या मध्यबिंदु जोडल्यानंतर जी आकृती तयार होते ती आयत आहे. हे सिध्द करा.

4. ABCD समांतरभुज चौकोनामध्ये AB आणि DC चे मध्यबिंदु अनुक्रमे E आणि F तर AF आणि EC रेषाखंड कर्ण BD ला तिन भागात विभागते हे सिध्द करा.

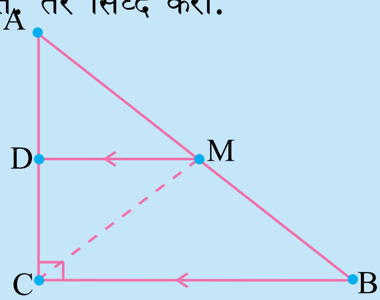
5. चौकोनाच्या विरुध्द बाजुंच्या मध्यबिंदुने जोडलेले रेषाखंड एकमेकांला दुभागतात हे सिध्द करा.

6. ABC हा C यथे काटकोन करणारा त्रिकोण आहे. कर्ण AB चा मध्यबिंदु M तुन जाणारी रेषा, BC ला समांतर असते आणि AC ला D येथे छेदते, तर सिध्द करा.

   (i) D हा AC चा मध्यबिंदु आहे.

   (ii) $MD \perp AC$

   (iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$.

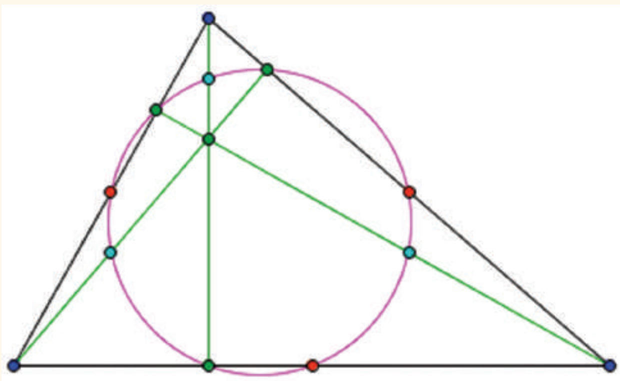


आपण काय चर्चा केलो

1. प्रतलातील चार बिंदुने तयार झालेली साधी बंदीस्त आकृती म्हणजे चौकोन
2. चौकोना मधील चार कोनांची बेरीज 360^0 किंवा 4 काटकोन आहे.
3. समलंब चौकोन, समांतरभुज चौकोन, समभुज चौकोन, आयत,चौरस आणि पतंग हे चौकोनाचे विशेष प्रकार आहेत.
4. समांतरभुज चौकोन हा चौकोनाचा विशेष प्रकार आहे. ज्याला बरेचशे गुणधर्म आहेत. खालील प्रमेय आपण सिध्द केलेले आहेत.
   a) समांतरभुज चौकोनाचा कर्ण समांतरभुज चौकोनाला दोन एकरुप त्रिकोणात विभागलो
   b) समांतरभुज चौकोनाचे विरुध्द बाजु आणि विरुध्द कोन समान असतात.
   c) जर चौकोनाची विरुध्द बाजुंची प्रत्येक जोडी जर समान असेल तर ते समांतरभुज चौकोन असते
   d) विरुध्द बाजुंची जर प्रत्येंक जोडी समान असेल तर ते समांतरभुज चौकोन असते.
   e) समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांला दुभागतात.
   f) चौकोनाचे कर्ण जर एकमेकांला दुभागत असेल तर ते चौकोन समांतरभुज चौकोन असते
5. त्रिकोणाच्या मध्यबिंदुचा प्रमेय आणि त्याचा व्यत्यास
   a) त्रिकोणाच्या दोन बाजुच्या मध्यबिंदुला जोडलेला रेषाखंड हा त्रिकोणाच्या तिसऱ्या बाजुला समांतर असतो आणि त्याचे अर्धे असते.
   b) त्रिकोणाच्या एका बाजुच्या मध्यबिंदुतुन रेषा काढली आणि ती दुसऱ्या बाजुला समांतर असते आणि तिसऱ्या बाजुला दुभागते.

वर्तुळाचे नऊ बिंदु

कोणत्याही त्रिकोणामध्ये, बाजुचे मध्यबिंदु, शिरोलंबाचे बिंदु आणि शिरोबिंदु वर लंबसंपाती कडुन वर्तुळाखंडाचे मध्यबिंदु वर्तुळावर असतात. तर वर्तुळावर किती बिंदु आहेत? याला नऊ बिंदु वर्तुळ म्हणतात.



1765 मध्ये लिओनहार्ड थुलन ने नऊ बिंदुचे वर्तुळ माहित केले. पण पुन्हा जर्मन गणितज्ञ कार्ल फिओरनक यांनी 1822 मध्यें त्यांची पुन्हा शोध केली.

09 सांख्यिकी

9.1 प्रस्तावना

एक दिवस सोमु त्याच्या गणिताच्या शिक्षकाच्या घरी गेला शिक्षक त्यावेळेस जनगणेसाठी त्यांनी गोळा केलेली माहिती जमा करण्यात व्यस्त होते.

सोमु : नमस्कार! सर मला वाटते तुम्ही खुप व्यस्त आहात. मी तुमच्या कामात मदत करु शकतो का सर?

शिक्षक : सोमु मी जनगणनेसाठी कुंटुबाची माहिती गोळा केली आहे. ती कुंटुंबातील व्यक्तीची संख्या त्यांचे वयोगट, कुंटुंबाचे उत्पन्न ते राहत असलेल्या घराचा प्रकार आणि इतर माहिती.

सोमु : सर या माहितीचा काय उपयोग आहे?

शिक्षक : या माहितीचा उपयोग करुन सरकारला विकासाची योजना करण्यासाठी स्त्रोताची नेमणुक करण्यासाठी होतो.

सोमु : ही मोठी माहिती सरकार कशा रितीने उपयोग करते?

शिक्षक : सरकारी अधिकारी माहितीचा उपयोग करुन याचे विश्लेषण करते. त्याच्या वरुन नविन अंदाज्याने तयार करतात. तु सुध्दा मागील वर्गात मुलभुत सांख्यीकीचा अभ्यास केल नाही का?

सोमु प्रमाणे आपण सुध्दा संख्येच्या रुपात टेबल्स आलेख इत्यादीच्या रुपात असलेली माहिती पाहातो. यावरुन संबंधीत भाजीपाल्याची किंमत शहराचे तापमान क्रिकेटच्या गणना मतदानाचा निकाल आणि अशाप्रकारे ही वस्तु स्थिती किंवा आकृत्या ज्या सांख्यिकी किंवा इतर हेतुसाठी एका निदीष्ट उद्देशासाठी जमा करतो. यालाच सामग्री म्हणतात. घेतलेली माहिती अर्थपुर्ण बनविण्याऱ्या गणिताच्या शाखेला सांख्यिकी म्हणतात.

मागील वर्गात शिकलेल्या संख्या शास्त्राची (माहिती हाताळणे) उजळणी करु या.

9.2 सामग्री गोळा करणे

संख्या शास्त्रात एका उद्देशाने सामग्री गोळा करणे पहिला पायरी आहे. हे समजण्यासाठी खालील कृती करुन सामग्री गोळा करण्याचा अभ्यास करु

कृती

तुमच्या वर्गातील विद्यार्थ्यांना चार गटात विभागणी करा. प्रत्येक गटास खालील पैकी एक प्रकारची माहिती गोळा करण्याचे काम नेमुन द्या.

i. तुमच्या वर्गातील सर्व विद्यार्थ्यांचे वजन

ii. प्रत्येक विद्यार्थ्यांच्या भावांची किंवा बहिणीनी संख्या

iii. मागील महिण्याची दिवसवारी तूमच्या वर्गातील गैरहजरी

iv. तुमच्या वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थ्यांच्या शाळेपासुन घरापर्यंतचे अंतर

या विद्यार्थ्यांनी अत्यावश्यक माहिती कशी गोळा केली पाहु या.

1. माहिती गोळा करण्यासाठी प्रत्येक विद्यार्थ्यांची चौकशी केली किंवा. स्वत:त्याच्या घरी जाऊन माहिती गोळी केली का?

2. शाळेतील रिकार्डमधील किंवा इतर कोणत्याही नोंदणी करुन माहिती गोळा केली का?

पहिल्या संदर्भात जेव्हा खचित उद्देशाने शोधकर्ता ने (विद्यार्थी) माहिती गोळा केल्यास त्यास प्राथमिक सामग्री असे म्हणतात. ((i), (ii), (iv) मध्ये आहे.).

वरील (iii) मध्ये मागच्या महिण्याची गैरहाजरी फक्त शाळेतील हजेरीच्या रजिस्टर वरुनच माहित होते. इथे आपण वर्ग शिक्षकाव्दारे आधीच गोळा केलेल्या माहितीचा उपयोग करत आहो. स्त्रोताव्दारे गोळा केलेली माहिती जी आधीच रजिस्टर मधुन नोंदलेली असते त्यास दुय्यम सामग्री म्हणतात.(**secondary data**)

हे करा

खालील पैकी कोणती प्राथमीक सामग्री आणि दुय्यम सामग्री आहे?

i. 2010-2011 या कालावधीत तुमच्या शाळेत विद्यार्थ्यांची नोंदणी झालेल्या सामग्री गोळा केलेली आहे.

ii. तुमच्या शारिरिक शिक्षकाने तुमच्या शाळेतील विद्यार्थ्यांच्या उंचीची केलेली नोंद

9.3 सामग्रीस दाखविणे

एकदा सामग्री गोळा केल्यानंतर विश्लेषकास या सामग्रीस अर्थपुर्ण समझण्यास सोपे आणि एकाच क्षणी त्याची वैशिष्टे दाखविल्याचे एक नविन उपाय शोधला पाहिजे. विविध प्रसंगात जेथे सामग्रीची दर्शवणुक आवश्यक होते. ते घेऊत.

समाज 15 विद्यार्थ्यांनी गणिताच्या चाचणीत (50 पैकी) मिळविलेले गुण

25, 34, 42, 20, 39, 50, 28, 30, 50, 11, 20, 42, 45, 40, 7 आहेत.

या रुपात असलेल्या सामग्रीला कच्ची सामग्री असे म्हणतात

वरील सामग्रीवरुन तुम्ही किमान आणि कमाल गुण सुलभतेने ओळखु शकता. लक्षात ठेवा की, किमान आणि कमाल गुणातील फरकास दिलेल्या माहितीची व्याप्ती म्हणतात.

येथे किमान आणि कमाल गुण 7 आणि 50 आहेत.

म्हणुन व्याप्ती $= 50 - 7 = 43,$

वरील वरुन आपण म्हणु शकतो की, सामग्री 7 आणि 50 मध्ये स्थित आहे. आता वरील सामग्री वरुन खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

i. दिलेल्या सामग्रीची मधली किंमत माहित करा.

ii. गणिताच्या चाचणीत किती मुलांनी 60% किंवा त्यापेक्षा जास्त गुण मिळविले.

चर्चा

(i) इक्रम म्हणाला माहितीची (सामग्री) मधली किंमत 25 आहे. कारण परिक्षा 50 गुणासाठी घेतली आहे. तुमचा काय विचार आहे?

मेरी म्हणाली कि, ती सामग्री मधली किंमत नाही. या संदर्भात 15 विद्यार्थ्यांच्या गुण कच्ची सामग्री आहे. म्हणुन सामग्रीस चढत्या क्रमाणे मांडल्यास

7, 11, 20, 20, 25, 28, 30, 34, 39, 40, 42, 42, 45, 50, 50

आपण म्हणु शकतो की, 8 वे पद मधली किंमत आहे. ती 34 आहे.

(ii) 50 चे 60% कसे काढतात. हे तुम्हाला आधीच माहित आहे. (म्हणजेच $\frac{60}{100} \times 50 = 30$).

तुम्हाला दिसुन यते की, 9 विद्यार्थ्यांनी 60% किंवा त्यापेक्षा जास्त गुण मिळाले(म्हणजे 30 किंवा जास्त)

जेव्हा सामग्रीतील अवलोकन खुप जास्त असतात. सामग्रीस चढत्या किंवा उत्तरत्या क्रमाणे मांडुन दर्शवणुक करण्यासाठी जास्त वेळ लागतो. म्हणुन आपण पर्यायी पध्दतीचा विचार केला पाहिजे.

खालील उदाहरण पहा.

उदाहरण-1: गणिताच्या चाचणित 50 विद्यार्थ्यांनी मिळविलेले गुण खालील प्रमाणे आहेत.

5, 8, 6, 4, 2, 5, 4, 9, 10, 2, 1, 1, 3, 4, 5,
8, 6, 7, 10, 2, 1, 1, 3, 4,4, 5, 8, 6, 7,
10, 2,8, 6, 4, 2, 5, 4, 9, 10,
2, 1, 1, 3, 4, 5, 8, 6,4, 5, 8

गुण	ताळ्याची खुण	विद्यार्थी संख्या
1	𝍸 |	6
2	𝍸 |	6
3	|||	3
4	𝍸 ||||	9
5	𝍸 ||	7
6	𝍸	5
7	||	2
8	𝍸 |	6
9	||	2
10	||||	4
	एकुण	50

सामग्रीस तक्त्यात दाखविल्याप्रमाणे ताळ्याच्या खुणेवरुन तक्ता बनविता येतो.

विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या एका निश्चित गुणांच्या संख्येला त्या गुणांची वारंवारता असे म्हणतात. उदाहणार्थ 9 विद्यार्थ्यांनी प्रत्येकी 4 गुण मिळाले. म्हणुन 4 गुणांची वारंवारता 9 आहे.

येथे तक्त्यात ताळयाची खुण कच्च्या सामग्रीचा तक्ता बनविण्यासाठी उपयोगी पडतो.

तक्त्यातील वारंवारतेची एकुण बेरीज सामग्रीतील अवलोकानाची एकुण संख्या होते.

सामग्रीचे वास्तविक अवलोकन त्याच्या वारंवारते सांबत तक्त्यात दाखविले आहे. या तक्त्यास असंग्रहीत वारंवारता वितरण सारणी किंवा अवलोकनाच्या वजनाच्या तक्ता म्हणतात (**'Ungrouped Frequency Distribution Table'**किंवा **'Table of Weighted Observations'**)

कृती

तुमच्या वर्गमित्राच्या आडनावाच्या पहिल्या अक्षराची वांरवारता वितरण सारणी तयार करा आणि खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(i) तुमच्या वर्गमित्रा पैकी सुरुवातीचे जास्त वेळ येणार अक्षर कोणते?

(ii) 'I' मुळाक्षरावरुन येणाऱ्या नावाचे विद्यार्थ्यां किती आहेत?

(iii) तुमच्या वर्गमित्रामध्ये कोणते सुरुवातीचे अक्षर सर्वात कमी आहेत?

समजा काही विशेष कारणासाठी सामग्रीला आपण तिन विभागात दर्शविले पाहिजे. (i) किती विद्यार्थ्यांना प्रत्येक वर्गाची आवश्यकता पडते. (ii) किती विद्यार्थ्यां साधारण आहेत. (iii) परिक्षेत चांगली प्रगती दाखविणारे विद्यार्थी आहे. आपण आवश्यक्ते नुसार गट पाडुन संग्रहीत वारंवारता सारणी बनविते.

वर्ग अवकाश(गुण)	प्रकार	ताळ्याची खुण	एकुण विद्यार्थी
1 - 3	(प्रत्येक वर्गाची गरज)	卌 卌 卌	15
4 - 5	(सरासरी)	卌 卌 卌 |	16
6 - 10	(चांगले)	卌 卌 卌 ||||	19

सामग्रीतील राशींची संख्या जास्त असल्यास माहितीसाठी सुध्दा या प्रकारची वारंवारता तेचे विभागणी खुप उपयोगी पडते. एक उदाहरण घेऊ ज्यामध्ये गट आणि वारंवारता सामग्रीला समझण्यासाठी सोईस्कर होते.

उदाहरण-2: एका बॉस्केटमधील 50 संत्र्याची वजन (ग्राममध्ये) खाली दिले आहे.

35, 45, 55, 50, 30, 110, 95, 40, 70, 100, 60, 80, 85, 60, 52, 95, 98, 35, 47, 45, 105, 90, 30, 50, 75, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90, 115, 65, 60, 40, 100, 55, 75, 110, 85, 95, 55, 50

अशा प्रकारची मोठी सामग्री दर्शविते आणि समझण्यासाठी आपणास त्याचे गट पाडावे लागते जसे 30-39,40-49,50-59,.......100,109,110,119 (आपली माहिती 30 ते 115 आहे) या गटात वर्ग किंवा वर्ग अवकाश म्हणतात. त्याच्या आकाराला वर्गाची लांबी किंवा वर्गाची रुंदी म्हणतात. ये वर्गांतर 10 आहे. प्रत्येक वर्गातील लहान संख्येला खालची मर्यादा आणि मोठ्या संख्येला वरची मर्यादा म्हणतात. उदा. 30-39 यावर्गात खालची वर्ग मर्यादा 30 आणि वरची मर्यादा 39 आहे.

(संत्र्याचे वजन) वर्ग अवकाश	ताळ्यांची खुण	एकुण संत्रे वारंवारता
30 - 39	~~IIII~~ I	6
40 - 49	~~IIII~~ III	8
50 - 59	~~IIII~~ IIII	9
60 - 69	~~IIII~~ I	6
70 - 79	III	3
80 - 89	~~IIII~~	5
90 - 99	~~IIII~~ II	7
100-109	III	3
110 - 119	III	3
	एकुण	50

या रुपात सामग्री दर्शवुन संक्षिप्त करणे आणि सामग्रीस संक्षेप करुन पाहता क्षणी काही निश्चित वैशिष्ट्ये निरिक्षणा करण्याची आपणास शक्ती देते यास संग्रहीत वारंवारता वितरण सारणी असे म्हणतात.(**grouped frequency distribution table**)

आपणास दिसुन यते की, वरील सारणीतील वर्ग एकमेकावर आलेले नाहीत. म्हणजे 30-39, 40-49 ... दोन वर्गाविकाशात कोणतीही संख्या वारंवारता येत नाही. अशा वर्गांना असलग्न वर्ग म्हणतात. लक्षात घ्या की, लहान आकाराचे जास्त वर्ग किंवा मोठ्या आकाराचे कमी वर्ग बनविले आहेत. नेहमी कच्ची माहिती दिली असता व्याप्ती शोधता येते(व्याप्ती = कमाल किंमत- किमान किंमत) व्याप्तीवरुन वर्ग अवकाश वर्गाची संख्या अनुकुल ते ने तयार करता येते. उदा. वर्ग अवकाश 30-35, 36-40 अशा प्रकारे.

वर्ग	वर्ग सिमा
20 - 29	19.5 - 29.5
30 - 39	29.5 - 39.5
40 - 49	39.5 - 49.5
50 - 59	49.5 - 59.5
60 - 69	59.5 - 69.5
70 - 79	69.5 - 79.5
80 - 89	79.5 - 89.5
90 - 99	89.5 - 99.5
100 - 109	99.5-109.5
110 - 119	109.5-119.5
120 - 129	119.5-129.5

समजा संत्र्याचे वजन 39.5 ग्रा असल्यास विचार करा की, ते कोणत्या वर्गात येते? 39.5 ला आपण 30-39 किंवा 40-49 मध्ये घेता येत नाही. अशा संदर्भात आपण खऱ्या सिमा प्रत्येक वर्गासाठी तयार करतो.

वर्गाची वरची मर्यादी आणि दुसऱ्या वर्गाची खालची वर्ग मर्यादा याची सरासरी त्या वर्गाची वरची सिमा होते आणि हिच दुसऱ्या वर्गाची खालची सीमा होते.

अशारीतीने सर्व वर्गाच्या सिमा माहित करता येते. पहिल्या वर्गाच्या अगोदरचा वर्ग अवकाश नंतरच्या समोरील वर्ग अवकाश गृहीत धरुन पहिल्या वर्गाची खालची सिमा आणि नंतरच्या वर्गाची वरची सिमा काढता येते.

39.5 यास कोणत्या वर्गात घ्यायची समस्या पुन्हा उद्भवते. तो 29.5 -39.5 किंवा 39.5-49.5 ? आपल्या अनुकुलते नुसार जर एखादे अवलोकन एका विशिष्ट वर्गाच्या वरच्या सिमेला समतुल्य असल्यास त्या विशिष्ट अवलोकानास त्याच्या नंतरच्या वर्गात घेता येते. परंतु त्या वर्गात घेता येत नाही.

म्हणुन 39.5 हे 39.5-49.5 वर्गात येते.

30-40,40-50,50-60 ...... वर्गास सलग वर्ग म्हणतात.

जर आपण असलग वर्गाच्या सिमाचे निरिक्षण केल्या ते सलग वर्गाच्या रुपात असतात. एका विशिष्ट वर्गाच्या वरच्या सिमा आणि खालच्या सिमेमधील फरकावरुन वर्गाची लांबी येते. वर्ग अवकाश 90,99 ची लांबी (99.5-89.5=10)10 आहे.

उदाहरण-3: एका निश्चित शहराची सप्टेंबर महिण्याच्या 30 दिवसाची सापेक्ष आद्रता खालील प्रमाणे आहे.

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.0	92.1	84.9	90.0	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) 84-86, 86,-88 इत्यादी वर्ग घेऊन संग्रहीत वारंवारता वितरणाची सारणी बनवा?

(ii) सामग्रीचा व्याप्ती किती आहे?

सोडवणुक: (i) संग्रहीत वारंवारता वितरणाची सारणी खाली आहेत.

सापेक्ष आद्रता	ताळ्याच्याखुण	दिवसांची संख्या
84-86	|	1
86-88	|	1
88-90	||	2
90-92	||	2
92-94	~~||||~~ ||	7
94-96	~~||||~~ |	6
96-98	~~||||~~ ||	7
98-100	||||	4

(सुचना: 90 हे 90-92 वर्गात येते असेच 96 हे 96-98 वर्गात येते.)

(ii) व्याप्ती 99.2 - 84.9 = 14.3 (वेगवेगळ्या जागी बदलते)

अभ्यास - 9.1

1. खालील वारंवारता वितरणसारणी वरुन गुणवारी वारंवारता लिहा.

गुण	5 पर्यंत	6 पर्यंत	7 पर्यंत	8 पर्यंत	9 पर्यंत	10 पर्यंत
विद्यार्थी संख्या	5	11	19	31	40	45

2. 9 व्या वर्गाच्या 36 विद्यार्थ्यांचा रक्तगटाची खालील प्रमाणे नोंदणी केली आहे.

A	O	A	O	A	B	O	A	B	A	B	O
B	O	B	O	O	A	B	O	B	AB	O	A
O	O	O	A	AB	O	A	B	O	A	O	B

सामग्रीला वारंवारता वितरण सारणीच्या रुपात दर्शवा कोणता रक्तगट सामान्य आहे आणि कोणता दुर्लभ रक्तगट मुलांमध्ये आढळतो ?

3. तिन नाण्यांना एकाच वेळी वर फेकले असता. प्रत्येक वेळी चित (हेड) पडलेल्या एकुण नाण्यांना नोंदणी खालील प्रकारे केली आहे.

1	2	3	2	3	1	1	1	0	3	2	1
2	2	1	1	2	3	2	0	3	0	1	2
3	2	2	3	1	1						

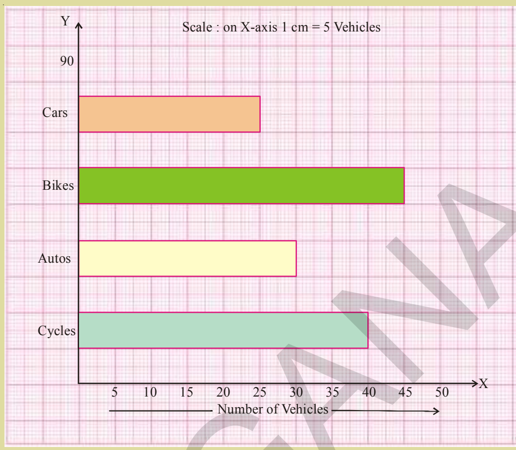
वरील दिलेल्या सामग्रीसाठी वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

4. एका TV वाहिणीने धुम्रपाण निषेधावर संक्षिप्त संदेश मतदानाचे (SMS) आयोजन केले. त्यांनी काही पर्यय दिले जसे A – पुर्ण निषेध B – फक्त सावर्जनिक ठिकाणी निषेध C – जरुरी नाही, एका तासातील (SMS) चा निकाल खाली आहे. A B A
BC B

A	B	B	A	C	C	B	B	A	B
B	A	B	C	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	B	C	B	A	B	A
B	C	B	B	A	B	C	B	B	A
B	B	A	B	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	C	A	B	B	A	

वरील सामग्रीवरुन संग्रहीत वारंवारता वितरणाची सारणी तयार करा. किती अचुक उत्तरे स्विकारलीत ? जास्त लोकांचे मत काय होते ?

5. बाजुच्या स्तंभालेखावरुन वारंवारता वितरण सारणी बनवा



6. बाजुच्या आलेखात अक्षावर वापरलेल्या प्रमाणास ओळखा त्यावरुन वारंवारता वितरण सारणी लिहा.

7. एका चाचणीत 30 विद्यार्थ्यांनी प्राप्त केलेले गुण (75 पैकी) खाली दिलेले आहेत.

42, 21, 50, 37, 42, 37, 38, 42, 49, 52, 38, 53, 57, 47, 29

59, 61, 33, 17, 17, 39, 44, 42, 39, 14, 7, 27, 19, 54, 51.

सामान वर्ग अवकाश घेऊन वारंवारता सारणी तयार करा. (सुचना: त्यापैकी एक 0-10)

8. एका निवासस्थानी असलेल्या 25 घरांचे विद्युत बिल (रुपयांत) खाली दिलेले आहे. वर्गाच्या आकार 75 घेऊन संग्रहीत वारंवारता वितरण सारणीची रचना करा.

170, 212, 252, 225, 310, 712, 412, 425, 322, 325, 192, 198, 230, 320, 412,

530, 602, 724, 370, 402, 317, 403, 405, 372, 413

9. एका कंपणीने विशिष्ट प्रकारच्या कारच्या बॅटरी तयार केल्या 40 बॅटरीचा जिवन काल (वर्षात) खाली नोंदणी केली आहे.

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

या सामग्रीसाठी सलगवर्ग घेऊन संग्रहीत वारंवारता वितरण सारणीची रचना 0.5 वर्गांतर 2-2.5 पासुन सुरुवात करा.

9.4 केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे:

खालील संदर्भ पहा.

संदर्भ-1: एका वस्तीगृहात 50 विद्यार्थी न्याहारी मध्ये 200 इडली खातात जर त्या वस्तीगृहात अजुन 20 विद्यार्थी मिसळल्यास किती इडलीची गरज पडते.

संदर्भ-2 : एका फक्टरीमधील कर्मचाऱ्याचे महिण्याचा पगार खालील तक्त्यात दिलेला आहे. कोणती पगाराची संख्या पुर्ण कर्मचाऱ्यांची दर्शवणुक करते.

कर्मचारी	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
पगार (हजार)	12	14	15	15	15	16	17	18	90	95

संदर्भ-3: एका शहरातील वाहतुकीचे विविध रुप खाली दिलेले आहे. कोणते प्रसिध्द वाहतुकीचे साधन आहे?

1. कार 15%
2. रेल्वे 12%
3. बस 60%
4. दुचाकी 13%

पहिल्या संदर्भात आपण साधारणता सरासरी(मध्य) वापरतो. आणि त्याचा वापर प्रश्न सोडविण्यासाठी होतो. परंतु जर आपण दुसऱ्या संदर्भात सरासरी पगार घेतल्यास तर ते 30.7 हजार होते. कसातरी सामग्री वरुन सुचित करते की, ही मध्य किंमत ही चांगली पध्दत नाही. कर्मचाऱ्याच्या पगाराच्या किंमतीचा जवळ नाही. अजुन जास्त लोकांचा पगार 12 ते 18 हजारच्या मध्ये आहे. म्हणुन या सामग्रीचे मध्य अचुक उत्तर होते. तिसऱ्या संदर्भात बहुलक हे योग्य उत्तर आहे. म्हणुन माहितीचा स्वभाव आणि आकृतीच्या उद्देशानुसार सरासरी किंवा मध्यक किंवा बहुलकास मोजण्यासाठी घेऊत.

विचार करा आणि चर्चा करा आणि लिहा.

1. तिन संदर्भ दया जेथे मध्य, मध्यक, आणि बहुलक यांचा अलग अलग उपयोग करुन लिहा. एका संदर्भात जेथे दोन क्रिकेटर रघु आणि गौतम म्हणाले की, त्यांची गणना इतरापेक्षा चांगला आहे. गेल्या 5 सामन्याचा आधारावरुन त्यांची तुलना केली.

सामने		1st	2nd	3rd	4th	5th
धावा	रघु	50	50	76	31	100
मेड	गौतम	65	23	100	100	10

दोन्ही खेळाडुचा शौकीनांनी धावाच्या सरासरीत खालील प्रकारे लिहिले

रघुची सरासरी $= \frac{307}{5} = 61.4$

गौतमची सरासरी $= \frac{298}{5} = 59.6$

रघुची सरासरी गौतमच्या सरासरी पेक्षा जास्त आहे. म्हणुन रघु गौतम पेक्षा चांगला आहे. परंतु गौतमच्या शौकीनांना सहमत नव्हते. गौतमच्या शौकीनांनी त्यांच्या गणनेस उतरत्या क्रमाने मांडले आणि मधली गणना खाली प्रमाणे आली आहे

रघु	100	76	50	50	31
गौतम	100	100	65	23	10

गौतमच्या शौकीनांनी सांगीतले की, मधली गणना 65 आहे जी रघुच्या मध्यल्या किंमतीपेक्षा जास्त आहे. म्हणजे 50 मधुन त्यांची कृती चांगली आहे.

परंतु आपण म्हणु शकतो की, गौतमने 5 सामन्यामध्ये दोन शतके मारलीत म्हणुन तो उत्कृष्ठ ठरला.

आता, हे भांडण मिटविण्यासाठी रघु आणि गौतमच्या शौकीनांनी तिन उपाय योजले.

त्यांनी सरासरी गणनेस मध्य म्हणुन वापरुन वादातील मधली गणना मध्यक आणि बहुलक सुध्दा त्याची कुशलताची तुलना करण्यासाठी गणनेची वारंवार येणारी किंमत घेतली. रघुला बहुलक 50 आहे. गौतमचा बहुलक 100 आहे या तिन्ही उपाया वरुन यात कोण श्रेष्ठ ठरते ?

आता मध्याची माहिती घेऊ

9.4.1 अंकगणितीय मध्य (सरासरी)

मध्य हा सामग्रीच्या अवलोकानाच्या बेरजेला एकुण अवलोकनाचे भागल्यास येतो. कच्चा सामाग्रीचा अंकगणिता मध्य काढणे आपण या बद्दल अगोदरच चर्चा केली.

$$\text{मध्य } \bar{x} = \frac{\text{अवलोकनाची बेरीज}}{\text{अवलोकनाची संख्या}} \text{ or } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

9.4.1.1 कच्च्या सामग्रीचा मध्य (सरासरी)

उदाहरण-4:एका आठवड्यात एका जागी पडलेला पाऊस 4 से.मी., 5 से.मी.12 से.मी. 3 से.मी., 6 से.मी. 8 से.मी. 0.5 से.मी. आहे. प्रत्येक दिवसाचा सरासरी पाऊस किती पडला ते काढा.

सोडवणुक: दिवसाचा सरासरी पाऊस हा वरील अवलोकानाचा अंक गणितीय मध्य आहे. एका आठवड्यात पडलेला पाऊस 4 से.मी., 5 से.मी.12 से.मी. 3 से.मी., 6 से.मी. 8 से.मी.0.5 से.मी. आहेत.

एकुण अवलोकन (n) = 7

मध्य $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ...x_n}{n}$ जेथे $x_1, x_2 ..... x_n$ हे n अवलोकन आहे.

आणि $\bar{x}$ त्यांचा मध्य आहे $= \frac{4+5+12+3+6+8+0.5}{7} = \frac{38.5}{7} = 5.5$ से.मी.

उदाहरण-5. जर 10, 12, 18, 13, P आणि 17 चा मध्य 15 आहे तर P ची किंमत काढा.

सोडवणुक: आपणास माहित आहे. $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

$$15 = \frac{10+12+18+13+P+17}{6}$$

$$90 = 70 + P$$

$$P = 20.$$

9.4.1.2 असंग्रहीत वारंवारता वितरणाचा मध्य

एका वर्गातील 40 विद्यार्थ्यांचे वजन खालील वारंवारता वितरण सारणीत दिले आहे.

वजन कि.ग्र.मध्ये (x)	30	32	33	35	37	41
विद्यार्थ्यांची संख्या (f)	5	9	15	6	3	2

40 विद्यार्थ्यांचे सरासरी (मध्य) वजन काढा.

वरील सारणीवरुन 5 विद्यार्थ्यांचे वजन प्रत्येकी 30 कि.ग्र. आहे. त्यांच्या वजनांची बेरीज $5 \times 30 = 150$ कि.ग्र. आहे. अशारीतीने आपण वजनाची बेरीज प्रत्येक वारंवारते सोबत आणि त्यांचा एकुण संख्या माहित करु शकतो. वारंवारतेच्या बेरजेवरुन सामग्रीतील अवलोकनांची संख्या मिळते.

$$\text{मध्य } (\bar{x}) = \frac{\text{सर्व अवलोकनाची बेरीज}}{\text{एकुण अवलोकनाची संख्या}}$$

$$\text{म्हणुन मध्य } = \frac{5\times30+9\times30+15\times33+6\times35+3\times37+2\times41}{5+9+15+6+3+2} = \frac{1336}{40} = 33.340$$

जर $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ अवलोकन आणि त्यासमान वारंवारता $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ आहेत तर वरील पदावलीस आपण अशाप्रकारे लिहु शकतो.

मध्य $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_{66}} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

$\therefore \bar{x} = \dfrac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$

उदाहरण-6: खालील सामग्रीचा मध्य काढा

x	5	10	15	20	25
f	3	10	25	7	5

सोडवणुक:

पायरी-1 : प्रत्येक रांगेचा $f_i \times x_i$ माहित करा

पायरी-2 : वारंवातेची बेरीज (Σf_i)

आणि $f_i \times x_i$ $(\Sigma f_i x_i)$ ची बेरीज काढा.

पायरी-3 : $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{755}{50} = 15.1$ माहित करा

x_i	f_i	f_ix_i
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\Sigma f_i = 50$	$\Sigma f_ix_i = 755$

उदाहरण-7: जर खालील सामग्रीचा मध्य 7.5 आहे तर 'A' ची किंमत काढा.

गुण	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थीची संख्या	3	10	17	A	8	4

सोडवणुक:

वारंवारतेची बेरीज $(\Sigma f_i) = 42 + A$

$f_i \times x_i$ $(\Sigma f_i x_i)$ ची बेरीज= 306 + 8A

मध्य $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i xi}{\Sigma f_i}$

दिलेला अंकगणितीय मध्य $= 7.5$

म्हणुन $7.5 = \dfrac{306 + 8A}{42 + A}$

$306 + 8A = 315 + 7.5\,A$

गुण (x_i)	विद्यार्थी संख्या (f_i)	f_ix_i
5	3	15
6	10	60
7	17	119
8	A	8A
9	8	72
10	4	40
	42+A	306+8A

$$8A - 7.5\,A = 315 - 306$$
$$0.5\,A = 9$$
$$A = 18$$

9.4.1.3 विचलन पध्दतीव्दारे संग्रहीत वारंवारता वितरणाचा मध्य

उदाहरण-8: खालील सामग्रीचा अंकगणितीय x मध्य काढा.

x	10	12	14	16	18	20	22
f	4	5	8	10	7	4	2

उदाहरण:

(i) साधारण पध्दती:

असंग्रहीत वारंवारता वितरणात तुम्ही या सुत्राचा वापर करु शकता.

x_i	f_i	$f_i x_i$
10	4	40
12	5	60
14	8	112
16	10	160
18	7	126
20	4	80
22	2	44
	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 40$	$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 622$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{622}{40} = 15.55$$

(ii) विचलन पध्दती

या पध्दतीत आपणास एका अवलोकनास अनुकुल गृहीत मध्य घ्यावा लागतो. आपण गृहीत मध्य 16 घेतला. A = 16 गृहीत मध्यपासुन दुसऱ्या अवलोकनाचे विचलन सारणीत दिले आहे.

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
10	4	−6	−24
12	5	−4	−20
14	8	−2	−16
16 A	10	0	0
18	7	+2	+14
20	4	+4	+16
22	2	+6	+12
	40		−60+42=−18

वारंवारतेची बेरीज $= 40$

$f_i \times d_i$ च्या गुणाकाराची बेरीज= $-60 + 42$

$$\Sigma f_i d_i = -18$$

मध्य $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 16 + \frac{-18}{40}$

$= 16 - 0.45$

$= 15.55$

9.4.2 मध्यक (Median)

कच्च्या सामग्रीला चढत्या क्रमाणे लिहुन त्यातील मधले अवलोकन म्हणजेच मध्यक होय, मध्यक हा सामग्रीला दोन समान भागात विभागणी करते. एका भागातील किंमती मध्यकापेक्षा मोठ्या आणि दुसऱ्या भागाकडील किंमती मध्यका पेक्षा लहान असतात.

मागील वर्गात शिकल्याप्रमाणे कच्च्या माहितीचे मध्यक खालील प्रमाणे माहित करता येते.

क्रमात मांडलेल्या सामग्रीच्या अवलोकनाची संख्या 'n' आणि 'n' विषम संख्या असल्यास मध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ अवलोकन होते.

n सम संख्या असल्यास मध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ आणि $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ अवलोकन होते.

प्रयत्न करा.

1. 75, 21, 56, 36, 81, 05, 42 चा मध्यक काढा.
2. 7, 10, 15, x, y, 27, 30 चढत्या क्रमात असलेल्या सामग्रीचा मध्यक 17 आहे आणि अजुन एक अवलोकन 50 त्यात मिळविले. असता मध्यक 18 होते. तर x तर y च्या किंमती काढा.

9.4.2.1 वारंवारता वितरणाचा मध्यक

वजनाच्या राशीचे अवलोकन मध्यक काढण्याच्या पध्दतीचे उदाहरण घेऊन चर्चा करु. एका कंपनीतील 100 कर्मचाऱ्यांचे महिण्याचे वेतन घेऊ या.

महिण्याचे वेतन(रु.)	7500	8000	8500	9000	9500	10000	11000
कर्मचारी संख्या	4	18	30	20	15	8	5

दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक कसे माहित करता ? पहिले दिलेल्या सामग्रीस चढत्या किंवा उतरत्या क्रमात मांडणी करा नंतर त्या समान वारंवारतेला सारणीत लिहुन संचित वारंवारता पेक्षा कमी माहित करा. एका विशिष्ट अवलोकना पर्यंतची संचित वारंवारता ही एका विशिष्ट अवलोकना पर्यंतच्या पुढची संचित वारंवारता आहे.

वेतन (x)	कमर्चाऱ्यांची संख्या (f)	संचित वारंवारता (cf)
7500	4	4
8000	18	22
8500	30	52
9000	20	72
9500	15	87
10000	8	95
11000	5	100
	100	

$\frac{N}{2}$ माहित करा आणि मध्यक वर्ग ओळखा ज्याची संचित वारंवारता फक्त $\frac{N}{2}$,वाढविली आहे. जेथें N ही वारंवारतेची बेरीज आहे.

जेथे N= 100 सम म्हणुन $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ आणि $\left(\frac{N}{2}+1\right)^{th}$ अवलोकनास माहित करा जे अनुक्रमे 50 आणि 51 आहे.

सारणीवरुन 50 व्या आणि 51 व्या अवलोकानाची किंमत सारखी आहे ती 8500 मध्ये यते म्हणुन या वितरणाचा मध्यक वर्ग 8500 आहे.

प्रयत्न करा.

1. सामग्रीतील गुणांचा मध्यक काढा.

गुण	15	20	10	25	5
विद्यार्थी संख्या	10	8	6	4	1

2. मध्यक काढण्यासाठी दिलेली माहिती क्रमात लिहिली पाहिजे का?

9.4.3 बहुलक

बहुलक हा अवलोकनाची वांरवारता येणारी किंमत आहे. म्हणजेच अवलोकनातील कमाल वांरवारतेला बहुलक असे म्हणतात.

उदाहरण-9: एका दुकानात विशिष्ठ दिवशी विकलेल्या बुटांच्या आकाराची संख्या खाली दिलेली आहे. त्याचा बहुलक काढा.

6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 10, 7, 6, 7, 9, 7, 6.

सोडवणुक: पहिले आपण अवलोकनास क्रमात लिहिल्यास 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10 वितरण सारणी तयार होते.

आकार	6	7	8	9	10
विकलेल्या बुटांची संख्या	4	5	1	2	1

येथे 7 संख्या वारंवार आली आहे म्हणजे 5 वेळा

$\therefore$ दिलेल्या सामग्रीचा बहुलक(बुटांचा आकार) 7 आहे. यावरुन निर्देशास येते की, 7 नंबरचे बुटांची विक्री जास्त आहे.

विचार करा आणि चर्चा करा

1. तुमच्या वर्गमित्राचे त्यांच्या उंची वरुन वर्गीक़रण करा आणि त्याचा बहुलक काढा.
2. दुकानदारास बुटांचा मागणी करायची असल्यास तो कोणत्या नंबरचे बुट जास्त मागवितो?

उदाहरण-10: 100 गुणांच्या परिक्षेत वर्गातील 20 विद्यार्थ्यांचे गुण खालील प्रमाणे आहेत.

93, 84, 97, 98, 100, 78, 86, 100, 85, 92, 55, 91, 90, 75, 94, 83, 60, 81, 95

(a) वर्ग अवकाश 91-100, 81-90, ...घेऊन वांरवारता सारणी तयार करा.

(b) बहुलक वर्ग काढा. (बहुलक वर्ग म्हणजे वर्गातील सर्वात मोठी वांरवारता असलेला वर्ग

(c) मध्यक असलेला वर्ग अवकाश काढा.

सोडवणुक:

(a)

गुण	वांरवारता	संचित वांरवारता पेक्षा जास्त
91-100	9	20
81-90	6	11
71-80	3	5
61-70	0	2
51-60	2	2
एकुण	**20**	

(b) 91-100 हा बहुलक वर्ग आहे. या वर्गात कमाल वारंवारता आहे.

(c) 20 ची मधली किंमत 10 आहे. जर आपण वरुन मोजल्यास 10 ही 81-90 चा वर्गात येते. जर मी खालुन मोजणी करत वर गेल्यास 10 हे 81-90 या वर्गात येते. मध्यक असलेला वर्ग 81-90 आहे.

9.5 केंद्रीय प्रवृत्तीच्या किंमतीतील विचलन:

जर आपण सारख्या किंमती सर्व सामग्रीत मिळविल्यास किंवा प्रत्येक सामग्रीच्या किंमतीला सारख्या किंमतीने गुणाकार केल्यास केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणास काय घडते.
खालील सारणीचे निरिक्षण करु

विवरण	सामग्री	मध्य	बहुलक	मध्यक
मुळ सामग्रीचा संच	6, 7, 8, 10, 12, 14, 14, 15, 16,20	12.2	14	13
प्रत्येक सामग्रीला 3 मिळविल्यास	9, 10, 11, 13, 15, 17, 17, 18, 19, 23	15.2	17	16
प्रत्येक सामग्रीला 2 वेळा गुणल्यास	12, 14, 16, 20, 24, 28, 28, 30, 32, 40	24.4	28	26

सारणीचे निरिक्षण केल्यानंतर आपणास दिसुन येते की,

बेरीज केली तेव्हा: सामग्रीतील सर्व राशी एक स्थिर राशीला मिळविल्यास त्या सामग्रीचे केंद्रीय परिमाण सुध्दा तेवढेच बदलते. म्हणजे सर्व सामग्रीच्या किंमतीत 3 मिळविल्यास मध्य, बहुलक आणि मध्यक सुध्दा 3 ने वाढतो.

गुणाकार केला तेव्हा: सामग्रीतील सर्व किंमतीला एका स्थिर राशीने गुणाकार केल्यास सामग्रीच्या केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमानात त्याचा प्रभाव पडुन गुणाकार होतो. म्हणजे सर्व किंमतीला 2 नी गुणल्यास सामग्रीचा मध्य, बहुलक आणि मध्यक सुध्दा 2 पट होते.

अभ्यास - 9.2

1. ट्रान्सपोर्ट कार्यालयातील पार्सल चे वजन खाली दिलेले आहे.

वजन(कि.ग्र.)	50	65	75	90	110	120
पार्सलची संख्या	25	34	38	40	47	16

पार्सलचा वजनाचा मध्य काढा.

2. एका गावातील कुंटुंबामधील मुलांची संख्या खाली दिलेली आहे. प्रत्येक कुंटुंबीतील मुलांची सरासरी संख्या काढा.

मुलांची संख्या	0	1	2	3	4	5
कुंटुंबांची संख्या	11	25	32	10	5	1

प्रत्येक कुटुंबातील आणि मुलांची संख्या काढा.

3. खालील वारंवारता वितरणाचा मध्य 7.2 आहे 'K' ची किंमत काढा.

x	2	4	6	8	10	12
f	4	7	10	16	K	3

4. भारताच्या जणगनणा 2011 प्रकारे गावांची जनसंख्या खाली दिलेली आहे.

जनसंख्या(हजारात)	12	5	30	20	15	8
गावांची संख्या	20	15	32	35	36	7

प्रत्येक गावाची सरासरी जनसंख्या काढा.

5. AFLATOUN नावाची सामाजिक आणि आर्थिक विद्याविषयक संस्था हैद्राबाद जिल्ह्यातील हायस्कुलच्या विद्यार्थ्यांना व्दारे बचत कार्यक्रम सुरु केला. मंडळवारी महिण्याची बचत खालील दिलेली आहे.

मंडळ	शाळेची संख्या	एकुण बचत रक्कम (रुपयात)
अंबरपेट	6	2154
तिरुमलगीरी	6	2478
सैदाबाद	5	975
खैरताबाद	4	912
सिकंदराबाद	3	600
बहादुरपुरा	9	7533

प्रत्येक मंडळातील शाळावारी अंकगणितीय मध्य काढा. सर्व शाळेच्या बचतिचा अंकगणितीय मध्य काढा.

6. शाळेच्या 9 व्या वर्गाच्या मुला आणि मुलींची उंची खाली दिलेली आहे.

उंची (से.मी.)	135	140	147	152	155	160
मुले	2	5	12	10	7	1
मुली	1	2	10	5	6	5

मुलांची आणि मुलीची उंचीचा तुलना करा.

(सुचना : मुले आणि मुलींच्या उंचीचा मध्यक काढा)

7. जगातील क्रिकेटपटुंनी काढलेली शतके खालील दिली आहे.

शतकाची संख्या	5	10	15	20	25
क्रिकेटपंटुची संख्या	56	23	39	13	8

दिलेल्या सामग्रीचा मध्य, मध्यक, आणि बहुलक काढा.

8. नविन वर्षाच्या संदर्भात मिठाईच्या दुकानदाराने दुकानात मिठाईचे पॅर्केट तयार केले. मिठाईच्या पॉकेटची संख्या आणि त्यांची किंमत खाली दिलेली आहे.

पॅकेटची किंमत(रुपयात)	25रु	50रु	75रु	100रु	125रु	150रु
पॅकेटची संख्या	20	36	32	29	22	11

सामग्रीचा मध्य, मध्यक आणि बहुलक काढा.

9. तिन विद्यार्थ्यांचे सरासरी वजन 40 कि.ग्र. आहे. त्यापैकी रंगा नावाचे विद्यार्थीचे वजन 46 कि.ग्र. आहे. इतर दोन विद्यार्थी रहीम आणि रेशमाचे वजन समान आहे. तर रहिमचे वजन काढा.

10. एका माध्यमिक शाळेच्या विविध वर्गाच्या विद्यार्थ्यांनी एका अनाथालयाने दिलेली देणगी खालील सारणीत आहे.

वर्ग	प्रत्येक विद्यार्थ्यांची देणगी (रुपयात)	देणगी देणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या
VI	5	15
VII	7	15
VIII	10	20
IX	15	16
X	20	14

सामग्रीचा वापर करुन मध्य, मध्यक आणि बहुलक काढा.

11. चार अनोळखी संख्या आहेत. पहिल्या दोन संख्येचा मध्य 4 आहे. आणि पहिल्या तिन संख्यांचा मध्य 9 आहे. सर्वचारही संख्येचा मध्य 15 आहे. जर त्या चार संख्येपैकी एक संख्या 2 आहे. तर इतर संख्या काढा.

आपण काय चर्चा केली?

- सामग्रीचे वास्तविक अवलोकन त्याच्या वारंवारता सोबत तक्त्यात दाखविले आहे. या तक्त्यास असंग्रहीत वारंवारता वितरण सारणी किंवा अवलोकांनाच्या वजनाच्या तक्ता म्हणतात.
- जास्त अवलोकन असलेली सामग्री वारंवारता सारणीत दाखविल्यामुळे सामग्रीचे बेरीज एकाच वेळी पाहु शकते. सामग्रीच्या व्याप्तीला ओळखणे, कोणते अवलोकन वारंवारता येत आहे ओळखणे आणि सामग्रीचे विश्लेषण करुन सुलभतेने व्याख्या करणे.
- केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणाचे प्रकार: मध्य, मध्यक आणि बहुलक
- केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे ही सामग्रीची विचित्र किंमत आहे जी इतर अवलोकनास एकत्र करते.
- मध्य हा सामग्रीच्या अवलोकानाच्या बेरजेला एकुण अवलोकनाने भागल्यास येतो.

$$\text{मध्य} = \frac{\text{अवलोकनाची बेरीज}}{\text{अवलोकनांची संख्या}} \quad \text{or} \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

- असंग्रहीत वारंवारता वितरणाचा अंकगणितीय मध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$.

- मध्य विचलन पध्दतीव्दारे अंकगणितीय $A= \quad + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$, A गृहीत मध्य, Σf वारंवारतेची बेरीज, $\Sigma f\, d$ विचलनाची आणि वारंवारतेचा गुणाकार होय.
- मध्यक हे सामग्रीचे मधले अवलोकन आहे जेव्हा त्यास क्रमात मांडणी (चढत्या किंवा उतरत्या) करतो.
- जेव्हा एकुण अवलोकानाची संख्या 'n' ही विषम असणे मध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ अवलोकन होते.
- जेव्हा एकुण अवलोकानाची संख्या 'n' सम असते मध्यक हे $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ आणि $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ अवलोकानाची सरासरी असते.
- मध्यक सामग्रीला दोन समान भागात विभागणे एकभागाच्या सर्व किंमती मध्यकाच्या मोठ्या आणि दुसऱ्या भागाच्या सर्व किंमती मध्यकापेक्षा लहान असतात.
- बहुलक ही अवलोनकाच्या किंमतीची वारंवारता येणारी संख्या आहे म्हणजे अवलोकानाच्या कमाल वारंवारतेला बहुलक असे म्हणतात.

मेंदुची गंमत

विद्यार्थ्यांच्या रांगेत गोपी हा डावीकडुन 7 वा मुलगा आहे.आणि शंकर उजवी कडुन 5 वा मुलगा आहे. जर त्यांनी त्याची जागा बदलुन गोपी उजवीकडुन 8 वा मुलगा आहे. तर त्या रांगेत किती विद्यार्थी आहेत?

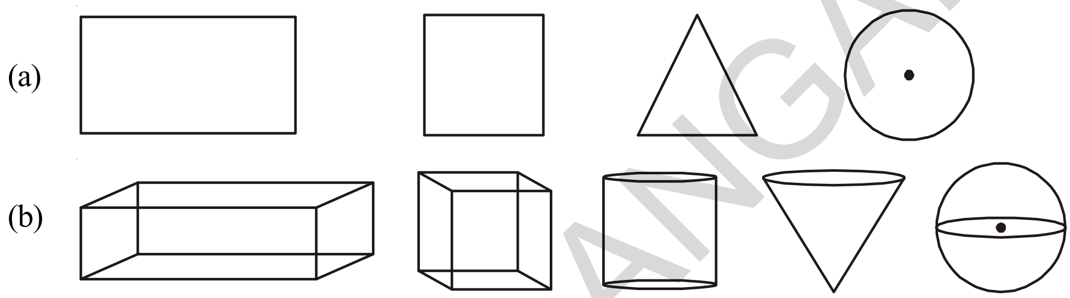
चैतन्याने झाडाच्या सालीवर 1.5 मी उंचीवर तीचे नाव कोरले. झाडास जमीनीवरुन 6.75 मी. उंची प्राप्त झाली असता आता जमीनीवरुन उंचीवर चैतन्याचे नाव निश्चित करता येते.

तुमच्या उत्तरासाठी कारण सांगा.

10 पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि घनफळ

10.1 प्रस्तावना

खालील आकृत्यांचे निरिक्षण करा.

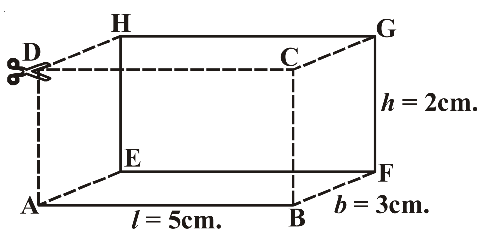


गट (a) आणि (b) मधील आकृत्या मध्ये काही भिन्नता तुमच्या लक्षात आली आहे का?

गट (a) मधील आकृत्या सहजरित्या तुमच्या वहीवर तुम्ही काढु शकता. या आकृत्यांना फक्त लांबी आणि रुंदी आहे यांना व्दिमीतीय आकृत्या किंवा 2-D च्या वस्तु म्हणतात. गट (b) मधील आकृत्यांना लांबी रुंदी आणि उंची आहे. यांना त्रिमीतीय आकृत्या किंवा 3-D या वस्तु म्हणतात. यांना भरीव आकृत्या म्हणतात. आपल्या सभोवतील आपण सतत भरीव आकृत्या पाहत असतो. दंडगोल, शंकु आणि गोल सारख्या 3-D वस्तुंच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि घनफळ कसे माहित करावे या विषयी आपण आता शिकणार आहेत.

10.2 आयतज(CUBOID) च्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ

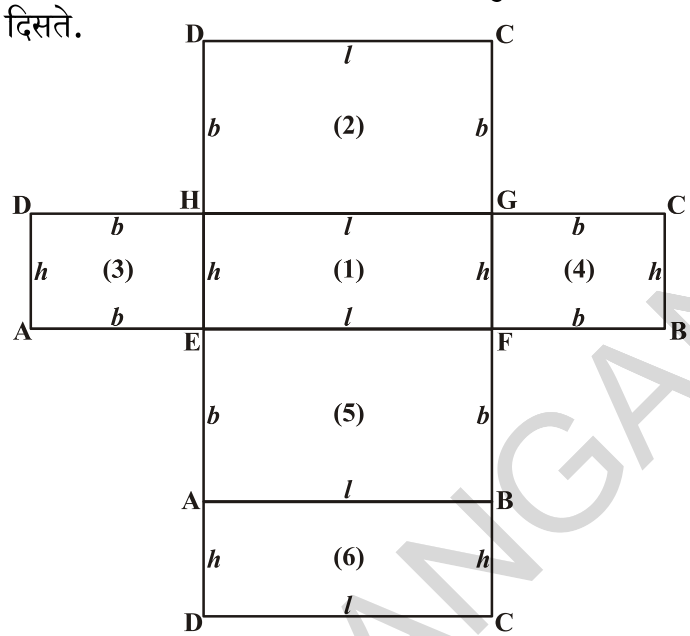
आयतज चे निरिक्षण करा आणि माहित करा त्याला किती बाजु आहेत?त्याला कोपरा आणि किती कडा आहेत? बाजुची कोणती जोडी आकारात सारखी असते? आयतजच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ कसे माहित करावे? या बाबत तुम्हाला काही माहित आहे का?



आता, आयतजच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ माहित करु या.

वरील आकृती मध्ये (l) = 5 से.मी. रुंदी(b) = 3 सें.मी. उंची (h) = 2 से.मी.

दिलेल्या आयतज ला CD, ADHE आणि BCGF वरुन कापुन उघडले तर आपल्याला ती आकृती खालील प्रमाणे दिसते.



असे दिसत आहे की, तीन सारख्या आयताच्या जोड्याच्या सहा आयता पासुन आयतज चे पृष्ठभागाचे क्षेत्र बनलेले आहे. आयतज चे एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ माहित करण्यासाठी आपल्याला या सहा आयताच्या बाजुच्या क्षेत्रफळाची बेरीज करावी लागणार आहे. या क्षेत्रफळांची बेरीज म्हणजे आयताज चे एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ होय.

EFGH आयता चे क्षेत्रफळ $= l \times h = lh$ .....(1)

HGCD आयता चे क्षेत्रफळ $= l \times b = lb$ .....(2)

AEHD आयता चे क्षेत्रफळ $= b \times h = bh$ .....(3)

FBCG आयता चे क्षेत्रफळ $= b \times h = bh$ .....(4)

ABFE आयता चे क्षेत्रफळ $= l \times b = lb$ .....(5)

DCBA आयता चे क्षेत्रफळ $= l \times h = lh$ .....(6)

वरील क्षेत्रफळ मिळविल्या नंतर आपल्याला आयतज च्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ मिळते.

आयतजच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6)$ चे क्षेत्रफळ

$= lh + lb + bh + bh + lb + lh$

$= 2\,lb + 2lh + 2bh$

$= 2(lb + bh + lh)$

(1), (3), (4), (6) हे आयतज चे पार्श्व पृष्ठभाग आहेत.

आयतजच्या पार्श्वपृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $= (1) + (3) + (4) + (6)$ चे क्षेत्रफळ

$= lh + bh + bh + lh$

$= 2lh + 2bh$

$= 2h\,(l + b)$

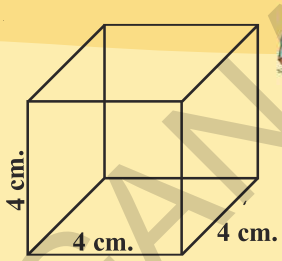
वरील आकृती साठी आता, आयतजच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ माहित करु या. अशा प्रकारे एकुण पृष्ठभागाचा क्षेत्रफळ 62 से.मी..^{2} आणि पार्श्वपृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ 32 से.मी..^{2} आहे.

प्रयत्न करा.

'l' से.मी. कडा असलेल्या एक घन घ्या. आणि याच्या अगोदर केलेल्या कृती प्रमाणे त्याला कापा आणि घनाचे एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि पार्श्वपृष्ठाभागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.

हे करा

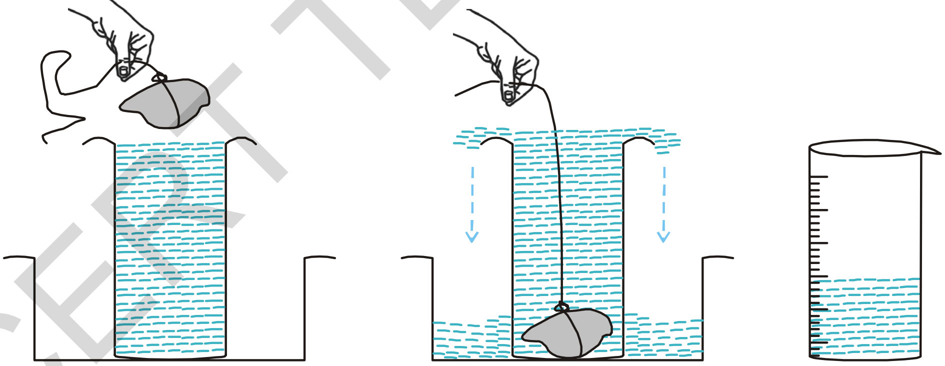
1. 4 से.मी. बाजु असलेल्या घनाचे एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि पार्श्व पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.
2. घनाचा प्रत्येक कडा 50% ने वाढ होत होय. पृष्ठभागाच्या क्षेत्रफळामध्ये वाढणारे दशांश माहित करा.



10.2.1घनफळ (Volume)

To recall the concept of volume, खालील कृती करु या.

एक काचेचे बिकर घ्या. आणि ते एका पात्रात ठेवा. काचेच्या बिकर मध्ये काठा पर्यंत पाणी भरा. त्यात एक भरीव वस्तु (दगड) हळुने सोडा. बिकर मधील काही पाणी पात्रात सांडेल. सांडलेले पाणी एका मेजरींग जार मध्ये घ्या. या वरुन भरीव वस्तुने व्यापलेले जागाला घनफळ असे म्हणतात.



प्रत्येक वस्तु काही जागा व्यापते, वस्तु ने व्यापलेल्या जागेला त्याचे घनफळ म्हणतात. घनफळ हे घन एककात मोजले जाते.

10.2.2 पात्राची क्षमता:

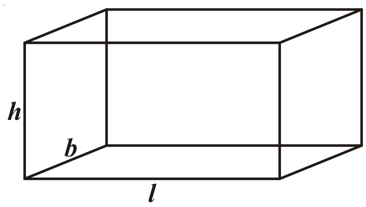
जर वस्तु पेाकळ असेल तर आत रिकामे असते. आणि त्याला हवेने किंवा कोणत्याही इतर द्रवाने भरु शकतो. असे भरल्याने त्याला एक रुप येते. आत मध्ये भरु शकणाऱ्या वस्तुंच्या घनफळाला पात्राची क्षमता म्हणतात.

आयतज चे घनफळ : सारख्या परिमाणाच्या कार्ड बोर्ड वरुन काही आयतज कापुन घ्या. आणि एका वर एक त्याची मांडणी करा. तयार झालेल्या रुपा विषयी तुम्ही काय म्हणता?

हे आयतज चे रुप आहे.

आता आयतज चे घनफळ माहित करु या.

आयताच्या लांबी च्या समान याची लांबी असते. आणि रुंदी हे आयताच्या रुंदी समान असते.



आयताच्या ढिगाची उंची ही आयतजची उंची 'h' होय.

आयतज ने व्यापलेली जागा = आयताने व्यापलेले प्रतलिय क्षेत्राचे क्षेत्रफळ × उंची

आयतज चे घनफळ $= l\,b \times h = l\,bh$

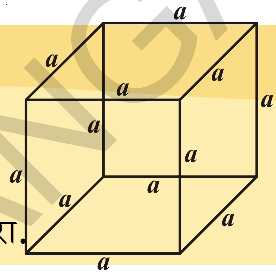
$\therefore$ आयतजचे घनफळ $= l\,bh$

येथे l, b, h हे आयतज चे लांबी, रुंदी आणि उंची होय.

प्रयत्न करा

(a) 'a' एकक कडा असलेल्या घना चे घनफळ माहित करा

(b)1000 से.मी.3 घनफळ असलेल्या घनाचे कडा माहित करा.



आयतज आणि घन हे भरीव आहेत असे विचारात घेऊ. त्याला आपण उभी चिती म्हणु शकतो का? आयतज आणि घनाच्या पार्श्वबाजु आयत आहेत आणि पाया ला ते लंब असल्याने आयतज आणि घनाला सुध्दा उभी चिती म्हणतात. हे तुम्ही निरिक्षण केले.

आयतज च्या पायाचे क्षेत्रफळ आणि त्याच्या उंचीचा गुणाकार म्हणजे त्या आयतज चा घनफळ हे आपल्याला माहित आहे.

आयतज चे घनफळ (इष्टीका चिती) = पाया चे क्षेत्रफळ × उंची

$= lb \times h$

$= lbh$

घनामध्ये $= l = b = h = s$ (सर्व मापे समान असतात)

घनाचे क्षेत्रफळ $= s^2 \times s$

$= s^3$

आयतजच्या घनफळा साठी सुत्राचा अंदाज लावणे स्वभाविक आहे. हे सर्व उभ्या चितीसाठी लागु होते.

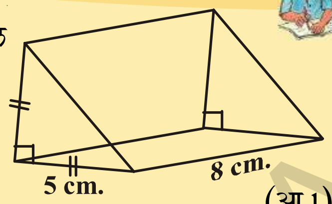
म्हणुन उभ्या चितीचे घनफळ = पायाचे क्षेत्रफळ × उंची

उभ्या चितीचा पाया जर समभुज त्रिकोण असेल तर त्याचे घनफळ $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times h$ घन एकक.

येथे 'a' हा पायाच्या प्रत्येक बाजुची लांबी आहे. आणि 'h' ही चितीची उंची आहे.

हे करा

1. जर $l = 12$ सें.मी., $b = 10$ से.मी. आणि $h = 8$ से.मी. असेल तर आयतज चे घन्फळ माहित करा.
2. घनाचे घनफळ माहित करा जर त्याची कडा 10 से.मी असेल.
3. आकृती 1 मधील समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाकृती चितीचे घनफळ माहित करा.



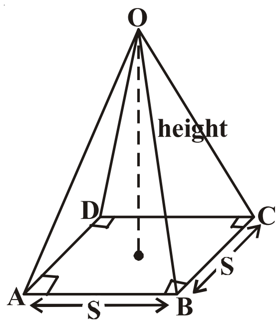
(आ.1)

चिती सारखे पिरॉमीड सुध्दा त्रिमीतीय भरीव आकृती होय. प्राचीन काळापासुन मानवांना ही आकृती आकर्षीत करत आहे. इजिप्त च्या पिरॉमीड विषयी तुम्ही वाचलेच असाल. हे जगाच्या सात आश्चर्या पैकी एक आहे. चौरसाच्या आधारावरचे अचुक उदाहरण आहे. ते कसे बनविले ? या भरीव बांधणी कसे बांधण्यात आले हे कोणालाच माहित नाही.

तुम्ही पिरॉमीड चा रुप काढु शकता का?

चिती आणि पिरॉमीड मध्ये कोणता फरक तुमच्या लक्षात आला?

चौरसाच्या पायाचा पिरॉमीड म्हणुन आपण का म्हणतो?



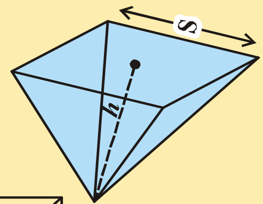
येथे OABCD हा चौरस पिरॉमीड आहे ज्याची बाजु 'S' एकक आणि उंची 'h' एकक आहे.

जर पाया आणि उंची सारखी असेल तर घनाच्या घनफळा मध्ये चौरस पिरॉमीडच्या घनफळाचा तुम्ही अंदाज करु शकता का?

कृती

एक चौरस पिरॉमीड घ्या. आणि सारखी पाया आणि सारखी उंची असलेले घन पात्र घ्या.

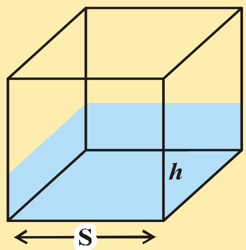
द्रवाने पिरॉमीड पुर्णपणे भरा आणि ते घनामध्ये ओता. घन भरण्यासाठी किती वेळा टाकावे लागणार आहे? या वरुन तुम्ही काय अनुमान काढला?



यাप्रकारे पिरॉमीड चे घनफळ

$= $ उभ्या चितीच्या घनफळाच्या $\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} \times$ पाया चा क्षेत्रफळ $\times$ उंची



सुचना : उभ्या चितीचा पाया, पार्श्व कडेला लंब असते आणि सर्व पार्श्वबाजु आयत असतात.

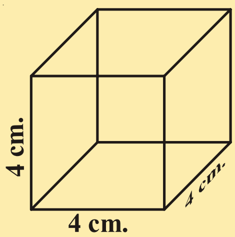
हे करा

1. चौरस पाया 10 से.मी. आणि उंची 8 से.मी. असलेल्या पिरॅमीडचे घनफळ माहित करा.
2. घनाचे घनफळ 1200 घन से.मी. आहे. सारखी उंची असलेल्या चौरस पिरॅमीड चे घनफळ माहित करा.

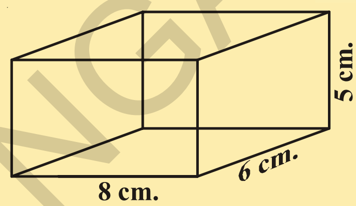
अभ्यास - 10.1

1. खालील उभ्या चितीचे पार्श्व पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.

(i)



(ii)



2. घनाचे एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ 1350 चौ.मी. आहे. त्याचे क्षेत्रफळ माहित करा.

3. चार भिंतीचया एका खोलीचे क्षेत्रफळ माहित करा. (त्याला खिडकी दरवाजे नाही आहे समजा) जर त्याची लांबी 12 मीटर रुंदी 10 मीटर आणि उंची 7.5 मिटर

4. आयतज चे घनफळ 1200 से.मी.^{3} लांबी 15 से.मी. आणि रुंदी 10 से.मी. आहे. त्याची उंची माहित करा.

5. एका पेटीच्या एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ किती जर

(i) प्रत्येक परिमाण दुप्पट असेल तर? (ii) प्रत्येक परिमाण तिप्पट असेल तर?

तुमच्या शब्दात व्यक्त करा. जर प्रत्येक परिमाण n वेळेत वाढत असेत तर तुम्ही पेटीच्या एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ माहित करु शकता काय?

6. चितीला पाया 3 से.मी., 4 से.मी. आणि 5 से.मी. ने त्रिकोणीय रुपात आहे. जर चितीची उंची 10 से.मी. असेल तर चितीचे घनफळ माहित करा.

7. नियमीत चौरस पिरॅमीडची उंची 3 मी. आणि त्याची परिमीती 16 मी. आहे. पिरॅमीड चे घनफळ माहित करा.

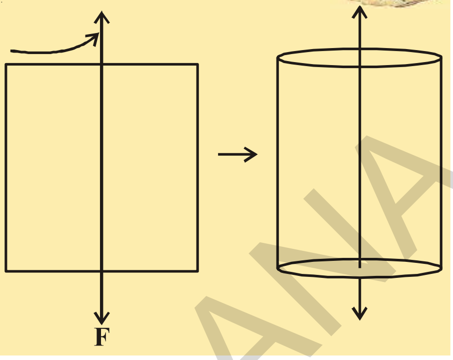
8. 50 मी.लाब आणि 25मी. रुंदी ने आयतज च्या रुपात ऑलीपीक स्वीमींग पुल आहे. जर सगळी कडे त्याची खोली 3 मी. असेल. तर त्यात किती लिटर पाणी मावते?

कृती

एक आयताकार कागद कापुन घ्या. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे त्या कागदावर एक जाड तार चिपकवा नंतर तार च्या दोन्ही बाजुना हाताने पकडुन त्याला वेगाने फिरवा.

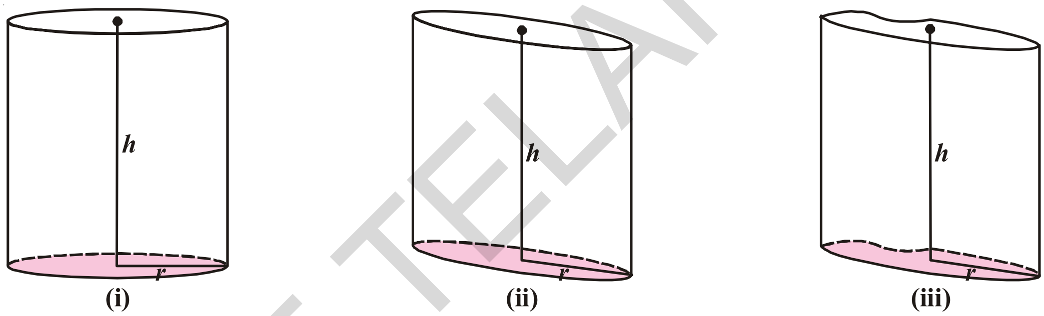
आयत फिरतांना जे आकार तयार झाले त्याला तुम्ही ओळखले का?

ते दंडगोलाच्या रुपात आहे हे तुम्हाला आठवते का?



10.3 उर्ध्व - वृत्ताकार - दंडगोल (Right Circular Cylinder)

खालील दंडगोलाचे निरिक्षण करा.



(i) आकृती (i), (ii) (iii) मध्ये कोणती समानता तुम्ही निरिक्षण केलात?

(ii) आकृती (i), (ii) (iii) मध्ये कोणती भिन्नता तुम्ही निरिक्षण केलात?

(iii) कोणत्या आकृतीत रेषाखंड हा पाया ला लंब आहे?

एक वक्र पृष्ठभाग आणि दोन्ही टोका वरचे एकरुप वर्तुळाकार बाजुची प्रत्येक दंडगोल बनते जर वर्तुळाकार बाजुचे केंद्र रेषाखंडानी जोडले तर ती पाया वर लंब असते. अशा दंडगोलाला उर्ध्व वृत्ताकार दंडगोल म्हणतात.

वरील आकृतीमध्ये कोणते उर्ध्व वृत्ताकार दंडगोलाकर आहे. ते माहित करा? कोणते नाही ? कारणे द्या?

दंडगोल बनवणारे कृती करु या.

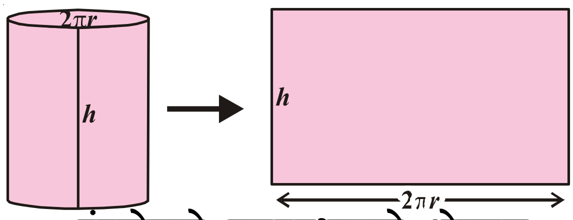
10.3.1 दंडगोलाचे वक्रपृष्ठभाग क्षेत्रफळ(Curvded Surface Area of A Cylinder)

कार्ड बोर्ड ने तयार झालेली उर्ध्व - वृत्ताकार - दंडगोल घ्या. वक्र पृष्ठभागाला कापा आणि घडी काढा. जेव्हा दंडगोलाचे घडी उघडे करत असतांना निरिक्षण करा कि त्याची उंची आणि वर्तुळाकार पाया कसा बदलत आहे. घडी काढल्यानंतर दंडगोल तुम्हाला कोणत्या रुपात दिसते?

तुम्हाला हे आयताकार रुपात दिसते. दंडगोलाच्या वक्र पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ हे आयताच्या क्षेत्रफळा एवढा असतो. त्याची उंची आयताच्या रुंदी एवढी असते. पायाचा परिघ आयताच्या लांबी एवढा असतो.

दंडगोलाची उंची = आयताची रुंदी ($h = b$)

दंडगोलाच्या पायाचा 'r' त्रिजेचे परिघ = आयताची लांबी ($2\pi r = l$)



दंडगोलाच्या वक्रपृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ. = आयताचे क्षेत्रफळ

= लांबी × रुंदी

= $2\ \pi r \times h$

= $2\pi rh$

दंडगोलाचे वक्रपृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ = $2\pi rh$

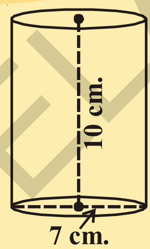
हे करा

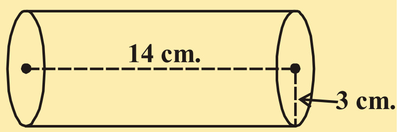
खालील दंड गोलाचे प्रत्येकाचे वक्र पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.

(i) $r = x$ से.मी., $h = y$ से.मी.

(ii) $d = 7$ से.मी., $h = 10$ से.मी.

(iii) $r = 3$ से.मी., $h = 14$ से.मी.

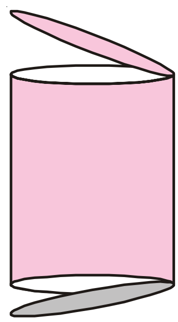




10.3.2 दंड गोलाचे एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ (Total Surface area of a Cylinder)

बाजुच्या आकृतीचे निरिक्षण करा.

हे उर्ध्व वृत्ताकार दंडगोल आहे. हे तुम्ही माहित केले का? त्याचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ मिळविण्यासाठी तुम्ही कोणत्या बाजु मिळवाल? ते वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ आणि दोन वर्तुळाकर बाजुचे क्षेत्रफळ होय.



आता, दंडगोलाचे एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ

= वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ + वरच्या भागाचे क्षेत्रफळ + पायाचे क्षेत्रफळ

= $2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

= $2\pi rh + 2\pi r^2$

= $2\pi r\ (h + r)$

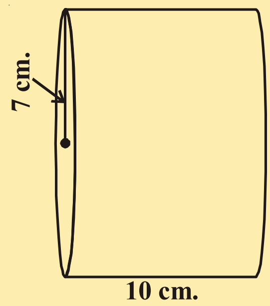
= $2\pi r\ (r + h)$

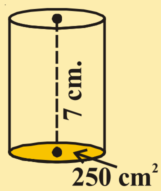
$\therefore$ दंडगोलाचे एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ = $2\pi r\ (r + h)$

येथे 'r' हे दंडगोलाचे त्रिज्या आणि 'h' ही त्याची उंची आहे.

हे करा

खालील प्रत्येंक दंडगोलाचे एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.

(i) 

(ii) 

10.3.3 दंडगोलाचे घनफळ (Volume of a Cylinder)

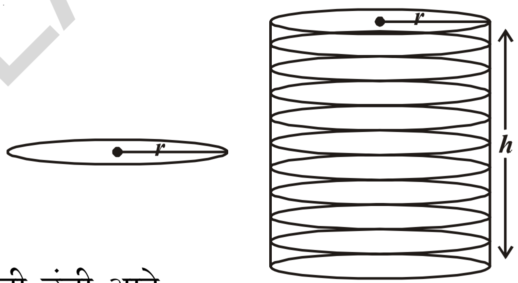
सारख्या त्रिज्यांचे वर्तुळ घ्या आणि एकावर एका त्याची मांडणी करा.
हे कृती करा आणि तयार झालेल्या दंडगोल आहे का नाही? ते माहित करा.

आकृती मध्ये 'r' हे वर्तुळाची त्रिज़्या आहे आणि वर्तुळाच्या ढिगाच्या 'h' उंची आहे

दंडगोलाचे घनफळ $= \pi r^2 \times$ उंची

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

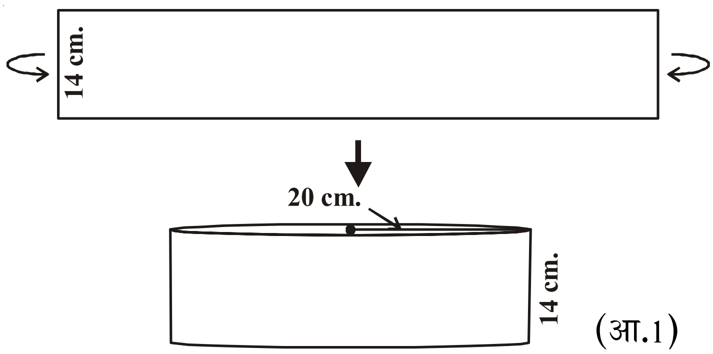


म्हणुन दंडगोलाचे घनफळ $= \pi r^2 h$

येथे 'r' हा दंडगोलाचा त्रिज्या आहे आणि 'h' ही उंची आहे.

उदाहरण -1: 14 से.मी. जाडीच्या आयताकार कागदाला गुंडाळले तर 20 से.मी. त्रिजेचे दंडगोल तयार होते. दंडगोलाचे घनफळ माहित करा (आकृती 1) ? $\left(\text{घ्या } \pi = \frac{22}{7}\right)$

सोडवणुक: आयताच्या जाडी ने गुंडाळले तर दंडगोल तयार होते. म्हणुन कागदाची जाडी, दंडगोलाची उंची बनते आणि दंडगोलाची त्रिज्या 20 से.मी. आहे.



दंडगोलाची उंची = h = 14 से.मी.

त्रिज्या (r) = 20 से.मी.

दंडगोलाचे घनफळ $V = \pi r^2 h$

(आ.1)

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14$$

$$= 17600 \text{ से.मी.}^3$$

म्हणुन दंडगोलाचे घनफळ 17600 से.मी.^{3}

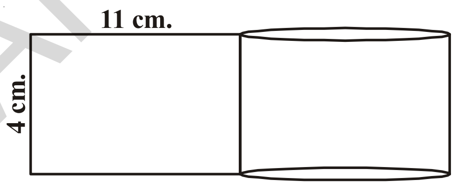
उदाहरण-2: 11 से.मी. × 4 से.मी.चा आयताकार कागद परस्परांना न व्यापता घडी केल्याने 4 से.मी. उंचीचा दंडगोल तयार होते. दंडगोलाचे घनफळ माहित करा.

सोडवणुक : कागदाची लांबी ही दंडगोलाच्या पायाचा परिघ बनतो आणि कागदाची जाडी दंडगोलाची उंची होती.

दंडगोलाची त्रिज्या = r आणि उंची = h

दंडगोलाचा पायाची परिघ = $2\pi r = 11$ से.मी.

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$



$$\therefore \quad r = \frac{7}{4} \text{ से.मी.}$$

$$h = 4 \text{ से.मी.}$$

दंडगोलाचे घनफळ $(V) = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times 4 \text{ cm}^3$$

$$= 38.5 \text{ से.मी.}^3.$$

उदाहरण-3: 44 से.मी. × 18 से.मी. चा आयताकार कागद लांबी वरुन गुंडाळल्याने दंडगोल तयार होतो. समजा दंडगोल भरीव (पुर्ण भरलेले) असेल तर त्याची त्रिज्या आणि एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ माहित करा.

सोडवणुक: दंडगोलाची उंची = 18 से.मी.

दंडगोलाचा पायाचा परिघ = 44 से.मी.

$2\pi r = 44$ से.मी.

$$r = \frac{44}{2 \times \pi} = \frac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7\text{cm.}$$

एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $= 2\pi r(r + h)$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times 7(7+18)\text{cm}^2$$

$$= 1100 \text{ से.मी.}^2.$$

उदाहरण-4: 5 मी.मी. जाडीची वर्तुळाकार चकत्या एकावर एक ठेवले असता 462 से.मी.^{2} वक्र पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ असलेले दंडगोल तयार होते. जर त्रिज्या 3.5 से.मी. असेल तर चकत्याची संख्या माहित करा.

सोडवणुक: चकतीची जाडी $= 5$ मी.मी. $= \frac{5}{10}\text{cm} = 0.5\text{cm}$

चकती ची त्रिज्या $= 3.5$ से.मी.

दंडगोलाचा वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= 462$ से.मी.^{2}.

$$\therefore\ 2\pi rh = 462 \qquad \text{..... (i)}$$

समजा चकत्यांची संख्या x

$\therefore$ दंडगोलाची उंची $= h =$ चकतीची जाडी $\times$ चकत्यांची संख्या

$$= 0.5\,x$$

$$\therefore\ 2\,\pi rh = 2\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 0.5x \quad \text{..... (ii)}$$

(i) आणि (ii) वरुन

$$2\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 0.5x = 462$$

$$\therefore\ x = \frac{462\times 7}{2\times 22\times 3.5\times 0.5} = 42 \text{ discs}$$

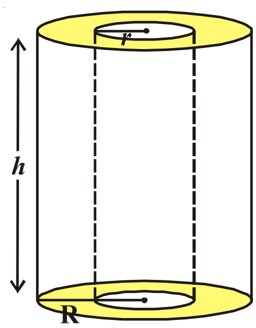
उदाहरण-5: उंची 10 से.मी. आणि बाह्य त्रिज्या 8 से.मी. असलेल्या पोकळ दंडगोलाचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $338\,\pi$ से.मी.^{2}. धातुच्या पोकळ दंडगोलाची जाडी माहित करा.

सोडवणुक : बाह्य त्रिज्या $= R = 8$ से.मी.

आतिल त्रिज्या $= r$

उंची $= 10$ से.मी.

एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $= 338\pi$ से.मी.^{2}.



पण एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ = बाह्य दंडगोलाचे क्षेत्रफळ

+ आतील दंडगोलाचे क्षेत्रफळ

+ पायाच्या क्षेत्रफळाच्या दुप्पट

$= 2\pi Rh + 2\pi rh + 2\pi (R^2 - r^2)$

$= 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2)$

$\therefore\ 2\pi (Rh + rh + R^2 - r^2) = 338\,\pi$

$Rh + rh + R^2 - r^2 = 169$

$\Rightarrow\ (10 \times 8) + (r \times 10) + 8^2 - r^2 = 169$

$\Rightarrow\ r^2 - 10r + 25 = 0$

$\Rightarrow\ (r - 5)^2 = 0$

$\therefore\ r = 5$

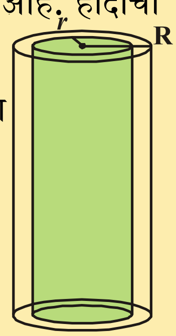
$\therefore$ धातुची जाडी $= R - r = (8 - 5)$ से.मी. $= 3$ से.मी.

प्रयत्न करा.

1. दंडगोलाची पार्श्व पृष्ठभाग क्षेत्रफळ तेच ठेऊन जर दंडगोलाची त्रिज्या दुप्पट केली तर त्याची उंची किती असेल?
2. गीझर (पाणी गरम करण्याचे यंत्र) च्या पाईप ची लांबी 14 मी. आणि व्यास 5 से.मी. आहे. तर पाण्याला गरम कारण्याच्या या गीझरच्या एकुण विकीर्ण पृष्ठभाग माहित करा.

अभ्यास 10.2

1. धातुच्या जाडपट्टी ने बनलेली बंद दंडगोल हौदची उंची 1.4 सें.मी.आणि पायाची त्रिज्याची 56 से.मी. आहे. तर हे बनविण्यासाठी किती धातुच्या पट्टीची आवश्यकता आहे?(चौरस मीटर व्यक्त करा)
2. दंडगोलाकाराचे घनफळ 308 से.मी.^{3}. आहे. त्याची उंची 8 से.मी. आहे. तर त्याचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ आणि पार्श्व पृष्ठभाग क्षेत्रफळ माहित करा.
3. धातुच्या आयतजची माप 22 से.मी. × 15 से.मी. × 7.5 से.मी. आहे. याला वितळवुन 14 से.मी. उंचीचे दंडगोल बनविले. त्याची त्रिज्या किती आहे?
4. एक पाण्याची हौद दंडगोलाच्या रुपात आहे. त्याची क्षमता 61.6 qbic मीटर आहे. हौदाचा व्यास 5.6 मी. आहे. तर हौदाची उंची माहित करा?
5. एक धातुचा पाईप 77 से.मी. लांबीची आहे. आतील व्यास 4 से.मी. आणि बाहेरील व्यास 4.4 से.मी. आहे(आकृती पहा) तर माहित करा त्याचे
   (i) आतील वक्र पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ
   (ii) बाहेरील वक्र पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ
   (iii) एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ



6. एक दंडगोलीय पिल्लराचा व्यास 56 से.मी. आणि उंची 35 मी. आहे. भवनाला 16 पिल्लर आहेत. जर रंग लावण्याचा दर प्रति 1 मी^{2} ला 5.50 रुपये आहे तर सर्व पिल्लरच्या वक्र पृष्ठभागाला रंग लावण्याचा खर्च माहित करा.

7. एका रोलरचा व्यास 84 से.मी. आणि त्याची लांबी 120 से.मी. आहे. ते खेळायच्या मैदानाला लेवल करण्यासाठी एका वेळी 500 पुर्ण फेऱ्या होते. तर खेळायच्या मैदानाचे क्षेत्रफळ मी^{2} मध्ये माहित करा.

8. वर्तुळाकार विहिरीचा आतिल व्यास 3.5 मी. आहे. त्याची खोली 10मी. आहे तर माहित करा
   (i) त्याचा आतील वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ
   (ii) 40 रुपये प्रति मी^{2} दराने या वक्र पृष्ठभागाला प्लॅस्टरींग करण्याचा खर्च

9. माहित करा.
   (i) 4.2 मी. व्यास आणि 4.5 मी. उंची असलेल्या पेट्रोल साठवणाऱ्या बंद हौदाचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ
   (ii) जर हौद बनवतांना $\frac{1}{12}$ लोखंड वाया गेला तर किती लोखंडाचा वापर करण्यात आला

10. एका बाजुने उघडी असलेली दंडगोलाय ड्रमची आतील त्रिज्या 28 से.मी. आणि उंची 2.1 मी. आहे. तुम्ही त्या ड्रम मध्ये किती पाणी साठवु शकता? (1 लिटर = 1000 cc.)

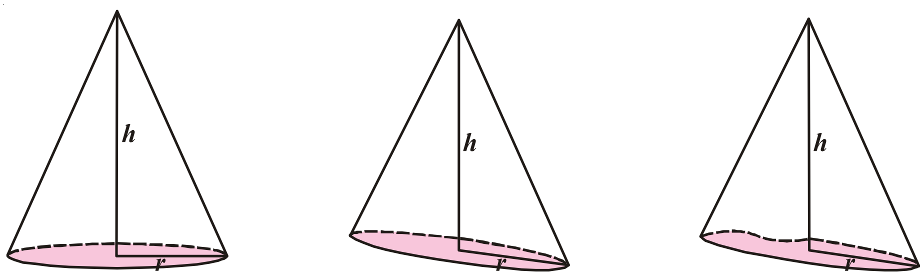
11. दंडगोलाचा वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ 1760 से.मी.^{2} आहे. आणि त्याचा घनफळ 12320 से.मी.^{3} त्याची उंची माहित करा

10.4 उर्ध्व वर्तुळाकार शंकु (Right Circular Cone)

वरील आकृत्याचे निरिक्षण करा आणि ते कोणत्या भरीव रुपा सारखे आहेत?

हे शंकु च्या रुपात आहेत.

खालील शंकुचे निरिक्षण करा.



(i) (ii) (iii)

(i) या कोनामध्ये कोणते सामाईक गुणधर्मा आहेत हे तुम्ही माहित केले?
(ii) त्यामधील कोणते भिन्नता तुमच्या लक्षात आली ?

आकृती (1) मध्ये पार्श्व पृष्ठभाग हे वक्र आहे आणि पाया हा वर्तुळ आहे. शंकुचा शिरोबिदु आणि वर्तुळाकर पायाचा केद्रबिंदु याना जोडणारा रेषाखंड हा त्या पायाच्या त्रिज्येला लंब असतो. या प्रकारच्या शंकुला लंब वर्तुळाकार शंकु म्हणतात.

आकृती (2) मध्ये त्याला वर्तुळाकार पाया आहे. पण त्याची उभी उंची शंकुच्या त्रिज्येजा लंब नाही आहे. अशा प्रकारचे शंकु लंब वर्तूळाकार शंकु नसतात.

आकृती (3) मध्ये उभी उंची पायाला लंब आहे. पण पाया हा लंब आहे. पण पाया हा वर्तुळाकार नाही आहे.

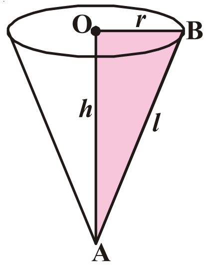
म्हणुन हा शंकु लंब वर्तुळाकार शंकु नाही आहे.

10.4.1 शंकुची तिरपी उंची

बाजुच्या आकृतीत (शंकु) $\overline{AO}$ हे $\overline{OB}$ ला लंब आहे.

ΔAOB हा काटकोन त्रिकोण आहे.

$\overline{AO}$ हा शंकुची उंची आहे. आणि $\overline{OB}$ हे शंकुच्या त्रिजेचे समान आहे.



ΔAOB वरुन

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = h^2 + r^2$ (AB ही तिरपी उंची = l)

$l^2 = h^2 + r^2$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

कृती

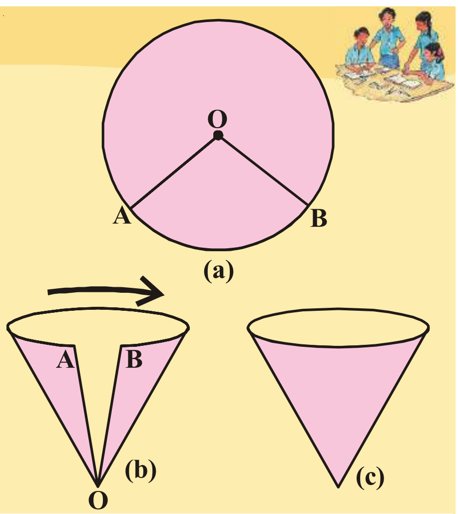
वर्तुळखंडा वरुन शंकु तयार करणे

खालील सुचना पाळा आणि आकृतीत दाखवल्या प्रमाणे करा.

(i) जाड कागदावर वर्तुळ काढा. आकृती (a)

(ii) त्यातुन AOB वर्तुळखंड कापा आकृती (b).

(iii) Aआणि B टोकाला हलुन एकमेकांच्या जवळ न्या. आणि AB ला जोडा. Aआणि B एक वर एक येऊ नये याची आठवण ठेवा. A, B ला जोडल्या नंतर त्याला सेलो टेप ने चिपकवा.(आकृती c).

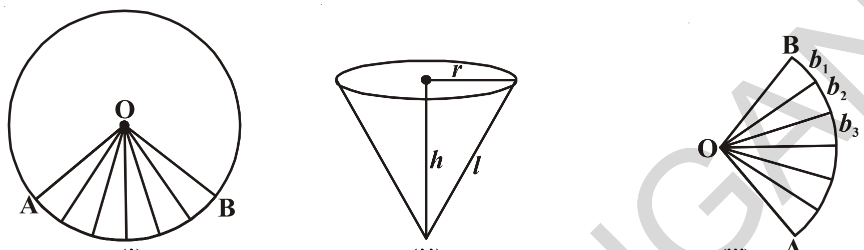


(iv) तुम्ही कोणत्या प्रकाराच्या रुप मिळविले?

हे लंब शंकु आहे का?

शंकु बनवत असतांना कडा 'OA' आणि 'OB' चे काय झाले तसेच वर्तुळखंड च्या कंस AB च्या लांबीचे काय झाले? तुम्ही निरिक्षण केले का?

10.4.2 शंकुचे वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ



(i) (ii) (iii)

कृती मध्ये चर्चा केलेली आणि आपण कागदाने बनविलेल्या लंब वृत्ताकार शंकु च्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ माहित करु या.

जेव्हा वर्तुळखंडाला शंकु मध्ये घडी करताना तुमच्या लक्षात आले असेल, वर्तुळखंडाचे OA, OB जुळतात. आणि ते शंकुची तिरपी उंची बनते. आणि लांबी $\widehat{AB}$ हे शंकुच्या पायाचे परिघ बनते.

आता शंकुची घडी काढुन टाका आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे जेवढे शक्य होईल तेवढे वर्तुळ खंड काढा.(वर्तुळ खंड AOB कापा) नंतर तुम्हाला असे दिसेल की, प्रत्येक कापलेला भाग जवळ पास त्रिकोणासारखे आहे. त्याचा पाया b_1, b_2, b_3 ..... इत्यादी, उंची 'l' म्हणजेच शंकुच्या तिरप्या उंचीच्या समान.

या त्रिकोणाचे जर आपण क्षेत्रफळ माहित केलो आणि त्यांना मिळविलो तर ते वर्तुळखंडाचे क्षेत्रफळ होते. आपल्याला माहित आहे, वर्तुळखंडाचे शंकु बनते. म्हणुन वर्तुळखंडाचा क्षेत्रफळ, हा त्यानी बनलेल्या शंकच्या पृष्ठभाग क्षेत्रफळच्या समान असतो.

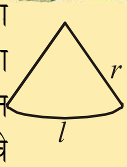
शंकुचे क्षेत्रफळ = त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळाची बेरीज

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \frac{1}{2}b_4 l + ...$$

$$= \frac{1}{2}l(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ...)$$

प्रयत्न करा

'r' त्रिज्या आणि उंची 'l' असलेल्या वर्तुळखंडाच्या कागदाला त्याच्या वर्तुळाकार भागावरुन कापा. शंकु म्हणुन घडी करा. त्याच्या वक्र= पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $A = \pi rl$ हे सुत्र तुम्ही कसे काढता?



$= \frac{1}{2}l$ (A पासुन B पर्यंच्या वक्र भागाची लांबी किंवा शंकुच्या पायाचे परिघ)

$= \frac{1}{2}l(2\pi r)$ ($\because b_1 + b_2 + b_3 + ... = 2\pi r$,येथे शंकुची त्रिज्या 'r' आहे.)

म्हणुन $\widehat{AB}$ ने वर्तुळ बनते.

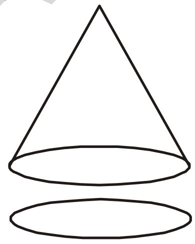
अशा प्रकारे पार्श्व पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ किंवा शंकुचे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ = πrl

येथे 'l' हा शंकुची तिरपी उंची आणि 'r' ही त्याची त्रिज्या आहे.

10.4.3 शंकुचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ

शंकुच्या पायाला जर अच्छादन करायचे असेल तर आपल्याला शंकुच्या त्रिज्या इतके असलेल्या त्रिजेच्या वर्तुळाची गरज आहे.

शंकुचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ कसे मिळवावे? एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ मिळविण्यासाठी किती पृष्ठभागाची बेरीज तुम्हाला करावी लागेल?



वर्तुळाचे क्षेत्रफळ $= \pi r^2$

शंकुचा एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ=पार्श्व पृष्ठभाग क्षेत्रफळ+ त्याचा पायाचे क्षेत्रफळ

$= \pi r l + \pi r^2$

$= \pi r (l + r)$

शंकुचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ.= $\pi r\ (l + r)$

येथे 'r' हे शंकुची त्रिज्या आहे आणि 'l' ही त्याची तिरपी उंची आहे.

हे करा

1. एक काटकोन त्रिकोण कापा, लंब बाजुने तार चिपकवा, आकृती (1) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे तारेचे दोन्ही टोक तुमच्या हातात पकडुन त्याला एका स्थिर गतीने फिरवा

   तुम्हाला काय निरिक्षणास आले?

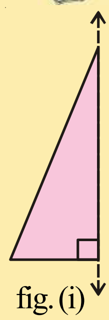
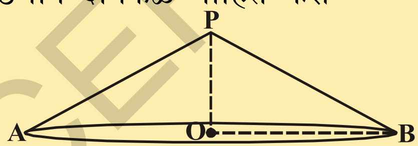
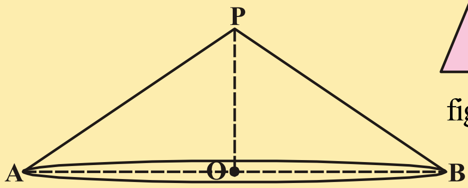


fig. (i)

2. खालील प्रत्येक लंब वर्तुळाकार शंकुचे वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ आणि एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ माहित करा

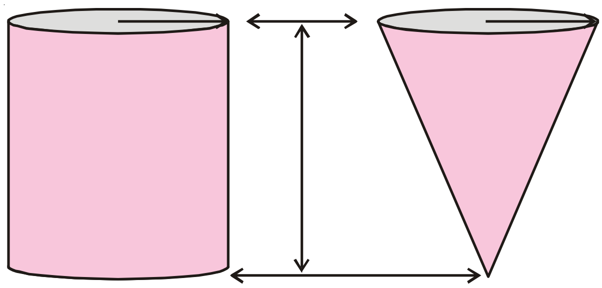


OP = 2cm.; OB = 3.5cm.

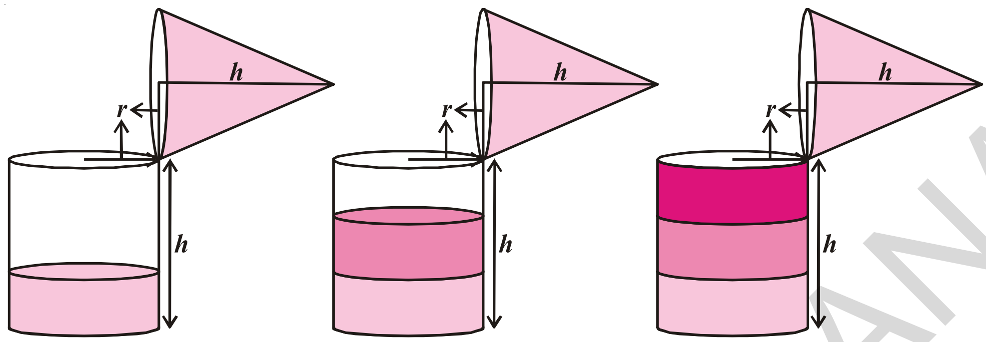


OP = 3.5cm.; AB = 10cm.

10.4.4 लंब वर्तुळाकार शंकुचे घनफळ



सारख्या त्रिजेचे आणि सारख्या उंचीचे पोकळ दंडगोल आणि पेाकळ शंकु तयार करा. आणि खालील प्रयोग करा. हे आपल्याला शंकुचे घनफळ काढण्यासाठी मदत करते.



i. शंकुच्या काढा पर्यंत पाणी भरा आणि त्याला पोकळ दंडगोलात ओता. ह्याने दंडगोलाचा फक्त काही भाग भरला जाईल.

ii. पुन्हा शंकुच्या काठा पर्यंत पाणी भरा आणि त्याला दंडगोलात ओता. आपल्याला असे दिसेल की दंडगोल अजुन पुर्ण भरलेले नाही.

iii. जेव्हा तिसऱ्या वेळेस शंकु पुर्ण भरुन दंडगोलात रिकामा करतो तेव्हा दंडगोल पुर्णपणे भरले की नाही याचे निरिक्षण करा.

वरील प्रयोगा वरुन शंकुच्या घनफळ आणि दंडगोलाच्या घनफळ या दोघां मध्ये काही संबंध दिसला का?

शंकुच्या तिप्पट घनफळाने दंडगोलाचे घनफळ असते. असे आपण म्हणु शकतो. येथे शंकुला आणि दंडगोलाला सारखी पाया सारखी उंची असणे आवश्यक आहे.

म्हणुन दंडगोलाच्या घनफळाच्या एक तितृयांश शंकुचे घनफळ असते.

$\therefore$ शंकुचे घनफळ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

येथे शकुची 'r' ही त्रिज्या आहे आणि 'h' हि उंची आहे.

उदाहरण-6: एका मक्कयाचे कणीस शंकुच्या रुपाने आहे. (आकृती पहा) त्याच्या फुगवट्या टोकाची त्रिज्या 1.4 से.मी. आणि लांबी (उंची) 12 से.मी. आहे. कणसाच्या पृष्ठभागाच्या प्रत्येक 1 से.मी.^{2} पृष्ठभागात सरासरी 4 दाने आहेत.तर तुम्हाला पुर्ण कणसा वर अंदाजे किती दोन दिसेल?

सोडवणुक: येथे $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(1.4)^2 + (12)^2}\, cm.$

$= \sqrt{145.96} = 12.08$ से.मी. (अंदाजे)

म्हणुन मक्याच्या कणसाच्या वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 12.08\ cm^2$$
$= 53.15$ से.मी.^{2}
$= 53.2$ से.मी.^{2}

मक्याच्या कणसाच्या 1 से.मी.^{2} पृष्ठभागावर दाण्यांची संख्या $= 4$.

म्हणुन कणसाच्या पुर्ण वक्र पृष्ठभागावर दाण्यांची संख्या

$= 53.2 \times 4 = 212.8 = 213$ (अंदाजे)

म्हणुन मक्क्याच्या कणसावर सुमारे 213 दाणे आहेत.

उदाहरण-7: 5.6 से.मी. त्रिज्या असलेल्या शंकुच्या वक्र पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ 158.4 से.मी.^{2} आहे. तर त्याची तिरपी उंची आणि उभी उंची माहित करा.

सोडवणुक: त्रिज्या $= 5.6$ से.मी., उभी उंची $= h$, तिरपी उंची $= l$

शंकुचे वक्र पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $= \pi r l = 158.4$ से.मी.^{2}

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times 5.6 \times l = 158.4$$

$$\Rightarrow l = \frac{158.4 \times 7}{22 \times 5.6} = \frac{18}{2} = 9\text{cm}$$

आपल्याला माहित आहे. $l^2 = r^2 + h^2$

$h^2 = l^2 - r^2 = 9^2 - (5.6)^2$

$= 81 - 31.36$

$= 49.64$

$h = \sqrt{49.64}$

$h = 7.05$ से.मी. (अंदाजे)

उदाहरण-8: एक तंबु दंडगोल आकाराचे आहे त्यावर शंकु आकार आहे. शंकुच्या पायाचा व्यास 24 से.मी. आहे. दंडगोलाची उंची 11 मी.आहे. दंडगोलाच्या वर पासुन शंकुच्या शिरोबिदु पर्यंतचे अंतर 5 मी. आहे. जर कॅनवास 10 रुपये प्रति मी^{2} असेल तर पुर्ण तंबु बनविण्यासाठी किती खर्च येईल?

सोडवणुक : दंडगोलाच्या पायाचा व्यास = शंकुचा व्यास = 24 मी.

$\therefore$ पायाची त्रिज्या = 12 मी.

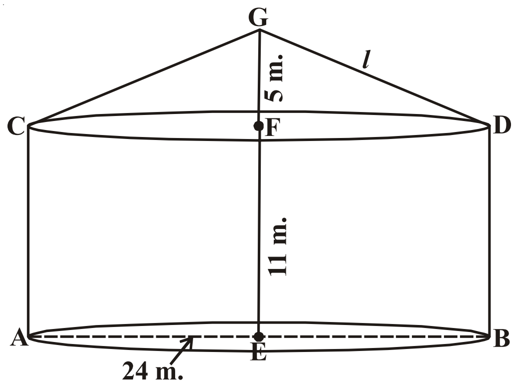
दंडगोलाची उंची $= 11$ मी. $= h_1$

शंकुची उंची $= 5$ मी. $= h_2$

समजा शंकुची तिरपी उंची l आहे.

$l = GD = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13m$

आवश्यक कॅनवस चे क्षे. = दंडगोलाचे वक्रपृष्ठभागाचे क्षे.+ शं.व.पृ.क्षे.



$= 2\pi rh_1 + \pi rl$

$= \pi r(2h_1 + l)$

$= \frac{22}{7} \times 12(2 \times 11 + 13)m^2$

$= \frac{22 \times 12}{7} \times 35m^2$

$= 22 \times 60$ मी.^{2}

$= 1320$ मी.^{2}

कॅनवास चे दर = 10 रु प्रति मी^{2}

$\therefore$ कॅनवास ची किंमत = दर $\times$ कॅनवास चे क्षेत्रफळ

= 10×1320

= 13,200.

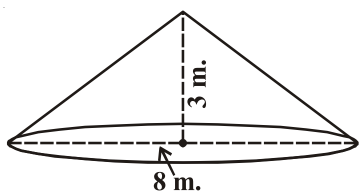
उदाहरण:9- एका कॅम्प वर सेन्याचे शंकीय तंबु उभा केला त्याची उंची 3मी आणि पाया चे व्यास 8 मी आहे. तर माहित करा .

(i) जर कॅनवास ची किंमत 70 रु. प्रति 1 चौ.मी. असेल तर तंबु बनविण्यासाठी किती कॅनवासची आवश्यकता आहे?

(ii) जर प्रत्येक व्यक्तीला 3.5 मी^{3} च्या हवेची आवश्यकता असेल तर त्या तंबुत किती व्यक्ती बसु शकेल?

सोडवणुक : तंबुचा व्यास = 8 मी.

$r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4$ मी.



उंची = 3 मी.

तिरपी उंची $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{25} = 5$ m.

$\therefore$ तंबुची वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 4 \times 5 = \frac{440}{7}$ मी^{2}

शंकुचे घनफळ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3$

$= \frac{352}{7}$ मी^{3}

(i) तंबुसाठी आवश्यक कॅनवास ची किंमत

= तंबुचे वक्र पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ × एकक किंमत

$= \frac{440}{7} \times 70$

= 4400 रुपये

(ii) तंबुमध्ये बसु शकणाऱ्या व्यक्तीची संख्या

$= \frac{\text{शंकु आकार तंबुचे घनफळ}}{\text{प्रत्येक व्यक्तीसाठी आवश्यक हवा}}$

$= \frac{352}{7} \div 3.5$

$= \frac{352}{7} \times \frac{1}{3.5} = 14.36$

= 14 माणसे (अंदाजे)

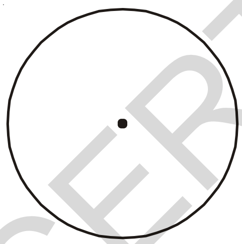
अभ्यास 10.3

1. शंकुच्या पायाचे क्षेत्रफळ 38.5 से.मी.^{2} त्याचे घनफळ 77 से.मी.^{3} त्याची उंची माहित करा.
2. शंकुचे घनफळ 462 मी^{3} त्याच्या पायाची त्रिज्या 7मी आहे त्याची उंची माहित करा.
3. शंकुच्या वक्र पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ 308से.मी.^{2} आहे. आणि त्याची तिरपी उंची 14 से.मी. आहे माहित करा
   (i) पायाची त्रिज्या (ii) शंकुच्या एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ
4. शंकुच्या एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळला रंग लावण्याचा खर्च 25 पैसे प्रति से.मी.^{2} ने 176 रु.होते. तर शंकुचे घनफळ माहित करा जर त्याची तिरपी उंची 25 से.मी. असेल.
5. 15 से.मी.त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाला 216^0 असलेल्या वर्तुळखंडाला कापले त्याच्या कडा म्हणजे त्रिज्या ना वाकवुन शंकुच्या रुपात आणले तर त्याचे घनफळ माहित करा.
6. तंबुची उंची 9 मी. आहे. त्याच्या पायाचा व्यास 24 मी. आहे. तर त्याची तिरपी उंची किती आहे? जर प्रति चौ.मी. 14 रु.त्या कपड्याची किंमत असेल तर तंबु साठी लागणाऱ्या कपड्याची किंमत किती?

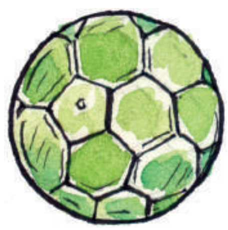
7. शंकुची वक्र पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $1159\frac{5}{7}$ से.मी.^{2}आहे. त्याच्या पायाचा क्षेत्रफळ $254\frac{4}{7}$ से.मी.^{2} तर त्याचे घनफळ माहित करा.
8. 4.8 मी.उंची असलेला तंबु दंडगोलीय आहे आणि त्यावर शंकु आकार आहे. पायाची त्रिज्या 4.5 मी. आहे. आणि तंबुची एकुण उंची 10.8 मी.आहे. तंबुसाठी लागणारा कॅनवास चौ.मी. मध्ये माहित करा.
9. उंची 8मी. आणि पायाची त्रिज्या 6मी. असलेला कोनीय तंबु उभारण्यासाठी 3मी. रुंद असलेल्या किती लांब ताडपत्रीची आवश्यकता आहे? मार्जीन शिवण्यासाठी आणि कापतांना काही कापड वाया जातो. या हेतुने सुमारे 20 से.मी. अतिरिक्त लांबीचा अंदाज करा. ($\pi = 3.14$ वापरा)
10. उंची 27 से.मी. आणि पाया ची त्रिज्या 7 से.मी. असलेल्या लंब वर्तुळाकार शंकुच्या आकारात एक जोकर ची टोपी आहे. तर अशा 10 टोप्या बनविण्यासाठी किती क्षेत्रफळाची ठावची आवश्यकता आहे?
11. बाजुच्या आकृतीत दिसत असल्याप्रमाणे 5.2 मी. व्यास आणि 6.8 मि. तिरपी उंची असलेल्या शंकुच्या आकाराच्या भांड्यात पाणी भरण्याचा दर प्रति मिनीटाला 1.8 मी3 आहे. तर ते पुर्ण भांडे भरण्यासाठी किती वेळ लागेल?

12. दोन समान शंकुचे घनफळ 12π घनएकक आणि 96π घन एकक आहे. जर लहान शंकुचे वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ 15π चौ.एकक असेल तर मोठ्या शंकुचे वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ माहित करा?

10.5 गोल (Sphere)


(i)


(ii)


(iii)

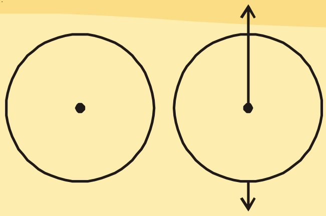
वरील सर्व आकृत्यांना तुम्ही ओळखता. त्यामधील भिन्नतेला तुम्ही ओळखु शकता का? आकृती (1) हे वर्तुळ आहे. तुम्ही हे कागदावर सहज काढु शकता. कारण हे प्रतलीय आकृती आहे. केंद्र बिंदु पासुन सारख्या अंतरावर (त्रिज्या) असणाऱ्या बिंदुने तयार झालेली बंदीस्त आकृती म्हणजे वर्तुळ होय.

उरलेले वरील सर्व आकृती भरीव आहेत. हे भरीव वर्तुळाकार रुपात आहे त्याला गोल असे म्हणतात.

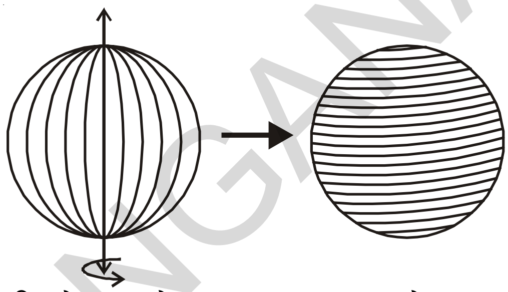
गोल हे त्रिमीतीय आकृती आहे. जागेतील सर्व बिंदुनी हा तयार झालेला आहे. हे एका बिंदु पासुन सारख्या अंतरावर आहेत. त्या बिंदुला गोलचा केंद्र बिंदु पासुन गोलच्या पृष्ठभागाच्या बिंदुपर्यंतच्या अंतराला त्याची त्रिज़्या असे म्हणतात.

कृती

जाड कागदावर एक वर्तुळ काढा आणि त्याला कापा त्याच्या व्यासाने एक तार चिपकवा. हाताने त्या तारेच्या दोन्ही टोकाला धरा आणि त्याला स्थीर गतीने फिरवा आणि निरिक्षण करा कोणती आकृती तयार होते.



10.5.1 गोलचा पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ



खालील कृतीने आकृतीची पृष्ठभाग क्षेत्रफळ माहित करु या.

आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे एक टेनीस बाल घ्या आणि त्याला दोरीने गुडांळा. दोरी जागेवर राहण्यासाठी पिनचा वापर करा. दोरीच्या सुरुवातीच्या टोकाला आणि शेवट्या टोकाला खुण करा. गोलाच्या पृष्ठभागापासुन हळुने दोरी काढा.

गोलाची त्रिज्या माहित करा. आणि आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे बॉलच्या त्रिज़्ये च्या समान त्रिज्येच्या चार वर्तुळ काढा. बॉल ला गुंडाळलेल्या दोरीने एक नंतर एक वर्तुळ भरायला सुरुवात करा.

तुमच्या निरिक्षणास काय आले ?

गोल (बॉल) च्या पृष्ठभाग क्षेत्रफळाला पुर्णपणे अच्छादेलेली दोरीचा वापरल्याने चार वर्तुळाचा क्षेत्रफळ पुर्णपणे भरल्या गेले. ते सर्व त्रिज़्या सारखे होते. गोलच्या त्रिज्या एवढे.

या वरुन आपल्याला असे समजते की, गोलच्या पृष्ठभागाची त्रिज्या (r) ही वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाच्या त्रिज्याच्या चौपट असते (r).

$\therefore$ गोलच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $= 4 \times$ वर्तुळाचा क्षेत्रफळ

$= 4\,\pi r^2$

गोलाचा पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $= 4\,\pi r^2$

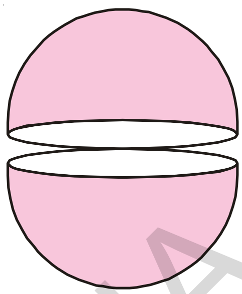
येथे 'r' ही गोलाची त्रिज्या आहे.

प्रयत्न करा

गोलाचे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ तुम्ही कोणत्यातरी दुसऱ्या पध्दतीने माहित करु शकता का ?

10.5.2 अर्धगोल

एक भरीव गोल घ्या. गोल केंद्रबिंदु मध्यातुन प्रतल जावे असे त्याला कापा.



आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे नंतर ते दोन सारख्या भागात विभागल्या जातात.

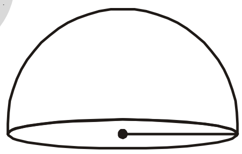
प्रत्येक समान भागाला अर्धे गोल असे म्हणतात

गोलाला फक्त एकच वक्र बाजु असते. जर त्याला दोन समान भागात विभागले तर त्याची वक्र बाजु सुध्दा दोन समान वक्र बाजु मध्ये विभागल्या जाते.

अर्धगोलाच्या पृष्ठभाग क्षेत्रफळाविषयी तुम्ही काय विचार केले? निश्चित पणे,

अर्धगोलाचे वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ हे गोलाच्या पृष्ठभाग क्षेत्रफळाच्या अर्ध असते.

म्हणुन अर्धे गोलाचे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}$ गोलाचे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ



$$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$$

$$= 2\pi r^2$$

$\therefore$ **अर्ध गोलाचे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= 2\pi r^2$**

अर्ध गोलाचा पाया वर्तुळाकार क्षेत्राचे असते.

त्याचा क्षेत्रफळ हा πr^2 च्या समान असते.

वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ आणि पायाचा क्षेत्रफळ दोन्ही मिळवु या. आपल्याला अर्ध गोलाचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ मिळते.

अर्ध गोलाचे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ= त्याचे वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ+ त्याचा पायाचे क्षेत्रफळ

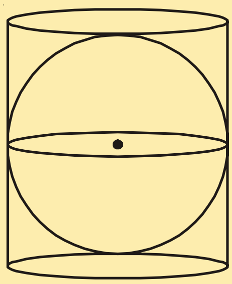
$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 3\pi r^2.$$

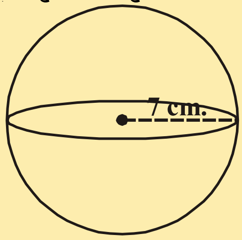
अर्ध गोलाचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= 3\pi r^2$.

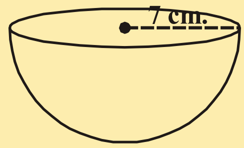
हे करा

1. एका लंब वर्तुळाकार दंडगोलात r त्रिज्येचे गोल बसवण्यात आले. (आ.पहा) तर माहित करा
   (i) गोलाचे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ
   (ii) दंडगोलाचे वक्र पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ
   (iii) (i) आणि (ii) मध्ये मिळालेल्या क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर



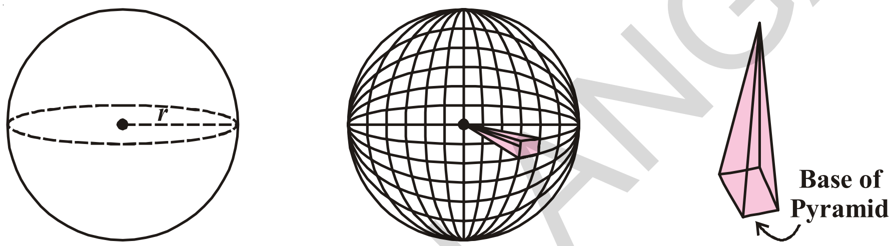
2. खालील प्रत्येक आकृतीचे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ माहित करा.

(i) 

(ii) 

10.5.3 गोलाचे घनफळ

गोलाचे घनफळ माहित करण्यासाठी कल्पना करा की, एकरुप पिरॉमीडच्या मोठ्या संख्येने गोल बनवण्यात आला. त्याचे सर्व शिरोंबिंदु गोलच्या केंद्रावर जोडल्या गेले आहे. हे आ. दिसते



(i) (ii) (iii)

खालील पायऱ्या पाळा.

1. आकृती (1) प्रमाणे समजा भरीव गोलाची त्रिज्या 'r' आहे.
2. आकृती (11) मध्ये दाखविल्याप्रमाणे, सारख्या आकाराच्या पिरॉमीडच्या 'n' संख्येने गोल बनलेले आहे असे ग्रहीत धरा. गोलाची त्रिज्या 'r' आहे.
3. त्यातील एक भाग(पिरॉमीड) विचारात घेऊ. प्रत्येक पिरॉमीड ला पाया आहे आणि त्या पिरॉमीडच्या पायाचा क्षेत्रफळ समजा $A_1, A_2, A_3.....$

   पिरॉमीडची उंची ही गोलच्या त्रिज्या एवढी आहे, तर

   एका पिरॉमीड चे घनफळ $= \frac{1}{3} \times$ पायाचा क्षेत्रफळ $\times$ उंची

   $= \frac{1}{3} A_1 r$

4. पिरॉमीडची संख्या 'n' असल्याने

   'n' पिरॉमीडचे घनफळ $= \frac{1}{3} A_1 r + \frac{1}{3} A_2 r + \frac{1}{3} A_3 r + ...$ n वेळा

   $= \frac{1}{3} r [A_1 + A_2 + A_3 + ...$ n वेळा$]$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + ...$ n वेळा
$=$ 'n' पिरॅमीड चे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ

$$= \frac{1}{3} \times A\,r$$

5. यासर्व पिरॅमीडच्या घनफळाची बेरीज ही गोलाच्या घनफळा एवढी असते. आणि सर्व पिरॅमीडच्या पायाच्या क्षेत्रफळाची बेरीज ही गोलाच्या पृष्ठभागाच्या क्षेत्रफळाच्या जवळ जवळ असते (म्हणजेच $4\pi r^2$).

म्हणुन गोलाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{3}(4\pi r^2)\,r$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$ घन एकक

गोलाचे घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

येथे 'r' हा गोलाची त्रिज्या आहे.
अर्ध गोलाचे घनफळ तुम्ही कसे माहित करु शकाल? गोलाच्या घनफळाचे ते अर्ध आहे.

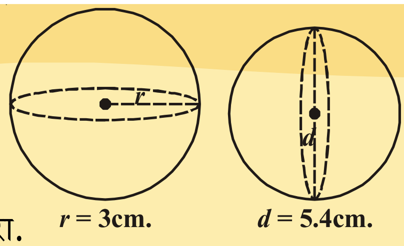
$\therefore$ अर्ध गोलाचे घनफळ $=$ गोलाच्या घनफळाचे $\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

(सुचना : टरबुज किंवा या सारख्या इतरचा वापर करुन हे सुत्र काढण्याचा प्रयत्न करु शकता.)

हे करा

1. बाजुच्या आकृतीत दिलेल्या गोलाचे घनफळ माहित करा.
2. 6.3 से.मी. त्रिज़्याच्या गोलाचे घनफळ माहित करा.



उदाहरण-10: गोलाचा पृष्ठभाग क्षेत्रफळ जर 154 से.मी.^{2} असेल तर त्यांची त्रिज्या माहित करा.

सोडवणुक: गोलाचा पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $= 4\pi r^2$

$$4\pi r^2 = 154 \Rightarrow 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$
$$\Rightarrow r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22} = \frac{7^2}{2^2}$$
$$\Rightarrow r = \frac{7}{2} = 3.5\,\text{cm}$$

उदाहरण-11: दगडानी बनलेली अर्ध गोल प्याला ची जाडी 5 से.मी. आहे. जर आतील त्रिज्या 35 से.मी. आहे तर त्या प्याल्याचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ माहित करा.

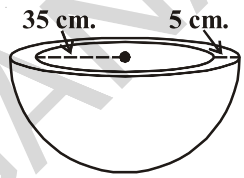
सोडवणुक: समजा बाहेरीज त्रिज्या R आणि आतिल त्रिज्या 'r'आणि रिंगची जाडी= 5 से.मी.

$\therefore$ R = (r + 5) से.मी. = (35 + 5) से.मी. = 40 से.मी.

एकुण पृष्ठभाग क्षेत्र.= अर्ध गोलाचे बाहेरील वक्र पृष्ठभाग क्षे.+आतील अ.गो.व.पृ.क्षे+रि.क्षे.

$$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$$

$$= \pi(2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2)$$



$$= \frac{22}{7}(3R^2 + r^2) = \frac{22}{7}(3 \times 40^2 + 35^2)\,cm^2$$

$$= \frac{6025 \times 22}{7}cm^2$$

$$= 18935.71 \text{ से.मी.}^2 \text{ (अंदाजे)}$$

उदाहरण-12: भवनाच्या अर्ध गोला कळसाला रंग लावण्याची गरज आहे. (आ.1 पहा) कळसाच्या पायाचा परिघ जर 17.6 मी. असेल तर प्रति 100 से.मी.^{2} ला 5 रु. दराने रंग लावण्याचा खर्च माहित करा?

सोडवणुक: ज्या अर्थी कळसाला फक्त गोलाकार पृष्ठभागाला रंग लावायचे ओह. रंग लावण्याचा विस्तार माहित करण्यासाठी आपल्याला अर्धगोलाचे वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ माहित करणे गरजेचे आहे आता, कळसाच्या पायाचा परिघ = 17.6 मी. 17.6 = $2\pi r$

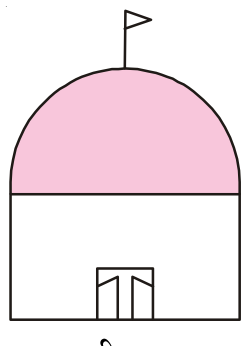
म्हणुन कळसचा त्रिज्या $= 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22} m$

$= 2.8$ मी.

कळसाचा वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 m^2$$

$= 49.28$ मी.^{2}.



आकृती-1

आता, रंग लावण्याचा दर 5 रु. प्रति 100 से.मी.^{2}

म्हणुन रंग लावण्याचा खर्च 1मी^{2} = 500 रुपये

म्हणुन पुर्ण कळसाला रंग लावण्याचा खर्च

= 500 रुपये × 49.28

= 24640 रुपये

उदाहरण-13: सर्कस मध्ये मोटर साइकल चालक जिथे आपले कर्तब दाखवतो. त्या पोकळ गोलाचे व्यास 7 मी. आहे. तर त्या मोटार साइकल चालकाला फेरफटका मारण्यासाठी किती क्षेत्र उपलब्ध आहे ते माहित करा?

सोडवणुक : गोलाचा व्यास = 7 मी. आणि त्रिज्या 3.5 मी.आहे. म्हणुन मोटर साइकल चालकाला फेरफटका मारण्यासाठी उपलब्ध जागा ही गोलाची पृष्ठभाग क्षेत्रफळ आहे.

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 m^2$$

$$= 154 \text{ मी.}^2.$$

उदाहरण-14: 4.9 से.मी. धातुचे गोल हे शॉटपुट आहे. धातुची घनता 7.8 ग्राम प्रति से.मी.^{3} आहे. तर शॉटपुट चे वस्तुमान माहित करा.

सोडवणुक: ज्या अर्थी धातुने बनलेली शॉटपुट भरीव गोल आहे. आणि त्याचा वस्तुमान हा त्याच्या घनफळ आणि घनता च्या गुणाकारा एवढा असतो. आपल्याला गोलाचे घनफळ माहित करणे आवश्यक आहे.

आता, गोलाचे घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3$$

$$= 493 \text{ से.मी.}^3 \text{ (जवळ जवळ)}$$

पुन्हा, धातुच्या 1से.मी.^{3} चे वस्तुमान 7.8 ग्राम आहे.

म्हणुन, शॉटपुटचे वस्तुमान $= 7.8 \times 493$ ग्राम

$= 3845.44g = 3.85$ कि.ग्रा.(जवळ जवळ)

उदाहरण-15: एक अर्ध गोल प्याल्याची त्रिज्या 3.5 से.मी. आहे. तर त्यामध्ये किती पाण्याचे घनफळ मावेल?

सोडवणुक: प्याल्यात मावणारे पाण्याचे घनफळ= अर्ध गोलाचे घनफळ

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ cm}^3$$

$$= 89.8 \text{ से.मी.}^3 \text{ (सुमारे)}$$

अभ्यास - 10.4

1. गोलाची त्रिज्या 3.5 से.मी. आहे तर त्याचे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ आणि घनफळ माहित करा.
2. गोलाचा पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $1018\frac{2}{7}$ चौ.से.मी. आहे तर त्याचा घनफळ माहित करा?
3. ग्लोबच्या विषववृत्तीची लांबी 44 से.मी. आहे तर त्याचे पृष्ठभाग क्षेत्रफळ माहित करा?
4. गोलीय बॉलचे व्यास 21 से.मी. आहे. अशा 5 बॉल तयार करण्यासाठी किती कातडीची आवश्यकता आहे?
5. दोन गोलाच्या त्रिज्याचे गुणोत्तर 2:3 आहे. तर त्याच्या एकुण पृष्ठभाग आणि घनफळाचा गुणोत्तर माहित करा?
6. 10 से.मी.त्रिज्या असलेल्या अर्धगोलाचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळा काढा. (वापरा $\pi = 3.14$)
7. 14 से.मी. त्रिज़्या असलेल्या गोलीय फुग्यात हवा भरल्याने त्याची त्रिज्या 28 से.मी. होते. दोन्ही संदर्भामध्ये फुग्याच्या पृष्ठभाग क्षेत्रफळाचा गुणोत्तर माहित करा.
8. ब्रॉसने बनलेल्या अर्धगोल प्यालाची जाडी 0.25 से.मी. आहे. प्यालाची आतील त्रिज्या 5 से.मी. आहे. बाहेरील पृष्ठभाग क्षेत्रफळ ते आतिल पृष्ठभाग क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर काढा.
9. एका शिस्याच्या (lead) बॉलचा व्यास2.1 से.मी. आहे. वापरलेल्या शिस्याची घनता $11.34\ g/c^3$ तर बॉलचे वजन किती आहे?
10. धातुच्या दंडगोलाचा व्यास 5 से.मी. आहे आणि उंची $3\frac{1}{3}$ से.मी. आहे. याला वितळवुन एक गोल बनविले. तर त्याचा व्यास किती?
11. 10.5 से.मी. व्यास असलेल्या अर्धगोल प्याल्यात किती लिटर दुध मावेल?
12. अर्धगोल प्यालाचा व्यास 9 से.मी. आहे. 3 से.मी. व्यास आणि 3 से.मी. उंची असलेल्या दंडगोलीय बॉटल मध्ये द्रव ओतले तर द्रवाने पुर्ण भरलेल्या प्यालातील द्रव बॉटलमध्ये भरत गेले तर किती बॉटलची आवश्यकता आहे?

आपण काय चर्चा केलो?

1. आयतज आणि घन हे नियमित चिती आहे. त्याला सहा बाजु आहेत आणि त्यापैकी चार पार्श्वबाजु आणि पाया आणि वरचा भाग
2. जर आयतजची लांबी l, रुंदी 'b' आणि उंची 'h' असेल तर

   आयतजचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= 2\,(lb + bh + lh)$

   आयतजचे पार्श्वपृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= 2\,h\,(l + b)$

   आयतजचे घनफळ $= lbh$

3. जर घनाच्या कडाची लांबी 'l' एकक असेल तर

   घनाचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= 6l^2$

   घनाचे पार्श्व पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= 4l^2$

   घनाचे घनफळ $= l^3$

4. पिरॉमीडची घनफळ हे नियमीत चितीच्या घनफळाच्या $\frac{1}{3}$ आहे. जर त्यांची सारखी पाया आणि सारखी उंची असेल तर.

5. दंडगोला हे भरीवच आहे. त्याला एक वक्र पृष्ठभाग क्षेत्र आणि दोन वर्तुळाकार टोक आहेत. जर पाया आणि वरच्या भागाच्या केंद्राला एक रेषाखंडाने जोडला तर तो पाया लंब असतो. याला लंब वर्तुळाकार दंडगोल असे म्हणतात.

6. लंब वर्तुळाकार दंडगोलाची त्रिज्या जर 'r' आणि उंची 'h' असेल तर

   - दंडगोलाच्या वक्रपृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $= 2\pi rh$
   - दंडगोलाचे एकुण पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ $= 2\pi r\,(r + h)$
   - दंडगोलाचे घनफळ $= \pi r^2 h$

7. शंकु हा भुमीती आकाराचा वस्तु आहे ज्याचा पाया वर्तुळ आणि टोक हे शिरोंबिंदुने आहे. जर शिरोंबिंदु आणि पायाच्या केंद्राला एक रेषाखंडाने जोडले तर ते पायाला लंब असते. याला लंब वर्तुळाकार शंकु असे म्हणतात.

8. शंकुच्या शिरोबिंदु पासुन वर्तुळाकार पायाच्या कोणत्याही बिंदुला जोडणाऱ्या रेषाखंडाला तिरपी उंची (l) असे म्हणतात.

   $l^2 = h^2 + r^2$

9. शंकुचे जर 'r' ही त्रिज्या 'h'ही उंची आणि 'l' ही तिरपी उंची असेल तर

   - शंकुचे वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= \pi rl$
   - शंकुचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= \pi r\,(r + l)$

10. सारखा पाया आणि सारखी उंची असलेल्या शंकुचे घनफळ हा दंडगोलाच्या घनफळाच्या $\frac{1}{3}$ असतो. म्हणजेच शंकुचे घनफळ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

11. जागेमधील एका ठराविक बिंदु पासुन समान अंतरावर असलेल्या बिंदुचा संच हा गोल आहे. गोल हा भुमीतीय वस्तु आहे. त्या ठराविक बिंदुला गोलाचा केंद्र आणि ठराविक अंतराला गोलाची त्रिज्या असे म्हणतात.

12. गोलाची त्रिज्या जर 'r' आहे तर
   - गोलाचा पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= 4\pi r^2$
   - गोलाचा घनफळ $= \frac{4}{3}\pi r^3$
13. गोलाच्या केंद्राच्या मधुन जाणारे प्रतल गोलाला दोन समान भागामध्ये विभागते. प्रत्येक भागाला अर्ध गोल असे म्हणतात.
   - अर्ध गोलाचे वक्र पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= 2\pi r^2$
   - अर्ध गोलाचे एकुण पृष्ठभाग क्षेत्रफळ $= 3\pi r^2$
   - अर्ध गोलाचे घनफळ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

तुम्हाला माहित आहे काय?

8 × 8 चा जादुचा चौरस तयार करणे

चौरस जाळीत क्रमाने 1ते64 संख्या ठेवा. डाव्या बाजुला सचित्रात दाखविल्या प्रमाणे. कर्ण अपसारण चिन्हाणे स्थुलमानाने दर्शवित आहे. जादुचा चौरस मिळविण्यासाठी अपरसण चिन्हावरील रेषा कोणत्याही संख्योच्या ठिकाणी त्या अपसरण चिन्ह रेषा वरील दुसरी संख्या प्रशंसा ने ठेवणे (दोन लहान आणि मोठ्या संख्याची अदलाबदल केल्यानी त्याची बेरीज सारखी येते त्या दोन संख्यांना प्रंशसा संख्या म्हणायचे)

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

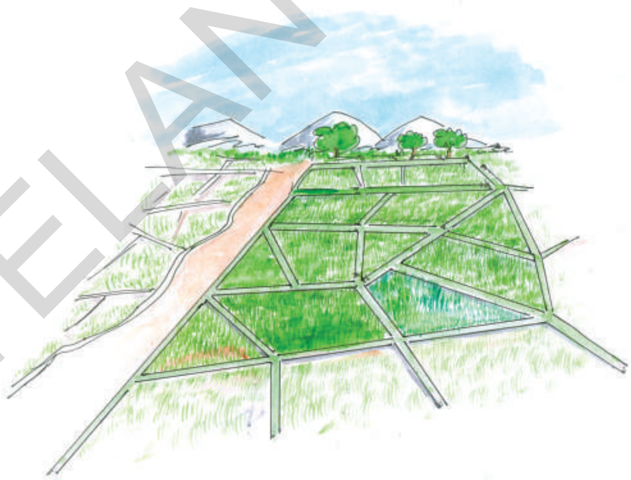
* कोणत्याही ओळी आणि स्तंभातील संख्याची बेरीज समान येत असलेल्या चौरस रुपातील संख्याचा मांडणीच्या रचनेला जादुचा चौरस म्हणतात. अशा जादुच्या चौरसा साठी तुम्ही प्रयत्न करा.

11

क्षेत्रफळ

11.1 प्रस्तावना

तुमच्या गावाच्या किंवा शहराच्या सभोवताली असलेल्या शेतास पाहिले असाल? त्या जागेस (शेतास) विविध शेतकऱ्यांमध्ये वाटल्यागेल्या आहेत. आणि त्यांचे बरेचशे शेत बनले आहेत. ते सर्व शेत एकाच रुपाचे आणि आकाराचे आहेत का? त्याचे क्षेत्रफळ सारखे आहेत का? शेतास अजुन काही व्यक्तीत विभागणी केली असता. हे कशा प्रकारे विभागणी करतात. त्यांना समान क्षेत्रफळाचे शेत हवे असल्यास ते काय करतात?

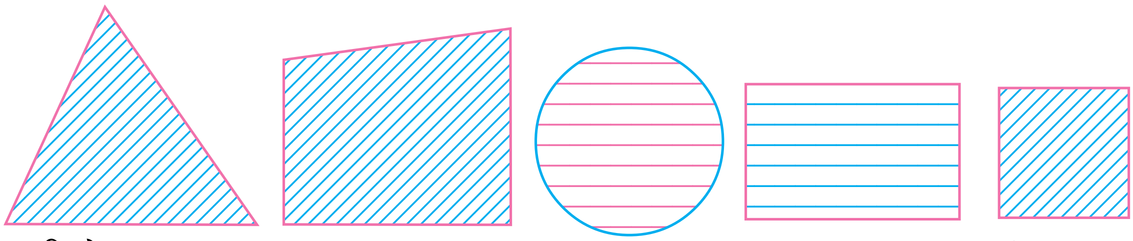


शेतात किती खत वापरायचे किती बियाण्याची गरज आहे. यांचा अंदाज शेतकरी कसा लावतात?

भुमीतीच्या अध्यायनात, क्षेत्राच्या सिमेत सुव्यवस्था आणि आवश्यक विभागांना वाटणी करणाऱ्या पध्दतीत जमीनीला मोजणे त्याविकासाचे कारण बनले. इतिहासात इजिप्त मधील नाईल नदीच्या पुरांची चर्चा तुम्ही ऐकले असाल. त्यानतर जमीनच्या खुणा करणे, त्यापैकी काही शेत मुलभुत आकारात निर्माण करणे, जसे चौरसाकार, आयताकार, समलंब चौकोन आकार, समांतर चर्तुभुजाकार इत्यादी. काही अनियमीत आकारात असतात. यामुलभुत आकारासाठी आपण काही नियम तयार केले. काही लांबी आणि परिमाणाच्या उपयोग केल्याने त्याचे क्षेत्रफळ मिळते. या पैकी काही आपण या धड्यात अध्यायन करणार आहोत. आपण त्रिकोणाचे, चौरसाचे, आयताचे आणि चौकोनाचे क्षेत्रफळ काही सुत्राचा वापर करुन कसे माहित करतात. हे या धड्यात शिकणार आहोत. आपण काही मुलभुत सुत्राचा सुध्दा शोध घेणार आहेत. ते कसे येतात त्याची चर्चा करु क्षेत्रफळ म्हणजे काय?

11.2 समतल क्षेत्राचे क्षेत्रफळ

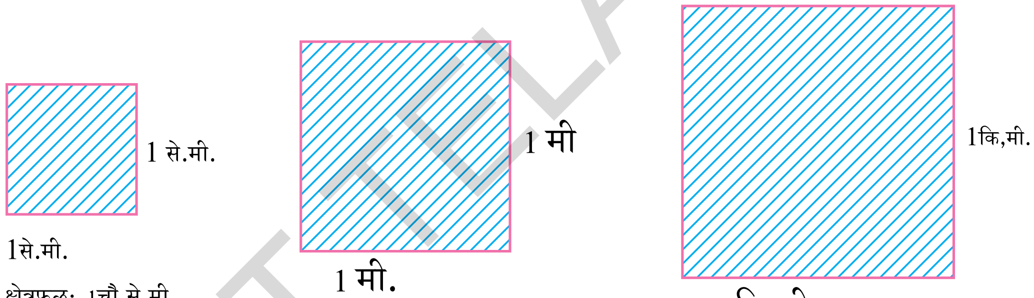
एका सरळ संवृत्त आकृतीने व्यापलेल्या प्रतलाच्या भागास प्रतलीय क्षेत्र म्हणतात. या संवृत्त क्षेत्राच्या परिमाणास किंवा मापास त्यांचे क्षेत्रफळ असे म्हणतात.



त्रिकोण आकार क्षेत्र   चौकोनाकार क्षेत्र   वर्तुळाकार क्षेत्र   आयताकार क्षेत्र   चौरसाकार क्षेत्र

समतल क्षेत्रात सिमा (Boundaries)आणि आंतरक्षेत्र असते. त्याचे क्षेत्रफळ आपण कसे माहित करतो? याक्षेत्राच्या परिमाणास (क्षेत्रफळ) नेहमी धन वास्तविक संख्येने (क्षेत्रफळाच्या काही एककात) जसे 10 से.मी^{2} 215मी^{2} 2 की.मी.^{2}, 3हेक्टर इत्यादीने दर्शविते.म्हुणन एका आकृतीचे क्षेत्रफळ (क्षेत्रफळाच्या काही एककात) हे कोणत्याही एका समतल संवृत्त भागाने गुंतलेले असते.

एकक क्षेत्रफळ हे एक एकक लांबीची बाजु असलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ आहे. म्हणुन चौ.मी. (किंवा 1 से.मी.^{2}) हा एक 1 से.मी. ची लांबीची बाजु घेऊन काढलेल्या चौरसाचे क्षेत्रफळ आहे.

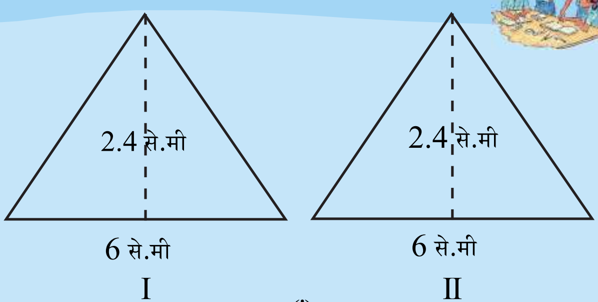


क्षेत्रफळ: 1चौ.से.मी.   क्षेत्रफळ: 1चौ.मी.   क्षेत्रफळ: 1चौ.कि.मी.

चौरस मीटर (1मी^{2}) चौरस किलो मिटर (1कि.मी.^{2}), चौरस मिली मिटर (1मी.मी.^{2}) ही पदे सारख्या शब्दात समजुन घेतली पाहिजे. मागील वर्गात आपल्याला एकरुप आकृत्यांच्या कल्पनेचा परिचय झाला. दोन आकृत्या एकरुप असतात. जेव्हा त्या एकाच रुपात आणि आकारात असतात.

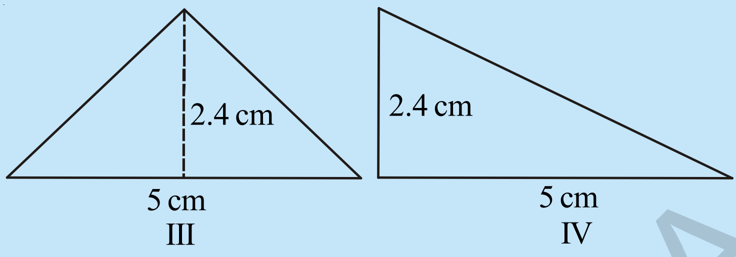
कृती

आकृती (I) आणि (II) चे निरिक्षण करा आणि दोन्हीचे क्षेत्रफळ काढा. या आकृत्या एका कागदाच्या शिटवर काढा आणि कापा. आकृती (I) ला आकृती (II)वर झाका. ते एकमेकांवर पुर्णपणे झाकल्या जातात का? त्या एकरुप आहेत का?

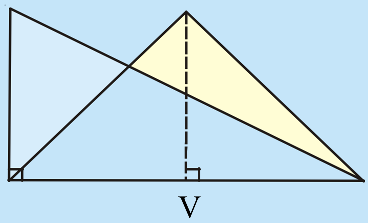


(i)

आकृती III आणि IV पहा. दोन्हीचे क्षेत्रफळ काढा. तुम्हाला काय दिसुन येते?.



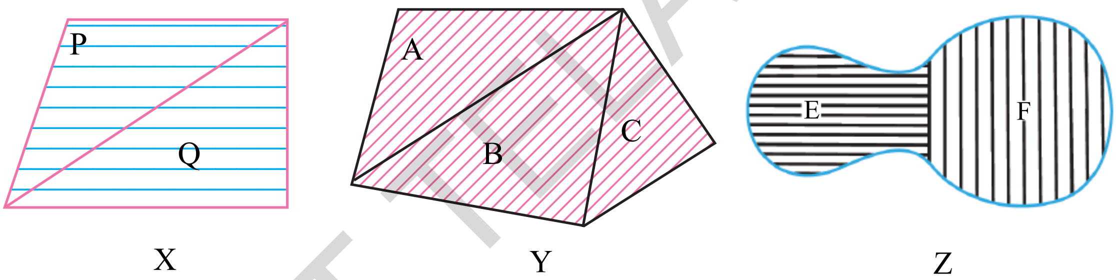
आता या आकृती एका पातळ कागदाच्या शिटवर काढा. त्यास कापा आणि आकृती III ला आकृती IV वर झाका. त्याचा पाया(सारख्या बाजुची लांबी)



आकृती V मध्ये दाखविल्याप्रमाणे पुर्णपणे झाकतात का?

आपण निश्कर्ष काढतो की, आकृती I आणि II या एकरुप आणि समान क्षेत्रफळाच्या आहेत. परंतु आकृती III आणि IV समान क्षेत्रफळाच्या आहेत. परंतु एकरुप नाहीत.

खाली दिलेल्या आकृत्या पहा.



तुम्हाला दिसुन येते की, X, Y, Z या आकृतीचे समतल क्षेत्र हे दोन किंवा जास्त समतल क्षेत्रांनी बनलेली आहे. आपण सुलभतेने पाहु शकतो.

X आकृतीचे क्षेत्रफळ= P आकृतीचे क्षेत्रफळ + Q आकृतीचे क्षेत्रफळ

अशा रितीने (Y) चे क्षेत्रफळ = (A)चे क्षेत्रफळ + (B)चे क्षेत्रफळ +(C) चे क्षेत्रफळ

(Z)चे क्षेत्रफळ = (E)चे क्षेत्रफळ + (F)चे क्षेत्रफळ

अशारीतीने एका आकृतीचे क्षेत्रफळ ही एक संख्या (काही एककात) ती आकृतीतील प्रत्येक भागाशी संबंधीत आहे. यावरुन खालील गुणधर्म सांगु शकतो.

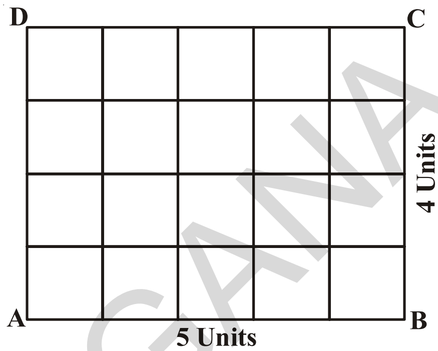
(**सुचना :** (X) आकृतीच्या क्षेत्रफळास क्षे. (X) असे लिहितो.)

(i) दोन एकरुप आकृतीचे क्षेत्रफळ समान असते जर A आणि B दोन एकरुप आकृत्या असल्यास क्षेत्रफळ(A) = क्षेत्रफळ (B)

(ii) आकृतीचे क्षेत्रफळ हे त्या आकृतीमधील एकुण भागाच्या क्षेत्रफळाच्या बेरजेला समान असते. जर एक समतल क्षेत्र आकृतीमधील X ने बनलेले हे दोन एकमेकांवर न झाकणाऱ्या समतल आकृत्याP आणि Q ने तयार होतात म्हणुन क्षे.(X) = क्षे.(P) + क्षे.(Q).

11.3 आयताचे क्षेत्रफळ

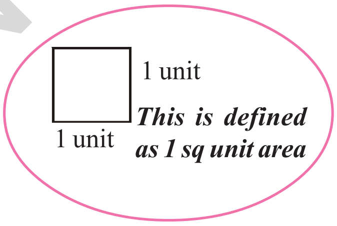
एका आयताचे लांबीला सबंधीत एककाच्या संख्येने उंचीशी संबंधीत असलेल्या एककाच्या संख्येने गुणले असता येणारा गुणाकार त्या आयताच्या क्षेत्रफळाच्या चौरस एककास समान असतो.



ABCD आयतात लांबी AB 5 एकक आहे. आणि रुंदी BC 4 एकक आहे.

AB 5 समान भागात आणि BC ला 4 समान भागात विभागणी करुन लांबी, रुंदीला समांतर रेषा काढली असता प्रत्येक विभाग एक चौरस एकक होतो. का ?

$\therefore$ आयतात(5 एकक $\times$ 4 एकक). एकक म्हणजे 20 चौरस एकक असतात.



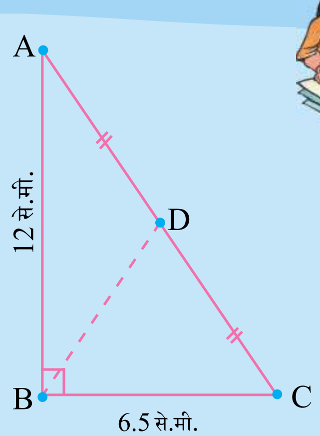
अशारितीने जर लांबी 'a' एकक आणि रुंदी 'b' एकक असल्यास आयताचे क्षेत्रफळ 'ab' चौरस एकक होते. म्हणजे लांबी $\times$ रुंदी चौरस एकक आयताचे क्षेत्रफळ येते.

विचार करा आणि चर्चा करा आणि लिहा.

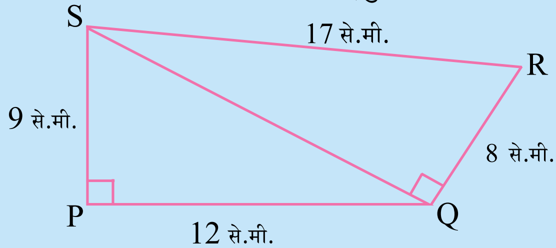
1. जर 1 से.मी. हे 5 मीटर दर्शविल्यास 6 चौरस से.मी. क्षेत्रफळ काय दर्शविते ?
2. 1 चौ.मी = 100^2 चौ.से.मी. रजनी म्हणाली. तुम्ही सहमत आहेत का ? स्पष्ट करा

अभ्यास - 11.1

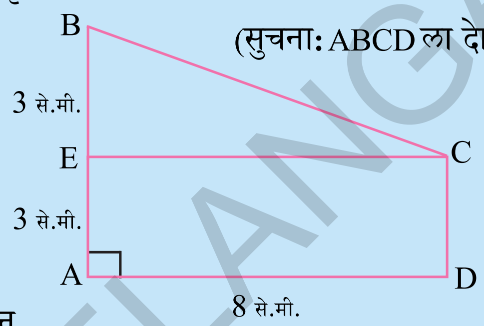
1. ΔABC मध्ये $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = DC, AB =$ 12 से.मी. आणि $BC = 6.5$ से.मी. ΔADB चे क्षेत्रफळ काढा.



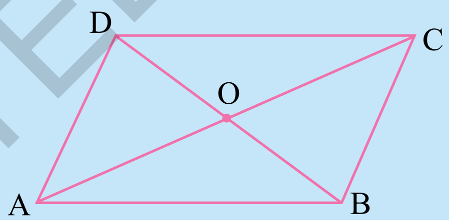
2. PQRS चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा ज्यात $\angle QPS = \angle SQR = 90°$, $PQ = 12$ से.मी.$PS = 9$ से.मी., $QR = 8$ से.मी. अणि $SR = 17$ से.मी. (सुचना: PQRS ला दोन भाग असतात.खख)



3. ABCD समलंब चौकोनाचे आकृतीत दिल्याप्रमाणे क्षेत्रफळ काढा. ज्यात ADCE हा आयत आहे. (सुचना: ABCD ला दोन भाग असमान)



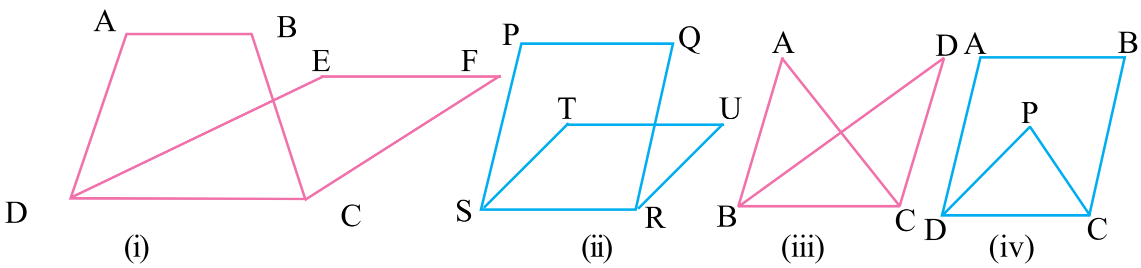
4. ABCD हा समांतर भुज चौकोन आहे. कर्ण AC आणि BD कर्ण एकमेकांस 'O'बिंदुवर छेदतात. सिंध्द करा की क्षे.(ΔAOD) = क्षे.(ΔBOC). (सुचना: एकरुप आकृत्यास समान क्षेत्रफळ असते)



11.4 एकच पाया आणि एकासमांतर रेषे मधील आकृत्या

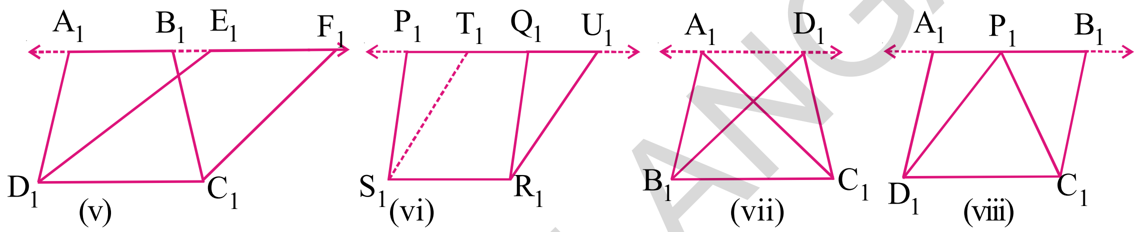
एकच पाया आणि एकाच समांतर रेषे मधील काही भुमीतीय आकृत्यांच्या क्षेत्रफळामधील संबंधाचा आता आपण अभ्यास करु. हा अभ्यास आपणास एकरुप त्रिकोणाच्या गुणधर्म माहित करण्यासाठी उपयोगी पडते.

खालील आकृत्यांचे निरिक्षण करा.



आकृती (i) मध्ये ABCD समलंब चौकोन आणि EFCD हा समांतर भुज चौकोन आहे. त्या दोनीची सामाईक बाजु CD आहे. आपण म्हणु शकतो की, ABCD समलंब चौकोन EFCD समांतरभुज चौकोन एकाच पाया CD वर आहेत. अशा प्रकारे आकृती (ii) मध्ये PQRS समातंर भुज चौकोनाचा पाया TURS समांतर भुज चौकोनाचा पाया सारखा आहे. आकृती (iii) त्रिकोण ABC आणि त्रिकोण DBC चा पाया BC समान आहे. आकृती (iv) मध्ये ABCD समांतर भुज चौकोन आणि PCD त्रिकोण एकाच पाया DCवर आहे. म्हणुन या सर्व आकृत्या भुमितीय आकाराच्या आकृत्या असुन त्या एकाच पाया वर आहे. परंतु त्या एकाच समांतर रेषेमध्ये नाही. कारण AB , EF आणि PQ , TU एकमेकांवर येत नाही. A, B, E, F हे एकरेषीय बिंदु नसुन आणि P, Q, T, U. सुध्दा एकरेषीय नाहीत. आकृती (iii) आणि आकृती (iv) बद्दल काय म्हणु शकता?

खालील आकृतीचे निरिक्षण करा.



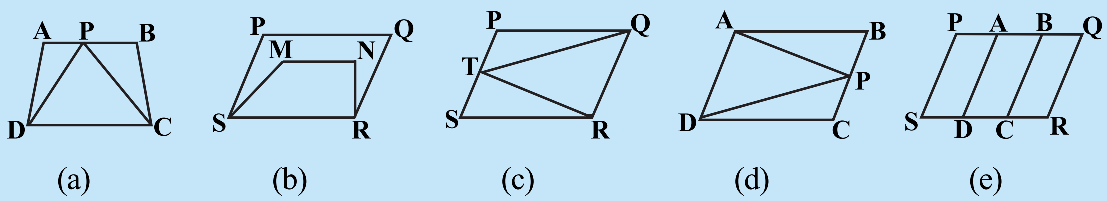
या आकृत्यामध्ये तुम्हाल काय फरक आढळुन येतो? आकृती (v), मध्ये $A_1B_1C_1D_1$ समलंब चौकोन आणि $E_1F_1C_1D_1$ समांतर भुज चौकोन एकाच पायावर आणि एकाच समांतर रेषेमध्ये A_1F_1 आणि D_1C_1 आहे. A_1, B_1, E_1, F_1 बिंदु एकरेषीय आणि $A_1F_1 \parallel D_1C_1$ आहे. अशा रितीने आकृती (vi) मध्ये $P_1Q_1R_1S_1$ आणि $T_1U_1R_1S_1$ एकाच सारख्या पाया S_1R_1 एकाच समांतर रेषेमध्ये P_1U_1 आणि S_1R_1.मध्ये आहे. आकृती (vii) आणि आकृती (viii).मध्ये एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमध्ये असलेल्या आकृतीची नावे द्या.

दोन आकृत्या एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमध्ये असतात, जर त्यास एकाच पाया (बाजु) आणि सामाईक पायांच्या विरुध्द असलेला शिरोबिंदु हा प्रत्येक आकृतीमध्ये पायाला समांतर असलेल्या रेषेवर असला पाहिजे.

विचार करा आणि चर्चा करा आणि लिहा.

खालील पैकी कोणत्या आकृत्या एकाच पायावर आणि एकाच समांतर रेषेमध्ये वसलेल्या (स्थित)

अशा संदर्भात सामाईक पाया आणि दोन समांतर रेषा लिहा.

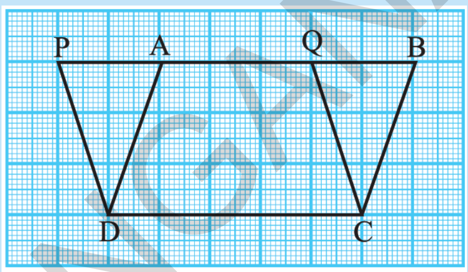


11.5 एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमधील समांतर भुज चौकोन

एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमधील समांतर रेषेमधील समांतर भुज चौकोनात काही संबंध आहे का? असेल तर त्यास माहित करण्यासाठी अगोदर काही कृती करुन पाहु या.

कृती

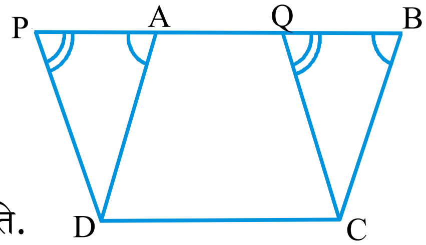
एका आलेखाच्या कागदावर आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे दोन समांतरभुज चौकोन ABCD आणि PQCD काढा.



समातंरभुज चौकोन एकाच पाया DC वर आणि सारख्या समांतर PB आणि DC रेषे मध्ये आहे. स्पष्ट पणे DCQA हा भाग दोन समांतर भुज चौकोनात सामाईक आहे. म्हणुन जर आपण त्रिकोण ΔDAP आणि ΔCBQ सारखे क्षेत्रफळ असते. हे दाखविल्या नंतर आपण म्हणुन शकतो की, (PQCD)क्षे. = (ABCD)क्षेत्रफळ.

प्रमेय-11.1 : एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेंषेमधील समांतर चर्तुभुज समान क्षेत्रफळाचे असतात

सिध्दता: समजा एकाच पाया DC वर असलेले दोन समांतर चर्तुभुज ABCD आणि PQCD हे एकाच DC आणि PB समांतर रेषेमध्ये आहेत.



ΔDAP आणि ΔCBQ मध्ये

$PD \parallel CQ$ आणि PB छेदीका आहे. $\angle DPA = \angle CQB$

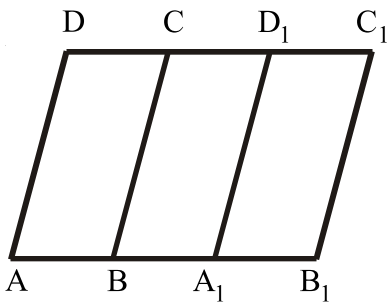
आणि $AD \parallel CB$ आणि PB छेदीका आहे. $\angle DAP = \angle CBQ$

असेच PQCD समांतरभुज चौकोन असल्यामुळे $PD = QC$होते.

ΔDAP आणि ΔCBQ एकरुप त्रिकोण आहेत. त्यांचे क्षेत्रफळ समान आहेत.

म्हणुन (PQCD)क्षे. = (AQCD)क्षे. + (DAP)क्षे.

= (AQCD)क्षे. + (CBQ)क्षे. = (ABCD)क्षे.



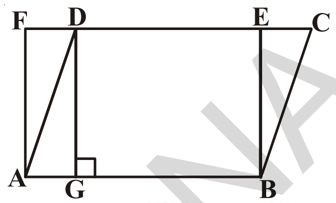
तुम्ही समांतरचर्तुभुज चौकोनामधील चौरसांची संख्या मोजुन पडताळा करु शकता. आलेखावरील पुर्ण चौरस अध्यपिक्षा कमी असलेले चौरस अध्यपिक्षा जास्त असलेले चौरस कशे मोजता. दोन समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ समान राहण्यासाठी ते एकाच समांतर रेषेमध्ये आणि एकाच पायावर असणे आवश्यक नाही. अशी रेशमा म्हणाली. त्यास समान पाया असणे पुरेसे होते. अशी ती म्हणाली. तीच्या विधानास समजण्यासाठी बाजुची आकृती पाहु या.

जर $AB = A_1B_1$ जेव्हा आपण $A_1B_1C_1D_1$समांतर चर्तुभुज कापुन त्यास ABCDसमांतर चर्तुभुजावर ठेवतो. तेव्हा A हा A_1 शी B आणि B_1शी आणि $\overline{C_1D_1}$ हा CDशी तंतोतंत जुळतो. अशारितीने

त्याचे क्षेत्रफळ समान असते. म्हणुन समांतरचर्तुभुज सारख्या पायावर आहे. आणि ते एकाच पायावर आहे हे समजल्या जाते. हे भुमितीय गुणधर्माचा अभ्यास करण्यासाठी उपयोगी पडते.

आता आपण वरील सिध्दतांच्या आधारास स्पष्ट करणारी काही उदाहरणे घेंऊ.

उदाहरण-1:ABCD हा समांतरभुज चौकोण आणि ABEF हा आयत असुन DG हा AB.वर लंब आहे. तर सिध्द करा



(i) (ABCD)क्षे. = (ABEF)क्षे.

(ii) (ABCD)क्षे. = AB × DG

सोडवणुक: (i) आयत हा समांतरभुज चौकोन सुध्दा आहे

$\therefore$ (ABCD)क्षे. = (ABEF)क्षे. ..... (1)

(एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमध्ये असलेले समांतरचर्तुभुज)

(ii) (ABCD)क्षे. = (ABEF)क्षे ($\because$ (1)वरुन)

= AB × BE ($\because$ ABEF आयत आहे.)

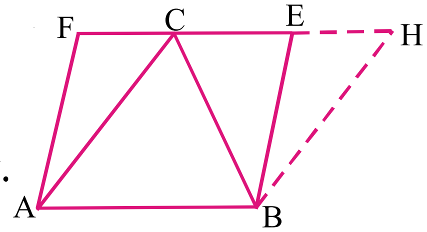
= AB × DG ($\because$ DG $\perp$ AB आणि DG = BE)

म्हणुन (ABCD)क्षे. = AB × DG

वरील परिणामावरुन आपण म्हणुन शकतो की, समांतरचर्तुभुजाचे क्षेत्रफळ हे त्याची कोणती एक बाजु आणि त्या समान काढलेल्या लंबाच्या गुणाकारा एवढे असते.

उदाहरण-2: ABC त्रिकेाण आणि ABEF समांतर चर्तुभुज हे एकाच पायावर (AB) आणि एकाच समांतर रेषा AB आणि EF मध्ये असल्यास सिध्द करा की,(ΔABC)क्षे. = $\frac{1}{2}$ (ABEF समांतरचर्तुभुज)क्षे.

सोडवणुक: B वरुन BH || AC काढा ते वाढवलेल्या FE ला H वर मिळते.



$\therefore$ ABHC समांतरभुज चौकोन होते.

BC कर्ण दोन एकरुप त्रिकोणात विभागणी करते.

$\therefore$ (ΔABC)क्षे. = (ΔBCH) क्षे.

= $\frac{1}{2}$ (ABHC समांतरचर्तुभुज)क्षे.

परंतु ABHC समांतर चर्तुभुज आणि ABEF समांतरचर्तुभुज एकाच पाया AB वर आणि एकाच समांतर रेषा AB आणि EF मध्ये आहेत.

$\therefore$ (ABHCसमांतर चर्तुभुज)क्षे. = (ABEFसमांतर चर्तुभुज)क्षे.

म्हणुन (ΔABC)क्षे = $\frac{1}{2}$ (ABEF समांतरचर्तुभुज)क्षे.

वरील परिणामावरुन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे समांतर भुज चौकोनाच्या क्षेत्रफळाच्या अर्धे असते. सारख्या पाया आणि सारख्या समांतर रेषेमध्ये असते.

उदाहरण-3:एका समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण 12 से.मी. आणि 16 से.मी. त्याच्या संल्गन बाजुच्या मध्यबिंदुना जोड्ल्यास तयार होणाऱ्या आकृतीचे क्षेत्रफळ माहित करा.

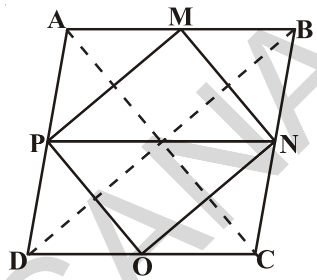
सोडवणुक: ABCD समचर्तुभुजाच्या बाजु AB, BC, CD, DA यांच्या मध्य बिंदु अनुक्रमे M, N, O आणि P आहेत. यास मिळविल्यास MNOP आकृती येते.

अशा प्रकारे तयार झालेल्या MNOP चा आकार कसा आहे? कारणे द्या?

रेषा PN ला जोडा, नंतर PN || AB आणि PN || DC (कसे?)

आपणास माहित आहे की, एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमधील त्रिकोण आणि समांतर चर्तुभुज, त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे समांतर भुज चौकोनाच्या क्षेत्रफळाच्या अर्धे असते.

वरील परिणामावरुन ABNP समांतर चर्तुभुज आणि त्रिकोण MNP एकाच पाया PN एकाच समांतर रेषा PN आणि AB आहे.



$\therefore \quad \Delta MNP$क्षे. $= \frac{1}{2}$ ABPNक्षे. .....(i)

अशारितीने ΔPONक्षे $= \frac{1}{2}$ PNCD क्षे. .....(ii)

आणि समचुर्तुभुजाचे क्षे. $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$

(1), (ii) आणि (iii) वरुन

(MNOP)क्षे. $= (\Delta MNP)$क्षे. $+ (\Delta PON)$क्षे.

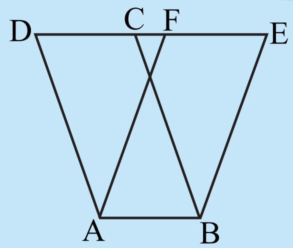
$= \frac{1}{2}$ (ABNP)क्षे. $+ \frac{1}{2}$ (ABCD)क्षे.

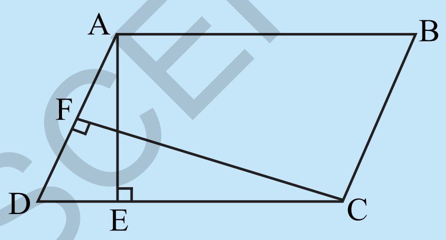
$= \frac{1}{2}$ (ABCDसमचर्तुभुज) क्षे.

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 16\right) = 48$ से.मी.^{2}

अभ्यास- 11.2

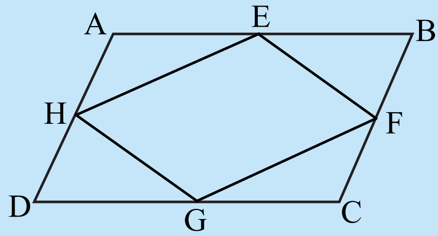
1. ABCD समांतर चर्तुभुजाचे क्षेत्रफळ 36 से.मी^{2}. आहे.जर AB = 4.2 से.मी. तर ABEF समांतर चर्तुभुजाची उंची माहित करा.



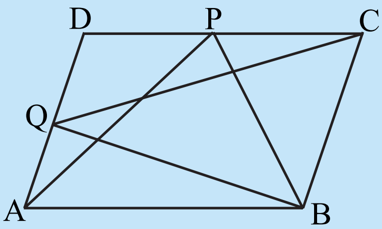


2. ABCD समांतर चर्तुभुज आहे. AE हा DC सी वर लंब आहे. आणि CF हाAD वर लंब आहे.जर AB = 10 से.मी. AE = 8 से.मी. आणि CF = 12 से.मी. तर AD काढा.

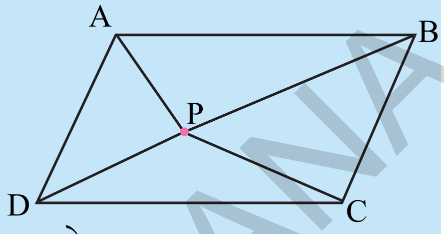
3. ABCD समांतर चर्तुभुजाच्या बाजु AB, BC, CDआणि AD चे मध्यबिंदु अनुक्रमे E, F G आणि H तर सिध्द करा.(EFGH)क्षे. $= \frac{1}{2}$ar(ABCD) क्षे.



4. जर तुम्ही उदाहरण (3) मधील ΔAPM, ΔDPO, ΔOCN आणि ΔMNB जोडल्यास तुम्हाला चौकोन आकृती येते का?



5. ABCD समांतरचर्तुभुजाच्या दोन बाजु DC आणि AD वर बिंदु अनुक्रमे P आणि Q आहेत तर सिध्द करा (ΔAPB)क्षे. = Δ(BQC)क्षे.



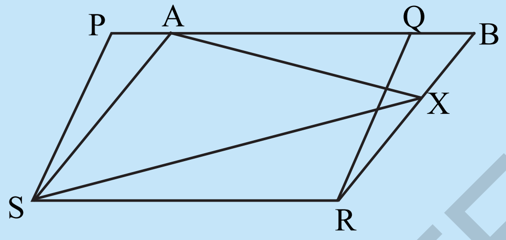
6. ABCD समांतर भुजचौकोनाच्या आतील बिंदु P तर सिध्द करा.

(i) (ΔAPB)क्षे. + (ΔPCD)क्षे. $= \frac{1}{2}$ ar(ABCD)

(ii) (ΔAPD)क्षे. + (ΔPBC)क्षे. = (ΔAPB)क्षे. + (ΔPCD)क्षे.

(सुचना: Pबिंदुवरुन ABरेषेला दुसरी समांतर रेषा काढा)

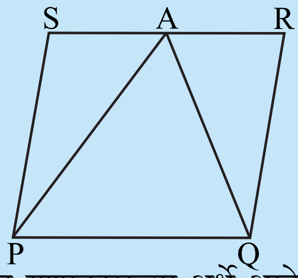
7. समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ त्याच्या समांतर बाजुच्या बेरजेला त्यामधील अंतराने गुणल्यास येणाऱ्या गुणाकाराच्या अर्धे असते हे सिध्द करा.



8. PQRS आणि ABRS हे दोन समांतर चर्तुभुज आहेत. BR वर X हा बिंदु आहे. तर दाखवा की, (i) (PQRS)क्षे = (ABRS)क्षे

(ii) क्षे(ΔAXS) $= \frac{1}{2}$ ar(PQRS) क्षे.

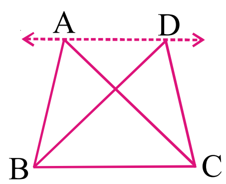
9. एका शेतकऱ्याचे शेत आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे PQRS समांतर चर्तुभुजाच्या आकारात आहेत. त्यांनी Aचा मध्य बिंदु RS वर घेऊन आणि त्याला P आणि Q शी जोडले. त्या शेताचे किती भाग पाडले? या भागाचा आकार कसा आहे? शेतकऱ्यास भुईमुग पेरण्याचे आहे. तो दाळ आणि धानाच्या बेरजेच्या बरोबर आहे. तर तो पेरणी कसा करतो? कारण सांगा?



10. सिध्द करा की, समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या कर्णाच्या गुणाकाराच्या अर्धे आहे.

11.6 एकाच पाया एकाच समांतर रेषेमधील त्रिकोण

आपण एकाच पाया एकाच समांतर रेषेमधील आकृत्यांना पाहतो. समजा दोन त्रिकोण ABC आणि DBC हे एकाच पाया BC आणि एकाच समांतर रेषा AD आणि BC मध्ये आहे.



अशा त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाविषयी आपण काय म्हणु शकतो?

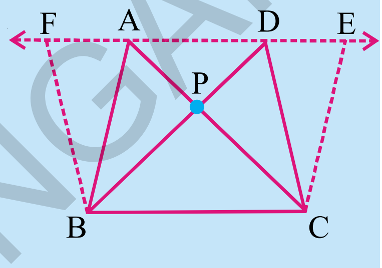
एकाच पाया, एका समांतर रेषेमध्ये अनेक त्रिकोणाच्या जोड्या अनेक प्रकारे काढु शकतो.

चला एक कृती करु या.

कृती

एका आलेखाच्या कागदावर आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एकाच पाया किंवा (समान पाया) एका समांतर रेषेमध्ये असलेले दोन त्रिकोण काढा.

समजा ΔABC आणि ΔDBC हे दोन एकाच पाया BC एकाच समांतर रेषा BC आणि AD. AD ला दोन्ही बाजुस वाढविल्यास आणि $CE \parallel AB$ आणि $BF \parallel CD$ काढा.AECB आणि FDCB समांतर भुज चौकोन एकाच पाया BC आणि एकाच समांतररेषा BC आणि EF मध्ये आहे.



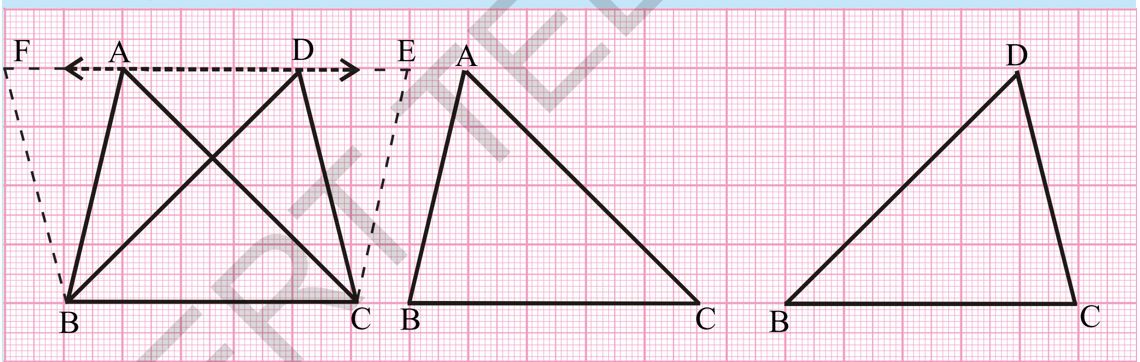
अशा रितीने (AECB)क्षे = (FDCB)क्षे. (कसे ?)

यावरुन (ΔABC)क्षे $= \frac{1}{2}$ (AECBसमांतरचर्तुभुज)क्षे ...(i)

आणि (ΔDBC)क्षे $= \frac{1}{2}$ (FDCBसमांतर चर्तुभुज)क्षे.... (ii)

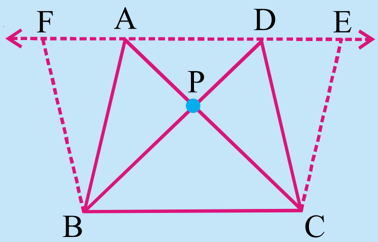
(i) आणि (ii)वरुन (ΔABC)क्षे = (ΔDBC) क्षे

ΔABC आणि ΔDBC चे क्षेत्रफळ आलेखातील चौरसाची संख्या मोजुण मागील कृती प्रमाणे काढु शकतो आणि ते सारखे आहे किंवा नाही तपासणी करु शकतो.



विचार करा आणि चर्चा करा आणि लिहा.

ABC आणि DBC हे दोन त्रिकोण आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमध्ये आहेत. P हा AC आणि BDछेदन बिंदु आहे. $CE \parallel BA$ आणि $BF \parallel CD$ असे काढा की, E आणि F AD. वर आले पाहिजे.



(ΔPAB)क्षे = (ΔPDC)क्षे. दाखवु शकता का ?

सुचना: हे त्रिकोण एकरुप नाही परंतु त्याचे क्षेत्रफळ समान आहे.

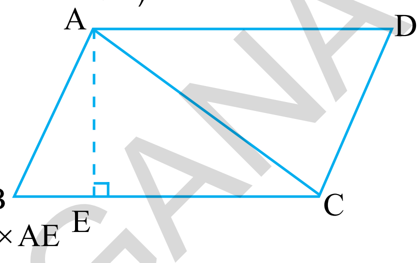
उपप्रमेय-1 : त्रिकोणाचा क्षेत्रफळ त्याचा पाया (किंवा कोणतीही बाजु) आणि त्यावर काढलेला लंबाच्या (उंची) गुणाकाराच्या अर्धे असते. सिध्द करा.

सिध्दता: समजा ABC हा त्रिकोण आहे. AD || BC असे काढा की, CD = BA.

झाले पाहिजे. आता ABCD समांतर चर्तुभुज त्याचा कर्ण AC आहे.

आपणास माहित आहे $\Delta ABC \cong \Delta ACD$

म्हणुन ΔABCक्षे = ΔACDक्षे (एकरुप त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ समान असते)



म्हणुन ar$\Delta ABC = \frac{1}{2}$ar(ABCD) क्षे.

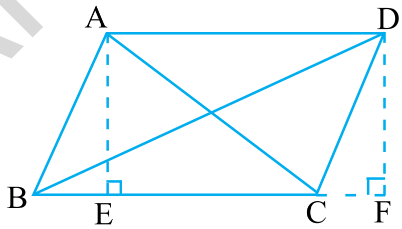
$AE \perp BC$ काढा

आपणास माहित आहे (ABCD)क्षे = $BC \times AE$

आपणास माहित आहे (ΔABC)क्षे = $\frac{1}{2}$(ABCD)क्षे = $\frac{1}{2} \times BC \times AE$

यावरुन ΔABCक्षे = $\frac{1}{2} \times$ पाया BC $\times$ पायावरील लंब AE.

प्रमेय-11.2 : सारखा पाया आणि सारखे क्षेत्रफळ असणारे दोन त्रिकोण एकाच समांतर रेषेमध्ये असतात.



आकृती पहा. सारखा पाया BC वर असणाऱ्या त्रिकोणास नाव द्या. ΔABC आणि ΔDBC ची उंची काय आहे?

जर दोन त्रिकोणास समान क्षेत्रफळ आणि समान पाया असल्यास त्यांची उंची काय असते? A आणि D हे एकरेषीय आहेत का?

वरील परिणामाच्या उपयोगाचे स्पष्टीकरण करण्यासाठी काही उदाहरणे घेऊत.

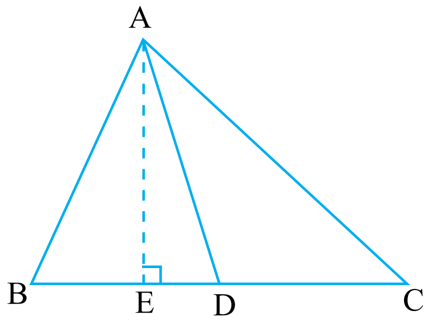
उदाहरण-4: सिध्द करा की त्रिकोणाची मध्यगा त्रिकोणास समान क्षेत्रफळाच्या दोन त्रिकोणात विभागते.

सोडवणुक: समजा ABC हा त्रिकोण आहे. आणि AD ही त्याची एक मध्यगा आहे.

ΔABD आणि ΔADC मध्ये शिरोबिंदु सामाईक असतो आणि त्याचा पाया BD आणि DC समान असतो.

$AE \perp BC$. काढा

आता (ΔABD) = $\frac{1}{2} \times$ पाया BD $\times$ ΔADB ची उंची



$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

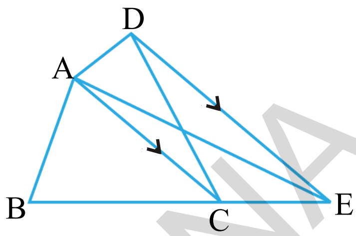
$= \frac{1}{2} \times DC \times AE \quad (\because BD = DC)$

$= \frac{1}{2} \times$ पाया DC $\times$ ΔACD ची उंची

= क्षे ΔACD

आता (ΔABD) = क्षे (ΔACD)

उदाहरण-5: आकृतीमध्ये ABCD हा समांतरचर्तुभुज आहे. AC हा कर्ण आहे आणि $DE \parallel AC$ आणि DE हा BC ला वाढविल्यास E वर मिळते तर दाखवा की, (ABCD)क्षे = (ΔABE)क्षे.



सोडवणुक: (ABCD)क्षे = (ΔABC)क्षे + (ΔDAC)क्षे

ΔDAC आणि ΔEAC सारखा पाया $\overline{AC}$ वर आहे आणि

$DE \parallel AC$ मध्ये आहे.

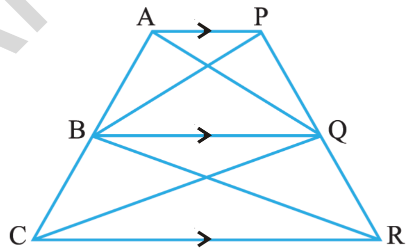
(ΔDAC)क्षे = (ΔEAC)क्षे (का?)

सारख्या आकृतीच्या क्षेत्रफळाला दोन्ही बाजुला मिळविल्यास

(ΔDAC)क्षे + (ΔABC)क्षे = (ΔEAC)क्षे + (ΔABC)क्षे

म्हणुन (ABCD)क्षे = (ΔABE)क्षे

उदाहरण-6: आकृतीत $AP \parallel BQ \parallel CR$ आहेत सिध्द करा की, (ΔAQC)क्षे = (ΔPBR)क्षे



सोडवणुक: ΔABQ आणि Δ PBQ एकाच पाया BQ. आणि एकाच समांतर $AP \parallel BQ$. मध्ये आहे.

(ΔABQ)क्षे = (ΔPBQ)क्षे ...(1)

अशारितीने

(ΔCQB)क्षे = (ΔRQB)क्षे (सारखा पाया BQ आणि $BQ \parallel CR$) ...(2)

(1) आणि (2) मिळविल्यास

(ΔABQ)क्षे + (ΔCQB)क्षे = (ΔPBQ)क्षे + (ΔRQB)क्षे

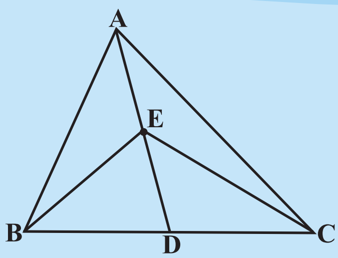
म्हणुन ΔAQCक्षे = ΔPBRक्षे

अभ्यास- 11.3

1. त्रिकोण ABC मध्ये (आकृती पहा) E हा मध्यगा ADचा मध्यबिंदु आहे दाखवा

   (i) ΔABEक्षे = ΔACEक्षे

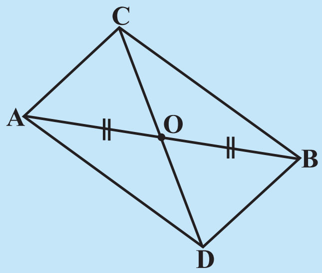
   (ii) $ar\Delta ABE = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

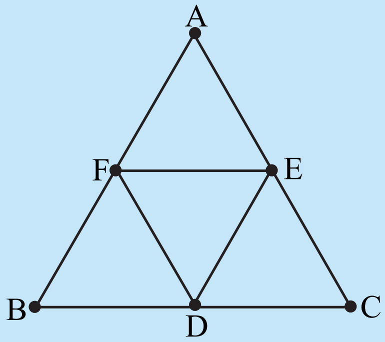


2. समांतरचर्तुभुजाचा कर्ण हा त्यास समान क्षेत्रफळ असलेल्या चार त्रिकोणात विभागतो.

3. आकृतीत ΔABC आणि ΔABD हे एकच पाया AB असलेले दोन त्रिकोण आहेत. रेषाखंड CD हा $\overline{AB}$ ला O वर समद्विखंडन केल्यास दाखवा की,

(ΔABC)क्षे $= (\Delta ABD)$क्षे





4. आकृतीत ΔABC मध्ये D, E, F हे अनुक्रमे BC, CA आणि AB बाजुचे मध्यबिंदु आहेत तर दाखवा

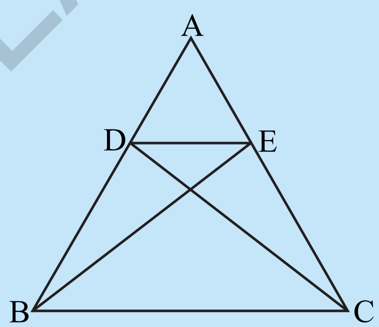
(i) BDEF हा समांतरचतुर्भुज आहे.

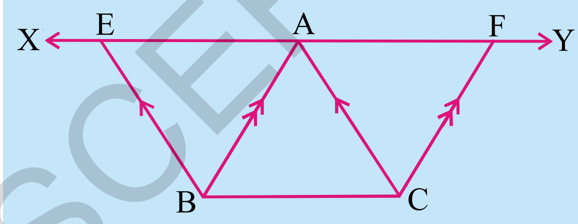
(ii) $ar(\Delta DEF) = \frac{1}{4} ar(\Delta ABC)$

(iii) $ar(BDEF) = \frac{1}{2} ar(\Delta ABC)$

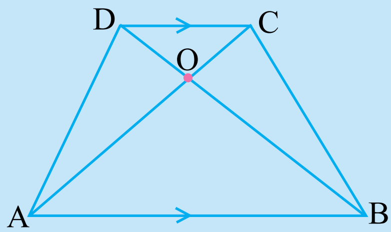
5. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे (ΔABC)मध्ये D आणि E बिंदु अनुक्रमे AB आणि AC बाजुवरील बिंदु आहेत. ΔDBCक्षे $=$ (ΔEBC)क्षे तर सिध्द करा.

DE || BC.

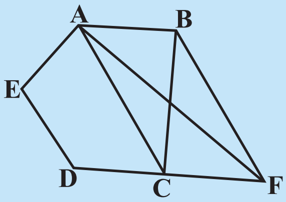




6. आकृतीत BC ला समांतर असलेली A पासुन काढलेली रेषा XY आहे. जर BE || CA आणि CF || BA काढल्यास E आहे F वर XY ला मिळतात दाखवा की, (ΔABE)क्षे $= (\Delta ACF)$क्षे



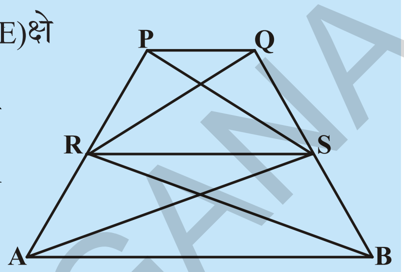
7. आकृतीत ABCD समलंब चौकोनात AB || DC कर्ण AC आणि BD O वर एकमेकांस छेदतात. तर सिध्द करा की, (ΔAOD)क्षे $= (\Delta BOC)$क्षे.



8. आकृतीत ABCDE ही पंचभुजी आहे. B मधुन AC ला समांतर असलेली रेषा वाढवलेल्या DC ला F वर मिळते. तर दाखवा की,

(i) (ΔACB)क्षे $= (\Delta ACF)$क्षे

(ii) $(AEDF)$क्षे $= (ABCDE)$क्षे

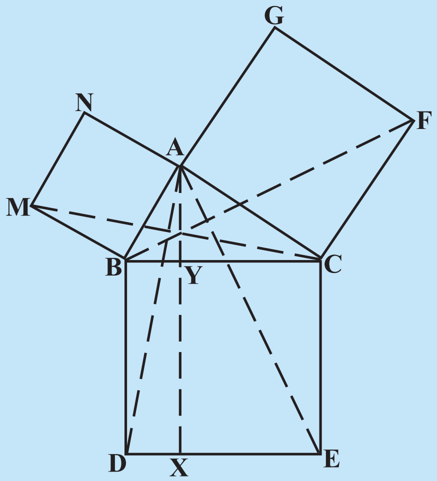


9. बाजुच्या आकृतीत जर ΔRASक्षे $= \Delta RBS$ क्षे आणि (ΔQRB)क्षे $= (\Delta PAS)$क्षे तर सिध्द करा की, PQSR आणि RSBA दोन्ही समलंब चौकोन आहेत.

10. एका गावात रामय्याला चौकोनाकार खाली जागा आहे. त्या गावच्या ग्रामपंचायतीने त्या जागेचा काही भाग एका कोपऱ्याकडुन शाळेची इमारत बांधण्यासाठी घेण्याचा निर्णय केला. रामय्याने वरील एक जागा अटी नुसार मान्य करुन तो सहमत झाला. त्याच्या ऐवजी तेवढ्याच क्षेत्रफळाच्या आकारात घेतल्यास कोणत्या प्रकारे ती त्रिकोणाकार जागा मिळते. स्पष्टीकरण द्या. (त्या जागेचे अंदाजे चित्र रेखाटा)

विचार करा अणि चर्चा करा आणि लिहा.

काटकोन आणि त्रिकोण ABC मध्ये A हा काटकोन आहे. BC, CA आणिAB बाजुवर अनुक्रमे BCED, ACFG आणि ABMN चौरस काढले आहे. रेषाखंड $AX \perp DE$ BC ला Y वर आणि DE ला X वर छेदतो. AD, AE जोडा आणि BF आणि CM सुध्दा जोडा.(आकृती पहा) तर सिध्द करा की,



(i) $\Delta MBC \cong \Delta ABD$

(ii) $(BYXD)$क्षे $= 2(\Delta MBC)$क्षे

(iii) $(BYXD)$क्षे $= (ABMN)$ क्षे

(iv) $\Delta FCB \cong \Delta ACE$

(v) $(CYXE)$क्षे $= 2(FCB)$ क्षे

(vi) $(CYXE)$क्षे $= (ACFG)$क्षे

(vii) $(BCED)$क्षे $= (ABMN)$क्षे $+ (ACFG)$क्षे

(vii) वा उत्तर तुमच्या शब्दात लिहु शकता का? ही प्रसिध्द पायथागोरसचा सिध्दांत आहे. या सिध्दांताची सिध्दता तुम्ही 10 व्या वर्गात शिकणार आहात.

आपण काय चर्चा केली?

या धड्यात आपण खालील चर्चा केली.

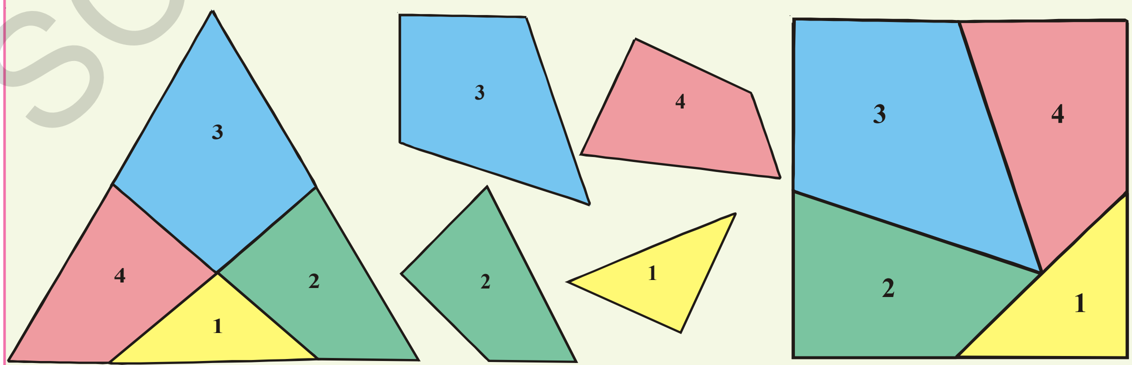
1. एका आकृतीचे क्षेत्रफळ हे (क्षेत्रफळाच्या काही एककात) कोणत्याही एका संवृत्त भागाने गुंतलेली असते.
2. दोन एकरुप आकृतीला सारखे क्षेत्रफळ असते परंतु याचे उलटखरे नाही.
3. जर X एक समतल आकृतीचे क्षेत्र हे P आणि Q च्या दोन न झाकलेले सतत समतल तयार झाले असता.(X) = (P)क्षे + (Q)क्षे
4. दोन आकृती एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमध्ये आहे म्हणतात. जर त्याचा पाया एकच असुन प्रत्येक आकृतीच्या सामान्य बाजुच्या विरुध्द असलेले शिरोबिंदु त्या पायाच्या समांतर रेषेवर असतात.
5. एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमधील समांतरचर्तुभुजाचे क्षेत्रफळ समान असते.
6. समांतरचर्तुभुजाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या पाया आणि त्या समोरील उंचीचा गुणाकार आहे.
7. एकाच पाया (किवा समान पाया) वर असणारे समांतरभुजाचे समान क्षेत्रफळाचे एकास समांतर रेषेमध्ये असते.
8. एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमधील त्रिकोण आणि समांतर चर्तुभुज असल्यास त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ समांतर चर्तुभुजाच्या अर्धे असते.
9. एकाच पाया (समान पाया) आणि एकाच समांतर रेषे मधील त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ समातन असते.
10. एकाच पाया (समान पाया) आणि समान क्षेत्रफळ असणारे त्रिकोण एकाच समांतर रेषेमध्ये असतात.

तुम्हाला माहित आहे का?

गंमत(क्षेत्रफळ)

जर्मनच्या गणितशास्त्रज्ञ डेविड हिलबर्ट (1862- 1943) ने सिध्द केले की कोणताही बहुभुजाला तुकडे करुन त्यास समान क्षेत्रफळ असलेल्या इतर बहुभुजीत बदलता येते.

हेनरी अरनेस्ट ड्युडेनसी (1847-1930) ने समभुज त्रिकोणाला चार तुकड्यात कापुन त्याचे चौरसात कसे रुपांतर केले पाहु.



चौरसाने कसे रुपांतर केले पाहु या.

12 वर्तुळ

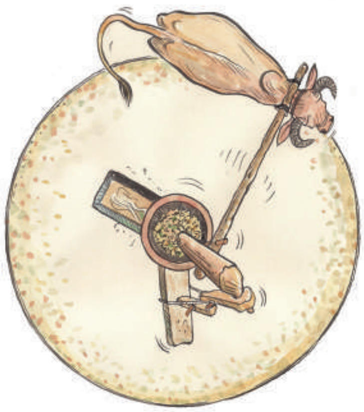
12.1 प्रस्तावना

आपण आपल्या सभोवतालच्या परिसरात नाणे बांगड्या, घड्याळ चाक, बटन, इत्यादी गोल आकाराच्या वस्तु बघतो. या सर्व वस्तु वर्तुळाकारात आहेत. तुम्ही या नाण्याचे कडे वरुन, बांगड्या, बटनाच्या कडे वरुन लहानपणी रेषा काढली असाल जी वर्तुळ बनते.

म्हुणन या वस्तुंच्या साहाय्याने काढलेल्या वर्तुळाकार आकारात आणि वर्तुळात काय फरक आहे. तुम्ही सांगु शकता?

वर निरिक्षण केलेल्या सर्व वर्तुळाकार वस्तुंना जाडी असुन त्या त्रिमीतीय आकारामानत आहे. परंतु वर्तुळात व्दिमीतीय आकार असते त्यास जाडी नसते.

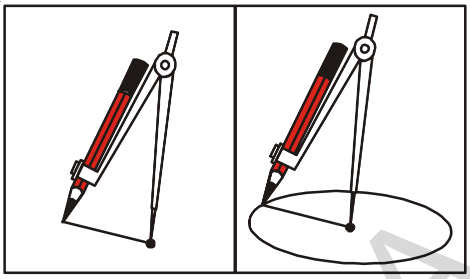
वर्तुळाचे दुसरे उदाहरण घेऊ या तुम्ही तेल काढण्याची चक्की पाहिलेच असाल. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एक तरफेच्या टेकुस घट्ट बांधलेला बैल एका आकाराच्या दिशेत चालुन आहे. तुम्ही तो मार्ग (रस्ता) ओळखतात का? तो रस्ता वर्तुळाकर आहे.



त्या बैलांनी सिमेवर केलेले रेषा वर्तुळाकार आहे. तेलांची घाना जमीनीवर एका बिंदुवर घट्ट बसविलेला आहे. जो त्या वर्तुळाच्या केंद्रबिंदु आहे. त्या एकतरफेच्या टेकुची लांबी जो त्या वर्तुळाची त्रिज्या सुचित करते. तुमच्या जिवनातील वर्तुळा विषयी काही उदाहरणाचा विचार करा.

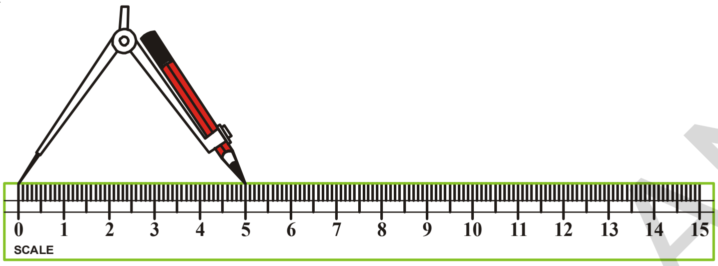
या धड्यात आपण वर्तुळाबद्दल शिकणार आहोत. वर्तुळासंबंधी पदे आणि त्यांचे गुणधर्माचा अभ्यास करणार आहोत. या अगोदर वर्तुळेखणीच्या साहाय्याने वर्तुळ कसे काढतात. ते तुम्हाला माहित पाहिजे.

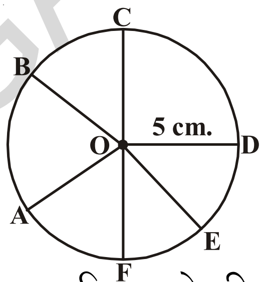
चला हे करु या.



एका पेन्सीलला वृत्तलेखणीच्या चिमट्यात ठेऊन स्क्रुला घट्ट करा (आवळा) कागदावर 0 बिंदुची खुण करा. वृत्तलेखणीची तिक्ष्ण बाजु 0 बिंदुवर ठेऊन त्या पेन्सीलला वर्तुळ काढण्यासाठी आकृती दाखविल्याप्रमाणे गोल आकारात फिरवा.

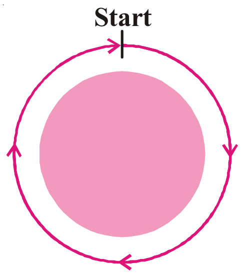
जर आपणास दिलेल्या त्रिजेचे वर्तुळ काढावयाचे असलेल्या मोजपट्टी चा वापर करुन अशाप्रकारे आपण काढु शकतो. दिलेल्या त्रिजेच्या लांबीवरुन वृत्तलेखणीच्या तिक्ष्ण टोकास आणि त्या पेन्सीलीच्या टोकास सरळ करा, 0 बिंदुची खुण करा आणि वर सांगीतल्याप्रमाणे वर्तुळ काढा.





A, B, C, D आणि E हे कोणते ही 5 बिंदु वर्तुळावर काढा. तुम्हाला दिसुन यते की, प्रत्येक रेषाखंड OA, OB, OC, OD, OE आणि OF ची लांबी 5 से.मी. आहे. ती दिलेल्या त्रिजेच्या समान आहे. अजुन काही बिंदु खुण वर्तुळावर करा आणि 0 बिंदु पासुन त्याचे अंतर मोजा. तुम्हाला काय दिसुन यते? आपण म्हणुन शकतो का वर्तुळ हे एका प्रतलातील एका स्थिर बिंदुपासुन स्थिर अंतरावर असलेल्या बिंदुचा संच आहे.

स्थिर बिंदु 0 ला वर्तुळाचा केंद्रबिंदु म्हणतात. आणि स्थिर अंतर OA ला वर्तुळाची त्रिज्या म्हणतात.



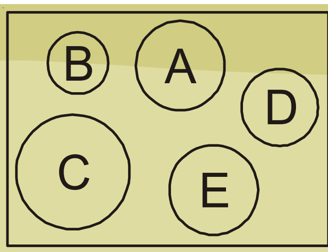
नरसिम्हा एका बिंदुवरुन बगीच्याच्या भोवती चलणे सुरु केले आणि एक फेरी पुर्ण केली. नरसिम्हाने कापलेल्या अंतरास तुम्ही काय म्हणता? ती वृत्ताकार बगीच्याच्या सिमेची एकुण लांबी आहे. आणि त्यास वर्तुळाचा परिघ म्हणतात. म्हणुन वर्तुळाच्या एकुण लांबीला वर्तुळाचा परिघ म्हणतात.

कृती

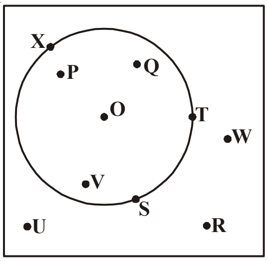
खालील कृती करु या, एका कागदाच्या शिखर बिंदुची खुण यास केंद्रबिंदु घेऊन कोणत्याही त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. आता त्रिज्या वाढवुन किंवा कमी करुन अजुन काही वर्तुळे काढा. या कृतीत येणाऱ्या वर्तुळांना तुम्ही काय म्हणता?

एकच केंद्र बिंदु असलेल्या पण वेगवेगळ्या त्रिज्या असणाऱ्या वर्तुळांना एक समकेंद्री वर्तुळं म्हणतात.

हे करा



1. आकृतीत दिलेल्या वर्तुळात कोणते वर्तुळ Aला एकरुप आहे.



2. वर्तुळाची कोणती मापे त्यास एकरुप करते?

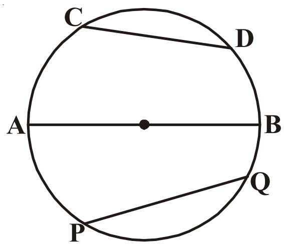
एका प्रतलातील वर्तुळ त्या प्रतलास तिन भागात विभागतो. ते (i) अंतरवर्तुळ याला वर्तुळाच्या आंतरभाग सुध्दा म्हणतात. (ii) वर्तुळावर याला परिघ सुध्दा म्हणतात. (iii) वर्तुळाच्या बाहेर याला बाहेरील भाग सुध्दा म्हणतात. वरील आकृतीवरुन आत असलेले आणि वर्तुळावर असलेले बिंदु काढा. वर्तुळ आणि त्याचा आतिल भाग मिळुन वर्तुळाकर प्रांत (क्षेत्र) बनते.

कृती

एक जाड वर्तुळकाकर शिट(ठाव) घेऊन त्यास अर्धी घडी करुन उघडा आणि पुन्हा त्यास कोणत्याही अर्ध्या वरुन घडी करा आणि उघडा. हिच क्रिया काही वेळा करा. शेवटी जेव्हा तुम्ही उघडता तुम्हाला काय दिसुन येते.

तुम्हाला दिसुन येते की, सर्व घड्या एका बिंदुवर छेदतात. या बिंदुना आपण काय म्हणतो तुम्हाला आठवते का? हे वर्तुळाचे केंद्रबिंदु आहे.

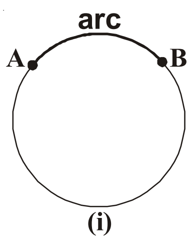
प्रत्येक घडीची केंद्रबिंदुपासुन मोजणी करा तुमच्या लक्षात काय येते? ते सर्व समान असुन प्रत्येक घडी वर्तुळास दोन अर्ध्या भागात वाटणी करते. त्या घडीला वर्तुळाचा व्यास म्हणतात. वर्तुळाचा व्यास त्रिजेच्या दुप्पट असतो. केंद्रबिंदुतुन जाणाऱ्या आणि वर्तुळावर कोणत्याही रितीने केल्यास अर्धाच नाही तर ती घडी दोन्ही बिंदुना वर्तुळावर जोडते.



अशा घडयांना वर्तुळाची जिवा म्हणतात.

म्हणुन वर्तुळावर कोणत्याही दोन बिंदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडास जिवा असे म्हणतात.

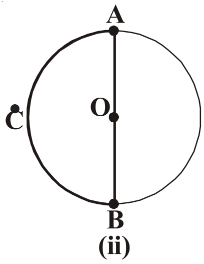
सर्वात मोठ्या जिवेला काय म्हणतात? ती केंद्रबिंदुतुन जाते का?

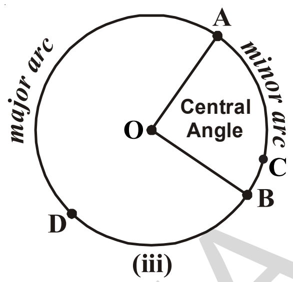


(i)

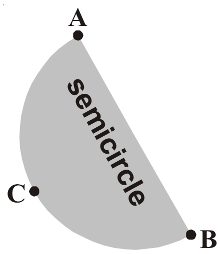
आकृतीत पहा.CD, AB आणि PQ या वर्तुळाच्या जिवा आहेत.

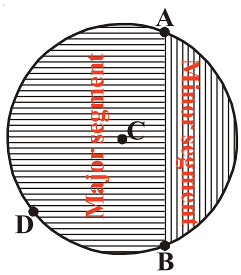
आकृती.(i)मध्येA आणि B दोन बिंदु वर्तुळावर आहेत आणि ते वर्तुळाच्या परिघास $\overset{\frown}{AB}$ भागात विभागले आहे. वर्तुळावरील दोन बिंदुमधील भागास

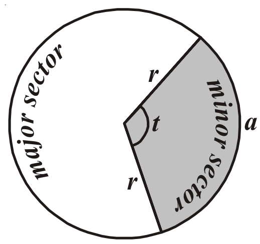




कंस असे म्हणतात. आकृती (i) मध्ये $\overset{\frown}{AB}$ कंस आहे. आणि त्यास ने दर्शवितात. ज $\overset{\frown}{ACB}$ याचे अंत्य बिंदु व्यासाचे अंत्य बिंदु झाल्यास अशा कंसाला अंधवर्तुळ कंस किंवा अर्धवर्तुळ म्हणतात. आकृती.(ii) मध्ये हा अर्धवर्तुळापेक्षा लहान अस $\overset{\frown}{ACB}$ त्या कंसाला लघु कं $\overset{\frown}{ADB}$ णे कंस अर्धवतुळापक्षा मोठा असल्यास त्या कसाला मोठा कंस म्हणतात. आकृती (iii) मध्ये हा लहान कंस आणि हा विशाल कंस आहे. जर आपण कंसाच्या अंत्यबिंदुना जिवाने जोडल्यास ती जिवा वर्तुळाला दोन भागात विभागणी करते. जिवा आणि लहान कंसामधील क्षेत्राला लघु वर्तुळ खंड म्हणतात. आणि जिवा आणि मोठ्या कंसा मधील क्षेत्राला विशाल वर्तुळ खंड असे म्हणतात. जर जिवा ही व्यास झाल्यास व्यास वर्तुळाला दोन समान खंडात विभागतो.



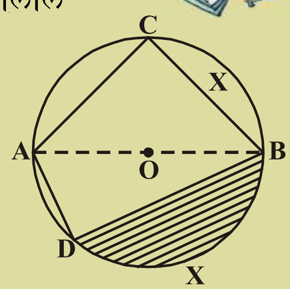




दोन त्रिजेना आणि कंसाच्या शेवटच्या बिंदुना केंद्रबिंदुवर जोडणाऱ्या आणि कंसाच्या क्षेत्रफळानी मिळुन बनलेल्या भागास व्दैत्रिज्याखंड म्हणतात. एक लहान व्दैत्रिज्याखंड आणि एक मोठा व्दैत्रिज्या खंड(बाजुची आकृती पहा)

अभ्यास - 12.1

1. बाजुच्या आकृतीत दाखविलेल्या 0 वर्तुळाचा केंद्रबिंदु असलेल्या खालील भागांना नावे द्या.



(i) $\overline{AO}$ (ii) $\overset{\frown}{DCB}$ (iii) $\overset{\frown}{ACB}$ $\overset{\frown}{BC}$

(iv) $\overline{AC}$ (v) (vi)

(vii) $\overline{AD}$ (viii) रंगीत भाग

2. सत्य किंवा असत्य सांगा.

i. प्रतलात असलेले वर्तुळ त्या प्रतलात तिन भागात विभागते. ( )

ii. लहान कंस आणि जिवाने मिळुन बनलेल्या क्षेत्रास लहान वर्तुळखंड म्हणतात. ( )

iii. मोठा कंस आणि जिवाने मिळुन बनलेल्या क्षेत्राचा मोठा वर्तुळ खंड म्हणतात. ( )

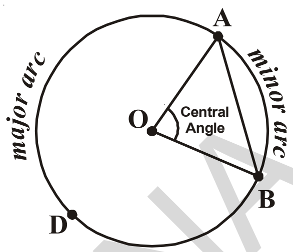
iv. व्यास हा वर्तुळास दोन समान भागात विभागतो. ( )

v. व्दैत्रिज्या खंड हा दोनत्रिजेनी आणि जिवांनी बनलेले क्षेत्रफळ आहे. ( )

vi. वर्तुळाच्या सर्वात मोठ्या जिवेला व्यास म्हणतात. ( )

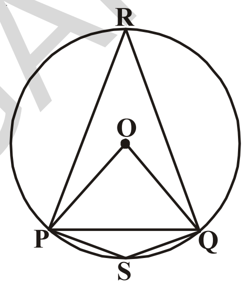
vii. वर्तुळाच्या केाणत्याही व्यासाच्या मध्यबिंदुला केंद्रबिंदु म्हणतात. ( )

12.2 वर्तुळाच्या एका बिंदुवर जिवाने बनवलेला कोन



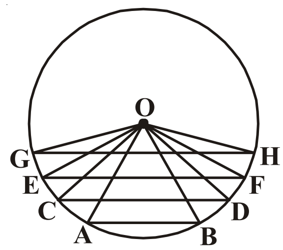
समजा A, B हे 'O'.केंद्रबिंदुवर काढलेले वर्तुळावरील दोन बिंदु आहेत. A,O आणि B,Oजोडा. $\overline{AO}$ आणि $\overline{BO}$ नी केंद्राशी केलेला कोन म्हणजे $\angle AOB$ ला $\overline{AB}$ जिवाने'O' केंद्राशी केलेला कोन म्हणतात.

आकृतीमधील $\angle POQ$, $\angle PSQ$ आणि $\angle PRQ$ कोनांना तुम्ही काय म्हणता ?



i. $\angle POQ$ हा PQ जिवाने 'O' केंद्राशी केलेला कोन आहे.

ii. $\angle PSQ$ आणि $\angle PRQ$ हे अनुक्रमे PQ जिवाने S आणि R लघु अणि विशाल कंसावरील केलेले कोन आहेत.



आकृती मध्ये O हे वर्तुळाचा केंद्रबिंदु आणि AB, CD, EF आणि GH या वर्तुळाची जिवा आहेत.

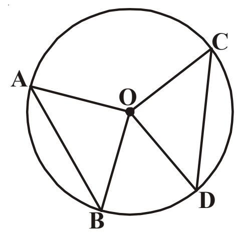
वरील आकृतीवरुन GH > EF > CD > AB.

आता या जिवेने केंद्राशी केलेल्या कोनाबद्दल काय म्हणु शकतो ?

आकृत्या पाहुन तुम्ही काय निरिक्षण केले. कोनाचे निरिक्षण केल्यास तुम्हाला दिसुन यते की जिवेने वर्तुळाचा केंद्राशी केलेला कोन जिवेची लांबी वाढवते.

आता आपण दोन वर्तुळाच्या जिवा घेतल्या असता वर्तुळाच्या केंद्राशी केलेल्या कोनांचे काय होते ?

'O' केंद्रबिंदु घेऊन वर्तुळाची रचना करा आणि ABआणि CD समान जिवा वृत्तलेखणीच्या साहाय्याने आणि मोजपट्टीने काढा.



केंद्रबिंदु 'O' ला A, B आणि C, D शी जोडा आता$\angle AOB$ आणि $\angle COD$ मोजा. ते एकमेकास समान आहे का? वर्तुळावर दोन किंवा त्यापेक्षा जास्त समान जिवा काढा. त्यांनी केंद्राशी केलेले कोन मोजुन पहा.

तुम्हास दिसुन येते की, त्यांनी केंद्राशी केलेले कोन समान असतात.

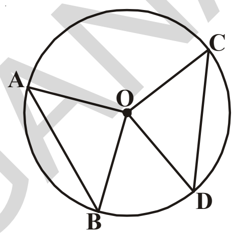
याची सिध्दता करण्याचा प्रयत्न करु.

प्रमेय-12.1 : वर्तुळाच्या समान जिवा. वर्तुळ केद्रांशी समान कोन असतात.

सिध्दता: समजा 'O' हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदु आहे. $\overline{AB}$ आणि $\overline{CD}$ या दोन समान जिवा आणि वर्तुळाच्या केंद्रबिंदुशी त्या जिवानी केलेले कोन $\angle AOB$ आणि $\angle COD$ आहेत.

सिध्दता : $\angle AOB \cong \angle COD$

रचना : वर्तुळाच्या केंद्राला जिवेच्या अंत्य बिंदुना मिळविले तेव्हा ΔAOB आणि ΔCOD तयार होतात.



सिध्द: AOB आणि COD मध्ये

$AB = CD$ (दिले आहे)

$OA = OC$ (सारख्या वर्तुळाची त्रिज्या)

$OB = OD$ (सारख्या वर्तुळाची त्रिज्या)

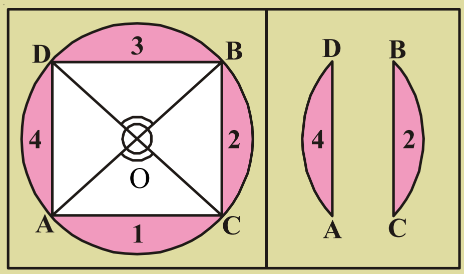
म्हणुन $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (बा.बा.बा.नियम)

अशारीतीने $\angle AOB \cong \angle COD$ (एकरुप त्रिकोणाचे संगत भाग)

वरील प्रमेयावरुन एका वर्तुळातील दोन जिवाने केंद्राशी केलेले कोन समान असते. त्या जिवांबद्दल तुम्ही काय म्हणु शकता? या विषयाची तपासणी खालील कृतीने करु या.

कृती

एक वर्तुळाकार कागद घ्या. कोणत्याही व्यासावरुन त्याची अशी घडी करा की, त्याच्या कडा एकमेकांस तंतोतंत मिळल्या पाहिजेत. आता त्या घडीला उघडे करा आणि दुसऱ्या व्यास घेऊन पुन्हा त्याची घडी करा. उघडल्यानंतर माहित पडते. की दोन्ही व्यास केंद्रबिंदु 0 वर मिळतात. तेथे उभ्या विरुध्द कोनाच्या समान जोड्या तयार होतात. व्यासाच्या अंतिम बिंदुस A, B, C आणि D नावे द्या. $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ आणि $\overline{AD}$ जिवा.



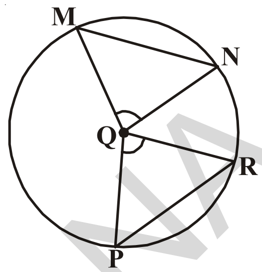
काढा आता चार वृत्तखंड1, 2, 3 आणि 4 कातरा जर तुम्ही या वृत्तखंडाच्या जोंडीस एकमेकांवर ठेवल्यास (1,3) आणि(2,4) जोडीच्या कडा एकमेकांवर तंतोतंत मिळतात.

$\overline{AD} = \overline{BC}$ आणि $\overline{AC} = \overline{BD}$ आहे का?

एका प्रत्येक संदर्भात वरील गुणधर्माचे निरिक्षण केले यास विषयास वेगवेगळी मापे असलेल्या कोनाला घेऊन जिवा समान होतात हे दाखविल्यास खालील सिध्दतांव्दारे पाहु शकता.

तुम्ही (12.1) या सिध्दतांचा व्यत्यास सांगु शकता का?

प्रमेय-12.2 : एका वर्तुळातील जिवा केंद्रावर करणारे कोन समान असल्यास त्या जिवा समान असतात.



हा वरील सिंध्दातास व्यत्यास आहे.

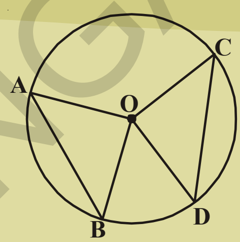
12.1 सिध्दांत $\angle PQR = \angle MQN$, तर

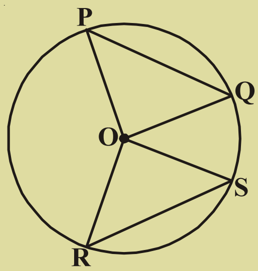
$\Delta PQR \cong \Delta MQN$ (का?)

$PR = MN$ होते का? (पडताळ करा)

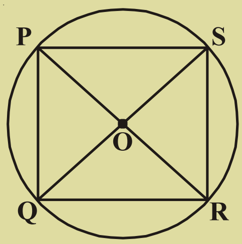
अभ्यास - 12.2

1. आकृती जर $AB = CD$ आणि $\angle AOB = 90^0$ तर $\angle COD$ काढा.





2. आकृती मध्ये, $PQ = RS$ आणि $\angle ORS = 48^0$.
   तर $\angle OPQ$ आणि $\angle ROS$ काढा.

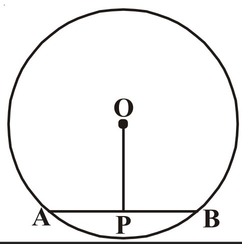


3. आकृतीत PR आणि QS हे दोन व्यास आहेत $PQ = RS$ आहे का?

12.3 वर्तुळाच्या केंद्रावरुन जिवेवर काढलेला लंब

कार्यकृती

- O केंद्रबिंदुवरन एक वर्तुळ काढा. $\overline{AB}$ जिवा काढा अणि केंद्रबिंदु 0 वरुन $\overline{AB}$ जिवे वर एक लंब काढा.
- $\overline{AB}$ जिवा आणि लंब यांचा छेदन बिंदु P.समजा.
- PA आणि PB मोजल्यानंतर आपणास $PA = PB$ येते.



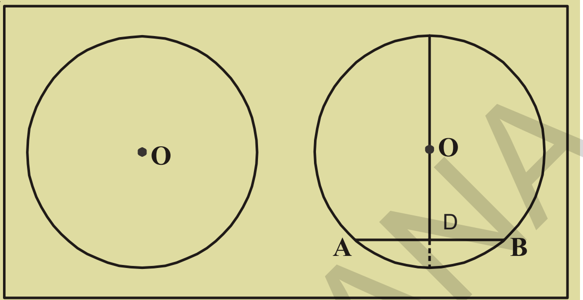
प्रमेय-12.3 : वर्तुळाच्या केंद्रावरुन जिवावर काढलेले लंब

O ला A आणि B बिंदुशी जोडण्याव्दारे सिध्दता लिहिण्यासाठी प्रयत्न करा. आणि $\Delta OPA \cong \Delta OPB$ हे सिध्द करा. 12.3 या प्रमेयाचा व्यत्यास काय आहे?

"जर वर्तुळाच्या केंद्रावरुन काढलेली रेषा जिवास दुभागल्यास ती जिवास लंब राहते."

कृती

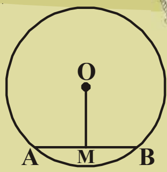
एक वर्तुळाकार कागद घेऊन त्यावर ‘O’ केंद्रबिंदुची खुण करा.



त्या कागदास दोन असमान भागात घडी करा. आणि उघडा पडलेली घडी AB जिवा दर्शविते आणि ‘A’ हा B शी तंतोतंत जुळला पाहिजे. या दोन्ही घडीच्या छेदन बिंदुस D नाव द्या. AD = DBआहे काय? $\angle ODA$ = ? $\angle ODB$ = ? त्या घडीतील कोनांचे मापन करा. ते काटकोन आहेत. म्हणुन आपण अनुमान काढु शकतो की, वर्तुळाच्या केंद्रबिंदुवरुन काढलेली रेषा वर्तुळाच्या जीवेला दुभागते. आणि ती जिवेस लंब राहते.

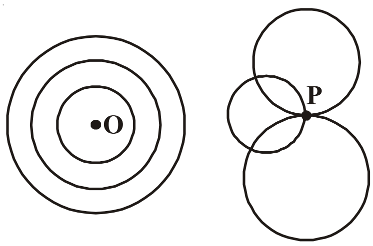
प्रयत्न करा

वर्तुळात ‘O’हा केंद्रबिंदु $\overline{AB}$ हा जिवा आणि ‘M’ हा त्याचा मुध्यबिंदु आहे. आता सिध्द करा कि $\overline{OM}$ हा AB ला लंब आहे. (**सुचना** : OA आणि OB ला जोडुन OAM आणि OBM ची तुलना करा)

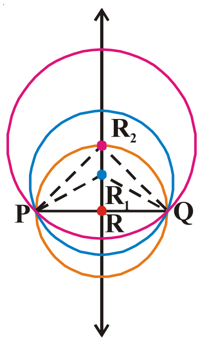


12.3.1 तीन बिंदुवरुन वर्तुळाचे वर्णन करणे

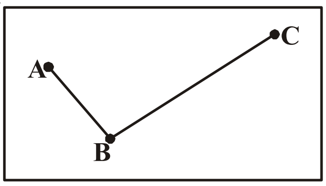
समजा ‘O’हा प्रतलातील एक बिंदु आहे. 0 केंद्रबिंदुवरुन आपण किती वर्तुळ काढु शकतो. आपण पाहिजे तेवढी वर्तुळ काढु शकतो. आपण आधीच शिकलो की या वर्तुळांना समकेंद्रीय वर्तुळ म्हणतात. जर ‘P’हा वर्तुळावरील केंद्राखेरीज दुसरा बिंदु असल्यास त्या P बिंदुवरुन सुध्दा आपण अनेक वर्तुळे काढता येतात.



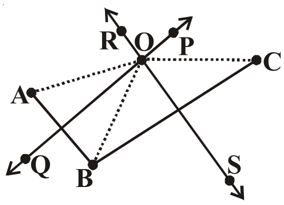
समजा P आणि Q हे दोन विभीन्न बिंदु आहेत. या दोन बिंदुतुन जाणारी किती वर्तुळ काढता येतात? आपणास दिसुन येते की, **P आणि Q** बिंदुवरुन अनेक वर्तुळ काढता येतात.



P,आणि Q जोडा PQ वर लंबदुभाजक काढा. लंब दुभाजकावर कोणतेही तिन बिंदु R, R_1 आणि R_2 काढा आणि R, R_1आणि केंद्रबिदुवरुन RP, R_1P आणि R_2P त्रिज्येची वर्तुळ काढा. ही वर्तुळे Q बिंदुपासुन सुध्दा जातात का? (का?) रेषाखंडाच्या लंब दुभाजकावरील प्रत्येक बिंदु रेषा खंडाच्या अंत बिंदुपासुन समान अंतरावर असतो. वर्तुळाचा मध्य बिंदु हा कोणत्याही ज्या च्या लंबावर असतो.



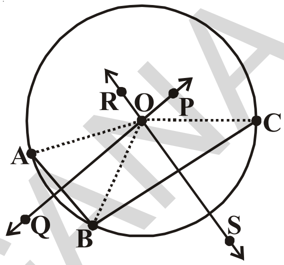
जर तीन नैकरेषीय बिंदु दिले असता. त्यापासुन किती वर्तुळे काढता येतात? यांचे निरिक्षण करु. कोणतेही तीन नैकरेषीय बिंदु A, B, C घ्या आणि AB आणि BC जोडा,



$\overline{AB}$ आणि $\overline{BC}$ चे लंब दुभाजक अनुक्रमे $\overleftrightarrow{PQ}$ आणि $\overleftrightarrow{RS}$ काढा. दोन्ही एका ठिकाणी 'O' बिंदुत छेदतात. (कारण कोणत्याही दोन रेषांना एक पेक्षा जास्त सामाईक बिंदु नसतो.)

O बिंदु $\overline{AB}$ च्या लंब दुभाजकावर आहे. म्हणुन OA = OB. .....(i)

$\overleftrightarrow{PQ}$ वरील प्रत्येक बिंदु A आणि B पासुन समान अंतरावर आहे.



म्हणुन 'O'हा $\overline{BC}$ च्या लंबदुभाजकावर आहे.

म्हणुन OB = OC ..... (ii)

समीकरण (i) आणि (ii) वरुन

आपण म्हणु शकतो की, OA = OB = OC (संक्रामक गुणधर्म)

म्हणुन A, B आणि C पासुन समान अंतररावर असलेला फक्त एकच बिंदु 0 आहे. म्हणुन जर OA त्रिजेचा 0 केंद्रबिंदुवरुन काढलेला वर्तुळ B आणि C बिंदुतुन सुध्दा जातो. म्हणजे A, B आणि C मधुन जाणारे वर्तुळ फक्त एकच आहे.

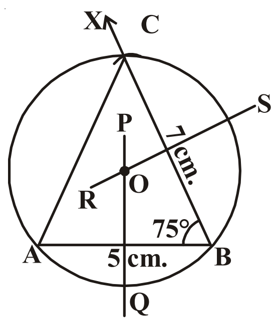
वरील निरिक्षणाच्या अनुमानावरुन तिन नैकरेषीय जाणारे वर्तुळ फक्त एकच आहे.

सुचना: जर AC, जोडल्यासABC तयार होतो. त्याचे सर्व शिरोबिंदु वर्तुळावर असतात. यावर्तुळास त्रिकोणाचे परिवर्तुळ म्हणतात. आणि केंद्रबिंदु 0 ला परिवर्तुळ केंद्र म्हणतात. आणि त्रिज्या OA किंवा OB किंवा OC ला परिवर्तुळ त्रिज्या म्हणतात.

प्रयत्न करा.

जर तिन बिंदु एकरेषीय आहेत. तर या तिन बिंदुतुन जाणारे किती वर्तुळ काढता येतात? या तीन बिंदुतुन जाणाऱ्या वर्तुळास काढण्याचा प्रयत्न करु.

उदाहरण-1: AB = 5 से.मी. $\angle B = 75^0$ आणि BC = 7 से.मी. ABC चे परिवर्तुळ काढा.



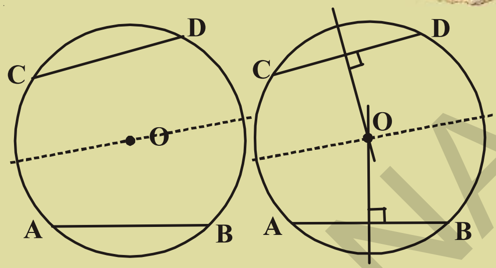
सोडवणुक: AB= 5 से.मी.लांबीचा एक रेषाखंड काढा.BX ला B बिंदुवर $\angle B = 75^0$ येतील असे काढा. B केंद्रवरुन 7 से.मी. त्रिजेचा एक चाप काढा. तो $\overrightarrow{BX}$ ला C बिंदुतुन छेदतो. CA ला जोडल्यास ΔABC तयार होतो. $\overline{AB}$ आणि $\overline{BC}$ चे लंब दुभाजक अनुक्रमे $\overleftrightarrow{PQ}$ आणि $\overleftrightarrow{RS}$ काढा. $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{RS}$ 'O'बिंदुवर छेदतात. 'O' केंद्रावरुन OA त्रिजेचे एक वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ B आणि C मधुन सुध्दा जाते. आणि येणारे परिवर्तुळ हेच आहे.

12.3.2 वर्तुळाच्या केंद्रबिंदुपासुन जिवा मधील अंतर

वर्तुळास अनेक जिवा असतात. आपण वर्तुळात एकाच लांबीच्या अनेक जिवा काढल्यास केंद्रापासुन समान लांबीने काढलेल्या जिवा मधील अंतर काय आहे. याची तपासणी करा.

कृती

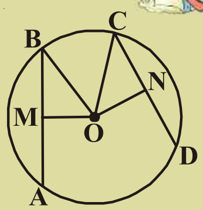
एका कागदावर मोठे वर्तुळ काढुन त्यास कातरा. त्याच्या केंद्रबिंदुस 0 नाव द्या.त्यास अर्ध्यातुन घडी करा. आता अर्धवर्तुळाजवळ दुसरी घडी करा. आता घडी उघडा आपणास दोन एकरुप जिवाच्या घड्या येतात. त्यास AB त्यास CD अशी नावे द्या. त्यासाठी 'O' केंद्रावरुन जाणारी लंब घडी करा. डिवायडरच्या साहाय्याने केंद्रबिंदुपासुन या जिवामधील अंतराची तुलना करा.



हीच कृती एकरुप जिवांना घडी करुन पुन्हा करा. तुमच्या निरिक्षणाचा अनुमान सांगा. वर्तुळातील एकरुप जिवा वर्तुळाच्या केंद्रबिदुंपासुन समान अंतरावर असतात.

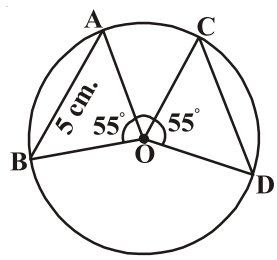
प्रयत्न करा

आकृतीमध्ये O हा वर्तुळाचे केंद्रबिंदु आहे आणि AB = CD. OM हा $\overline{AB}$ वर लंब आहे आणि $\overline{ON}$ हा $\overline{CD}$ वर लंब आहे. तर सिध्द करा. OM = ON.



वरील अनुमानास तार्कीकपणे दाखविल्यास समान लांबीच्या जिवा वर्तुळाच्या केंद्रबिदुवरुन समान अंतरावर असतात. हे प्रमेय होते.

उदाहरण-2: आकृतीत O हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदु आहे. जर AB = 5 से.मी. असल्यास CD ची लांबी माहित करा.



सोडवणुक: Δ AOB आणि Δ COD मध्ये

OA = OC (का?)

OB = OD (का?)

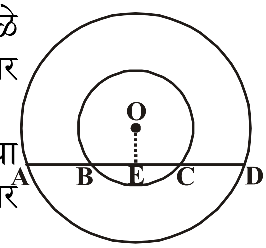
$\angle AOB = \angle COD$

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta COD$

$\because$ AB = CD (एकरुप त्रिकोणाचे एकरुप भाग)

$\therefore$ AB = 5 से.मी. तर CD = 5 से.मी.

उदाहरण-3: बाजुच्या आकृतीत 'O'केंद्रबिंदु असलेली दोन समकेंद्रीय वर्तुळे आहेत. मोठ्या वर्तुळातील AD जिवा लहान वर्तुळातील B आणि C बिंदुवर छेदते. दाखवा की, AB = CD.



दिलेली माहिती:केंद्रबिंदु 'O'असलेल्या समकेंद्रीय वर्तुळात $\overline{AD}$ ही मोठ्या वर्तुळातील जिवा आहे. $\overline{AD}$ जिवा लहान वर्तुळातील B आणि C वर छेदते.

सिध्दतेसाठी आवश्यक $\therefore$: AB = CD

रचना: $\overline{AD}$ ला लंब $\overline{OE}$ काढा.

सिध्दता : 0 केंद्रबिंदु असलेल्या मोठ्या वर्तुळाची AD जिवा आहे आणि $\overline{OE}$ हा $\overline{AD}$ ला लंब आहे

$\because$ $\overline{OE}$ हा $\overline{AD}$ ला दुभागते(केंद्रापासुन जिवा वर काढलेला लंब जिवाला दुभागते)

$\therefore$ AE = ED ..... (i)

0 केंद्रबिंदु असलेल्या लहान वर्तुळाची जिवा $\overline{BC}$ आहे आणि $\overline{OE}$ हा AD ला लंब आहे

$\because$ $\overline{OE}$ हा $\overline{BC}$ ला दुभागते (वरील प्रमेयावरुन)

$\therefore$ BE = CE ..... (ii)

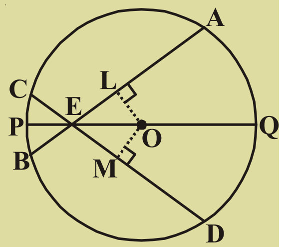
समीकरण (ii) मधुन (i)वजा केल्यास

AE - BE = ED - EC

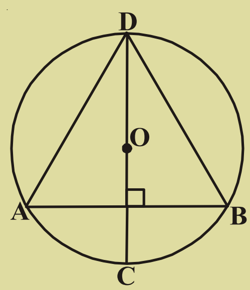
AB = CD

अभ्यास - 12.3

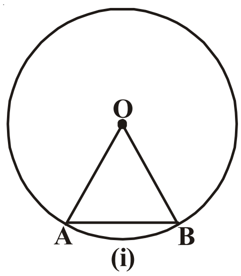
1. खालील त्रिकोण काढुन त्यासाठी परिवर्तुळाची रचना करा.
   (i) Δ ABC मध्ये AB = 6से.मी., BC = 7से.मी.आणि $\angle A = 60^{o}$
   (ii) Δ PQR मध्ये PQ = 5से.मी., QR = 6से.मी.आणि RP = 8.2से.मी.
   (iii) Δ XYZ मध्ये XY = 4.8से.मी. $\angle X = 60^{o}$ आणि $\angle Y = 70^{o}$
2. AB = 5.4 से.मी. काढुन A, B मधुन जाणारे दोन वर्तुळ काढा.
3. जर दोन वर्तुळ दोन बिंदुवर छेंदत असल्यास सिध्द करा की, त्याचा केंद्रबिंदु सामाईक जिवाच्या लंबदुभाजकावर असतो.
4. एका वर्तुळात छेदणाऱ्या दोन जिवा त्याच्या छेदन बिंदु व्दारे जाणाऱ्या व्यासा सोबत समान कोन केले असता त्या जिवाची लांबी समान असते हे सिध्द करा.



5. बाजुच्या आकृतीत 0 केंद्रबिंदु असणाऱ्या वर्तुळाची AB जिवा आहे. CD हा व्यास ABला लंब आहे. तर AD = BD दाखवा.



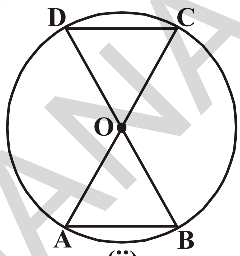
12.4 वर्तुळ कंसाने बनविलेला कोन



(i)

आकृती(i) मध्ये $\overline{AB}$ ही जिवा आहे आणि $\overset{\frown}{AB}$ वर्तुळ कंस आहे लघु कंस जिवा आणि वर्तुळकंसाचे अंत्यबिंदु सारखे आहे. ते A आणि B आहेत.

म्हणुन जिवाने केंद्रबिंदु 0 शी केलेला कोन वर्तुळ कंसाने 0 केंद्राशी केलेला कोन सारखा आहे.



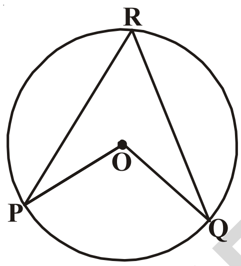
(ii)

आकृती (ii) मध्ये केंद्रबिंदु 0 असलेल्या वर्तुळाचे $\overline{AB}$ आणि $\overline{CD}$ दोन जिवा आहेत. जर AB = CD तर $\angle AOB = \angle COD$ म्हणुन आपण म्हणु शकतो की, वर्तुळकंस $\overset{\frown}{AD}$ ने केलेला कोन हा जिवाने केंद्रबिंदु 'O'शी केलेल्या कोना समान आहे.
($\Delta \overset{\frown}{CD}B \cong \Delta DOC$ सिध्द झाले)

वरील निरिक्षणावरुन त्याचे वर्तुळात किंवा एकरुप वर्तुळात समान लांबीच्या वर्तुळ कंसानी केंद्राशी केलेले कोन समान असतात.

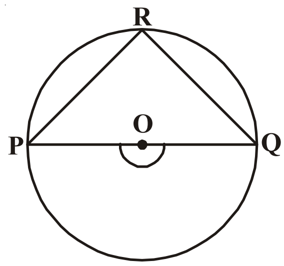
12.4.1 एका वर्तुळ कंसाने वर्तुळाच्या उरलेल्या भागावरील बिंदुवर केलेला कोन

'O' केंद्रबिंदु असलेला वर्तुळ घ्या. आकृती (1) मध्ये समज $\overset{\frown}{PQ}$हा लघुकंस, आकृती (ii) मध्ये अर्धवर्तुळ आणि आकृती (iii) मोठा कंस आहेत. वर्तुळावर R हा कोणताही बिंदु घ्या. R ला P आणि Q शी जोडा.



(i)

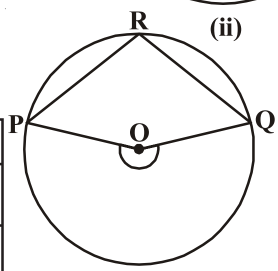
वर्तुळावर R बिंदुशी PQ कंसाने केलेला कोन $\angle PRQ$आहे. जो केंद्राशी केलेला कोन $\angle POQ$ आहे.



(ii)

दिलेल्या आकृतीवरुन खालील तक्तापुर्ण करा.

कोन	आ. (i)	आ. (ii)	आ. (iii)
$\angle PRQ$			
$\angle POQ$			

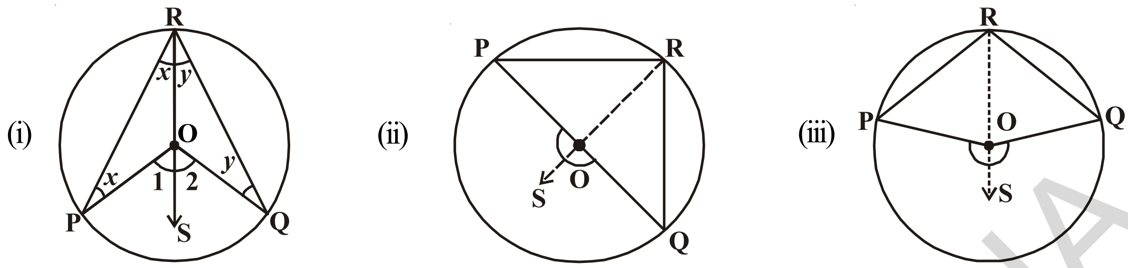


(iii)

अशा रितीने वर्तुळाच्या वर्तुळ कंसाने त्याच्या परिघावर आणि केंद्रबिंदुशी केलेले कोन आणि काही वर्तुळे काढा. तुम्हाला काय दिसुन येते? वर्तुळावर एका बिंदुवर आणि केंद्राबिंदुशी वर्तुळ कंसाने केलेल्या कोनाचा तुम्ही काय अनुमान लावता?

प्रमेय : केंद्र बिंदु 0 शी कसांने केलेला कोन हा त्या वर्तुळाच्या कंसाने उरलेल्या भागावर केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असतो. म्हणुन वरील निरिक्षणावरुन आपण म्हणु शकतो की केंद्रबिंदु 0 शी कंसाने केलेला कोन हा त्या वर्तुळाच्या कंसाने उरलेल्या भागावर केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असते.

या अनुमानाला तार्किकतेने सिध्द करा.



दिलेली माहिती: वर्तुळाचे केंद्र 0 आहे.

$\overparen{PQ}$ कंसाने केंद्राशी केलेला कोन $\angle POQ$ आहे.

समजा R हा बिंदु वर्तुळाच्या उरलेल्या भागावर आहे. ($\overparen{PQ}$ वर नाही)

सिध्दता: येथे आपणास (i) $\overparen{PQ}$ हा लघुकंस (ii) $\overparen{PQ}$ हे अर्धवर्तुळ आणि (iii) $\overparen{PQ}$ हा विशाला कंस असे तिन संदर्भ आहेत.

R बिंदुला केंद्रबिंदु 'O' शी मिळवुन त्यास S पर्यंत वाढवा. (सर्व संदर्भात)

सर्व संदर्भात ΔROP मध्ये

$RO = OP$ (सारखा त्रिज्येची वर्तुळ)

म्हणुन $\angle ORP = \angle OPR$ (समव्दिभुज त्रिकोणाच्या समान बाजुचे विरुध्द कोन समान असतात.)

$\angle POS$ हा ΔROP चा बाहेरील कोन आहे (रचना)

$\angle POS = \angle ORP + \angle OPR$ or $2\angle ORP$ ..... (1)

($\because$ बाह्यकोन= आतिल कोनांची बेरीज)

अशारितीने ΔROQसाठी

$\angle SOQ = \angle ORQ + \angle OQR$ किंवा $2\angle ORQ$...(2)

($\because$ बाहेरील कोन हा आतिल विरुध्द कोनाच्या बेरजेला समान असते.)

(1) आणि (2) वरुन

$\angle POS + \angle SOQ = 2(\angle ORP + \angle ORQ)$

यासारखेच $\angle POQ = 2\angle QRP$ ..... (3)

सुलभतेसाठी

समजा $\angle ORP = \angle OPR = x$

$\angle POS = \angle 1$

$\angle 1 = x + x = 2x$

समजा $\angle ORQ = \angle OQR = y$

$\angle SOQ = \angle 2$

$\angle 2 = y + y = 2y$

आता $\angle POQ = \angle 1 + \angle 2 = 2x + 2y$

$= 2(x+y) = 2(\angle PRO + \angle ORQ)$

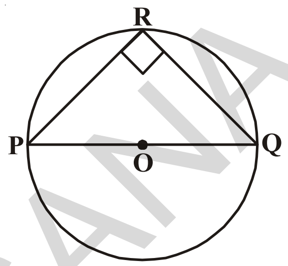
म्हणजेच $\angle POQ = 2\angle PRQ$

म्हणुन एका कंसाने वर्तुळाच्या केंद्राशी केलेला कोन उरलेल्या वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदुवर त्या कंसाने केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असते. हे प्रमेय येते

उदाहरण-4: समजा'O'हा वर्तुळाचा केंद्र आहे. PQ हा व्यास आहे तर सिध्द करा $\angle PRQ = 90^o$

किंवा

सिध्द करा अर्धवर्तुळातील कोन काटकोन असतो



सोडवणुक: 0 केंद्रबिंदु असलेल्या वर्तुळाचा व्यास PQ आहे

$\therefore \angle POQ = 180^o$ [सरळ रेषेवरील कोन]

आणि $\angle POQ = 2 \angle PRQ$

[कंसाने केंद्राशी केलेली कोन

हा वर्तुळाच्या कोणत्याही

बिंदुवर केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असते]

$$\therefore \angle PRQ = \frac{180^o}{2} = 90^o$$

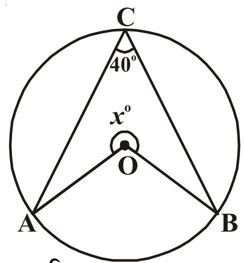
उदाहरण-5: बाजुच्या आकृतीत x° ची किंमत काढा.

सोडवणुक: दिले आहे. $\angle ACB = 40^\circ$

$\angle AOB = 2\angle ACB = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$

$\because \quad x^\circ + \angle AOB = 360^\circ$

म्हणुन $x^\circ = 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$



12.4.2 एकाच वर्तुळ खंडातील कोन

आपण एकाच कंसाने एकाच वृत्तखंडात केलेल्या कोनाचे मापाबद्दल चर्चा करु.

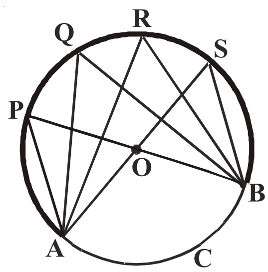
'O' केंद्रबिंदु असलेला वर्तुळ आणि लघुकंस AB घ्या (आकृती पहा) समजा P, Q, R आणि S हे AB विशाल कंसावरील बिंदु आहेत. म्हणजे वर्तुळाच्या उरलेल्या भागावरील बिंदु आहेत. आता AB कंसाच्या अंत्य बिंदुना P, Q, R आणि S शी जोडल्यास $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ आणि $\angle ASB$ तयार होतात.

$\because \quad \angle AOB = 2\angle APB$ (का ?)

$\angle AOB = 2\angle AQB$ (का ?)

$\angle AOB = 2\angle ARB$ (का ?)

$\angle AOB = 2\angle ASB$ (का ?)



म्हणुन $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = \angle ASB$

कंसाने एकाच वर्तुळ खंडात केलेला कोन समान आहेत याचे निरिक्षण करा

सुचना: वरील चर्चेवरुन आपणास दिसुन येते की, P, Q, R, S आणि A, B बिंदु एकाच वर्तुळात असतात. त्यास तुम्ही काय म्हणता? एकाच वर्तुळात असलेल्या बिंदुना चक्रीय बिंदु म्हणतात.

वरील प्रमेयाचा व्यत्यास खालील प्रमाणे सांगु शकतो.

प्रमेय:12.4: दोन बिंदुना जोडणारा रेषाखंड कोणतेही दोन इतर बिंदुवर केलेल्या कोन रेषेच्या एकाच बाजुवर असतात. तर हे चार बिंदु वर्तुळावर असतात.(ते चक्रीय बिंदु)

याची सत्यता खाली पाहु शकता.

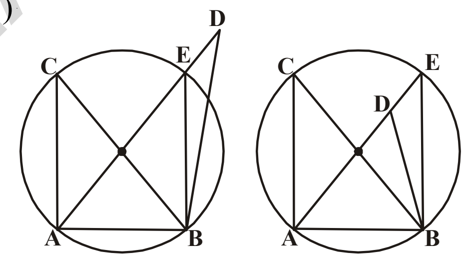
दिलेली माहिती: $\angle ACB$ आणि $\angle ADB$ हे दोन कोन A आणि B बिंदुला जोडणारा रेषाखंड $\overline{AB}$ च्या एकाच बाजुवर असतात आणि ते समान असतात.

सिध्दता: A, B, C आणि D हे चक्रीय बिंदु एकाच वर्तुळावर असतात.

रचना: A, B आणि C या नैकरेषीय बिंदुतुन जाणारे वर्तुळ काढा.

समजा 'D' बिंदु वर्तुळावर नाही.

इतर बिंदु 'E' आहे जो AD (AD ला वाढविल्यास)



जर A, B, C आणि E बिंदु वर्तुळावर असल्यास

$\angle ACB = \angle AEB$ (का?)

परंतु माहिती नुसार $\angle ACB = \angle ADB$.

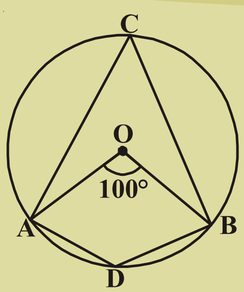
म्हणुन $\angle AEB = \angle ADB$

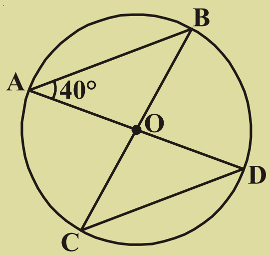
E हा D शी तंतोतंत जुळल्याशिवाय हे शक्य नाही (का?)

अभ्यास- 12.4

1. आकृतीत 'O' हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदु आहे.

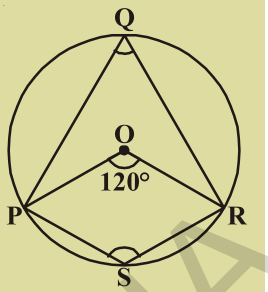
$\angle AOB = 100^\circ$ तर $\angle ADB$ काढा.

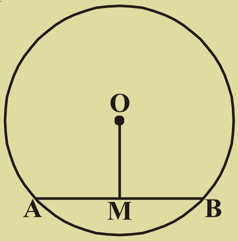




2. आकृतीमध्ये $\angle BAD = 40^\circ$ तर $\angle BCD$ काढा.

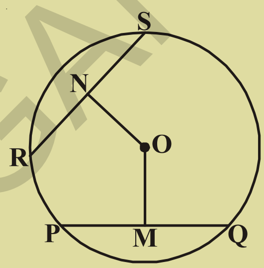
3. आकृतीत O हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदु आहे आणि $\angle POR = 120^{\circ}$. $\angle PQR$ आणि $\angle PSR$ काढा.

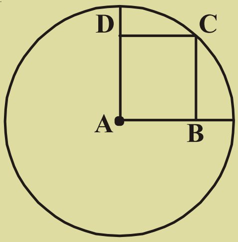




4. आकृतीमध्ये 'O' हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदु आहे. . OM = 3से.मी. आणि AB = 8 से.मी. वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

5. आकृतीत 'O'हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदु आहे आणि OM, ON केंद्रापासुन जिवा PQ आणि RS.वर कढलेले लंब आहेत जर OM = ON आणि PQ = 6 से.मी. तरRS काढा.

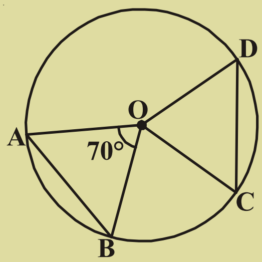




6. A हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदु आहे आणि ABCD चौरस आहे जर BD = 4 से.मी.तर वर्तुळाची त्रिज्या माहित करा.

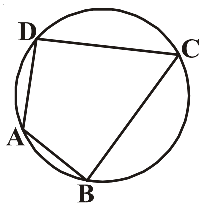
7. कोणतीही त्रिज्या घेऊन वर्तुळ काढा आणि त्याच्या केंद्रबिंदुपासुन समान अंतरावर दोन जिवा काढा.

8.दिलेल्या आकृतीत 'O' हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदु आहे आणि AB, CD या दोन समान जिवा आहेत जर $\angle AOB = 70^{\circ}$तर ΔOCDचे कोन माहित करा.



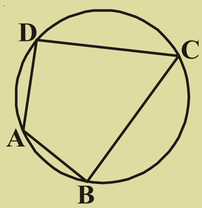
12.5 चक्रीय चर्तुभुज

दिलेल्या आकृतीत A, B, C आणि D एकाच वर्तुळावर आहे. अशा प्रकारच्या चर्तुभुज ABCD हा चक्रीय चर्तुभुज म्हणतात.



कृती

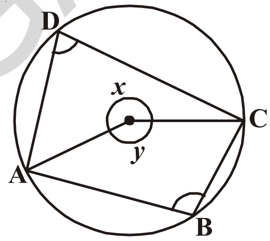
एक वर्तुळाकार कागद घ्या. ज्या वर्तुळाकार कागदावार A, B, C आणि D या चार बिंदुच्या खुणा करा. चक्रीय चर्तुभुज ABCD काढा आणि त्यांचे कोन मोजुन तक्त्यात त्याची नोंद करा.ही कृती तीन किंवा जास्त वेळा करा.



क्र.स.	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A+\angle C$	$\angle B+\angle D$
1						
2						
3						
4						

या तक्तयावरुन तुम्ही काय अनुमान काढता?

प्रमेय-12.5 : " चक्रीय चर्तुभुजाच्या विरुध्द कोनाच्या जोड्या संपुरक असतात.".



दिलेली माहिती: ABCD सक्रीय चर्तुभुज आहे.

सिध्दतेसाठी : $\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

पध्दती : $\angle D = \frac{1}{2}\angle y$ (का?) ..... (i)

$\angle B = \frac{1}{2}\angle x$ (का?) ..... (ii)

(i) आणि (ii) ची बेरीज केल्यास

$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle x$$

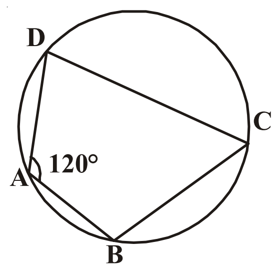
$$\angle D + \angle B = \frac{1}{2}(\angle y + \angle x)$$

$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \times 360°$$

$$\angle B + \angle D = 180°$$

अशारितीने $\angle A + \angle C = 180°$

उदाहरण-6: आकृतीत $\angle A = 120^\circ$ तर $\angle C$ काढा?



सोडवणुक: ABCD हा सक्रीय चक्रीय चर्तुभुज आहे.

म्हणुन $\angle A + \angle C = 180^\circ$

$120^0 + \angle C = 180^\circ$

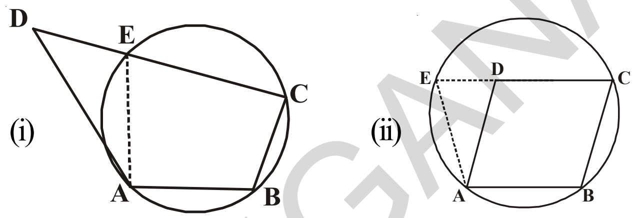
म्हणुन $\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

वरील प्रमेयाचा व्यत्यास काय आहे?

"जर चक्रीय चर्तुभुज विरुध्द कोनांच्या जोडीची बेरीज 180^0 असल्यास तर तो चक्रीय होतो.".

याचा व्यत्यास सुध्दा खरा आहे.

प्रमेय-12.6 : जर चक्रीय चर्तुभुजात त्याच्या व कोणत्याही विरुध्द कोनांच्या जोडीची बेरीज 1800 असेल तर तो चक्रीय होतो.



दिले आहे: समजा ABCD हा चक्रीय चर्तुभुजात

$\angle ABC + \angle ADC = 180^o$

$\angle DAB + \angle BCD = 180^o$

सिध्दता : ABCD हा चक्रीय चर्तुभुज आहे.

रचना: A, B, आणि C या तिन नैकरेषीय बिंदुतुन एक वर्तुळ काढा जर ते D बिंदुमधुन गेल्यास प्रमेय सिध्द होते. कारण A, B, C आणि D हे चक्रीय बिंदु आहेत. जर वर्तुळ D बिंदुतुन जात नसल्यास ते $\overline{CD}$ ला (आकृती(i)) किंवा वाढविलेल्या $\overline{CD}$ ला [आकृती (ii)] E वर छेदतात. $\overline{AE}$ काढा.

सिध्दता : ABCE हा चक्रीय चर्तुभुज आहे (रचना)

$\angle AEC + \angle ABC = 180^o$ [चक्रीय चर्तुभुजाच्या विरुध्द कोनांची बेरीज]

But $\angle ABC + \angle ADC = 180^o$ दिले आहे

$\therefore \angle AEC + \angle ABC = \angle ABC + \angle ADC \Rightarrow \angle AEC = \angle ADC$

यापैकी एक ΔADE चा बाह्य कोन आहे आणि इतर आतिल विरुध्द कोन आहे.

त्रिकोणाचे बाहेरील कोन आतिल इतर विरुध्द कोनापेक्षा नेहमी मोठे असते.

$\therefore \angle AEC = \angle ADC$ ही विरुध्द आहे.

म्हणजे A, B आणि C बिंदुतुन जाणारे वर्तुळ D बिंदुतुन जात नाही. ही आपली कल्पना चुकीची ठरते

$\therefore$ A, B, C बिंदुतुन जाणारे वर्तुळ D बिंदुतुन सुध्दा जाते.

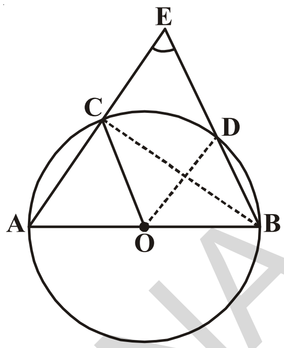
$\therefore$ A, B, C आणि D चक्रीय बिंदु आहेत आणि म्हणुन ABCD हा चक्रीय चर्तुभुज होतो.

उदाहरण-7: आकृतीत $\overline{AB}$ हा वर्तुळाचा व्यास आहे. $\overline{CD}$ ही जिवा आहे ती वर्तुळाच्या त्रिजेला समान आहे. $\overline{AC}$ आणि $\overline{BD}$ ला वाढविल्यास E वर छेदतात तर सिध्द करा $\angle AEB = 60°$.

सोडवणुक: O,C जोडा, O,D जोडा आणि B,C जोडा

त्रिकोण ODC हा समभुज त्रिकोण आहे (का?)

म्हणुन $\angle COD = 60°$



आता $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (का ?)

दिले आहे $\angle CBD = 30°$

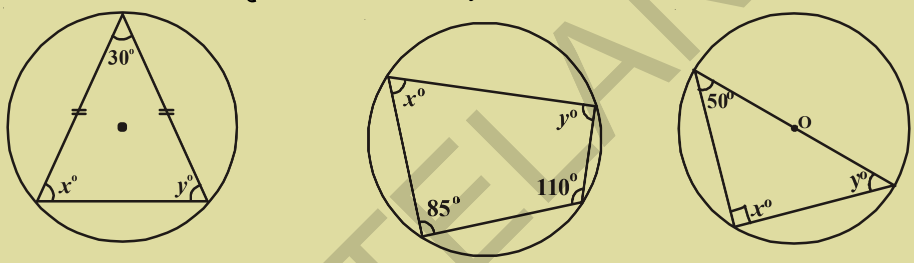
पुन्हा $\angle ACB = 90°$ (का ?)

म्हणुन $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

यावरून $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$, i.e. $\angle AEB = 60°$

अभ्यास- 12.5

1. खालील दिलेल्या आकृती वरुन x आणि y ची किंमत काढा.



(i) (ii) (iii)

2. ABCD चर्तुभुजाचे शिरोबिंदु A, B, C हे वर्तुळावर आहेत.

$\angle A + \angle C = 180°$ तर D शिरोबिंदु सुध्दा वर्तुळावर याच वर्तुळावर असते हे सिध्द करा.

3. जर समांतरभुज चौकोन चक्रीय असेल तर तो आयत होतो. सिध्द करा

4. सिध्द करा चक्रीय समलंब चौकोन हा चौरस आहे.

5. खालील प्रत्येकासाठी वर्तुळ काढुन दिलेल्या आकृत्या त्याच्या आंतरभागात घ्या. अशा प्रकारच्या बहुभुजीला आंतर भागात घेणे संभव नाही.

(a) आयत

(b) समलंब चौकोन

(c) विशाल कोन त्रिकोण

(d) आयत नसणारा समांतर चर्तुभुज

(e) लघुकोन समद्विभुज त्रिकोण

(f) $\overline{PR}$ व्यास असलेला PQRS चर्तुभुज

आपण काय चर्चा केली?

- एका प्रतलातील स्थिर बिंदुपासुन स्थिर अंतरावर असलेल्या बिंदुच्या संचाला वर्तुळ असे म्हणतात. त्या स्थिर बिंदुला केंद्रबिंदु अणि स्थिर अंतरास वर्तुळाची त्रिज्या असे म्हणतात.
- कोणत्याही दोन बिंदुना वर्तुळात जोडणाऱ्या रेषाखंडाला जिवा म्हणतात.
- केंद्रबिंदुतुन जाणाऱ्या सर्वात मोठ्या जिवेला वर्तुळाचा व्यास म्हणतात.
- एकाच त्रिजेच्या वर्तुळास एकरुप वर्तुळ असे म्हणतात.
- भिन्न त्रिज्या आणि सारखी सारखे केंद्रबिंदु असलेल्या वर्तुळास एक केंद्रीय वर्तुळे म्हणतात
- वर्तुळाचा व्यास त्यास दोन अर्धवर्तुळात विभागतो.
- वर्तुळाच्या कोणत्याही दोन बिंदुमधील भागास वर्तुळकंस म्हणतात.
- जिवा आणि वर्तुळकंसाच्या आतिल क्षेत्रफळास वर्तुळ खंड म्हणतात. जर कंस लघु कंस असल्यास त्यास विशाल वर्तुळखंड असे म्हणतात.
- कंसाच्या आतिल क्षेत्रफळ आणि दोन त्रिजेच्या कंसाच्या अंत्य बिंदुना केंद्राशी जोडणाऱ्या क्षेत्र म्हणतात.
- वर्तुळाच्या समान जिवा वर्तुळाच्या केंद्राशी समान कोन करतात.
- सारख्या वर्तुळ खंडात असलेले कोन समान असतात.
- अर्धवर्तुळातील कोन काटकोन असतो.
- वर्तुळाच्या दोन जिवांनी बनलेला कोन समान असल्यास त्या जिवा एकरुप असतात.
- वर्तुळाच्या केंद्राशी दोन जिवेला काढलेले लंब जिवेस दुभागातात याचा व्यत्यास सुध्दा सत्य आहे.
- तिन नैकरेषीय बिंदुतुन फक्त एकच वर्तुळ जाते.
- त्रिकोणाच्या शिरोबिंदुतन जाणाऱ्या वर्तुळास परिवर्तुळ असे म्हणतात.
- वर्तुळाच्यासमान जिवा त्याच्या केंद्रबिंदुपासुन सारख्याच अंतरावर असतात. या उलट वर्तुळाच्या केंद्रापासुन समान अंतरावर असलेल्या जिवा समान लांबीच्या असतात.
- वर्तुळ कंसाने वर्तुळाच्या केंद्रबिंदुशी केलेले कोन, हा वर्तुळाच्या कोणत्याही इतर बिंदुवर केलेल्या कोनाचे दुप्पट असतात.
- जर वर्तुळकंसाने वर्तुळाच्या उरलेल्या भागावर बनविलेला क्षेत्र 90^0 असल्यास तर तो कंस अर्धवर्तुळ होते.
- दोन बिंदुना जोडणाऱ्या रेषाखंड त्याच रेषाखंड असलेल्या इतर दोन बिंदुवर सारखा कोन बनवितो. ते चार बिंदु वर्तुळाकार असतात.
- चक्रीय चौकोनाच्या विरुध्द कोनांची जोडी संपुरक असते.

13 भुमितीय रचना

13.1 प्रस्तावना

रेषाखंड, कोन, त्रिकोण, चौकोण इत्यादींची भुमीतीय रचना करण्यासाठी भुमीतीय उपकरणाची आवश्यकता आहे. तुम्हाला भुमीतीय पेटी पाहिजे ज्यात मोजपट्टी, गुण्याची जोडी, वृत्तलेखणी डिवायडर, कोनमापक.

साधारणता: ही सर्व उपकरणे आकृत्या काढण्यासाठी आवश्यक आहे. भुमितीय रचना ही मोजपट्टी आणि वृत्तलेखणी या दोन उपकरणाच्या साहाय्याने भुमीतीय आकृत्या काढण्यासाठी प्रणाली आहे. मागील वर्गात आपण नेहमी त्रिकोणाची आणि चौकोनाची रचना करण्याची अंकीत मोजपट्टी आणि वृत्तलेखणीचा उपयोग केला. रचनेत अजुन काही उपकरणाची सुध्दा गरज आहे. तुम्ही अंकीत मोजपट्टी आणि कोन मापकाचा सुध्दा उपयोग करता. काही रचना आपण सरळ काढु शकत नाही. उदाहरणार्थ जेव्हा त्रिकोणाची 3 मापे दिली असता त्याचा वापर सरळ करु शकत नाही. आपणास गरज असलेल्या मापांचे विश्लेषणा व्दारे कोणत्या प्रकारे रचना पुर्ण करु शकतो. या धड्यात शिकु या.

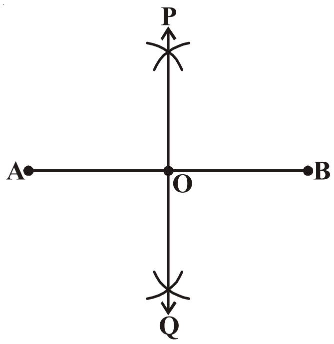
13.2 मुलभुत रचना

तुम्ही (i) रेषाखंडाचे लंबदुभाजक काढणे (ii) $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ आणि 120° चे कोन दुभाजक काढणे किंवा दिलेल्या कोनाचे कोनदुभाजक काढणे. मागील वर्गात शिकलेत. या रचनेच्या कारणांची मात्र चर्चा केली नाही. या सर्व रचनांना तर्किक सिध्दता देणे या धड्यांची उद्दीष्टे आहेत.

13.2.1 दिलेल्या रेषेच्या लंबदुभाजकाची रचना करणे

उदाहरण-1. दिलेल्या रेषाखंड AB चे लंबदुभाजक काढा आणि उत्तराच्या पुरावा द्या.

सोडवणुक : रचनेच्या पायऱ्या



पायरी 1: AB रेषाखंड काढा.

पायदी2: A केंद्रबिंदु घेऊन $\frac{1}{2}\overline{AB}$, पेक्षा जास्त त्रिज्या घेऊन AB रेषाखंडाच्या दोन्हि बाजुला चाप काढा.

पायरी 3 : 'B' केंद्रबिंदु घेऊन वरील प्रमाणे सारखी त्रिज्या घेऊन अगोदरच्या चापास छेदणारा दुसरा चाप काढा.

पायरी **4 :** या छेदन बिंदुस P आणि Q नाव द्या. P आणि Q जोडा

पायरी **5 :** समजा PQ हा $\overline{AB}$ ला O बिंदुवर छेदतो.

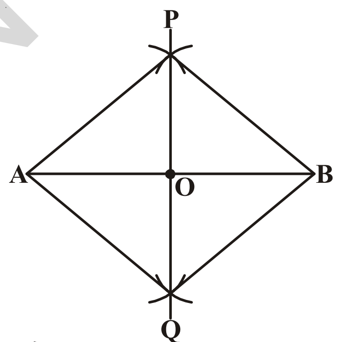
अशारीतीने रेषा POQ हे येणारा AB चे लंबदुभाजक आहे.

वरील रचनेचे तुम्ही कसे समर्थन कराल? म्हणजे तर्कानुसार "PQ हा AB" चा लंबदुभाजक आहे.

रचनेची आकृती काढा. आणि A ला P आणि A to Q; शी जोडा B ला P आणि B to Q जोडा

त्रिकोणाच्या एकरुपतेच्या गुणधर्मावरुन आपण त्यास सिध्द करु शकतो.

सिध्दता



पायऱ्या	**कारण**
Δ^s PAQ आणि ΔPBQ मध्ये	
$AP = BP$; $AQ = BQ$	समान त्रिज्या
$PQ = PQ$	सामाईक कोन
$\therefore \Delta PAQ \cong \Delta PBQ$	बा.बा.बा. नियम
म्हणुन $\angle APO = \angle BPO$	CPCT (एकरुप त्रिकोणाचे संगत भाग)
आता Δ^s APO आणि BPO	
$AP = BP$	समान त्रिज्या
$\angle APO = \angle BPO$	सिध्द केले
$OP = OP$	सामान्य बाजु
$\therefore \Delta APO \cong \Delta BPO$	बा.को.बा. नियम
म्हणुन $OA = OB$ आणि $\angle APO = \angle BPO$	CPCT
सारखे $\angle AOP + \angle BOP = 180^\circ$	रेषीय जोडी
आणि $\angle APO = \angle BPO$	

आपणास येते $\angle AOP = \angle BOP = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ वरील उत्तरावरुन

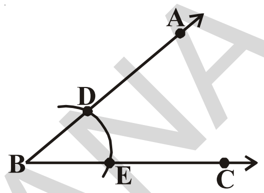
अशारीतीने PO, म्हणजेच POQ हा AB चा लंब दुभाजक आहे. सिध्दतेची गरज आहे.

13.2.2 दिलेल्या कोनाचे कोनदुभाजकाची रचना करणे.

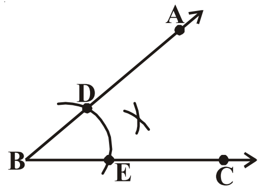
उदाहरण-1: दिलेला कोन ABC च्या कोन दुभाजकाची रचना करा.

सोडवणुक: रचनेच्या पायऱ्या

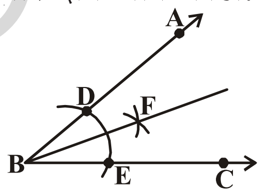
पायरी 1 : दिलेला कोन ABC काढा.



पायरी 2 : कोणताही त्रिज्या घेऊन B केंद्रापासुन आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे $\overrightarrow{BA}$ आणि $\overrightarrow{BC}$ किरणाला D आणि E बिंदुवर चाप काढा.



पायरी 3 : समान त्रिजेच्या E आणि D केंद्रावरुन आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एकमेकांस F वर छेदणारे दोन चाप काढा.

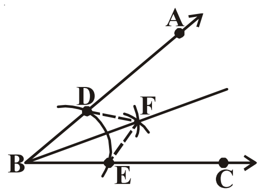


पायरी 4 : किरण BF काढा. हे $\angle ABC$ चे कोन दुभाजक आहे.

वरील रचनेची तर्कीक सिध्दता पाहु या.

D, F आणि E, F जोडा. (याला सिध्द करण्यासाठी त्रिकोणाच्या एकरुपतेचा उपयोग करतो सिध्दता:)

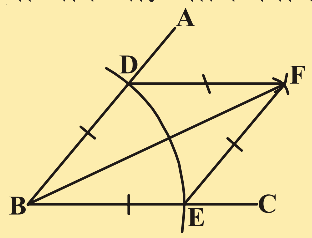
पायरी	कारण
Δ^s BDF मध्ये ΔBEF मध्ये	घेतलेले त्रिकोण
BD = BE	सारख्या चापाचे त्रिज्या
DF = EF	समान त्रिजेचे चाप
BF = BF	सामन्य
$\therefore \Delta BDF \cong \Delta BEF$	बा.बा.बा. नियम
म्हणुन $\angle DBF = \angle EBF$	एकरुप त्रिकोणाचे संगत भाग
अशारितीने BF हा $\angle ABC$ चा कोन दुभाजक आहे.	सिध्द करण्याची गरज आहे.

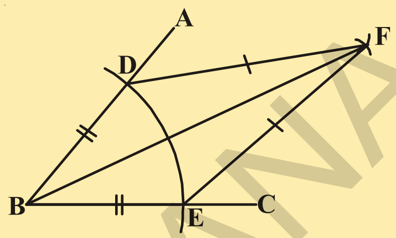


$\therefore$ असे सिध्द झाले.

प्रयत्न करा.

BEFD चौकोनाच्या बाजु, कोन, आणि, कर्णाचे निरिक्षण करा. खालील दिलेल्या आकृत्याची नांवे द्या. आणि त्यांचे गुणधर्म लिहा.

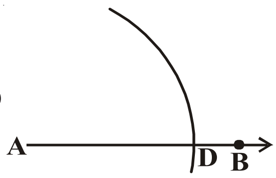
1. 

2. 

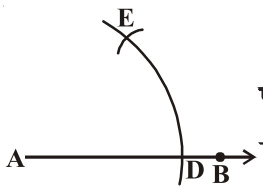
13.2.3 दिलेल्या किरणाच्या आरंभबिंदुजवळ 60^0 च्या कोनाची रचना करणे

उदाहरण-3: (Aआरंभबिंदुवरुन) AB किरण काढा. आणि AC किरणाची रचना अशी करा की, $\angle BAC = 60°$.

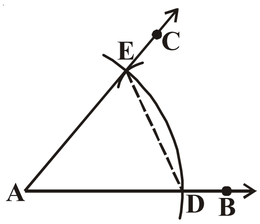
सोडवणुक: रचनेच्या पायऱ्या



पायरी 1 :काही त्रिज्या घेऊन A केंद्रबिंदुवरुन AB किरण काढा AB , D बिंदुवर छेदणारा एक चाप AB काढा



पायरी 2 : काही त्रिज्या घेऊन D केंद्रवरुन आगोदर च्या चापास E बिंदुवर छेदणारा दुसरा चाप काढा.



पायरी 3 : Eबिंदुमधुन जाणारे AC किरण काढा $\angle BAC$ हा आवश्यक 60° चा कोन येतो.

आपण काढलेल्या रचनेला सिध्द करण्यासाठी आकृती पुन्हा काढुन D,E ला जोडा त्यास खालील प्रमाणे करु शकतो.

पायऱ्या	कारण
Δ ADE मध्ये	
AE = AD	सारख्या चापाची त्रिज्या
AD = DE	समान त्रिजेचे चाप
Then AE = AD = DE	सारख्या त्रिजेचे सारखे चाप
$\therefore$ Δ ADE हा समभुज त्रिकोणआहे.	सर्व बाजु समान असतात.
$\angle EAD = 60°$	समभुज त्रिकोणाचा प्रत्येक
$\angle BAC$ हा $\angle EAD$ ला समान आहे.	$\angle EAD$ हा $\angle BAC$ चा भाग आहे
$\angle BAC = 60^o$.	सिध्दतेची गरज आहे.

प्रयत्न करा

वर्तुळ काढा. त्याच्यावरील बिंदु ओळखा. त्रिजेच्या लांबीवरुन चापास वर्तुळावर कापा. वर्तुळाचे किती भाग पडतात? कारणे सांगा?

अभ्यास - 13.1

1. दिलेल्या किरणाच्या आरंभबिंदुपासुन खालील कोनांची रचना करा आणि रचनेची सिध्दता करा.

   (a) 90^{o} (b) 45^{o}

2. वृत्तलेखणीच्या आणि मेजपट्टीच्या साहाय्याने खालील कोणाची रचना करा. कोनमापकांच्या साहाय्याने पडताळा करुन पाहा.

   (a) 30^{o} (b) $22\frac{1}{2}^{o}$ (c) 15^{o}

   (d) 75^{o} (e) 105^{o} f) 135^{o}

3. 4.5 से.मी. बाजु दिलेल्या समभुज त्रिकोणाची रचना करा आणि रचनेचे स्पष्टीकरण करा.
4. पाया आणि आधार कोन दिला असता समद्वीभुज त्रिकोणाची रचना करा आणि रचनेची स्पष्टीकरण करा.

   (सुचना: कोणत्याही मापाची बाजु आणि कोन घेऊ शकता)

13.3 त्रिकोणाची रचना(विशेष संदर्भात)

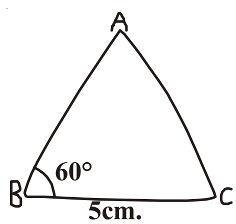
आता पर्यत आपण काही मुलभुत रचना करुन त्यांची सिध्दता करुन दाखविली. आता काही विशेष प्रकारचा मापावरुन त्रिकोणाची रचना करुत. त्रिकोणाची एकरुपता बा.को.बा., बा.बा.बा., को. बा. को., आणि उजव्या बाजुचे नियम इत्यादींची आठवण करा. वरील नियमानुसार त्रिकोणाची रचना कशी करतात. तुम्ही अधीच 7 व्या वर्गात शिकलात.

त्रिकोणाच्या रचनेसाठी तिन मापांची गरज असते. कोणतीही तीन मापे मिळुन सर्व संदर्भात त्रिकोणाची रचना करता येत नाही. उदा. दोन बाजु एक कोन(लागुन नसलेले) दिला असता, त्रिकोण काढणे शक्य नाही. अशा रचनेसाठी आपणास काही स्पष्टीकरण द्यावे. लागते. अशा संदर्भात आपण दिलेल्या मापांसोबत बा.को. बा. बा.बा.बा. , को.बा. को. आणि उजवी बाजु या नियमाचा वापर करतो. उदा.

13.3.1 रचना: पाया,आधार कोन आणि इतर कोन दोन बाजुची बेरीज दिली असता त्रिकोणाची रचना करणे

उदाहरण-4: BC = 5 से.मी.., AB + AC = 8 से.मी.आणि $\angle ABC = 60^{o}$ दिले असता.ΔABC ची रचना करा.

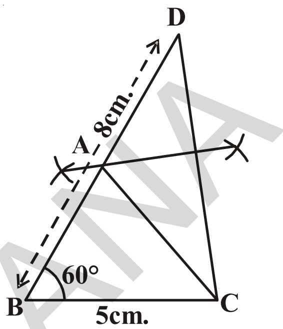
सोडवणुक: रचनेमधील पायऱ्या



पायरी 1 :ΔABC चे अंदाजे चित्र रेखाटा आणि नेहमी प्रमाणे दिलेल्या मापाची खुण करा.

(AB + AC = 8 से.मी. खुण कशी करता?)

(रचनेत तिसरा शिरोबिंदु A चा स्थान कसे निश्चित करतो?)



विश्लेषण: AB + AC = 8 से.मी. BA ला D पर्यंत असे वाढवा की, BD = 8 से.मी.

$\therefore$ BD = BA + AD = 8 से.मी.

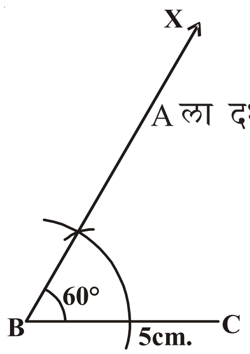
परंतु AB + AC = 8 से.मी. (दिले आहे)

$\because$ AD = AC

A ला BD वर दर्शविण्या साठी काय कराल?

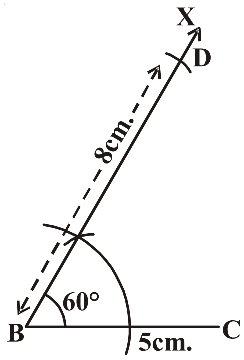
A हाC आणि D पासुन समान अंतरावर आहे.

A ला दर्शविण्यासाठी $\overline{CD}$ चा लंबदुभाजक BD वर काढा.

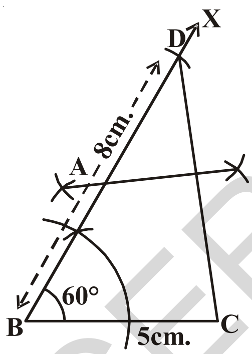


AB + AC = BD कसे सिध्द करता?

पायरी 2 : BC= 5 से.मी. चा पाया काढा आणि $\angle CBX = 60^\circ$ चा B वर कोन काढा

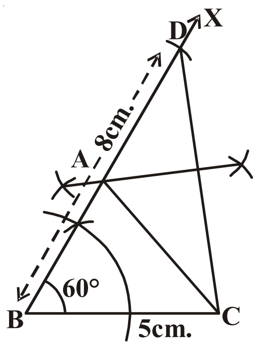


पायरी 3: 8 से.मी. (AB + AC = 8से.मी.) त्रिजेच्या B केंद्रबिंदुरुन D बिंदुवर छेदणारा $\overrightarrow{BX}$ चाप काढा.



पायरी 4 : C,D ला जोडा आणि A बिंदुवर मिळणारा CD चा लंबदुभाजक BD काढा.

पायरी 5 :आवश्यक असणारे कोन ABC येण्यासाठी A,C ला जोडा आता आपण रचनेशी सहमत आहो.



सिध्दता : A हा $\overline{CD}$ च्या लंबदुभाजकावर आहे.

$\therefore$ AC = AD

AB + AC = AB + AD

= BD

= 8 से.मी.

म्हणुन ΔABC हा अपेक्षीत त्रिकोण आहे.

विचार करा आणि चर्चा करा आणि लिहा.

BC = 6 से.मी. $\angle B = 60^\circ$ आणि AB + AC = 5से.मी. मापानी त्रिकाणे ABC काढु शकता का? जर नाही तर कारणे द्या.

13.3.2 रचना, पाया, आधारकोन, आणि इतर दोन बाजुमधील फरक दिला असता त्रिकोणाची रचना करणे.

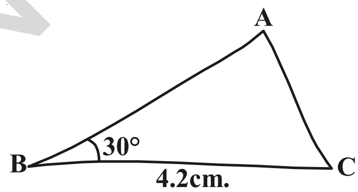
ABC त्रिकोणात BC पाया आहे. $\angle B$ हा आधार कोन आहे. आणि दोन बाजु मधील फरक AB – AC या संदर्भात AB>AC किंवा AC-AB, या संदर्भात AB<AC घ्या आणि त्रिकोण ABC ची रचना करा अशारीतीने आपण रचनेच्या दोन संदर्भाची चर्चा खालील उदाहरणातकरु.

संदर्भ (i) समजा AB > AC

उदाहरण-5: BC = 4.2 से.मी. $\angle B = 30^\circ$ आणि AB – AC = 1.6 से.मी. दिले असता ΔABC त्रिकोणाची रचना करा.

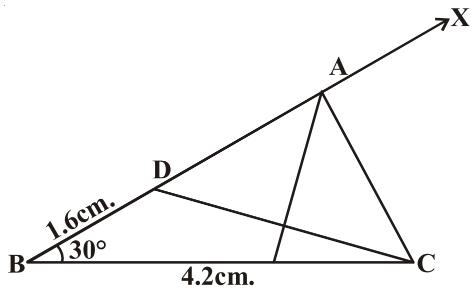
सोडवणूक: रचनेच्या पायाऱ्या

पायरी 1: ΔABC ची अंदाजे चित्र रेखाटा आणि दिलेल्या मापाच्या खुणा करा.

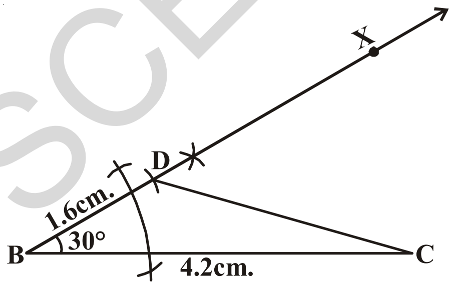


(AB – AC = 1.6 से.मी.ची खुण कशी कराल?)

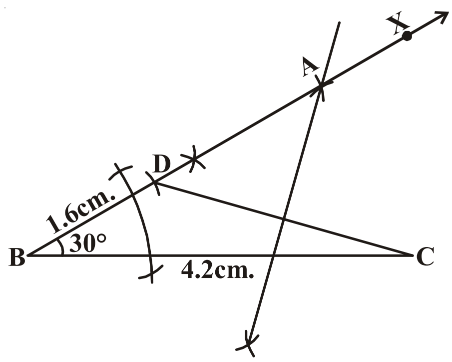
विश्लेषण : AB – AC = 1.6 से.मी. आणि AB > AC,AB वर D ची अशी खुण करा की AD = AC आता BD = AB – AC = 1.6 से.मी.CD ला जोडा आणि शिरोबिंदु A माहित करण्यासाठी वाढविलेल्या BD वर CD चे लंबदुभाजक काढा.ΔABC त्रिकोण येण्यासाठी AC ला जोडा



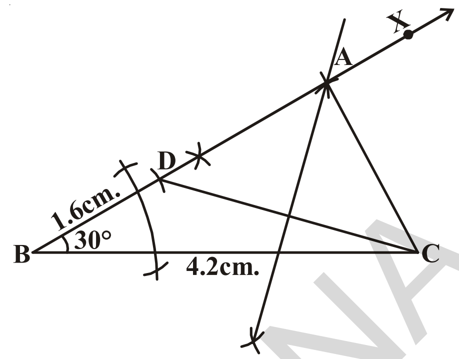
पायरी 2: BC = 4.2 से.मी. $\angle B = 30^0$ आणि BD = 1.6 से.मी. (म्हणजेच AB - AC) बा.को.बा. नियमाचा उपयोग करुन ΔBCD काढा.



पायरी 3 : CD चे लंबदुभाजक काढा.समजा ते किरण BDX ला A बिंदुवर मिळते.



पायरी 4: ABC त्रिकोण येण्यासाठी AC ला जोडा.



विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

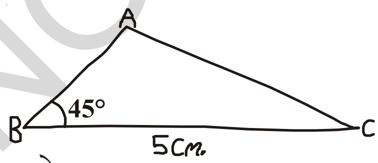
त्रिकोण ABC ची रचना सारख्या मापांनी दिली आणि आधारकोन $\angle B$ च्या ऐवजी $\angle C$ दिला असता करु शकता का? अंदाजे चित्र काढुन रचना करा.

संदर्भ (ii) समजा $AB < AC$

उदाहरण-6: ΔABC ची रचना करा $BC = 5$से.मी. $\angle B = 45^o$ से.मी. $AC - AB = 1.8$ से.मी.

सोडवणुक: रचनेच्या पायऱ्या

पायरी 1: ΔABC चे अंदाजे चित्र रेखाटुन दिलेल्या मापाचे खुण करा $AC - AB = 1.8$ से.मी. ची खुण कशी कराल याचे विश्लेषण करा.



विश्लेषण : आता $AC - AB = 1.8$ से.मी. म्हणजेच $AB < AC$ वाढवुन त्यावर AB ला वाढवा आणि त्यावर D बिंदु शोधा. $AD = AC$
आता $BD = AC - AB = 1.8$ से.मी.म्हणजेच ($\because$ $BD = AD - AB$ आणि $AD = AC$)
DC च्या लंबदुभाजावर A माहित करण्यासाठी CD ला जोडा.

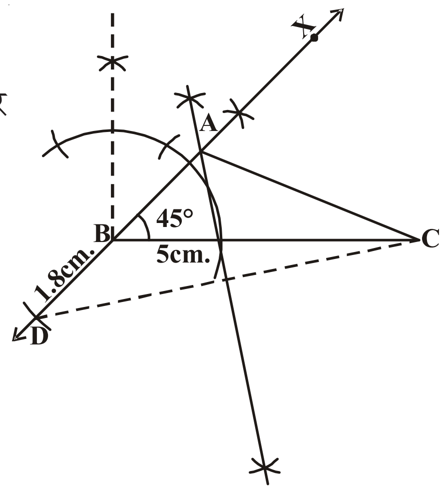
पायरी 2 : $BC = 5$ से.मी. काढुन $\overrightarrow{BX}$ असे काढा. $\angle CBX = 45°$ ची रचना करा. 1.8 से.मी. ($BD = AC - AB$) त्रिज्या घेऊन B केंद्रबिंदुपासुन वाढविलेलो बिंदु D.वर XB रेषेला छेदणारा एक चाप काढा.

पायरी 3 : DC चे लंबभुजाक काढुन DC. जोडा.

पायरी 4 : समजा ती $\overrightarrow{BX}$ ला A बिंदुवर मिळतो आणि AC जोडा.
ΔABC हा त्रिकोण आहे.

आता तुम्ही रचनेची सिध्दता देऊ शकते का?

सिध्दता: ΔABC, मध्ये A बिंदु हा DC च्या लंबदुभाजकावर स्थित आहे.



$\therefore \; AD = AC$

$AB + BD = AC$

म्हणुन $BD = AC - AB$

$= 1.8$ से.मी.

म्हणुन ΔABC हा येणारा त्रिकोण आहे.

13.3.3 रचना: परिमीती आणि दोन आधारकोन दिले असता त्रिकोणाची रचना करणे.

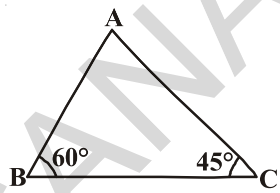
दिलेले आधार कोन $\angle B$ आणि $\angle C$ आणि परीमीती $AB + BC + CA$,यावरु त्रिकोण ABC ची रचना करणे

उदाहरण-7: त्रिकोण ABC ची रचना करा ज्यामध्ये $\angle B = 60^o$, $\angle C = 45^o$ आणि $AB + BC + CA = 11$ से.मी. आहे

सोडवणुक: रचनेच्या पायऱ्या

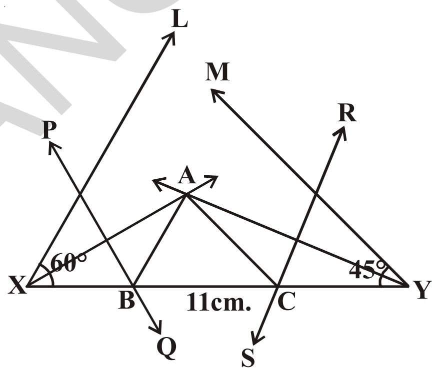
पायरी 1 :त्रिकोण ABC ची अंदाजे आकृती काढा. आणि दिलेल्या मापेची खुण करा.

(तुम्ही त्रिकोणाच्या परिमीतीची खुण करु शकता का ?)



विश्लेषण: ΔABC च्या परिमीतीशी समान म्हणजे $AB + BC + CA$ असलेले XY रेषाखंड काढा कोन $\angle YXL$ ला समान असलेले $\angle B$ आणि $\angle XYM$ ला समान $\angle C$ ला समान असलेला काढा आणि त्यास दुभागा समजा ते दुभाजक A बिंदुवर छेदतात.

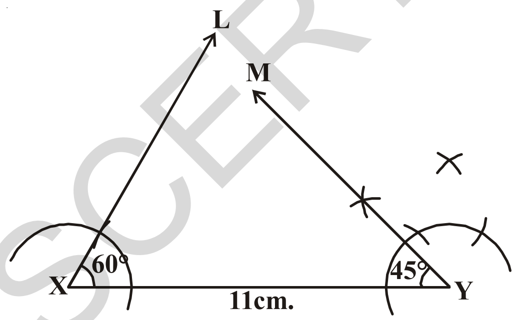
XY ला B बिंदुवर छेदणारा AX चा दुभाजक काढा. अणि AY चा C बिंदुवर छेदणारा लंब दुभाजक काढा नंतर AB आणि AC ला जोडल्यास आपणास अपेक्षीत त्रिकोण ABCयेते.



पायरी 2: $XY = 11$ से.मी. चा रेषाखंड काढा.

($XY = AB + BC + CA$ सारखा)

पायरी 3 : $\angle YXL = 60^o$ आणि $\angle XYM = 45^o$ ची रचना करा आणि या कोनांचे कोनदुभाजक काढा.

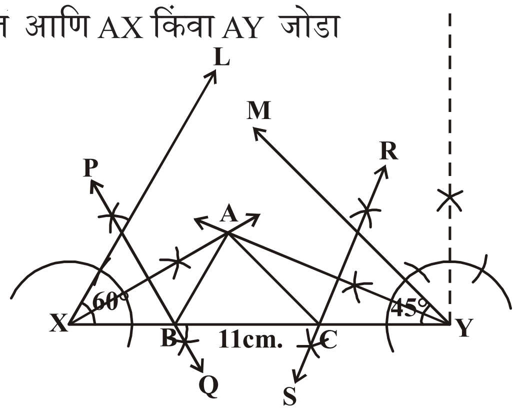


पायरी 4 :समजा या कोनांचे दुभाजक A बिदुवर छेदतात आणि AX किंवा AY जोडा

पायरी5 : AX आणि AY चे लंबदुभाजक काढा.जे $\overrightarrow{XY}$ ला अनुक्रमे B आणि Cबिंदुत छेदते.

AB आणि ACजोडा

ABC हा येणारा त्रिकोण आहे.



तुम्हाला रचनेची सिध्दता खालिल प्रमाणे करता येईल.

सिध्दता: AX चा लंबदुभाजक PQ वर B बिंदु आहे.

$\therefore$ XB = AB आणि याच प्रमाणे CY = AC

यावरुन AB + BC + CA = XB + BC + CY

$= XY$

पुन्हा $\angle BAX = \angle AXB$ ($\because$ XB = AB in ΔAXB) आणि

$\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB$

(ΔABCचे बाहेरील कोन).

$= 2\angle AXB$

$= \angle YXL$

$= 60^{o}$.

अशारितीनते $\angle ACB = \angle XYM = 45^{o}$

$\therefore$ $\angle B = 60°$ आणि $\angle C = 45°$ रचना केली.

प्रयत्न करा

सारख्या मापाने दुसऱ्या पध्दतीत त्रिकोणाची रचना करु शकता का?

(सुचना $\angle YXL = \dfrac{60°}{2} = 30°$

आणि $\angle XYM = \dfrac{45°}{2} = 22\frac{1}{2}°$)

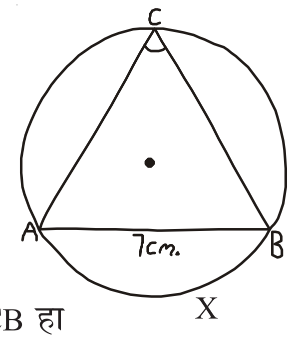
घ्या.

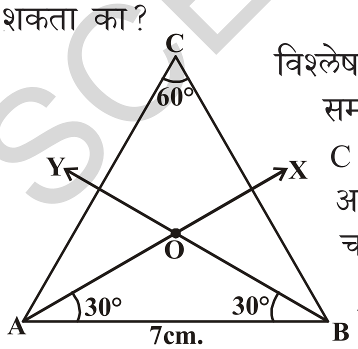
13.3.4 रचना: वर्तुळाची जिवा आणि त्रिकोण दिला असता वर्तुळखंडाची रचना करणे.

उदाहरण-8: 7 से.मी. लांबीच्या वर्तुळजिवावर 60° चा कोन असणारा वर्तुळखंडाची रचना करणे.

सोडवणुक: रचनेच्या पायऱ्या

पायरी-1: 600 चा कोन असणारी वर्तुळखंडाची अंदाजी आकृती काढा. (मोठा वर्तुळखंड काढा. का?) केंद्रबिंदुशिवाय तुम्ही वर्तुळ काढु शकता का?





विश्लेषण: समजा वर्तुळाचा केंद्रबिंदु 'O' आहे.

समजा AB हा दिलेला जिवा आहे आणि ACB हा C = 60° कोन असलेला अपेक्षीत वर्तुळखंड आहे.समजा $\overset{\frown}{AXB}$ हा C अंतरीक कोनवरील चाप आहे. कारण

$\angle ACB = 60°, \angle AOB = 60° \times 2 = 120°$

ΔOAB मध्ये OA=OB (समान्य वर्तुळाची त्रिज्या)

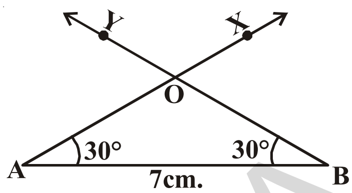
$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \dfrac{180° - 120°}{2} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

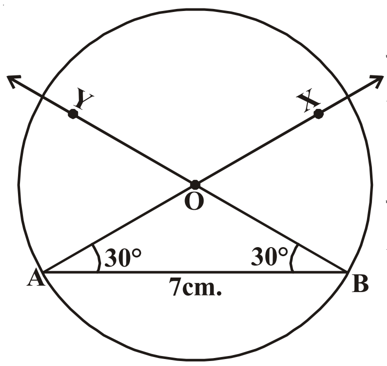
म्हणुन आपण ΔOAB काढुन अंतर OA किंवा OB ला समान असलेल्या त्रिजेचे वर्तुळ काढु शकतो.

पायरी-2 : AB = 7से.मी. लांबीचा रेषाखंड काढा.

पायरी-3 : $\angle BAX = 30°$ आणि $\angle YBA = 30°$येतील असे $\overrightarrow{AX}$ $\overrightarrow{BY}$ किरण काढा जे 0 बिंदुवर छेदते.

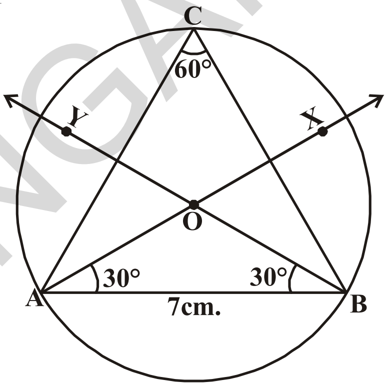
[सुचना: 60^0 ची दुभागणी करुन 30^0 चा कोन काढा.]





पायरी-4 : OA किंवा OB त्रिज्या आणि 0 केंद्रबिंदु घेऊन वर्तुळ काढा.

पायरी-5 :'C' बिंदुची ची खुण वर्तुळाच्या चापावर करा AC आणि BC जोडा आपणास $\angle ACB = 60°$ येते.



अशारितीने ACB हा येणारा वर्तुळखंड आहे. या रचनेची सिध्दता करु या.

सिध्दता: OA = OB (वर्तुळाची त्रिज्या)

$\therefore \quad \angle OAB + \angle OBA = 30° + 30° = 60°$

$\therefore \quad \angle AOB = 180° - 60° = 120°$

$\overset{\frown}{AXB}$ चापाच्या वर्तुळाकेंद्रावर केलेला अंतरिक कोन 120° आहे.

$\therefore \quad \angle ACB = \dfrac{120°}{2} = 60°$

$\therefore$ ACB हा येणारा वर्तुळखंड आहे.

प्रयत्न करा.

वर्तुळ खंडातील कोन काटकोन असल्यास काय घडते? कोणत्या प्रकारचा वर्तुळ खंड तुम्हास मिळतो? आकृती काढा आणि त्याची कारणे द्या?

अभ्यास - 13.2

1. BC = 7 से.मी. $\angle B = 75^{\circ}$ आणि AB + AC = 12 से.मी. असलेला ΔABC ची रचना करा.
2. QR = 8 से.मी. $\angle Q = 60°$ आणि PQ – PR = 3.5 से.मी. त्रिकोण ΔPQR रचना करा.
3. त्रिकोणΔ XYZ मध्ये $\angle Y = 30^{\circ}$, $\angle Z = 60^{\circ}$ आणि XY + YZ + ZX = 10 से.मी.Δ XYZ रचना करा.

4. 7.5से.मी. पाया असलेला आणि त्याच्या कर्ण आणि इतर बाजुची बेरीज 15 से.मी. असेल तर काटकोन त्रिकोणाची रचना करा.
5. खालील कोनाच्या मापावरुन त्यांची जिवा 5 से.मी. असता त्यावर वर्तुळ खंडाची रचना करा. i. 90° ii. 45° iii. 120°

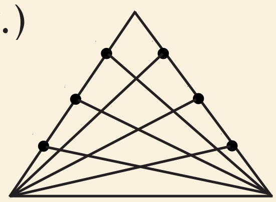
आपण काय चर्चा केली?

1. भुमितीय रचना ही मोजपट्टी आणि वृत्तेलखणी या दोन उपकरणाच्या साहाय्याने भुमीतीय आकृत्या काढण्याची प्रणाली आहे.
2. खालील भुमितीय आकृत्याची रचना त्याच्या सिध्दतेवरुन करा.
   (तर्कीक सिध्दता)
   - दिलेल्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक
   - दिलेल्या कोनाचा दुभाजक
   - दिलेल्या किरणाच्या आरंभबिंदुवर 60° कोन काढणे.
3. पाया, आधारकोन आणि इतर दोन बाजुंची बेरीज दिली असता त्रिकोणाची रचना करणे.
4. पाया, आधारकोन, दुसऱ्या दोन बाजुमधील फरक दिला असता त्रिकोणाची रचना करणे.
5. परिमीती आणि इतर दोन आधार कोन दिले असता त्रिकोणाची रचना करणे.
6. जिवा आणि कोन दिला असता वर्तुळखंड काढणे.

मेंदुचा खेळ

आकृतीत किती त्रिकोण आहेत?

(गणितशास्त्रज्ञ 'Cevian' च्या स्मृतिसाठी केवीन सुत्र लिहिले आहे.)



(सुचना: समजा प्रत्येक शिरोबिंदुवरुन त्याच्या विरुध्द बाजुस काढलेला रेषेची संख्या 'n' आहे)

14 संभाव्यता

सामान्य ज्ञानाला गणना मध्ये रुपांतर करणे म्हणजेच संभाव्यता सिध्दांत होय

- Pierre-Simon Laplace

14.1 प्रस्तावना

सिध्दु आणि विवेक वर्ग मित्र आहेत. एका दिवशी दुपारचे जेवण करतांना ते एकमेकांशी बोलले.

सिद्धु : विवेक,तु आज सायंकाळी काय करत आहे?

विवेक : संभवत: मी आज भारत विरुध्द आस्ट्रलियाचा किक्रेट सामना पाहिले.

सिद्धु : नाणेफेक कोण जिकंले असे तुला वाटत आहे?

विवेक : दोन्ही संघांना नाणेफेक जिकण्यांची समान संधी आहे. तु घरी किक्रेटचा सामना पाहतोस का?

सिद्धु : माझ्या घरी मला किक्रेट पाहण्याची संधी नाही आहे कारण माझा T.V. नादुरुस्त झालेला आहे.

विवेक : ओह, तर माझ्या घरी ये आपण दोघे मिळुन सामना पाहु

सिद्धु : माझा गृहपाठ पुर्ण केल्यानंतर मी येईन

विवेक : उद्या 2 ऑक्टोबर आहे. गांधीजीच्या जन्म दिवसाच्या निमीत्ताने आपल्याला सुट्टी राहणार आहे. म्हणुन तु तुझ गृहपाठ उद्या का करत नाहीस?

सिद्धु : नाही, पहिले मी माझे गृहपाठ पुर्ण करीन नंतर तुझ्या घरी येईन

विवेक : ठिक आहे.

वरील संभाषणावरुन खालील विधाने विचारात घेऊ.

संभवता: मी आज भारत विरुध्द आस्ट्रीलीयाचा किक्रेट सामना पाहिल.

माझ्या घरी मला किक्रेट पाहण्याची संधी नाही आहे.

दोन्ही संघाना नाणेफेक जिकंण्याची समान संधी आहे.

येथे विवेक आणि सिद्धु विशिष्ट वृत्तांताचा संधी विषयी मत ठरवत आहेत.

बरेचशा संदर्भात आपण असे विधान बोलतो आणि अनुभवाचा वापर करतो. आणि तर्क व्दारे निर्णय घेतो. उदाहरणार्थ आज अल्हादायक आणि प्रकाशित दिवस आहे. मी आज छत्रि न घेता बाहेर जातो.

तथापी, घेतलेला निर्णय सदा आपल्या अनुकुल नसते. एक संदर्भ विचारात घेऊ, पावसाळ्यात मेरी नियमीत पणे शाळेत रेनकोट घेऊन जाते. ती बरेच दिवस शाळेत रेनकोट नेली. पण ती शाळेत येतांना आणि जातांना कधी पाऊस पडला नाही. तथापी, एकेदिवशी ती रेनकोट न्यायाला विसरली आणि त्या दिवशी भरपुर पाऊस पडला.

साधारणपणे उन्हाळ्याची सुरुवात मार्च महिण्यापासुन होते, पण त्या महिण्यात एके दिवशी सायंकाळी भरपुर पाऊस पडला. मेरी सुदैवी ठरली कारण ती दररोजच्या प्रमाणे त्या दिवशी पण छत्री नेली होती आणि ती भिजली नाही.

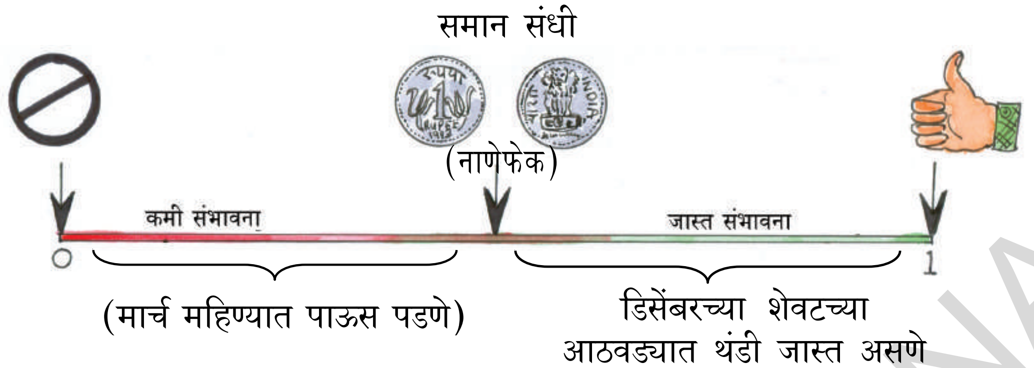
अशा प्रकारे भविष्यात घडणाऱ्या अंदाजाचा निर्णय आपण घेत असतो. म्हणजेच, घटना घडणार की नाही. वरील दोन्ही संदर्भात, त्यादिवशी पाऊस पडते की नाही याचा अंदाज मेरी करत होती. आपले निर्णय कधी कधी बरोबर असतात आणि कधी कधी नसतात. (का ?)

आपल्या दैनदीन जिवनात बरेचशा गोष्टींच्या मापणावरुन काही घटनाच्या घडण्याचे किंवा नाही घडण्याच्या संधीचे संख्या मापण करुन प्रयत्न करु.

अशाप्रकारचे मापण आपल्याला चांगले सुरळीत पध्दतीने निर्णय घेण्यास मदत करतात. काही घडण्याच्या किती संधी आहेत. हे माहित करण्यासाठी आपण संभाव्यताचा अभ्यास करत आहोत.

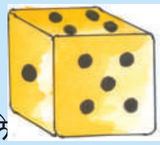
घडण्याच्या संधी संख्येने मोजण्याअगोदर आपण वरील संदर्भाविषयी चर्चा करु या. तक्तया दिलेल्या खालील पदात वापरलेल्यानां आपण श्रेणी देऊ. खालील तक्त्याचे निरिक्षण करा.

पद	संधी	संभाषणा खवरुन उदाहरणे
निश्चित	काही तरी घडुन यायला पाहिजे	गांधीजींचा जन्म दिवस ऑक्टों.2 ला आहे.
जास्त संभावना	मोठ्या संधीने काही तरी घडेल	विवेक क्रिकेट चा सामना पाहतो.
समान संभावना	समान संधी ने काही तरी घडेल	दोन्ही संघ नाणेफेक जिंकेल.
कमी संभावना	कमी संधीने काही तरी घडेल	क्रिकेट सामण्याच्या दिवशी विवेक गृहपाठ करेल.
अशक्य	असे काही तरी जे घडु शकणार नाही	सिध्दु त्याच्या घरी क्रिकेटचा सामना पाहील



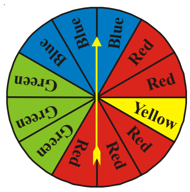
हे करा

1. आगोदरच्या पानात दिलेल्या तक्त्याचे निरिक्षण करा आणि प्रत्येक पदासाठी इतर काही उदाहरणे द्या.
2. खालील विधानांना कमी संभावना, समान संभावना, जास्त संभावना यामध्ये वर्गीकरण करा.
   a) फासे फेकुन वरच्या बाजुवर 5 संख्या मिळवणे.
   b) नोव्हेंबर महिण्यात तुमच्या गावात थंडी वाटणे.
   c) पुढील सॉकर विश्व चषक स्पर्धेत भारत जिकणे.
   d) नाणेफेक केल्यानंतर छापा (Head) किंवा काटा (Tail) मिळविले
   e) तुम्ही लॉटरीचे तिकिट विकत घेतले आणि जॅकपॉट जिंकले.



14.2 संभाव्यता

चक्र



14.2.1 अनिर्बंध प्रयोग आणि निष्पत्ती

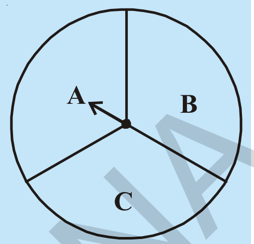
संधी मोजण्यासाठी आपण समजण्यासाठी आपण नाणेफेक करणे चक्राला फिरविणे इत्यादी सारखे प्रयोग पार पाडतो.

जेव्हा आपण नाणेफेक करतो, आपल्याकडे फक्त दोन निकाल छापा (Head) आणि काटा (Tail) ची शक्यता असते. समजा तुम्ही एका क्रिकेट संघाचे कर्णधार असेल आणि तुमचा मित्र दुसऱ्या क्रिकेट संघाचा कर्णधार असेल, तुम्ही नाणे फेकाल तर तुमचा मित्र छापा किंवा काटा निवडेल. नाणेफेकचा निर्णय तुमच्या हातात असु शकते का? तुम्हाला छापा किंवा क़ाटा पाहिजे असेल ते तुम्ही मिळवु शकता का? सर्व साधारण नाण्यात ते शक्य नाही आहे. तुम्हाला पाहिजे असलेली संधी मिळु शकते किंवा मिळु शकत नाही. पण ते तुम्ही सांगु शकत नाही. अशा नाणेफेक सारख्या प्रयोगाला अनिर्बध्द प्रयोग म्हणतात. अशा प्रयोगात, आपल्याला आगोदरच निष्पत्ती माहित राहतात. पण कोणत्या वेळेला निश्चित कोणती निष्पत्ती असते. ते सांगु शकत नाही. अनिर्बध्द प्रयोगाची निष्पत्ती समान संधी असते किंवा नसते. नाणेफेक प्रयोगात छापा (Head) किंवा काटा (Tail) अशा दोन निष्पत्ती ची शक्यता असते.

* फासा हा सहा बाजु असलेला सतुंलीत घन आहे. त्याच्या प्रत्येक बाजुवर एका ते सहा मधील अंकाची खुण करुन असते. काही वेळा संख्येच्या ठिकाणी ठिंबांनी खुण करुन असते.

प्रयत्न करा

1. जर तुम्ही स्कुटर चालु करण्याचा प्रयत्न केला तर कोणत्या निष्पत्त्यांची शक्यता आहे?
2. जर तुम्ही फासे फकेले, तर सहा शक्य निष्पत्ती कोणते आहेत?
3. दाखविलेल्या चक्राला जेव्हा तुम्ही फिरवता तर शक्य निष्पत्ती कोणत्या आहेत?
   (येथे निष्पत्ती म्हणजे छडी जेथे थांबेल असे शक्य वर्तुळखंड होय)



4. वेगवेगळ्या रंगाचे (पांढरा,लाल, निळा, करडा आणि पिवळा) पाच सारखे बॉल तुमच्या जवळ असलेल्या पात्रात आहेत. तुम्ही डोळे बंद करुन त्यातील एक बॉल काढला. तुम्हाला मिळत असलेल्या शक्य निष्पतीची यादी तयार करा.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

फासे फेकण्यामध्ये,

- पहिल्या खेडाळुला फास्याच्या वरच्या बाजुवर (top face)सहा येण्याची मोठी संधी आहे का?
- त्यानंतर खेळत असलेल्या दुसऱ्या खेडाळुला वरच्या बाजुवर (top face) सहा येण्याची कमी संधी आहे का?
- समजा दुसऱ्या खेडाळुला समोरच्या बाजुवर सहा मिळाले. याचा अर्थ तिसऱ्या खेडाळुला समोरच्या बाजुवर सहा मिळण्याची संधी नाही आहे का?

14.2.2 समान संधीचे निष्पत्ती

जेव्हा आपण नाणेफेक करतो किंवा फासा फेकतो, तेव्हा आपण असे गृहीत धरतो की, नाणे आणि फासा अनुकुल आणि असमतोल आहे. म्हणजेच प्रत्येक नाणेफेक आणि फासा फेकण्यात सर्व शक्यतांची समान संधी असते. आपण बरेच वेळ प्रयोग करतो आणि निरिक्षण गोळा करतो.गोळा केलेल्या माहिती वापर करुन, विशिष्ट घडण्यासाठी संधीचा मापण आपण माहित करतो.

नाणे काही वेळा नाणेफेक केला आणि प्रत्येक वेळा आपल्याला छापा किंवा काटा मिळते. निकाल पत्राकडे पहा तिथे जेथे आपण वाढणाऱ्या नाणेफेकची माहिती ठेवली आहे.

नाणेफेक ची संख्या	ताळेची खुण (छापा)	छापा (Heads) ची संख्या	ताळेची खुण (काटा)	काटा(Tail) ची संख्या
50	卌 卌 卌 卌 ||	22	卌 卌 卌 卌 卌 |||	28
60	卌 卌 卌 卌 卌 |	26	卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||||	34
70	......	30	......	40
80	......	36	......	44
90	......	42	......	48
100	......	48	......	52

वरील तक्त्यावरुन आपल्याला असे निरिक्षणास येते की, नाणेफेकची संख्या जस जशी वाढत जाईल. तस तशी छापा आणि काटा ची संख्या एकमेकांच्या जवळ येते.

हे करा

तक्तयात दाखविलेल्या संख्या प्रमाणे नाणेफेक करा आणि तुम्हाला जे दिसेल त्याची तक्तयात नोंद करा.

नाणेफेक ची संख्या	छापा(Heads)ची संख्या	काटा(Tail) ची संख्या
10		
20		
30		
40		
50		

जस जशी नाणेफेकची संख्या वाढत जाईल, काय घडते?

फांसे बऱ्याच वेळा फेकण्यासाठी सुध्दा हे करा. आणि निरिक्षण करा.

फासे फेकण्याची संख्या	प्रत्येक निष्पत्ती घडण्याची संख्या (म्हणजेच फांसाच्या समोरच्या बाजुवर संख्या प्रकट होणे)					
	1	2	3	4	5	6
25	4	3	9	3	3	3
50	9	5	12	9	8	7
75	14	10	16	12	10	13
100	17	19	19	16	13	16
125	25	20	24	18	16	22
150	28	24	28	23	21	26
175	31	30	33	27	26	28
200	34	34	36	30	32	34
225	37	38	40	34	38	38
250	40	40	43	40	43	44
275	44	41	47	47	47	49
300	48	47	49	52	52	52

वरील तक्त्यावरुन, जसे जसे फासे फेकण्याची संख्या वाढेल तसे तसे सहा निष्पत्ती पैकी प्रत्येकाची संख्या जवळ जवळ एकमेकांचे जवळ येते. हे पुरावा आहे.

वरील दोन प्रयोगावरुन आपण असे म्हणु शकतो की, प्रयोगाच्या वेगवेगळ्या निष्पत्ती समान संधीचे आहेत. या अर्थ, प्रत्येक निष्पत्ती घडण्याचे समान संधी आहे.

14.2.3 प्रयत्न आणि घटना

वरील प्रयोगा मध्ये, प्रत्येक नाणेफेक आणि फासाच्या प्रत्येक वेळी फेकणे हे प्रयत्न किंवा अनिर्बध्द प्रयत्न आहे.

फासे फेकण्याचा प्रयत्न विचारात घेऊ.

समोरच्या बाजुवर(top face)5 पेक्षा मोठी संख्या येणाऱ्या शक्य निष्पत्ती किती आहे?

ते एकच आहे.(म्हणजेच 6)

समोरच्या बाजुवर समसंख्या येण्याच्या किती शक्य निष्पत्ती आहेत?

ते तिन निष्पत्ती आहेत.(2,4 आणि 6)

अशा प्रकारे, विशेष निष्पत्ती किंवा विशेष निष्पत्तीच्या समुहाने घटना बनतात.

समोरच्या बाजुवर 5 पेक्षा जास्त संख्या मिळवणे आणि सम संख्या मिळवणे हे वरील प्रयत्न दोन घटना आहेत. घटनाला एका निष्पत्तीची आवश्यकता नाही. पण अनिर्बध्द प्रयोगांना प्रत्येक निष्पत्ती हे एक घटना आहे.

येथे आपल्याला घटनांची मुलभुत कल्पना समजली आहे. घटना वर यापेक्षा जास्त माहिती पुढच्या वर्गात शिकु या.

14.2.4 संधीशी संभाव्यताला जोड

नाणेफेक या प्रयोगाचा विचार घेऊ. कोणत्या निष्पत्ती आहेत? तेथे छापा किंवा काटा असे दोन निष्पत्ती आहेत जे समान संभावनेचे आहे.

छापा मिळविण्याच्या किती संधी आहेत?

दोन शक्य निष्पत्ती पैकी ते एक आहे. म्हणजेच $\frac{1}{2}$. दुसऱ्या शब्दात जेव्हा एकावेळ नाणे फेक करतो तेव्हा छापा मिळविण्याची संभाव्यता $\frac{1}{2}$ असते. असे व्यक्त करु शकतो. जे खालील प्रमाणे दर्शविले जाते.

$$P(H) = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ किंवा } 50\%$$

काटा मिळविण्याच्या किती संधी आहेत?

आता, फासे फेकण्याचे उदाहरण घ्या. एकदा फासे फेकण्यामध्ये कोणत्या शक्य निष्पत्ती आहेत? येथे 1,2,3,4,5किंवा 6 असे सहा समान संभावना आहेत.

समोरच्या बाजुवर विषम संख्या येण्याची संभाव्यता किती आहे?

एकुण शक्य सहा निष्पत्ती पैकी 1,3, किंवा 5 हे तिन निष्पत्ती येतात. ते $\frac{3}{6}$ किंवा $\frac{1}{2}$

'A' घटनाचे संभाव्यतेसाठी आपण सुत्र लिहु शकतो.

$$P(A) = \frac{\text{घटना A साठी अनुकुल निष्पत्ती संख्या}}{\text{एकुण शक्य निष्पत्तीची संख्या}}$$

काही उदाहरणे पाहु या.

उदाहरण 1: जर दोन सारखे नाणे एकदाच नाणे फेक केले तर माहित करा. (a) शक्य निष्पत्ती (b) एकुण निष्पत्तीची संख्या (c) दोन छापा मिळविण्याची संभाव्यता(d) कमीत कमी एक छापा मिळविण्याची संभाव्यता(e) एकही छापा न येण्याची संभाव्यता (f) फक्त एक छापा मिळविण्याची संभाव्यता.

सोडवणुक : (a) शक्य निष्पत्ती

नाणे 1	**नाणे 2**
छापा	छापा
छापा	काटा
काटा	छापा
काटा	काटा

b) एकुण शक्य निष्पत्ती ची संख्या 4

c) दोन छापा मिळविण्याची संभाव्यता

$$= \frac{\text{दोन छापा येण्याचे अनुकुल निष्पत्तीची संख्या}}{\text{एकुण शक्य निष्पत्तीची संख्या}} = \frac{1}{4}$$

d) कमीत कमी एक छापा मिळविण्याची संभाव्यता $= \frac{3}{4}$

(कमीत कमी एक छापा म्हणजे एक छापा किंवा एकपेक्षा जास्त वेळेस मिळविणे)

e) छापा न मिळविण्याची संभाव्यता $= \frac{1}{4}$.

f) फक्त एक छापा मिळविण्याची संभाव्यता $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

हे करा

1. जर तीन नाणे एकाच वेळी नाणेफेक केले तर त्यांचे निष्पत्ती लिहा.
   a) सर्व शक्य निष्पती
   b) शक्य निष्पतीची संख्या
   c) कमीत कमी एक छापा मिळविण्याची संभाव्यता माहित करणे
   (एक किंवा एकपेक्षा जास्त छापा मिळणे)
   d) दोन छापा मिळविण्याची संभाव्यता माहित करणे
   (दोन किंवा दोनपेक्षा कमी छापा मिळणे.)
   e) काटा न मिळविण्याचे संभाव्यता माहित करा.

उदाहरण 2 : (a) जेव्हा एक फासे फेकले असता, समोरच्या बाजुवर प्रत्येक संख्या येण्याची संभाव्यता माहित करा आणि तक्त्यात लिहा. (b) सर्व निष्पत्तीच्या संभाव्यताची बेरीज करा.

सोडवणुक : (a) सहा शक्यता पैकी फक्त 4 ही संख्या समोरच्या बाजुवर येते. म्हुणन संभाव्यता 1/6. याच प्रमाणे उरलेल्यासाठी आपण तक्ता भरु या.

निष्पत्ती	1	2	3	4	5	6
संभाव्यता (P)				1/6		

(b) सर्व संभाव्यताची बेरीज

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

याला आपण सामान्यीकरण करु शकतो.

अनिर्बंध्द प्रयोगाचे सर्व निष्पत्तीच्या संभाव्यतेची बेरीज केव्हांही एक असते.

प्रयत्न करा

जेव्हा एक फासे एकदा फेकले जाते. तर प्रत्येक घटनाची संभाव्यता माहित करा.

घटना	अनुकुल निष्पत्ती(s)	अनुकुल निष्पत्तीची संख्या(s)	एकुण शक्य निष्पत्ती	शक्य निष्पत्तीची एकुण संख्या	संभाव्यता = $\frac{\text{अनुकुल निष्पत्तीची संख्या}}{\text{एकुण शक्य निष्पत्तीची संख्या}}$
समोरच्या बाजुवर 5 ही संख्या मिळविणे	5	1	1, 2, 3, 4, 5 and 6	6	1/6
समोरच्या बाजु वर 3 पेक्षा मोठी संख्या मिळविणे					
समोरच्या बाजुवर मुळ संख्या मिळविणे					
समोरच्या बाजु वर 5 पेक्षा कमी संख्या मिळविणे					
समोरच्या बाजु वर 6 च्या अवयवांची संख्या मिळविणे					
समोरच्या बाजु वर 7 पेक्षा मोठी संख्या मिळविणे					
समोरच्या बाजु वर 3 चे गुणक संख्या मिळविणे					
समोरच्या बाजु वर 6 किंवा 6 पेक्षा लहान संख्या मिळविणे					

तुम्ही निरिक्षण करु शकता.

घटना ही संभाव्यता केव्हांही 0 आणि 1 च्या मधात असते. (0 आणि 1 ला धरुन)

$0 \leq$ घटनाची संभाव्यता ≤ 1

a) घटना ची निश्चित संभाव्यता=1

b) घटना ची अशक्य संभाव्यता=0

14.2.5 तुमच्या स्वत:चे प्रयोग आयोजित करणे.

1. प्रत्येक 3-4 विद्यार्थ्यांच्या गटात आपण येथे काम करु. प्रत्येक गट सारखी मुद्रा आणि सारख्याच प्रकारची नाणी घेईल. प्रत्येक गटात एक विद्यार्थी 20 वेळा नाणेफेक करेल आणि माहितीची नोंद करेल. सर्व गटांची माहिती खालील तक्त्यात भरायची (तक्त्यात उदाहरण दाखवलेले आहे)

गट संख्या	नाणेफेक ची संख्या	गटाची संचित	छापा ची संख्या	छापा ची संचित संख्या	$\frac{\text{संचित छापा}}{\text{एकुण नाणेफेक संख्या}}$	$\frac{\text{संचित काटा}}{\text{एकुण नाणेफेक संख्या}}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	20	20	7	7	$\frac{7}{20}$	$\frac{20-7}{20} = \frac{13}{20}$
2	20	40	14	21	$\frac{21}{40}$	$\frac{40-21}{40} = \frac{19}{40}$
3	20	60				
4	20	80				
5	20	100				
6	.....	....				
7	....	....				

जेव्हा नाणेफेकची एकुण संख्या वाढेल तेव्हा 6 आणि 7 मधील अपुर्णांकाच्या किंमती विषयी काय घडते? छापा आणि काटा मिळविण्याची संभाव्यताची किंमत एकमेकांच्या जवळ येत आहेत असे तुम्हाला दिसत आहे का?

2. या कृतीत सुध्दा आपण 3-4 विद्यार्थ्यांच्या गटात कार्य करु शकतो. प्रत्येक गटात एक विद्यार्थी 30 वेळा फासा फेकल. इतर विद्यार्थी त्या माहितीची नोंद खालील तक्त्यात करेल. सर्व गटांनी सारख्या प्रकारचा फासा वापरावे.

फासे फेकण्याच्या वेळा	या निष्पत्ती कित्येकदा आल्या					
	1	2	3	4	5	6
30						

सर्व गटाच्या माहितीचा वापर करुन खालील तक्ता पुर्ण करा.

गट(S)	1 ही संख्या आलेल्या वेळा	फासा फेकण्याच्या एकुण वेळा	$\frac{\text{1 ही संख्या आलेल्या वेळा}}{\text{फासा फेकण्याच्या एकुण वेळा}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
1^{st}			
$1^{st}+2^{nd}$			
$1^{st}+2^{nd}+3^{rd}$			
$1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}$			
$1^{st}+2^{nd}+3^{rd}+4^{th}+5^{th}$			

फासे फेकण्याच्या संख्या वाढल्या तर तुमच्या काय निरिक्षणास आले? स्तंभ(4) मधील अपुर्णांक $\frac{1}{6}$ च्या जवळ येत आहेत. वरील प्रयोग 1 निष्पत्ती येण्यासाठी केले. 2 आणि 5 निष्पत्ती येण्यासाठी असेच सारखे तपासणी करा.

स्तंभ (4) मध्ये तुम्ही मिळवलेल्या अपुर्णांक किंमती विषयी तुम्ही कोणता निष्कर्ष काढु शकाल? फासे फेकल्यावर 1,2 आणि 5 संख्या मिळवण्याच्या संभाव्यतांशी त्याची तुलना करा.

3. जर दोन नाणे आपण एकाच वेळी नाणेफेक केले तर काय घडते? दोन्ही नाणे एकतर छापा नाहीतर काटा किंवा एक छापा आणि दुसरे काटा दाखवेल. या तीन्ही घडण्याची संभाव्यता सारखी आहे. हे गट कृती करतांना या विषयी विचार करा.

प्रत्येक गटात 4 विद्यार्थी घेऊन वर्गाला गटामध्ये विभागा. प्रत्येक गटाला दोन नाणे द्या. नाण्याची सारखी मुद्रा आणि नाण्याचा सारखा प्रकार असण्याची आवश्यकता आहे. प्रत्येक गट दोन्ही नाणी एकाच वेळी 20 वेळा नाणेफेक करावे आणि निरिक्षणाची नोंद तक्त्यात करा.

दोन नाणे नाणेफेक केलेल्या वेळा	छापा न आलेल्या वेळाची संख्या	एक छापा आलेल्या वेळा	दोन छापा आलेल्या वेळा
20			

सर्व गटांनी आता संचित तक्ता तयार करा

गट(s)	2 नाणे नाणेफेके केलेल्या वेळाची संख्या	छापा न आलेल्या वेळा	एक छापा आलेल्या वेळा	दोन छापा आलेल्या वेळा
1st				
1st + 2nd				
1st + 2nd + 3rd				
1st + 2nd + 3rd + 4th				
....				

छापा न आलेल्या वेळाशी दोन वेळा नाणेफेक केलेल्या वेळांचा गुणोत्तर आता आपल्याला माहित करायचे आहे. एक छापा आणि दोन छापा घटनासाठी सुध्दा असेच करा.

खालील तक्ता भरा.

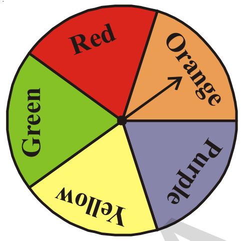
गट(s)	$\frac{\text{छापा नसलेल्या वेळा}}{\text{एकुण नाणेफेकच्या वेळा}}$	$\frac{\text{एक छापा आलेल्या वेळा}}{\text{एकुण नाणेफेकच्या वेळा}}$	$\frac{\text{दोन छापा आलेल्या वेळा}}{\text{एकुण नाणेफेकच्या वेळा}}$
(1)	(2)	(3)	(4)
गट 1 st			
गट 1 + 2 nd			
गट 1 + 2 + 3 rd			
गट 1 + 2 + 3 + 4 th			
....			

नाणेफेकची संख्या जशी वाढेल स्तंभ 2,3 आणि 4 मधील किंमती अनुक्रमे 0.25, 0.5 आणि 0.25 जवळ जवळ पोहचेल.

उदाहरण-3: एक चक्र ला 1000 वेळा फिरविले आणि निष्पत्तीची वारंवारता खालील तक्त्यात नोंद केली.

निष्पत्ती	लाल	नारंगी	जांभळा	पिवळा	हिरवा
वारंवारता	185	195	210	206	204

माहित करा (a) चक्रात तुम्ही पाहिलेल्या शक्य निष्पत्तीची यादी करा. (b) प्रत्येक घटनाची संभाव्यता मोजणी करा.(c) प्रत्येंक निष्पत्तीचे चक्र फिरलेल्या एकुण वेळाशी गुणोत्तर माहित करा. (तक्ता वापरा)



सोडवणुक:

(a) शक्य निष्पत्ती 5 आहेत. ते लाल, नांरगी, जांभळा, पिवळा, आणि हिरवा होत. येथे चक्रात 5 ही रंगानी सारखी जागा व्यापलेली आहे. ते सर्व समान संधीचे आहेत.

(b) समजा प्रत्येक घटनेच्या संभाव्यतेची मोजणी

$$P(\text{लाल}) = \frac{\text{लाल ची अनुकुल निष्पत्ती}}{\text{शक्य निष्पत्तीची एकुण संख्या}}$$

$$= \frac{1}{5} = 0.2.$$

याच प्रमाणे

P(नारंगी), P(जांभळा), P(पिवळा) आणि P(हिरवा) ची सुध्दा $\frac{1}{5}$ किंवा 0.2 आहे.

(c) प्रयोगावरुन तक्त्यात नोंद केलेली वारंवारता

$$P(\text{लाल}) \text{ लालचे गुणोत्तर} = \frac{\text{वरील प्रयोगात लाल च्या निष्पत्तीची संख्या}}{\text{चक्रला फिरवलेल्या वेळाची संख्या}}$$

$$= \frac{185}{1000} = 0.185$$

याच प्रमाणे नांरगी, जांभळा, पिवळा आणि हिरवा साठी संबंधीत गुणोत्तर अनुक्रमे 0.195, 0.210, 0.206 आणि 0. 204 असे आपण माहित करु शकतो.

प्रत्येक गुणोत्तराचे अंदाजे आपण (b)मध्ये मिळविलेल्या संभाव्यतेच्या एवेढे आहे. [म्हणजेच प्रयोग करण्याच्या अगोदर]

उदाहरण-4: एका सिनेमा घरात सिनेमा पाहयाला आलेल्या (प्रेक्षक) लोकांचे वय खालील तक्त्यात दिलेले आहे. प्रत्येक व्यक्तीला एक क्रम संख्या दिलेली आहे. बक्षीसासाठी त्या दिलेल्या क्रम संख्येतुन एक संख्येची अनिर्बंध्द निवड करण्यात आली. तर आता प्रत्येक घटनाच्या संभाव्यतेची माहित करा.

वय	**पुरुष**	**स्त्री**
2वर्षाच्या आतील	3	5
3 - 10 वर्ष	24	35
11 - 16 वर्ष	42	53
17 - 40 वर्ष	121	97
41- 60 वर्ष	51	43
60च्या वरचे	18	13

एकुण प्रेक्षकांची संख्या : 505

प्रत्येक घटनाचे संभाव्यता माहित करा.

a) 10 वर्ष किंवा त्याच्या पेक्षा कमी वय असलेल्या प्रेक्षकांची संभाव्यता

सोडवणुक:

10 वर्ष किंवा त्याच्या पेक्षा कमी वय असलेले प्रेक्षक $= 24 + 35 + 5 + 3 = 67$

एकुण लोकांची संख्या $= 505$

P(प्रेक्षांकाचे वय ≤ 10 वर्ष) $= \frac{67}{505}$

b) 16 वर्ष किंवा त्याच्या पेक्षा कमी वय असलेल्या स्त्री प्रेक्षकांची संभाव्यता

सोडवणुक: 16 वर्ष किंवा त्याच्या पेक्षा कमी वय असलेले स्त्री प्रेक्षक$= 53 + 35 + 5 = 93$

P(स्त्री प्रेक्षांकाचे वय ≤ 16 वर्ष) $= 93/505$

c) 17 वर्ष किंवा त्याच्या पेक्षा जास्त वय असलेल्या पुरुष प्रेक्षकांची संभाव्यता

सोडवणुक: 17 वर्ष किंवा त्याच्या पेक्षा जास्त वय असलेले पुरुष प्रेक्षक $= 121 + 51 + 18 = 190$

P(पुरुष प्रेक्षांकाचे वय ≥ 17 वर्ष) $= \frac{190}{505} = \frac{38}{101}$

d) 40 वर्ष वयाच्या वरच्या प्रेक्षकांची संभाव्यता

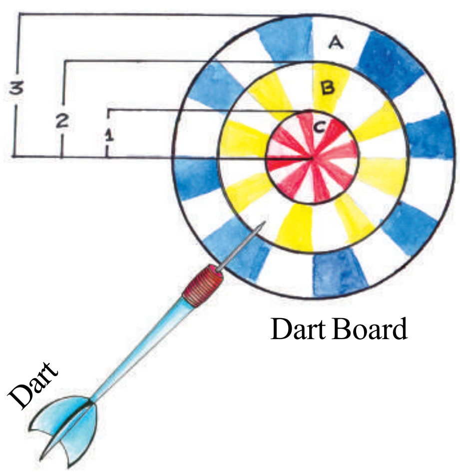
सोडवणुक: 40 वर्ष वयाच्या वरचे प्रेक्षक $= 51+43+18+ 13 = 125$

P(प्रेक्षांकाचे वय > 40 वर्ष) $= \frac{125}{505} = \frac{25}{101}$

e) सिनेमा पाहणाऱ्या व्यक्तीमध्ये पुरुष प्रेक्षक नसण्याची संभाव्यता

सोडवणुक: पुरुष नसलेले प्रेक्षकांची संख्या $= 5 + 35 + 53 + 97 + 43 + 13 = 246$

P(पुरुष नसलेल्या प्रेक्षकाची संख्या) $= \frac{246}{505}$



उदाहरण-5: आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे, 1 से.मी. 2 से.मी. आणि 3 से.मी.त्रिज्या असलेल्या एक केंद्रीय वर्तुळ हे डार्ट बोर्ड वर आहेत. तिन ही वर्तुळावर डार्ट मारण्याची समान संधी आहे.

तर A क्षेत्रावर डार्ट मारण्याची संभाव्यता माहित करा. (बाहेरील रिंग)

सोडवणुक: येथेAक्षेत्रावर डार्ट मारणे हे एक घटना आहे. 3 से.मी. असलेल्या वर्तुळाकार क्षेत्राचे एकुण क्षेत्रफळ $= \pi(3)^2$

A वर्तुळाकार क्षेत्राचे क्षेत्रफळ (म्हणजेच A रिंग) = $\pi(3)^2 - \pi(2)^2$

डार्ट बोर्डवर A क्षेत्रमध्ये डार्ट मारण्याची संभाव्यता

$$P(A) = \frac{\text{A वर्तुळाकार क्षेत्राचे क्षेत्रफळ}}{\text{एकुण क्षेत्रफळ}}$$

$$= \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2}$$

$$= \frac{5}{9} = \frac{5}{9}$$

> आठवण ठेवा
>
> वर्तुळाचे क्षेत्रफळ πr^2 आहे
>
> रिंगचे क्षेत्रफळ = $\pi R^2 - \pi r^2$

प्रयत्न करा.

उदाहरण 5 मध्ये दिलेल्या आकृती वरुन

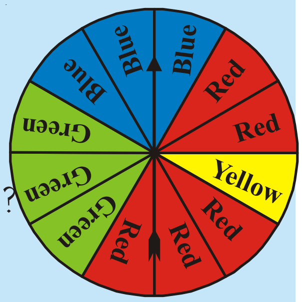
1. B वर्तुळाकार क्षेत्रामध्ये डार्ट मारण्याची संभाव्यता माहित करा(म्हणजेच रिंग B).
2. C वर्तुळाकार क्षेत्रामध्ये डार्ट मारण्याची संभाव्यतेची टक्केवारी गणना न करता माहित करा. (म्हणजेच रिंग C).

14.3 दैनंदिन जिवनात संभाव्यताचा वापर

- मागील बरेच वर्षापासुन गोळा केलेल्या माहितीचे निरिक्षण करुन हवामान विभाग हवामानाचा अंदाज लावतो.
- विमा हप्ता ठरविण्यासाठी विमा कंपनी अपघातात जख्मी होणारे लोक किंवा मरणाऱ्यांची संभाव्यताची गणना करते.
- निवडणुक झाल्यानंतर"एक्झीट पोल" घेतल्या जाते. या मध्ये मत टाकलेल्या लोकांना विचारल्या जाते ते केाणत्या पक्षाला मत केले. यावरुन प्रत्येक उमेदवाराच्या जिंकण्याच्या संधीची कल्पना येते आणि त्यावरुन अंदाज बनवला जातो.

अभ्यास - 14.1

1. फास्याला 1 ते 6 संख्या लिहुन असलेले सहा बाजु असतात. ते फेकल्यानंतर समोरच्या बाजुवर जी संख्या येते त्याची नोंद केली. जेव्हा एक अनिर्बध्द प्रयत्न म्हणुन समजले.
   a) शक्य निष्पत्ती कोणत्या आहेत?
   b) ते सर्व समान संधीचे आहेत का? का?
   c) समोरच्या बाजुवर संयुक्त संख्या येण्याची संभाव्यता माहित करा.
2. एक नाणे शंभर नाणेफेक केले आणि खालील निष्पत्तीची नोंद केली.
   प्रयोगावरुन, छापा:45 वेळा, काटा:55 वेळा
   a) प्रत्येक निष्पत्तीची संभाव्यता गणना करा.
   b) सर्व निष्पत्तीच्या संभाव्यतेची बेरीज माहित करा.
3. आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे चक्रात चार रंग आहेत. जेव्हां हे एकदा फिरवले तर माहित करा



   a) छडी कोणत्या रंगावर थांबण्याची जास्त संभावना आहे?
   b) छडी कोणत्या रंगावर थांबण्याची कमी संभावना आहे?
   c) छडी कोणत्या रंगावर थांबण्याची समान संभावना आहे?
   d) छडी पांढऱ्या रंगावर थांबण्याची किती संधी आहे?
   e) असा कोणता रंग आहे का ज्यावर छडी निश्चित थांबेल?
4. एका पिशवित पाच हिरव्या कांचेच्या गोट्या, 3 निळ्या कांचेच्या गोट्या, 2 लाल कांचेच्या गोट्या आणि 2 पिवळ्या काचेच्या गोट्या आहेत. अनिर्बध्द पध्दतीने एक काचेची गोळी त्यातुन काढली.
   a) चार वेगवेगळ्या रंगाचे निष्पत्ती समान संभावनेचे आहेत का? स्पष्ट करा?
   b) प्रत्येक रंगाच्या काचेची गोटी बाहेर काढण्याची संभाव्यता माहित करा? म्हणजेच P(हिरवा), P(निळा), P(लाल) आणि P(पिवळा)
   c) त्याच्या संभाव्यतेची बेरीज माहित करा.
5. इंग्रजी मुळ अक्षरातुन एका अक्षराची निवड करा. खालील अक्षराच्या संभाव्यतेची माहिती करा.
   a) स्वर b) P च्या नंतर येणारे अक्षर
   c) स्वर किंवा व्यंजन d) स्वर नसलेले

6. गव्हाच्या पिठाचे 11 पिशव्या आहेत. प्रत्येक पिशवीवर 5 कि.ग्र. ची नोंद केलेली आहे पण वास्तविक मध्ये त्यात खालील वजनाचे पिठ आहे.

4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00

यामधुन 5 कि.ग्र. पेक्षा जास्त असलेल्या पिशवीच्या निवडण्याची संभावता माहित करा.

7. वय आणि अपघात याचा संबंध माहित करण्यासाठी एका विशिष्ट शहरातुन विमा कंपणी ने 2000 वाहन चालकाची अनिर्बध निवड केली(म्हणजेच कोणत्याही चालकाला प्रधान्यता ने देता) खालील तक्त्यात माहिती दिलेली आहे.

चालाकाचे वय (वर्षामध्ये)	एका वर्षात झालेले अपघात				3 अपघात पेक्षा जास्त
	0	**1**	**2**	**3**	
18-29	440	160	110	61	35
30- 50	505	125	60	22	18
Over 50	360	45	35	15	9

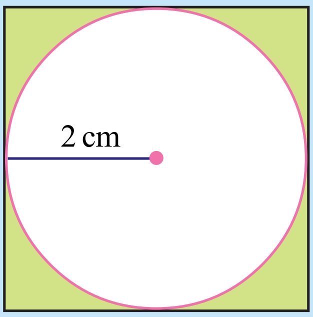
शहरातुन चालकाच्या अनिर्बध निवडी साठी खालील घटना ची संभाव्यता माहित करा.

(i) 18-29 वर्ष वयोगटातील चालक आणि एका वर्षामध्ये अगदी 3 अपघात केलेले.

(ii) 30-50 वर्ष वयोगटातील चालक आणि एका वर्षामध्ये एक किंवा एक पेक्षा जास्त अपघात केलेले.

(iii) एका वर्षामध्ये अपघात न केलेले

8. अनिर्बध पणे एक डार्ट ला आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे चौरसाकार बोर्ड कडे फेकल्यास ती गडद केलेल्या भागला लागण्याची संभाव्यता किती?



($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या आणि टक्केवारी व्यक्त करा.)

आपण काय चर्चा केलो?

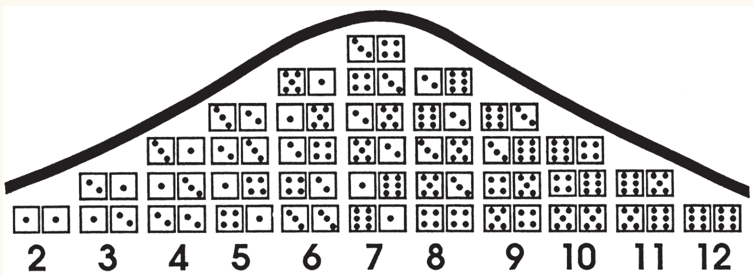
- संधी आणि निकाल दाखविण्यासाठी जास्त संभवना, संधी नाही, दैनंदीन जिवनात समान संभावना या सारख्या शब्द वापरण्याची पध्दत आहे.
- असे काही निश्चित प्रयोग आहेत ज्यांच्या निष्पत्ती समान संधी घडण्याचे आहेत. अशा प्रयोगाच्या निष्पत्तीनां समान संभावनाच्या निष्पत्ती म्हणतात.
- घटना ही ठराविक निष्पत्ती किंवा प्रयोगाच्या काही ठराविक निष्पत्तीचा समुह आहे.
- काही अनिर्बध प्रयोगात सर्व निष्पत्ती घडण्याची समान संधी असते.
- जसे जसे प्रयत्नांची संख्या वाढते तस तसे सर्व समान संधीच्या निष्पत्ती एकमेकांच्या जवळ येतात.
- A ची संभाव्यता

$$P(A) = \frac{\text{अनुकुल निष्पत्तीची संख्या.}}{\text{एकुण शक्य निष्पत्तीची संख्या}}$$

- घटना ची निश्चित संभाव्यता=1
- घटना ची अशक्य संभाव्यता=0
- घटना ची संभाव्यता केव्हांही 0 आणि 1 च्या मधात असते.(0 आणि 1 ला धरुन)

तुम्हाला माहित आहे काय?

जेव्हा दोन फासे फेकतो तर 36 शक्य निष्पत्ती येतात ते खालील आकृतीत दाखविलेले आहे. वेगवेगळ्या शक्य संख्याच्या निष्पत्ती ची वांरवारता कशी आहे याची नोंद करा ते मजेदार आहे(12 तुन 2)



या आकृतीत गाशीयन वक्र असे म्हणतात. 19 व्या शतकात प्रसिध्द गणितशास्त्रज्ञ फ्रेडीक ग्रॉस याचे प्रतिपादन केले

15 गणितामध्ये सिध्दता

15.1 प्रस्तावना

आपण आपल्या दैनंनदिन जिवणात अनेक विधानाच्या संपर्कात येतो. आपण काही विधानाची किंमत ठरवितो. आपण गृहीत धरलेले काही विधाने बरोबर असतात आणि काही काढुन टाकतो. काही विधाने यांच्या बद्दल आपणास खात्री नसते. आपण यांना न्याय कसे देतो? एकाद्या संदर्भात जर ते विधान कर्ज किंवा बाकीच्या कलहाचे आहे जेव्हा तुम्हाला वाटते की बॉके ने पैसे द्यावे तेव्हा तुम्हाला पुरावा म्हणुन कागदपत्र उपस्थित करण्याची गरज आहे. ते नसेल तर लोक तुम्हाला विश्वास करणार नाहीत. जर आपण काळजीपुर्वक विचार केला तर आपल्या दैनंनदिन जिवणात आपणास सिध्द करण्याची गरज आहे. जर विधान चुक किंवा बरोबर आहे. आपल्या दैनंदिन च्या संभाषणात आपण काही वेळी गृहीत धरत नाहीत. काही वेळी विधानांना आपण परिक्षा केल्या शिवाय त्याला करीत नाहीत. कोणत्याही प्रकारे हे गणितात स्वीकारले जात नाही.खालील गृहीत धरा.

1. सुर्य पुर्वेस उगवतो
2. $3 + 2 = 5$
3. अमेरीकेची राजधानी न्युयार्क आहे.
4. $4 > 8$
5. तुम्हाला किती वंशज आहेत?
6. गोवाची फुटबाल संघ बंगाल पेक्षा छान आहे.
7. आयतात चार सममीती रेषा आहे.
8. $x + 2 = 7$
9. कृपया आत या.
10. सहा बाजु असलेले फासे फेकले असता. दोन क्रमवार 6 येण्याची संभाव्यता आहे.
11. आपण कसे आहात?
12. सुर्य हा स्थिर नाही परंतु खुप उंची वर नेहमी गतीशिल आहे.
13. $x < y$
14. तुम्ही कुठे राहता?

वर दिलेल्या वाक्यात तुम्हाला असे आढळुन आले की या काही वाक्यापैकी काही चुक आहेत हे आपणास माहित आहे जसे की, उदाहरणार्थ $4>8$ त्याच प्रमाणे आता न्युयार्क ही अमेरीकेची राजधानी नाही. काही आपल्या आताच्या ज्ञानावरुन बरोबर आहेत. त्यामध्ये

सुर्य पुर्वेस उगवतो ....

सुर्य स्थिर नाही..................

याच्या अतिरिक्त काही शक्य वाक्य काही माहित असलेल्या संदर्भात बरोबर आहेत परंतु काही दुसऱ्या संदर्भात बरोबर नाहीत. उदाहरणार्थ $x + 2 = 7$ हे सत्य आहे फक्त जेव्हा $x = 5$ आणि$x < y$ हे सत्य आहे जेव्हो x आणि y च्या किंमती जेथे x ,y पेक्षा लहान आहे.

काही दुसऱ्या वाक्याकडे पाहा जे की, स्पष्टपणे चुक आहेत किंवा स्पष्टपणे बरोबर आहेत. ते विधान आहेत. आपण म्हणतो की, हे वाक्य काही पध्दतीवर आधारीत आहेत. आपणास काही संबंध नाही की, ते कोणत्या पध्दतीव्दारे चुक किंवा बरोबर विधान आहे.

यांच्या बद्दल विचार करा.

1. कृपया या सुचनेला टाळा
2. मी बनवित असलेले विधान चुक आहे.
3. या वाक्यात काही शब्द आहेत.
4. तुम्हाला चंद्रावर पाणी सापडेल.

तुम्ही सांगु शकता का, ही वाक्य चुक किंवा बरोबर आहेत? यांना तपासणी करण्यासाठी कोणता मार्ग आहे का जे चुक किंवा बरोबर आहेत.

पहिल्या वाक्याकडे पहा, जर तुम्ही सुचनेला टाळले तर तुम्ही ते करता कारण ते तुम्हास करण्याकरीता सांगते. जर तुम्ही या नोटीसला टाळले तर तुम्ही त्या नोटीसवर काही एकाग्रता ठेवली आहे. म्हणुन तुम्ही त्याचे पालन करु शकत नाही आणि हे सुचना आहे समजुन आपण ते एक किंवा बरोबर स्केलपट्टी वर आहे. याचे निवड करता येत नाही दुसरे आणि तिसरे वाक्य त्यांच्याच बद्दल सांगत आहेत. 4 थ्या वाक्यात काही शब्द आहेत जे की, फक्त समानता किंवा शक्यता बद्दल सांगते. म्हणुनच ते दोन्ही बाजुने काम करते.

जे वाक्य स्वत:हा बद्दल सांगतात आणि शक्यते बद्दल सांगणारे वाक्य हे वाक्य नाहीत.

हे करा

आणखी 5 वाक्य तयार करा आणि तपासणी करा की जे चुक किंवा बरोबर आहेत कारणे द्या.

15.2 गणितीय विधाने:

आपण खुप वाक्यांना अनंत रुपात लिहु शकतो. तुम्ही काही प्रकारच्या वाक्याबद्दल विचार करु शकतो. तुम्ही बोलत असलेले सर्व वाक्य मोजु शकता का? नाही सर्व नाही कसे तरी चुक किंवा बरोबर पध्दतीवर वाक्यांना न्याय करु शकतो. उदाहरणार्थ गृहीत धरा कृपया आत या. तुम्ही कुठे राहता? अशाच प्रकारे बरेचशे वाक्य खुप मोठ्या संख्येत राहु शकतात.

हे सर्व वाक्य विधान नाहीत. फक्त ते वाक्य जे की, चुक किंवा बरोबर आहेत. परंतु दोन्हीही नाहीत. हे गणितीय विधानाला बरोबर आहे गणितीय विधान दोन्ही राहु शकत नाही. गणितात वाक्य स्विकारले जाते जर ते फक्त चुक आहे किंवा बरोबर आहे. खालील वाक्य गृहीत धरा.

1. 3 ही मुळ संख्या आहे.
2. दोन विषम संख्याचा गुणाकार सम आहे.
3. कोणत्याही वास्तविक संख्याला x; $4x + x = 5x$
4. पृथ्वीला चंद्र हा एक उपगृह आहे.
5. राजेश एक चांगला चालक आहे.
6. भास्कराने "लिलावती" नावाचे पुस्तक लिहले.
7. सर्व सम संख्या संमिश्र आहेत.
8. समभुज चौकोन हा चौरस आहे.
9. $x > 7$.
10. 4 आणि 5 हे संबंधीत मुळ संख्या आहेत.

11. चांदीची माशी चादीने तयार केली आहे   12. मानव हा पृथ्वीवर राज करणारा आहे.

13. कोणत्याही वास्तविक संख्येसाठी x, $2x > x$.   14. क्युबाची राजधानी हावाना आहे.

यापैकी कोणते विधान गणितीय आहेत आणि कोणते गणितीय विधान नाहीत?

15.3 विधानाची पडताळणी करणे:

वरील पैकी काही वाक्यांना गृहीत धरा आणि खालील प्रमाणे त्याच्यावर चर्चा करा.

उदाहरण-1. आपण दाखवु शकतो की, (1) हे मुळ संख्या व्याख्या अनुसार बरोबर आहे.

वरील यादीमधुन कोणते वाक्य या प्रकारचे आहेत जे की, गणितीय पध्दतीने सिध्द करु शकतो? (सिध्द करण्याचा प्रयत्न करा)

उदाहरण-2. "दोन विषम संख्याचा गुणाकार सम असतो". गृहीत धरा की, 3 आणि 5 ही विषम संख्या आहेत. त्यांचा गुणाकार 15 आहे जो की, सम नाही.

अशारितीने हे विधान चुकीचे आहे. म्हणुन एका उदाहरणाव्दारे आपण दाखविले आहेत. येथे आपण उदाहरणाच्या साहय्याने विधानांची पडताळणी करु शकतो. तेच विधान आहे किंवा नाही सांगते. अशा प्रकारच्या विधानाला आपण उपसंर्ग विधान म्हणतो.

प्रयत्न करा

वरिल विधानापैकी कोणत्या विधानाला उपसंर्ग उदाहरण देऊन तपासणी करु शकता?

उदाहरण-3. वरील सर्व वाक्यातुन काही सारखे आहेत. **"मानव पृथ्वीचा अधीपती आहे"** किंवा **"राजेश एक चांगला चालक आहे."**

ही वाक्य संणिग्ध आहेत. जसे पृथ्वीवर आधिपत्य गाजविणे याचा अर्थ असा निश्चित नाही. त्याच प्रमाणे एका उत्त्कृष्ठ चालकाची व्याख्या निश्चितपणें करता येत नाही.

म्हणुन आपणास ओळखुन घ्यावे लागते की, गणितीय विधान प्रत्येकाकडुन एकाच प्रमाणे समजुन घेतले पाहिजे.

उदाहरण-4. दुसरे काही वाक्य गृहीत धरा

पृथ्वीला एकच उपगृह (चंद्र) आहे.

भास्करोन "लिलावती" नावाचे पुस्तक लिहले.

या दोन्ही बद्दल तुम्ही विचार करा की, यांना तुम्ही विधान म्हणुन कसे गृहीत धारणार आहेत

हे संणिग्ध विधान नाहीत परंतु तपासणी करण्याची गरज आहे. त्यांना काही निरिक्षण किंवा आधाराची गरज आहे. त्या अतिरिक्त या विधानाची तपासणी पुर्व निकालाच्या आधारावर काढता येत नाही.पहिल्या वाक्यात सर्व जी पध्दतीच्या निरिक्षणाची आवश्यकता आहे. दुसरे वाक्य वेगळे कागदपत्र संदर्भ किंवा दुसरे नोंदणीची ची गरज आहे.

गणितीय विधानाचे यांच्या ऐवजी भिन्न स्वभाव असतात. त्यांना पाहुन किंवा काही आधारावर आपण त्यांना सिध्द करता येत नाही. त्यांना एका उदाहरणात माहित करुन असिध्द

करता येते. विधानामध्ये वास्तविक संख्यासाठी $2x > x$आपण घेऊ शकतो $x = -1$ किंवा $-\frac{1}{2}$....
आणि नकारात्मक उदारहण देऊन विधानाला असिध्द करा. तुम्हाला देखील आढळुन आले असेल की, $2x > x$ हे बरोबर आहे जेव्हा x ची एक अट आहे ते म्हणजे x हा N चा संच आहे.

उदाहरण-5. खालील विधानांना योग्य अट घेऊन पुन्हा सांगा जेणे करुन ते बरोबर विधान आहेत.

i. प्रत्येक x वास्तविक संख्येसाठी $3x > x$.

ii. प्रत्येक x वास्तविक संख्येसाठी $x^2 \geq x$.

iii. जर एक संख्याला 2 ने भागली तर तुम्हाला नेहमी त्या संख्याचा अर्धा मिळेल.

iv. एका वर्तुळाच्या जिवा एका बिदुजवळ तयार झालेला कोन 90° असते.

v. जर एका चौकोनाच्या सर्व बाजु समान असतील तर ते चौरस होते.

सोडवणुक :

i. जर $x > 0$ जर $3x > x$.

ii. जर $x \leq 0$ किंवा $x \geq 1$ तर $x^2 \geq x$.

iii. जर तुम्ही शुन्याला सोडुन कोणत्याही संख्याला 2 ने भाग दिला तर तुम्हाला त्या संख्याचा अर्धा मिळेल.

iv. एका वर्तुळाच्या व्यासाने एका बिंदुजवळ तयार झालेल्या कोन 90° असते.

v. जर एका चौकोणाच्या सर्व बाजु आणि अंतर कोन समान असतील तर ते चौरस होते.

अभ्यास - 15.1

1. खालील वाक्य नेहमी बरोबर असतात किंवा नेहमी चुक असतात किंवा दोन्हीही नाहीत. तुमच्या प्रश्नांला स्पष्ट करा.

   i. एका महिण्यात 27 दिवस आहेत.
   ii. मकरसंक्राती शुक्रवारी येते.
   iii. हैद्राबाद मध्ये तापमान 2°C आहे.
   iv. पृथ्वी हे फक्त गृह आहे जेथे जिवमानआहे
   v. कुत्रे उडु शकतात.
   vi. फेब्रुवारी मध्यें फक्त 28 दिवस असतात.

2. खालील विधाने चुक किंवा बरोबर आहेत ते सांगा तुमच्या उत्तराची कारणे द्या.

   i. एका चौकोनाच्या अंतर कोनाची बेरीज 350° आहे.
   ii. प्रत्येक वास्तविक संख्येलाx, $x^2 \geq 0$.
   iii. समभुज चौकोन हा समांरत भुजचौकोन होतो
   iv.दोन सम संख्येची बेरीज सम असते.
   v. वर्ग संख्यांना दोन विषम संख्याची बेरजेत लिहता येतो.

3. खालील विधानांना योग्य अट घालुन पुन्हा सांगा. म्हणुन ते बरोबर विधान होईल.

   i. सर्व संख्यांना मुळ संख्याच्या अवयव दर्शविता येते.
   ii. वास्तविक संख्यांची दुप्पट नेहमी सम असते
   iii. प्रत्येक xसाठी $3x + 1 > 4$.
   iv. प्रत्येक x साठी $x^3 \geq 0$.
   v. प्रत्येक त्रिकोणात मध्यगा ही कोनाला दुभाजते.

4. एक योग्य नकारात्मक उदाहरण घेऊन असिध्द करा की, विधान $x^2 > y^2$ सर्व $x > y$ साठी

15.4 गणितीय युक्ती

आपण मानव नैसर्गिक रित्या खुप उत्सुक आहेत, ही उत्सुकता आपणास जगासोबत क्रियाशिल राहण्यास तयार करते. काय होते जर आपण यास ढकलले तर? काय होणार जर आपली बोट त्यामधुन आडकुन बसले तर? काय होते जेव्हा आपण वेगवेगळे इशारे करतो आणि भावणा प्रकट करतो? या प्रयोगापासुन आपण मानव जाती एक प्रकारचे भौतीक चित्र तयार करतो. सर्व साधारणपणे सर्व परिस्थितीच्या पध्दतीत आपण एक बद्दल पाहतो. ते म्हणजे अशा पासुन

काय होईल जर....? याला हे घडणार आहे तर

प्रयोग हा आपल्याला आलेले विचार यावर आधारीत आहे आणि विश्वामध्ये याच्या अगोदर आलेल्या आणि समजुन घेतलेल्या परिस्थिती वरुन घडते तयार करणे आणि तपासणी करणे एका सिध्दांताची हे सर्व एका खेळण्याच्या वेळाच्या नमुन्यावर आधारीत असलेल्या नमुन्याची कल्पना आहे. हे खालील नमुन्याचे पालन करते.

- काहीची निरिक्षण करा. निरिक्षणावर आधारीत काही संग्रह माहित मिळवा.
- निष्कर्ष काढा (सिध्दांत म्हणतात) जे की, निरिक्षणाचे नमुने समजावुन सांगतात.
- आणखी काही अपेक्षीत निरिक्षण घेऊन सिध्दांताची तपासणी करा.

म्हणुन, आपणास

- एक सिध्दांत म्हणजे एक विधान किंवा एक विचार जे एका श्रेणीत असलेल्या निरिक्षणा बद्दल समजावुन सांगते.

काही वेळी खालील निरिक्षणा एक सिध्दांताला स्पष्टपणे स्विकारला पाहिजे किंवा तिरस्कार केला पाहिजे.हे घडते जर एखाद्ये उलट निरिक्षण होते. साधारपणे आपण........ शब्द गणितामध्ये सिध्दांच्या ऐवजी आपण वापरतो. या दोन्ही मधील सारखेपणा आणि फरक आपण येणाऱ्या मोठ्या वर्गात शिकणार आहोत.

15.4.1 सिध्दतांची तपासणी गृहीत युक्तीला वापरुन करणे:

सिध्दतांच्या भोवताली असलेल्या सर्व विचारा मधील नेहमी अव्यवस्था असते तेच गणित आहे आणि तयार करणे आणि तपासणी करे हे विज्ञान आहे. हा खुप साधा आहे.

- गणित अनुमानाच्या युक्तीवर आधारीत आहे. एका स्पष्ट माहितीच्या संचापासुन विचारात्मक अनुमानिक करणे म्हणजे सिध्दता आहे.
- विज्ञान अनुमानिक पध्दतीवर आधारीत आहे. प्रयोगातील सत्यते वरुन त्याला शक्तीशाली केले जाते किंवा नकारले जाते.

विज्ञानामध्ये उत्तम होण्यासाठी तुम्हाला अनुमानिक युक्तीमध्ये चांगले होण्याची गरज आहे. जरी विद्वान अनुमानाच्या पध्दतीत असले तरी ते गणिततज्ञ राहवे अशी गरज नाही.

शेरलोक होमस आणि हरकुल्स पायरोट हे असे निपुन डिटेक्टीव आहेत. त्यांनी एका गुन्ह्याच्या घटनेपासुन घेतलेल्या आधारावरुन गोळा केलेली माहिती आणि नंतर सिध्दांताला साह्य करणाऱ्या विचारात्मक निष्कर्षाला आपण काढतो. जसे उदाहरणार्थ एका व्यक्ती M. गुन्हा करते ते या आधारांना सिध्दत पुर्ण करण्यासाठी पुरेशी माहीती घेऊन सिध्दंताच्या बाहेरील विषयावर देखील असलेली शंका देखील स्पष्ट करतील.

15.4.2 अनुमानिक व्युत्ती

मुख्य तर्कशुध्द उपकरणाला उपसंर्गाची सत्यता स्थापित करण्यासाठी वापरलेले विधान म्हणजेच अनुमानिक युत्ती आहे. अनुमानिक युत्ती बद्दल समजुन घेण्यासाठी चला आता एक कोडे तुमच्या साठी सोडु या.

तुम्हाला चार कार्ड दिले आहेत. प्रत्येक कार्डच्या एका बाजुस संख्या आणि दुसऱ्या बाजुस अक्षर छापले आहेत.

A	V	8	5

समजा तुम्हाला सांगीतले आहे की, हे कार्ड खालील नियमाचे पालन करते.

"जर एका कार्डच्या एका बाजुला विषम संख्या आहे तर त्याच्या दुसऱ्या बाजुला स्वर आहे" जर नियम सत्य आहे तर तुम्हाला कोणत्या कार्डला पलटुन पाहावे लागणार आहे. ज्याच्या वर सर्वात लहान संख्या आहे?

नक्कीच तुम्हाला एकच पर्याय आहे की, आपण सर्व कार्ड उलटुन पाहुन तपासणी करावी लागेल. तुम्ही लहान संख्या असलेले कार्ड उलटुन पाहण्याची तयारी करु शकता का?

निरिक्षण करा की, एक विधान असे सांगते की, जर एका कार्डच्या एका बाजुला विषम संख्या आहे तर दुसऱ्या बाजुला स्वर असतो. हे असे सांगत नाही की, कार्डच्या एका बाजुस जर स्वर असेल तर दुसऱ्या बाजुस विषम संख्या असलीच पाहिजे. ते होऊ शकते किंवा होऊ शकत नाही. नियम हे देखील सांगु शकत नाही की, जर कार्ड च्या एका बाजुला जर सम संख्या आहे.तर त्याच्या दुसऱ्या बाजुस व्यंजन असले पाहिजे. हे होऊ शकते किंवा होऊ शकत नाही.

म्हणुन आपणास 'A' कार्डला उलटुन पाहवे लागते का? नाही, जर त्याच्या दुसऱ्या बाजुस सम किंवा विषम संख्या आहे तर नियम याला ही लागु होतो.

परंतु तुम्हाला V आणि 5 ला पलटुन पाहावे लागते. जर V च्या दुसऱ्या बाजुस विषम संख्या आहेत तर नियमाचे उल्लघंन होईल. त्याच प्रमाणे जर 5 च्या दुसऱ्या बाजुस व्यंजन असेल तर तरी नियमाचे उल्लघंन होईल.

अशा प्रकारची युत्ती आपण जी कोडे सोडविण्यासाठी वापरली आहे त्याला अनुमानिक युत्ती म्हणतात. याला अनुमान असे म्हणतात. कारण आपण येथे पोहचतो (ते म्हणजे माहित करणे किंवा संदर्भ) की निकाल किंवा विधान एका अगोदरच्या युत्ती पुर्ण विधानाला वापरुन स्थापना केली आहे. उदाहणार्थ वरील कोड्यात एका श्रेणीतील युत्तीपुर्ण वादानंतर आपण एका निष्कर्षाला पोहचलो की आपणास फक्त V किंवा 5 पलटुन ठेवण्याची गरज आहे.

अनुमानिकयुत्ती एका विशिष्ट विधानाची सत्यता माहित करण्यासाठी आपण एका निष्कर्षाला येण्यासाठी मदत होते. कारण हा एक विशेष संदर्भ आहे की, सर्व साधारण विधान नेहमी सत्य असते असे ओळखले जाते. उदा. एकाच वेळा जर आपण सिध्द केले की, निष्कर्षाला येतो न मोजता 56702×19992 हे सत्य आहे कारण 56702 आणि 19992 हे सम आहेत.

अनुमानिक कारणाची काही दुसरी उदाहरणे गृहीत धरा.

i. जर एक संख्या 0 ने संपत आहे तर ती संख्या 5 ने पुर्ण भाग जाते 30 हे 0 ने संपते.
वरील दोन विधानावरुन आपण सिध्द करु शकतो की, 30 ही संख्या 5 ने पुर्ण भागीली जाते कारण हे दिले आहे की, जी संख्या 0 ने समाप्त होते ती 5 ने पुर्ण भाग जाते.

ii. काही गितकार कवि असतात. सर्व संगीतकार कवी असतात.

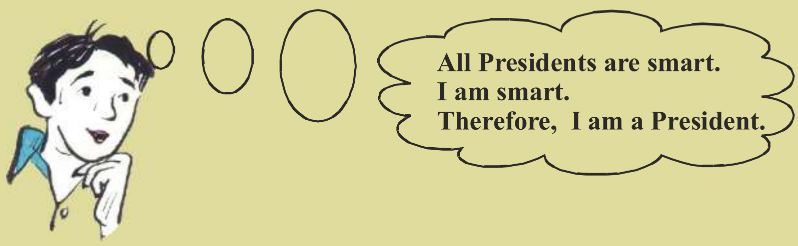
येथे दोन विधानावर आधारीत सिध्दता चुक आहे. (कारण काय?) सर्व संगीतकार कवी असतात (चुक) कारण आपणास त्याबद्दल खात्री नाही. तीन शक्यता आहेत (i) सर्व संगीतकार कवी असु शकतात. (ii) काहीजन कवि असु शकतात किंवा (iii) कोणतेही संगीतकार कवि नसतात.

तुम्ही एका निष्कर्शाला येऊ शकता की, जर निश्चित विधान हे युक्ती मध्ये आले तर अशा प्रकारची अनुमानिक युक्ती आपण गणितात वापरतो. जसे एका रेषीय कोनाची बेरीज 180° असते. नंतर फक्त त्रिकोणामध्ये कोनाची बेरीज180° आहे. अशारीतीने जर आपण दशांश संख्यामान पध्दती 5 लिहण्यासाठी वापरतो. जर आपण व्दिमानपध्दती वापरलो तर आपण त्या राशिला 101 व्दारे दर्शवितो.

दुर्देवाने आपण आपल्या दैनंदिन जिवणात बरोबर युक्ती वापरत नाही. आपण बरेचशा निष्कर्षाला चुकीच्या युक्तीच्या आधार घेऊन येतो. उदा. जर तुमच्या मित्र तुमच्याशी एक दिवस बोलत नाही तर तुम्ही एका निष्कर्षाला येता की, तो रागात आहे. हे देखील सत्य असु शकते. जर ती माझ्या सोबत बोलणार नाही. हे देखील सत्य आहे की, ती घाईत आणि ती माझ्याशी बोलत नाही. तुम्ही तुमच्या दैनंदिन जिवणातील अशाप्रकारच्या निष्कर्षाला का तपासणी करुन पाहत नाही आणि पहा की, ते योग्य किंवा चुकीच्या युक्तीवर आधारीत आहेत.

अभ्यास - 15.2

1. खालील उत्तर देण्यासाठी अनुमानिक युक्तीची वापर करा.
   i. मानव जाती ही नाशवान आहे. जिवण हा एका मानव आहे. या दोन विधानावर आधारीत तुम्ही जिवनाबद्दल काय निष्कर्ष काढु शकता?
   ii. सर्व तेलुगु लोक भारतीय आहेत. X हा एक भारतीय आहे. तुम्ही निष्कर्ष काढु शकता का? X हा तेलुगु लोकांशी संबंधीत आहे.
   iii. मार्टीग्यच्या जीभ लाल आहेत. गुलाग हा मार्टीन आहे. या दोन विधानाच्या आधारावर तुम्ही गुलाग बद्दलचा काय निष्कर्ष काढु शकता?
   iv. राजुने खाली काढलेल्या कार्टुनमध्ये त्याची काय युक्ती आहे.



2. पुन्हा एकदा तुम्हाला चार कार्ड दिले आहेत. प्रत्येक कार्डाच्या एका बाजुवर संख्या आणि दुसऱ्या बाजुवर अक्षर छापले आहेत. खालील नियमाबरोबर आहे का ओळखण्यासाठी कोणते दोन कार्ड तुम्हाला पलटी मारायची आहे.

" जर एका कार्डच्या एका बाजुला स्वर आहेत तर त्याच्या दुसऱ्या बाजुला विषम आहेत"

B	3	U	8

3. या कोड्या बद्दल विचार करा. या चौरसामधुन एक संख्या निवडायची असेल तर कशाची गरज आहे. खालील पैकी चार सुगावा बरोबर आहेत. परंतु संख्या माहित करण्यासाठी काहीच मदत होत नाही. येथे आठ सुगावा जे आपणास वापरायचे आहेत.

a. ती संख्या 9 पेक्षा मोठी आहे.

b. ती संख्या10 चे गुणक नाही.

c. ती संख्या 7 चे गुणक नाही.

d. संख्या विषम आहे.

e. संख्या 11 चा गुणक आहे.

f. संख्या 200 पेक्षा लहान आहे.

g. त्या संख्येचे एकम स्थान दहम स्थानापेक्षा मोठे आहे.

h. त्याचे दहम स्थान विषम आहे.

तर संख्या कोणती आहे?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

तुम्ही वेगळे करु शकता का जे चार सुगवा तुम्हाला साहय्यक ठरले आणि जे चार सुगावा तुम्हाला साहय्यक ठरले नाहीत. पहिले सुगावा मान्य करा आणि बाहेरुन आलेल्या संख्यांना चुक करा.

पाहिल्या सुगावा पासुन आपणास माहीत होते की, ती संख्या 1ते 9 मध्ये नाहीत(1ते9 संख्या चुक करा)

कोडे पुर्ण केल्यानंतर पहा की, कोणते सुगवा जास्त महत्वाचे होते आणि कोणते महत्वाचे नाही.

15.5 प्रमेय अनुमान आणि स्वयसिध्द

आता पर्यंत आपण विधाना बद्दल चर्चा केली आहे आणि त्याची साधारणता कशी तपासणी करावी. या विभागात तुम्ही अभ्यास करा की, प्रमेय अनुमान आणि स्व:यसिध्द चा विकास झाला आहे.

तुम्ही या अगोदर बरेचशा प्रमेया सोबत संपर्कात आले आहात. म्हणुन प्रमेय म्हणजे काय? एक गणितीय विधान ज्याची जसे उदाहरणार्थ खालील विधाने प्रमेय आहेत.

प्रमेय-15.1 : एका त्रिकोणाच्या अंतर कोनाची बेरीज 180° आहे.

प्रमेय-15.2 : दोन विषम नैसर्गिक़ संख्याच्या गुणाकार देखील विषम संख्याच येते.

प्रमेय-15.3 : कोणत्याही दोन क्रमवार नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार 4 ने पुर्णपणे भागीला जातो.

अनुमानिक विधान आहे जे की, आपण विश्वास करतो की, सत्य आहे. गणीताच्या अनुभव आणि समजण्या वरचा आधारीत आहे. ते म्हणजे आपले गणिताया समजुन घेणे आहे अनुमानिक हे बदलु शकते ते चुक किंवा बरोबर होऊ शकते. जर आपण सिध्द करु शकता का? नंतर ते प्रमेय बनतो. गणित शास्त्रज्ञ अनुमानिक बरोबर वर येत आहेत. नमुन्याना पाहुन आणि गणितीय नैपुन्यताचा अंदाज लावुन काढतात. आता चला काही नमुने पहा आणि आपण कोणत्या प्रकारचे नमुने यांचा अंदाज लावता येतात का?

राजुने पाहिले की, जेव्हा काही धन संख्याचा अभ्यास करतांना ते म्हणजे जर तुम्ही तिन क्रमवार पुर्ण संख्या घेतल्या आणि त्यांना तुम्हाला येईल की मधील संख्याचा धन ते म्हणजे 3, 4, 5, देते $3 \times 4 \times 5 + 4 = 64$ जे की, एक पुर्ण घन आहे. हे नेहमी काम करते? आणखी क्रमवार संख्या घेऊन तपासणी करुन पहा.

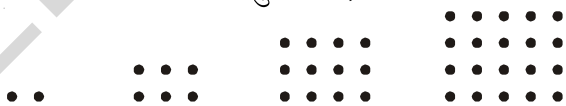
रामाने 6, 7, 8 घेतले आणि यांना तपासणी केली. येथे 7 हे मध्य संख्या आहे म्हणुन नियमाप्रमाणे $6 \times 7 \times 8 + 7 = 343$ जे की, एक पुर्ण घन आहे. याला सामान्य करण्यासाठी आणखी काही संख्या घ्या n, $n+1, n+2$ दुसरे काही उदाहरणे पहा.

उदाहरण-6. खालील भुमीतीचे बाण रुप एका क्रमवार संख्यांना सुचना देते.

(a) नंतर चे तिन पद माहित करा.

(b) 100 वे पद माहित करा.

(c) n वे पद माहित करा.



T_1 T_2 T_3 T_4

येथे टिंब अशा रितीने आहेत की, ते आयत निर्माण करतात येथे $T_1 = 2$ $T_2 = 6$, $T_3 = 12$, $T_4 = 20$ आणि अशाप्रकारे बरेचशे आहेत. तुम्ही अदांज लावु शकता का? T_5 किती आहेत? T_6 बद्दल काय आहे? T_n बद्दल काय आहे?

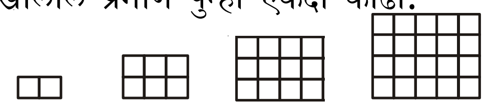
T_n चे अनुमानिक बनवा.

ते तुम्हाला मदत करु शकतात जर तुम्ही खालील प्रमाणे पुन्हा एकदा काढा.

सोडवणुक :

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
2	6	12	20	?	.....

+4 +6 +8 +10



T_1 T_2 T_3 T_4

म्हणुन, $T_5 = T_4 + 10 = 20 + 10 = 30 = 5 \times 6$

$T_6 = T_5 + 12 = 30 + 12 = 42 = 6 \times 7$ ..... T_7च्या साठी प्रयत्न

$T_{100} = 100 \times 101 = 10,100$

$T_n = n \times (n+1) = n^2 + n$

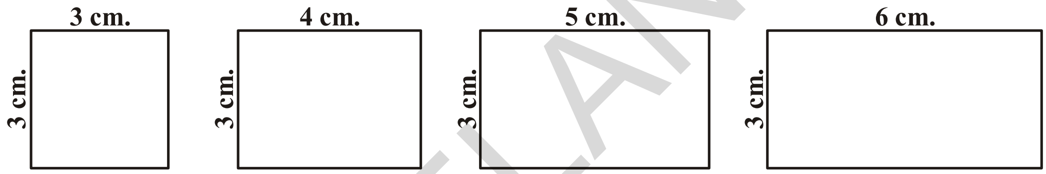
अशा प्रकारचा युक्तीवाद जो विविध संदर्भाचे किंवा माहितीच्या संचाचे परिक्षण करुन नमुन्याचा शोध घेतो आणि निष्कर्ष काढतो. यालाच अनुमानिक युक्तीवाद म्हणतात. अनुमान काढल्यासाठी अनुमानिक युक्तीवाद खुप उपयोगी पडते.

प्रसिध्द गणित शास्त्रज्ञ गोल्ड बॉकने खालील नमुन्याचे निरिक्षण केले.

$6 = 3 + 3$	$8 = 3 + 5$	$10 = 3 + 7$
$12 = 5 + 7$	$14 = 11 + 3$	$16 = 13 + 3 = 11 + 5$

गोल्ड बॉकच्या नमुन्यावरुन 1743 मध्ये त्यांनी कारण सांगीतले की, 4 पेक्षा मोठी असलेल्या सम संख्येला दोन मुळ संख्येच्या बेरजेच्या रुपात लिहिता येते(भिन्न मुळ संख्येची गरज नाही) आता पर्यंत त्याच्या अनुमानाची सत्त्य किवा असत्य आहे हे सिध्द झाले नाही. तुम्हाला कदाचीत हा निकाल सत्य किंवा असत्य म्हणुन दाखवु शकाल तर तो प्रसिध्द होतो.

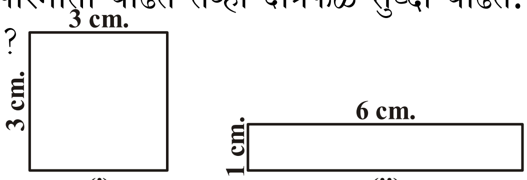
काही नमुन्याकडे पाहिल्याने कधी कधी खोटा अनुमान निघते जसे जानवी आणि कार्तीक ने 8 व्या वर्गाच्या क्षेत्रफळ आणि परिमीती चा अभ्यास करतांना अनुमानाचे नमुन्याचे निरीक्षण केले,



	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
Perimeter :	12 cm.	14 cm.	16 cm.	18 cm.
Area :	9 cm^2	12 cm^2	15 cm^2	18 cm^2

आणि अनुमान काढला का जेव्हा आयताची परिमीती वाढते तेव्हा क्षेत्रफळ सुध्दा वाढते. तुमचा काय विचार आहे? त्याचे बेरोबर आहे का?

या नमुन्यावर कार्य करताना इंदरने काही आयतास काढुन जानवी आणि कार्तीकने सांगलेल्या अनुमानाची सिध्दता नाकारली

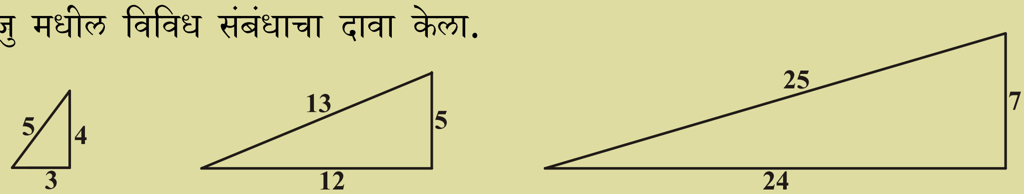


	(i)	(ii)
Perimeter :	12 cm.	14 cm.
Area :	9 cm^2	6 cm^2

अनुमान लावताना आपणास सर्व शक्यतांना समजुन घ्यावे लागते.

प्रयत्न करा.ख

पायथागोरसच्या प्रसिध्दीवरुन त्याच्या लहान भावाने काटकोन त्रिकोणातील बाजु मधील विविध संबंधाचा दावा केला.



(i) (ii) (iii)

लियागोरसचे प्रमेय: कोणत्याही कोटकोन त्रिकोणातील लहान बाजुचा कर्ण काह इतर बाजुच्या बेरजेएवढा असतो.

हा अनुमान खरा आहे किंवा खोटा आहे याची तपासणी करा.

तुम्हाला आश्चर्य वाटेल प्रत्येक गोष्टीची सिध्दता गरजेसाठी आपली अचानक गणिताशी गाठ पडते. जर नाही तर का नाही?

गणितात काही विधाने गृहीत धरतात आणि खरी ठरतात. सिध्दतेची गरज नसते. यालाच स्वयंसिध्द सत्यता म्हणतात. जी आपण सिध्दतेशिवाय घेतो. या विधानास गृहीतक म्हणतात. तिसऱ्या धड्यात आपण गृहीतक आणि युक्लीडच्या आधारतत्वा बद्दल शिकलो. (आपण गृहीतक आणि गृहीततत्व या मधील फरकास माहित करत नाही या दिवसात साधारणता भुमीतीत शब्दांचे गृहीतत्वाचा वापर होतो.)

उदाहरणार्थ, युक्लीडच्या पहिल्या गृहीत तत्वानुसार

एका बिंदुवरुन दुसऱ्या कोणत्याही बिंदुवर सरळ रेषा काढता येते.

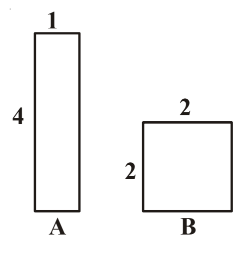
आणि तिसऱ्या गृहीतत्वावरुन

कोणत्याही केंद्रबिंदु आणि कोणत्याही त्रिजेवरुन वर्तुळ काढता येते.

हा विधाने अचुकपणे सत्य दिसतात आणि युक्लीडने त्यांना गृहीत धरुन सत्य दाखविले का? कारण आपण प्रत्येक गोष्ट सिध्द करुन दाखवित नाही. आपण कुठुनही सुरु करत नाही. आपण काही विधानांना सत्य समजुन त्यास स्विकारतो आणि या गृहीतकाच्या तर्काच्या आधारावरील नियमाने आपले ज्ञान वाढवितो.

तुम्हाला नंतर आश्चर्य वाटेल की आपण अशा विधानास सत्य समजुन का स्विकारतो जेव्हा ते स्वयंसिध्द दिसतात. यासाठी अनेक कारणे आहेत. आपले अंर्तज्ञान चुक असु शकते चित्र आणि नमुने फसवु शकते आणि काही सत्य असल्यास सिध्द करणे हा त्याचा एकच उपाय आहे. उदाहरणार्थ आपल्या सारखे खुप जन विश्वास करतात की जर एका संख्येला दुसऱ्या संख्येत मिळविले असता एक मोठी संख्या येते. परंतु आपणास माहीत आहे की सत्य नाही उदारहणार्थ $5 + (-5) = 0$ जी 5 पेक्षा लहान आहे.

खालील चित्राकडे सुध्दा पहा, कोणते क्षेत्रफळ जास्त आहे?



B मोठा दिसला तरी दोन्हीचे क्षेत्रफळ अगदी सारखे आहे.

गृहीकाच्या बंधन कारकता बद्दल तुम्हाला आश्चर्य वाटेल? गृहीतकाची निवड आपल्या अंर्त अंतज्ञानाच्या आधारावर होते आणि ती स्वयंसिध्द दिसते.म्हणुन त्यास आपण सत्य ठरविते. कसेतरी ते नंतर आपण विशिष्ठ गृहीतकास सत्य नाही याचा शोध घेतो. या शक्यते विरुध्द संरक्षण काय आहे? आपला खालील आपण खालील पायऱ्या घेतो.

i. गृहतिक केवळ कमाल ठेवा. उदाहरणार्थ युक्लीकडच्या पाच गृहीत तत्व आणि फक्त गृहीतकाच्या आधारे आपण शंभर प्रमेय साध्य करतो.

ii. गृहीतत्व सुसंगत असतात याची खात्री करा.

आपण म्हणतो की,गृहतकाचा संच असुसंगत असतो. जर आपण एका गृहीतकास दुसरे गृहीतक सत्य नाही. यासाठी उपयोग करु शकतो. उदाहरणार्थ खालील विधाने घेऊन ते असुसंगत असतात हे दाखवा.

विधान-1 : कोणतीही पुर्ण संख्या त्या नंतरच्या संख्येला समान नसते.

विधान-2 : शुन्याने भाग जाणारी पुर्ण संख्या ही पुर्ण संख्याच आहे.

(शुन्याने भागाकार करणे शक्य नाही याची आठवण ठेवा, परंतु एका क्षणासाठी शुन्याने भागाकार करणे शक्य आहे, आणि काय होते ते पहा)

विधान-2 वरुन $\frac{1}{0} = a$ येते. जेथे a ही पुर्ण संख्या आहे. याचे तात्पर्य म्हणजे$1=0$ हे विधान -1 ला सिध्द करत नाही यावरुन कोणत्याही पुर्ण संख्यांची समोरील (नंतरच्या) संख्येसमान असते.

iii. यावरुन असत्य गृहीतकाचा निकाल विरुध्दता देते. आपण म्हणुन शकतो की, जेव्हा दोन्ही विधाने आणि त्यांचे नकारात्मक सत्य असते ही विरुध्दता आहे. उदाहरणार्थ विधान-1 आणि विधान-2 पुन्हा एकदा घ्या.

विधान-1 वरुन आपणास $2 \neq 1$मिळते.

समजा $x=y$

$x \times x = xy$

$x^2 = xy$

$x^2 - y^2 = xy - y^2$

$(x+y)(x-y) = y(x-y)$ विधान -2 वरुन आपण दोन्ही बाजुचे $(x-y)$ खोडु शकतो

$x+y=y$

परंतु $x=y$

म्हणुन $x+x=x$

किंवा $2x=x$

$2=1$

म्हणुन आपणास दोन्ही विधाने $2 \neq 1$ आणि त्याचे नकारात्मक $2=1$ सत्य आहे. हीच विरुध्दता आहे. असत्य गृहीतकामुळे विरुध्दता निर्माण होते, की पुर्ण संख्येला शुन्याने भागले असता पुर्ण संख्या येते.

म्हणुन आपण गृहीतक म्हणुन निवडलेले विधानास पुष्कळ विचार आणि अंतर दृष्टी पाहिजे त्यावरुन असुंसंगती किंवा विरुध्दता निर्माण होणार नाही याची खात्री घेतली पाहिजे. कधी कधी गृहीताची निवड ती स्वत: नविन शोधाण्यासाठी आपणास मार्गदर्शन करते.

गृहीतक, प्रमेय आणि अनुमाना मधील फरकाची उजळणी करुन या विभागाची शेवट करु प्रमाणभुत तत्व हे विधान आहे ज्यास सिध्दते शिवाय सत्त्य म्हणुन गृहीत धरतो. अनुमान हे गणितीय विधान आहे. ज्याची सत्यता किंवा असत्यतता अद्याप स्थापन केलेली नाही. प्रमेय हे एक गणिताय विधान आहे ज्याची सत्यता तर्काविरुन स्थापन करते.

अभ्यास - 15.3

1. (i) कोणत्याही तिन क्रमवार विषम संख्या घ्या आणि त्याचा गुणाकार काढा.

   उदाहरणार्थ- $1 \times 3 \times 5 = 15$, $3 \times 5 \times 7 = 105$, $5 \times 7 \times 9$ - .....

   (ii) कोणत्याही तिन क्रमवार संख्या घ्या आणि त्यांची बेरीज करा.

   $2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$, $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$ या गणितातील तुम्ही अंदाज लावलेले काही नमुने आहे का? त्याबद्दल तुमचा अनुमान काय आहे?

2. पास्कलच्या त्रिकोणाकडे जा.

   रेषा-1 : $1 = 11^0$

   रेषा-2 : $11 = 11^1$

   रेषा-3 : $121 = 11^2$

   1
   1 1
   1 2 1
   1 3 3 1
   1 4 6 4 1

   रेषा-4 रेषा आणि -5 चे अनुमान तयार करा.

   तुमचे अनुमान लागु होते का? रेषा-6 ला सुध्दा तुमचे अनुमान लागु होतो का?

3. खालील नमुन्याकडे पहा.

   i) $28 = 2^2 \times 7^1$ एकुण अवयवाची संख्या $(2+1)(1+1) = 3 \times 2 = 6$

   28 ला 1, 2, 4, 7, 14, 28 या 6 अवयवांनी भाग जातो.

   ii) $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$ एकुण अवयवाची संख्या $(1+1)(1+1)(1+1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

   30 ला 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 या 8 अवयवांनी भाग जातो.

   नमुने शोधा

   (सुचना: प्रत्येक मुळ पायाचा घातांक +1 असला पाहिजे)

4. खालील नमुने पहा.

   $1^2 = 1$

   $11^2 = 121$

   $111^2 = 12321$

   $1111^2 = 1234321$

   $11111^2 = 123454321$

खालील प्रत्येकासाठी अनुमान तयार करा.

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

तुमचा अनुमान सत्य असल्यास तपासणी करा.

5. या पुस्तकात उपयोगात आनलेल्या 5 स्वयंसिध्दताची (आधारतत्व)यादी बनवा

6. $p(x) = x^2 + x + 41$ या बहुपदीत x च्या वेगवेगळ्या किंमती मांडुन $p(x)$ ची किंमत काढा. $p(x)$ हा (x) च्या निरनिराळ्या किंमती साठी आणि सर्व किंमतीसाठी मुळ राहते का, x हा N चा मुलद्रव्य आहे का? $x = 41$ हे $p(x)$ मध्ये ठेवल्यास तुम्हाला काय येते?

15.6 गणितीय सिध्दता काय आहे?

गणिताच्या सिध्दतेच्या आधी विधानाच्या पडताळाचा अभ्यास करणे आवश्यक आहे.

उदाहरणार्थ दोन विषम संख्यांचा गुणाकार विषम संख्याच येते. या उदाहरणाची पडताळणी तुम्ही केलीच असेल. म्हणुन तुम्ही दोन यादृच्छीक संख्या 15 आणि 2005 घ्या आणि $15 \times 2005 = 30075$ ही विषम संख्या आहे याची तपासणी करा.

वर्गातील विद्यार्थ्यांना काही त्रिकोणाच्या आकृत्या काढण्यासाठी कृती आणि त्या त्रिकोणाच्या आतिल कोनाची बेरीज काढणे. सुध्दा सांगा. यावरुन तुम्ही त्रिकोणाच्या आतील कोनाची बेरीज $180°$ पर्यंत माहित करु शकता.

या पध्दतीत दोष काय आहे? तपासणीच्या पध्दतीत कित्येक समस्या आहेत. तुम्हाला सत्य वाटलेली विधान तयार करण्यासाठी याची मदत मिळते. सर्व संदर्भात हे सत्य असते याची तुम्ही खात्री करता येत नाही. उदाहरणार्थ काही सम संख्याच्या जोड्याच्या गुणाकारामुळे कम संख्याचा गुंणाकार एक सम संख्या येते. याचा अंदाज लावता येतो. आणि कसेतरी या दोन समसंख्याच्या जोडीचा गुणाकार एक समसंख्या येते याची खात्री होत नाही. समसंख्याच्या जोडीचा गुणाकाराच्या सर्व शक्यतेला तुम्ही भौतीक रुपाने तपासणी करता येत नाही. कारण त्या अनंत आहेत. अशारीतीने आतिल कोनाचा बेरीज $180°$ पर्यंत येणाऱ्या काही त्रिकोणास अद्याप तुम्ही काढु शकत नाही.

अनेकदा आणखी तपासण्या (पडताळा) चुकीची मार्ग दाखवितात उदाहरणात आधिल पडताळ्याच्या आधाराने (Q.2 अभ्यास 1 मधील) पास्कलच्या त्रिकोणानावुन आपण काही निष्कर्ष काढण्यास उत्तेजित होतो.$11^5 = 15101051$. परंतु वास्तविक पणे $11^5 = 161051$

म्हणुन पडताळ्याच्या आधारावर निर्भर नसणारी दुसऱ्या पध्दतीची गरज फक्त काही संदर्भात आहे. विधानाची सत्यता ही दुसरी पध्दत आहे. तार्किक वादावर शुध्दपणे निर्भर असलेल्या गणिताची सत्यता स्थापना करण्याच्या पध्दतीला गणितीय सिध्दता म्हणतात.

गणितीय विधान असत्य बनविण्यासाठी आपणास फक्त एकच विरुध्द उदाहरण दिले पाहिजे. म्हणुन गणिताच्या विधानाची कायदेशीरता तपासणीने किंवा हजारों संदर्भात पडताळणीव्दारे स्थापन करण्यासाठी पुरेसा वेळ नाही. या विधानास खोटे सिध्द करण्यासाठी एक विरुध्द उदाहरण पुरेसे आहे.

सिध्दतेसाठी आपली पध्दत कशी पाहिजे पाहु या.

i. पाहिल्यांदा स्पष्टपेण सिद्धतेसाठी काय हवे आहे ते समजुन घेणे त्यानंतर समोर जाण्याचा आपणास अंदाजे उपाय सुचतो.

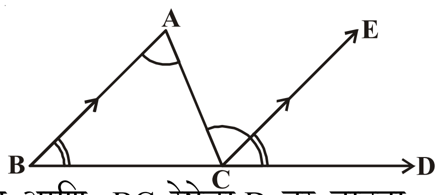
ii. गणितीय विधानाच्या क्रमागत मांडणीने सिध्दता मिळते. मागील विधानाच्या सत्यतेमधुन काढुन प्रत्येक विधानास तार्कीकपणे सिध्द करता येते.

iii. गणिताच्या सत्य विधानाच्या निश्कर्षाच्या क्रम तर्कावरुन काढता येते. आपणास काय सिध्द करायचे आहे त्याचा अचुककृत्य जो प्रमेयात दावा करतो.

हे समजविण्यासाठी आपणास प्रमेय आणि सिध्दतेचे विश्लेषण करावे लागते. तुम्ही आधीच 4 थ्या धडयात या प्रमेयाबद्दल शिकलोत. आपणास अनेकदा आकृती प्रयोगाची सिध्दता दाखविण्यासाठी उपयोग पडते ही अतिशय महत्वाची आहे. तर्कावरुन प्रत्येक विधानाची सिध्दता स्थापना करता येते. अनेकदा आपण ऐकतो किंवा विधान सांगतो जसे दोन रेषा एकमेकांस लंब असेल तर दाने कान $90°$ असायला पाहिजे. अशा प्रकारच्या युक्लीडच्या वादाच्या फसविण्यापासुन सावध राहा.

प्रमेय-15.4 : त्रिकोणाच्या तिन आतील कोनाची बेरीज 180^0 असते.

सिध्दता : त्रिकोण ABC घ्या.



आपणास $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$

सिध्द करावे लागते.

C बिंदुवरु BA ला समांतर असणारी CE रेषा काढा आणि BC रेषेला D वर वाढवा.

CE ही BA ला समांतर आहे आणि AC ही छेदीका आहे.

म्हणुन $\angle CAB = \angle ACE$ पर्यायी कोन ..... (1)

अशा रितीने $\angle ABC = \angle DCE$ संगत कोन ..... (2)

(1) आणि (2) मिळविल्यास

$\angle CAB + \angle ABC = \angle ACE + \angle DCE$ ..... (3)

$\angle BCA$ ला दोन्ही बाजुस मिळवा

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$ येते ..... (4)

पण $\angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$, कारण सरळ कोन बनविते. ..... (5)

म्हणुन $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$

प्रत्येक पायरी तार्कीक़ पणे सिध्दतेस कशी जुळलेली आहे ते आता आपण पाहु या.

पायरी-1: आपला सिध्दतात त्रिकोणाच्या गुणधर्माशी संबंधीत आहे. म्हणुन त्रिकोण ABC पासुन सुरु करु.

पायरी-2: BA ला समांतर असलेली रेषा CE काढणे आणि BC ला D पर्यंत वाढविणे ही सिध्दंताच्या सत्यतेसाठी अत्यंत महत्वाची पायरी आहे.

पायरी-3: येथे आपण $\angle CAB = \angle ACE$ आणि $\angle ABC = \angle DCE$ CE ही BA ला समांतर आहे. या वास्तविकते वरुन निश्कर्ष काढु शकतो. अगोदरच्या सिध्दतांनुसार

पायरी-4: इथे आपण युक्लीकडचे गृहीतक जर समान संख्येला समान संख्येत मिळविल्यास येणारी संख्या समान असते. याचा उपयोग करतो. हे दाखविण्यासाठी $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE$.

म्हणजे त्रिकोणाच्या आतिल तिन कोनाची बेरीज सरळ रेषेवर असलेल्या कोनांच्या बेरजे ऐवढे असते.

पायरी-5: विधानाचा निश्कर्षात आपण युक्लीडच्या आधारतत्व वस्तु ज्या सारख्या वस्तुंना समान असतात त्या एकेमेकांना समान असतात चा वापर $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCE + \angle BCA + \angle ACE = 180°$ निष्कर्ष काढण्यासाठी हाच दावा प्रमेयात सिध्दतेसाठी केला आहे.

हीच वादना प्रमेयात सिध्दतेसाठी केली आहे.

आता तुम्ही विश्लेषण न करता 15.2 आणि 15.3 याप्रमेयाची सिध्द करा

प्रमेय-15.5 : दोन विषम नैसर्गिक़ संख्याचा गुणाकार विषम संख्या असते

सिध्दता :समजा x आणि y या दोन कोणत्याही नैसर्गिक़ विषम संख्या आहेत.

आपणास xy ही विषम संख्या आहे हे दाखवावे लागते.

x आणि y विषम संख्या असल्यामुळे त्यास $x = (2m - 1)$ या रुपात दर्शविता येते काही m आणि $y = 2n - 1$ काही n नैसर्गिक संख्येसाठी

तर $xy = (2m - 1)(2n - 1)$

$= 4mn - 2m - 2n + 1$

$= 4mn - 2m - 2n + 2 - 1$

$= 2(2mn - m - n + 1) - 1$

समजा $2mn - m - n + 1 = l$, वरील समीकरणात कोणतेही नैसर्गिक संख्याची जागा बदल्यास

$= 2l - 1, l \in N$

ही नक्कीच विषम संख्या आहे.

प्रमेय-15.6 : कोणत्याही दोन क्रमवार नैसर्गिक संख्याच्या गुणाकाराला 4 नी भाग जातो.

कोणत्याही दोन क्रमवार नैसर्गिक़ संख्येचे रुप $2m, 2m + 2$ काही नैसर्गिक संख्या n साठी आहे. त्याच्या गुणाकार $2m\ (2m + 2)$ हा 4 नी भागल्या जातो हे सिध्द करावे लागते. वरील उल्लेखानुसार प्रत्येक सिध्दतेला एक उपयाची चाबी असते. अतंर्ज्ञान हे गणितशास्त्रज्ञाचे केंद्र आहे. विचार सारणी आणि निकालाचा शोध आहे.विचाराच्या माध्यमातुन शास्त्रज्ञ अनेकदा प्रयोगाने तार्कीक उदाहरणाने सिध्दता किंवा अचुक उत्तर शोधतात. सर्व वाद आणि क्रियात्मकता सृजनात्मक ते सर्व एकत्र करुन योग्य सिध्दता येते.

आपण दोन्ही अनुमानाचा आणि अनुमानीक युक्तीवादास काही उदाहरणे घेऊन चर्चा करु.

येथे मौल्यवान उल्लेख आहे की, प्रसिध्द भारतीय गणित शास्त्रज्ञ श्रीनीवास रामानुजननी अंतर्ज्ञानाच्या उच्चपातळीचा उपयोग त्याचे विधान येण्यासाठी केला. जे सत्य आहे. यापैकी काही सत्य आणि सुपरिचीत आहे.

अभ्यास - 15.4

1. खालील पैकी कोणत्या गणितीय विधान आहे आणि कोणते नाही? कारणे द्या
   - i. तिचे डोळे निळे आहे.
   - ii. $x + 7 = 18$
   - iii. आज रविवार नाही.
   - iv. प्रत्येक संख्येसाठी $x, x + 0 = x$
   - v. आता वेळ काय आहे?
2. खालील विधानास सिध्द न करण्यासाठी विरुध उदाहरणे माहित करा.
   - i. प्रत्येक आयत हा चौरस आहे.
   - ii. y, $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$ कोणत्याही x आणि y पुर्णांकासाठी
   - iii. जर n ही पुर्ण संख्या असेल तर $2n^2 + 11$ ही मुळ संख्या होते.
   - iv. दोन्ही त्रिकोणाचे संगत कोन समान असल्यास ते दोन त्रिकोण एकरुप असतात.
   - v. चौकोनाच्या चारही बाजु समान असल्यास तो चौरस होतो.
3. दोन विषम संख्याची बेरीज एक समसंख्या असते सिध्द करा.
4. दोन सम संख्यांचा गुणाकार समसंख्या असते सिध्द करा.

5. जर x ही विषम असल्यास तर x^2 सुध्दा विषम होते हे सिध्द करा.
6. ते कसे कार्य करते निरिक्षण करा?
   i. एक संख्या निवडा त्याची दुप्पट करा त्यात नऊ मिळवा, तुमची मुळ संख्या मिळवा. तिन ने भाग द्या. चार मिळवा. तुमची मुळ संख्या त्यातुन वजा करा. तुम्हाला सम संख्या येते.
   ii. कोणतीही तिन अंकी संख्या लिहा(उदा.425) सारख्याच क्रमात या अंकांना पुन्हा पुन्हा लिहुन सहा अंकी संख्या बनवा (425425) तुमची नविन संख्येला 7,11, आणि 13 नी भाग जातो.

आपण काय चर्चा केली

1. काही कसोटीवर एका वाक्यात सत्य किंवा असत्याची परख करणाऱ्या पध्दतीला विधान म्हणतात.
2. गणितीय विधान सामान्य विधानापासुन ते भिन्न स्वभावाचे असतात ते पुराव्यावरुन सिध्द किंवा सहमत होत नाही. विरुध्द उदाहरण माहित करुन त्याची असिध्दता करता येते
3. नमुन्याची व्याख्या करुन त्यांच्या नियमाने आणि नमुन्याच्या निरिक्षणाने गणितीय विधाने बनविता येते.

   अनुमान हे योजनेचे विधान आहे जे निरिक्षणाच्या अर्थाचे स्पष्टीकरण देते.
4. तार्कीक आधाराच्या शुध्द आधारावर गणितीय विधानाची सत्यता स्थापन करण्याच्या पध्दतीला गणितीय सिध्दता म्हणतात.
5. स्वयंसिध्द तत्व हे सिध्दतेशिवाय गृहीत धरलेले सत्य आहे.
6. आपल्या गणितीय अंतर्ज्ञानाच्या आधारावर अनुमान हे सत्य विधान आहे. परंतु जे आपणास सिध्द करावे लागते.
7. गणितीय विधानाच्या सत्याला स्थापन किंवा सिध्द केल्यास त्यास प्रमेय म्हणतात.
8. गणितीय विधानास मुळ तार्कीक पध्दतीने सिध्द करणे म्हणजे अनुमानीक युक्तीवाद आहे.
9. गणितीय विधानाच्या लागोपाठ येणाऱ्या क्रमाणे सिध्दता तयार होते.
10. प्रमेयाची अनुमानापासुन सुरु करुन प्रमेय सिध्दतेसाठी तर्केच्या पायऱ्याची साखळी बनवुन निर्ष्कशाला पोहचतो.
11. सिध्दता ज्यामध्ये आपण गृहीतापासुन सुरु करुन निश्कर्षाला विरुध्दता दर्शवुन आणि अनुमानाची विरुध्दता ही मुळ निश्कर्षाची स्थापना करण्याचा दुसरा उपाय आहे जो सत्य आहे आणि ती दुसऱ्या प्रकारची अनुमान करण्याची युक्तीवाद आहे.
12. निगमन युक्तीवादाच्या असंदीग्ध विधानाच्या सत्यतेसाठी त्याची स्थापना तार्किक अवजाराच्या उपयोगाने होते.
13. विविध संदर्भाच्या तपासणीच्या आधारावरील युक्तीवाद किंवा नमुन्याचा शोध घेणारी माहिती आणि त्याचा निश्कर्ष काढल्यास त्यास आगमन युक्तीवाद म्हणतात.

उत्तरे

अभ्यास 1.1

1. a. -5, $\frac{22}{7}$, $\frac{-2013}{2014}$

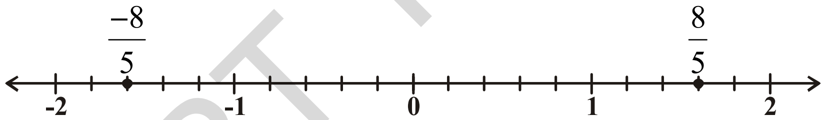
   b. ज्या संख्येला $\frac{p}{q}$ च्या रुपात लिहिता येते $q \neq 0; p, q$ पुर्णांक संख्या) त्या संख्यांना परिमेय संख्या म्हणतात.

2. (i) $\frac{3}{7}$ (ii) 0 (iii) -5

   (iv) 7 (v) -3

3. $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \frac{33}{32}$

4. $\frac{19}{30}, \frac{13}{20}, \frac{79}{120}$

5. 

6. I. (i) 0.242 (ii) 0.708 (iii) 0.4 (iv) 28.75

   II. (i) $0.\overline{6}$ (ii) $-0.69\overline{4}$ (iii) $3.\overline{142857}$ (iv) $1.\overline{2}$

7. (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{77}{5}$ (iii) $\frac{41}{4}$ (iv) $\frac{13}{4}$

8. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{35}{9}$ (iii) $\frac{12}{33}$ (iv) $\frac{563}{180}$

9. (i) Yes (ii) No (iii) Yes (iv) No

अभ्यास - 1.2

1. (i) अपरिमेय (ii) परिमेय (iii) अपरिमेय

   (iv) परिमेय (v) परिमेय (vi) अपरिमेय

2. परिमेय संख्या : -1, $\frac{13}{7}$, 1.25, $21.\bar{8}$, 0

अपरिमेय संख्या: $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, π, 2.131415....., 1.1010010001.....

3. अनंत, $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. 0.71727374....., 0.761661666.....   5. $\sqrt{5} = 2.236$

6. 2.645751.....   8. $\sqrt{6}$, $\sqrt{2\sqrt{6}}$

9. (i) सत्य (ii) सत्य (iii) सत्य $\sqrt{3}$ (iv) सत्य $\sqrt{9}$

(v) सत्य($\sqrt{8}$) (vi) असत्य $\frac{3}{7}$

अभ्यास - 1.4

1. (i) $10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$ (ii) 20

(iii) $10 + 2\sqrt{21}$ (iv) 4

2. (i) अपरिमेय (ii) अपरिमेय (iii) अपरिमेय (iv) परिमेय

(v) अपरिमेय (vi) अपरिमेय (vii) परिमेय

3. (i) अपरिमेय (ii) परिमेय (iii) अपरिमेय (iv) अपरिमेय

(v) अपरिमेय (vi) परिमेय

4. कारण c किंवा d अपरिमेय संख्या आहे.

5. (i) $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ (ii) $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (iv) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

6. (i) $-12\sqrt{2}$ (ii) $6-\sqrt{35}$ (iii) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$ (iii) $\frac{9\sqrt{15}-3\sqrt{10}-3\sqrt{21}+\sqrt{14}}{25}$

7. -0.328

8. (i) 2 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 64

(v) 9 (vi) $\frac{1}{6}$ 9. -8

10. (i) a = 5, b = 2   (ii) $a = \frac{-19}{7}$, $b = \frac{5}{7}$

अभ्यास - 2.1

1. (i) 5 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 6

(v) 2 (vi) 1

2. (i) बहुपदी (ii) बहुपदी (iii) नाही कारण यात दोन चले आहेत.
   (iv) बहुपदी नाही कारण घातांक ऋण आहे.
   (v) बहुपदी नाही कारण x चा घातांक ऋण नसलेला पुर्णांक
   (vi) एक चलातील बहुपदी नाही कारण यात दोन चलराशी आहेत.

3. (i) 1 (ii) -1 (iii) $\sqrt{2}$ (iv) 2
   (v) $\frac{\pi}{2}$ (vi) $-2/3$ (vii) 0 (viii) 0

4. (i) वर्ग (ii) घन (iii) वर्ग (iv) रेषीय
   (v) रेषीय (vi) वर्ग

5. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य
   (v) सत्य (vi) सत्य

अभ्यास - 2.2

1. (i) 3 (ii) 12 (iii) 9 (iv) $\frac{3}{2}$

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) -1, 0, 3
   (v) 2, 0, 0

3. (i) होय (ii) नाही (iii) होय (iv) नाही,होय
   (v) होय (vi) होय (vii) होय, नाही (viii) होय,नाही

4. (i) -2 (ii) 2 (iii) $\frac{-3}{2}$ (iv) $\frac{3}{2}$
   (iv) 0 (vi) 0 (vii) $\frac{-q}{p}$

5. $a = \frac{-2}{7}$ 6. $a = 1, b = 0$

अभ्यास - 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1
   (iv) $-\pi^3+3\pi^2-3\pi+1$ (v) $\frac{-27}{8}$

2. $5p$ 3. बाकी 5 असल्यामुळे   4. -3   5. $\frac{-13}{3}$

6. $\frac{-13}{3}$ 7. 8   8. $\frac{21}{8}$ 9. $a = -7, b = -12$

अभ्यास - 2.4

1. (i) होय (ii) नाही (iii) नाही (iv) नाही
2. (i) होय (ii) होय (iii) होय (iv) होय
   (v) होय
7. (i) $(x-1)(x+1)(x-2)$ (ii) $(x+1)^2 (x-5)$
   (iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y+1)(y+1)(y-1)$
9. a = 3 10. $(y-2)(y+3)$

अभ्यास - 2.5

1. (i) $x^2 + 7x + 10$ (ii) $x^2 - 10x + 25$
   (iii) $9x^2 - 4$ (iv) $x^4 - \dfrac{1}{x^4}$ (v) $1 + 2x + x^2$
2. (i) 9999 (ii) 998001 (iii) $\dfrac{9999}{4} = 2499\dfrac{3}{4}$
   (iv) 251001 (v) 899.75
3. (i) $(4x+3y)^2$ (ii) $(2y-1)^2$ (iii) $\left(2x+\dfrac{y}{5}\right)\left(2x-\dfrac{y}{5}\right)$
   (iv) $2(3a+5)(3a-5)$ (v) $(x+3)(x+2)$
   (vi) $3(P-6)(P-2)$
4. (i) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz$
   (ii) $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
   (iii) $4a^2 + 25b^2 + 9c^2 - 20ab - 30bc + 12ac$
   (iv) $\dfrac{a^2}{16} + \dfrac{b^2}{4} + 1 - \dfrac{ab}{4} - b + \dfrac{a}{2}$
   (v) $p^3 + 3p^2 + 3p + 1$ (vi) $x^3 - 2x^2y + \dfrac{4}{3}xy^2 - \dfrac{8}{27}y^3$
5. (i) $(-5x + 4y + 2z)^2$ (ii) $(3a + 2b - 4c)^2$
6. 29
7. (i) 970299 (ii) 1,0,61,208 (iii) 99,40,11992 (iv) 100,30,03,001
8. (i) $(2a+b)^3$ (ii) $(2a-b)^3$ (iii) $(1-4a)^3$ (iv) $\left(2p-\dfrac{1}{5}\right)^3$
10. (i) $(3a+4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2)$ (ii) $(7y-10)(49y^2 + 70y + 100)$
11. $(3x+y+z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3xz)$

14. (i) -630 (ii) 16380 (iii) $\frac{-5}{12}$ (iv) -0.018

15. (i) $(2a + 3)(2a - 1)$ (ii) $(5a - 3)(5a - 4)$

16. (i) $3x(x - 2)(x + 2)$ (ii) $4(3y + 5)(y - 1)$

अभ्यास - 3.1

1. (i) 3 (ii) 13 (iii) सहा (iv) $180°$
   (v) बिंदु, प्रतल, रेषा
2. a) असत्य b) सत्य c) सत्य d) सत्य
   e) सत्य 7. अनंत 8. 180^0 पेक्षा कमी असलेल्या कोनाच्या बाजुवर छेदन रेषा
9. $\angle 1 = \angle 2$

अभ्यास - 4.1

2. (i) परिवर्तन कोन (ii) काटकोन (iii) विशाल कोन
3. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य
   (v) सत्य (vi) सत्य (vii) असत्य (viii) सत्य
4. (i) 90^0 (ii) 180^0 (iii) 210^0

अभ्यास - 4.2

1. $x = 36°$ $y = 54°$ $z = 90°$
2. (i) $x = 23°$ (ii) $x = 59°$ (iii) $x = 20°$ (iv) $x = 8°$
3. $\angle BOE = 30°$; $\angle COE$ चा परावर्तन कोन $= 250°$
4. $\angle C = 126°$
8. $\angle XYQ = 122°$ $\angle QYP = 302°$

अभ्यास - 4.3

2. $x = 126°$
3. $\angle AGE = 126°$ $\angle GEF = 36°$ $\angle FGE = 54°$
4. $\angle QRS = 60°$ 5. $\angle ACB = \angle z = \angle x + \angle y$
6. $a = 40°$; $b = 100°$
7. (i) $\angle 3, \angle 5, \angle 7, \angle 9, \angle 11, \angle 13, \angle 15$
   (ii) $\angle 4, \angle 6, \angle 8, \angle 10, \angle 12, \angle 14, \angle 16$

8. $x = 60°$ $y = 59°$

9. $x = 40°$ $y = 40°$

10. $x = 60°$ $y = 18°$

11. $x = 63°$ $y = 11°$

13. $x = 50°$ $y = 77°$

15. (i) $x = 36°$; $y = 108°$ (ii) $x = 35°$ (iii) $x = 29°$

16. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 80°$; $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 100°$

17. $x = 20°$ $y = 60°$ $z = 120°$

18. $x = 55°$ $y = 35°$ $z = 125°$

19. (i) $x = 140°$ (ii) $x = 100°$ (iii) $x = 250°$

अभ्यास - 4.4

1. (i) $x = 110°$ (ii) $z = 130°$ (iii) $y = 80°$

2. $\angle 1 = 60°$ 3. $x = 35°, y = 51°$ 5. $x = 50°$ $y = 20°$

6. $x = 70°$ $y = 40°$ 7. $x = 30°$ $y = 75°$

8. $\angle PRQ = 65°$ 9. $\angle OZY = 32°$; $\angle YOZ = 121°$

10. $\angle DCE = 92°$ 11. $\angle SQT = 60°$ 12. $z = 60°$

13. $x = 37°$ $y = 53°$ 14. $\angle A = 50°$; $\angle B = 75°$

15. (i) 78° (ii) $\angle ADE = 67°$ (iii) $\angle CED = 78°$

16. (i) $\angle ABC = 72°$ (ii) $\angle ACB = 72°$
(iii) $\angle DAB = 27°$ (iv) $\angle EAC = 32°$

17. $x = 96°$ $y = 120°$

अभ्यास - 5.1

1. (i) पाण्याची टाकी (ii) Mr. 'J' चे घर
(iii) पुर्व दिशेत चालतांना रस्ता क्र. 2 च्या उजव्या बाजुकडील शेवटचे घर
(iv) पुर्व दिशेत चालतांना रस्ता क्र.4 च्या उजव्या बाजुचे पाहिले घर
(v) पुर्व दिशेत चालतांना रस्ता क्र.4 च्या डाव्या बाजुकडील शेवटचे इमारत

अभ्यास - 5.2

1. (i) Q_2 (ii) Q_4 (iii) Q_1 (iv) Q_3
(v) Y-अक्ष (vi) X-अक्ष (vii) X-अक्ष (viii) Y-अक्ष

2. (i) abscissa : 4, ordinate : -8 (ii) abscissa : -5, ordinate : 3 (iii) abscissa : 0, ordinate : 0 (iv) abscissa : 5, ordinate : 0
   (v) abscissa : 0, ordinate : -8
3. (ii) (0, 13) : Y-अक्ष (iv) (-2, 0) : X-अक्ष
   (v) (0, -8) : Y-अक्ष (vi) (7, 0) : X-अक्ष
   (vii) (0, 0) : दोन्ही अक्षावर
4. (i) -7 (ii) 7 (iii) R (iv) P
   (v) 4 (vi) -3
5. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) असत्य
   (v) असत्य (vi) सत्य

अभ्यास - 5.3

2. नाही. (5, -8) Q_4मध्ये आणि (-8, 5) Q_2मध्ये
3. दिलेले सर्व बिंदु Y-अक्षला समांतर असलेल्या रेषेपासुन 1 एकक
4. दिलेले सर्व बिंदु X-अक्षला समांतर असलेल्या रेषेपासुन 4 एकक

अभ्यास - 6.1

1. (i) $a = 8$ $b = 5$ $c = -3$
   (ii) $a = 28$ $b = -35$ $c = 7$
   (iii) $a = 93$ $b = 15$ $c = -12$
   (iv) $a = 2$ $b = 5$ $c = 0$
   (v) $a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{1}{4}$ $c = -7$
   (vi) $a = \frac{3}{2}$ $b = 1$ $c = 0$
   (vii) $a = 3$ $b = 5$ $c = -12$
2. (i) $a = 2$ $b = 0$ $c = -5$
   (ii) $a = 0$ $b = 1$ $c = -2$
   (iii) $a = 0$ $b = \frac{1}{7}$ $c = -3$
   (iv) $a = 1$ $b = 0$ $c = \frac{14}{13}$
3. (i) $x + y = 34$ (ii) $2x - y + 10 = 0$

(iii) $x - 2y - 10 = 0$ (iv) $2x + 15y - 100 = 0$

(v) $x + y - 200 = 0$ (vi) $x + y - 11 = 0$

अभ्यास - 6.2

2. (i) $(0, -34); (\frac{17}{4}, 0)$ (ii) $(0, 3) ; (-7, 0)$

 (iii) $(0, \frac{3}{2}) ; (\frac{-3}{5}, 0)$

3. (i) सोडवणुक नाही (ii) सोडवणुक (iii) सोडवणुक

 (iv) सोडवणुक नाही (v) सोडवणुक नाही

4. k = 7 5. $\alpha = \frac{8}{5}$ 6. 3

अभ्यास - 6.3

2. (i) होय (ii) होय
3. 3
4. (i) 6 (ii) -5
5. (i) $(\frac{3}{2}, 3)$ (ii) $(-3, 6)$
6. (i) $(2, 0) : (0, -4)$ (ii) $(-8, 0) ; (0, 2)$

 (iii) $(-2, 0) ; (0, -3)$
7. $x + y = 1000$ 8. $x + y = 5000$ 9. $f = 6a$ 10. 39.2
11. $5x = 3y$; 2000 ; 480 (मतदारांनी टाकलेल्या मतांची संख्या = x, एकुण मतदार = y)
12. x - y = 25; 50; 15 (वडीलांचे वय = x, रुपांचे वय = y)
13. $y = 8x + 7$ 6 किमी, 63 रुपये 14. $x + 4y = 27$; 5, 11
15. $y = 10x + 30$; 60; 90; 5 hr. (घरांची संख्या = x ; पार्किंग चार्ज = y)
16. d = 60 t (d = अंतर, t = वेळ); 90 km.; 120 km.; 210 km.
17. $y = 8x$; $\frac{3}{2}$ or $1\frac{1}{2}$; 12
18. $y = \frac{5}{7}x$ (मिश्रणाचे परिमाण = x; दुधाचे परिमाण = y) ; 20
19. (ii) 86° F (iii) 35° C (iv) -40

अभ्यास - 6.4

4. (i) $y = -3$ (ii) $y = 4$ (iii) $y = -5$ (iv) $y = 4$
5. (i) $x = -4$ (ii) $x = 2$ (iii) $x = 3$ (iv) $x = -4$

अभ्यास - 7.4

6. 7
7. नाही

अभ्यास - 8.1

1. (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य
   (v) असत्य (vi) असत्य
2. (a) होय, नाही नाही, नाही, नाही (b) नाही, होय, होय, होय, होय
   (c) नाही, होय, होय, होय, होय (d) नाही, होय, होय, होय, होय
   (e) नाही, होय, होय, होय, होय (f) नाही, होय, होय, होय, होय
   (g) नाही, नाही, नाही, होय, होय (h) नाही, नाही, होय, नाही, होय
   (i) नाही, नाही, नाही, होय, होय (j) नाही, नाही, होय, नाही, होय.
4. चार कोन = 36°, 72°, 108°, 144°

अभ्यास - 8.3

1. समांतरभुज चौकोनाचे कोन = 73°, 107°, 73°, 107°
2. समांतरभुज चौकोनाचे कोन = 68°, 112°, 68°, 112°

अभ्यास - 8.4

1. BC = 8 से.मी..

अभ्यास - 9.1

1.

गुण	5	6	7	8	9	10
वारंवारता(f)	5	6	8	12	9	5

2.

रक्त गट	A	B	AB	O
वारंवारता (f)	10	9	2	15

जास्त आढळणारा रक्तगट = O ; दुर्मीळ रक्तगट = AB

3.

छापाची संख्या	0	1	2	3
वारंवारता (f)	3	10	10	7

4.

पर्यायी	A	B	C
वारंवारता (f)	19	36	10

एकुण अचुक उत्तरे = 65

जास्त लोकांचे मत = B

5.

वाहनाचा प्रकार	कार	मो.स.	ॲटो	सायकल
वाहनाची संख्या (f)	25	45	30	40

6. प्रमाण : X-अक्षावर 1 से.मी. 1 वर्ग अवकाश

X-अक्षावर 1 से.मी. 10 विद्यार्थी

वर्ग	I	II	III	IV	V	VI
विद्यार्थी संख्या (f)	40	55	65	50	30	15

7.

गुण 0-10 (वर्ग अवकाश)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	
विद्यार्थी संख्या (f)	1	4	3	7	7	7	1	0

8.

विद्युत बिल (रु.) ((वर्ग अवकाश)	घरांची संख्या (f)
150 - 225	4
225 - 300	3
300 - 375	7
375 - 450	7
450 - 525	0
525 - 600	1
600 - 675	1
675 - 750	2

9.

जिवन काळ (वर्षात) (वर्ग अवकाश)	2-2.5	2.5-3.0	3.0-3.5	3.5-4.0	4.0-4.5	4.5-5.0
बॅटरीची संख्या	2	6	14	11	4	3

अभ्यास - 9.2

1. $\bar{x} = 85$ 2. $\bar{x} = 1.71$ 3. K = 10
4. $\bar{x} = 17.7$
5. (i) ₹ 359, ₹ 413, ₹ 195, ₹ 228, ₹ 200, ₹ 837
   (ii) ₹444 प्रत्येक शाळेची बचत
6. मुलांची उची = 147 cm. ; मुंलीची उंची = 152 cm.
7. $\bar{x}$ = 11.18 ; बहुलक = 5 ; मध्यक = 10
8. $\bar{x}$ = 80 ; मध्यक = 75 ; बहुलक = 50
9. 37 kgs 10. ₹11.25, मध्यक = ₹ 10; बहुलक = ₹ 10
11. $1^{st} = 2$; $2^{nd} = 6$; $3^{rd} = 19$; $4^{th} = 33$

अभ्यास - 10.1

1. (i) 64 cm^2 96 cm^2 (ii) 236 cm^2
2. 3375 m^2 3. 330 m^3 4. 8 m.
5. (i) मुळ क्षेत्रफळाच्या 4 पट (ii) मुळ क्षेत्रफळाच्या 9 पट (iii) n^2 वेळा
6. 60 cm^3 7. 16 m^3 8. 3750 liters

अभ्यास - 10.2

1. 6.90 m^2 2. 176 cm^2; 253 cm^2
3. r = 7.5 cm. 4. h = 2.5 m.
5. (i) 968 cm^2 (ii) 1064.8 cm^2 (iii) 2032.8 cm^2
6. 5420.80 रुपये 7. 1584 m^2
8. (i) 110 m^2 (ii) ₹4400
09. (i) 59.4 m^2 (ii) 96.48 m^2 10. 517.44 liters 11. h = 20 cm.

अभ्यास - 10.3

1. h = 6cm. 2. h = 9 cm.
3. (i) 7 cm. (ii) 462 cm^2 4. 1232 cm^3
5. 1018.3 cm^3 6. 15m,₹7920 7. $3394\frac{2}{7}$ cm^3
8. 241.84 m^2 (जवळ जवळ) 9. 63 m 10. 6135.8 cm^2 11. 24.7 mint. 12. 60π sq unit

अभ्यास - 10.4

1.	154 cm² ; 179.67 cm³			2.	3054.86 cm³		
3.	616 cm²	4.	6930 cm²	5.	4 : 9 ; 8 : 27		
6.	942 cm²	7.	1 : 4	8.	441 : 400	9.	55 kg.or 0.05kg
10.	5 cm.	11.	0.303. Lit	12.	एकुण बाटलीची संख्या = 9		

अभ्यास - 11.1

1. $19.5\ cm^2$ 2. $131\ cm^2$ 3. $36\ cm^2$

अभ्यास - 11.2

1. 8.57 cm   2. 6.67 cm

अभ्यास - 12.1

1. (i) त्रिज़्या   (ii) व्यास   (iii) लघु कंस
   (iv) जिवा   (v) विशाल कंस   (vi) अर्धवतुळ
   (vii) जिवा   (viii) लघु वर्तुळ खंड
2. (i) सत्य   (ii) सत्य   (iii) सत्य   (iv) असत्य
   (v) असत्य   (vi) सत्य   (vii) सत्य

अभ्यास - 12.2

1. 90°   2. 48°, 84°   3. होय

अभ्यास - 12.4

1. 130°   2. 40°   3. 60°, 120°   5. 5 cm.
6. 6 cm.   7. 4 cm.   9. 70°, 55°, 55°

अभ्यास 12.5

1. (i) $x° = 75°\ ;\ y° = 75°$ (ii) $x° = 70°\ ;\ y° = 95°$
   (ii) $x° = 90°\ ;\ y° = 40°$
4. (a), (b), (c), (e), (f) = शक्य ;   (d) = अशक्य

अभ्यास - 14.1

1. (a) 1, 2, 3, 4, 5 आणि 6 (b) होय (c) $\frac{1}{3}$

2. (a) $\frac{45}{100}; \frac{55}{100}$ (b) 1

3. (a) लाल (b) पिवळा (c) निळा, हिरवा आणि लाल (d) बदल नाही
   (e) नाही(हा विस्कळीत प्रयोग आहे)

4. (a) नाही.
   (b) P (हिरवा) = $\frac{5}{12}$; P (निळा) = $\frac{1}{4}$; P (लाल) = $\frac{1}{6}$; P (पिवळा) = $\frac{1}{6}$
   (c) 1

5. (a) P(E) = $\frac{5}{26}$ (b) P(E) = $\frac{5}{13}$ (c) 1 (d) $\frac{21}{26}$

6. P(E) = $\frac{7}{11}$

7. (i) P = $\frac{61}{2000}$ (ii) P = $\frac{9}{80}$ (iii) P = $\frac{261}{400}$ 8. 21.5%

अभ्यास - 15.1

1. (i) नेहमी असत्य, महिण्यात कमीत कमी 27 दिवस असतात साधारणता महिणे 30 किंवा 31 दिवसाचे असतात.
   (ii) संदिग्ध दिलेल्या वर्षी मकर संक्रात शुक्रवारी येते कींवा येत नाही.
   (iii) संदिग्ध, हिवायाळत हैद्रबादचे तापमान कधी कधी 2°C असतो.
   (iv) सत्य, आजपर्यंतचे आपणास असलेल्या माहितीवरुन हे सत्य होते की, परंतु भविष्यात शास्त्रज्ञ इतर ग्रहावर जिव आहे हे माहित करु शकतो.
   (v) नेहमी असत्य, कुत्रा उडु शकत नाही.
   (vi) संदिग्ध लिप वर्षात फेब्रुवारी महिण्यात 29 दिवस असतात.

2. (i) असत्य, चौकोनाच्या आतिल कोनांची बेरीज 360° असते.
   (ii) सत्य, उदा. सर्व ऋण संख्या
   (iii) सत्य, समलंब चौकोनात विरुध्द बाजु एकमेकांस समांतर असतात. म्हणुन समलंब चौकोन हा समांतर चर्तुभुज होतो.
   (iv) सत्य
   (v) नाही, सर्व वर्ग संख्यांना दोन विषम संख्याच्या बेरजेत लिहिता येत नाही. उदा 9 = 4+5 (परंतु सर्व वर्ग संख्यांना विषम संख्याच्या बेरजेत लिहिता येते. 9 = 1 + 3 + 5 संख्या)

3. (i) फक्त नैसर्गिक संख्या
   (ii) नैसर्गिक संख्याची दुप्पट नेहमी सम असते.

   [उदा $2\times\frac{5}{2}=5$ (विषम संख्या)]

   (iii) कोणत्याही $x > 1, 3x + 1 > 4$ (iv) कोणत्याही $x \geq 0, x^3 \geq 0$
   (v) समभुज त्रिकोणात मध्यगा ही सुध्दा कोन दुभाजक आहे.

4. कोणतेही ऋण संख्या x y

   $-2 > -3$

   $x^2 = -2 \times -2 = 4$ (येथें $x^2 < y^2$)
   $y^2 = -3 \times -3 = 9$

अभ्यास - 15.2

1. (i) जिवन ही नाशवंत आहे.
   (ii) नाही, X ही व्यक्ती मराठी, गुजराती,पंजाबी, इत्यादी इतर राष्ट्रांशी संबंधीत आहे.
   (iii) चिमणीचा लाल जिभ असते.
   (iv) सर्व अध्यक्ष होत नाही, येथे सर्व अध्यक्ष चुस्त असतात. शिक्षक, विद्यार्थी हे सुध्दा चुस्त असु शकतात.
2. B आणि 8 कडे बदला. 8 च्या बाजुचकडे दुसरी संख्या आल्यास नियम चुकतो. अशाप्रकारे 8 च्या दुसऱ्या बाजुस स्थिरांक असला तेव्हा सुध्दा नियम चुकतो.
3. 35 उत्तर आहे.

- 'a' विधान उपयोगी पडत नाही कारण उरलेल्या सुचनेवरुन एका पेक्षा जास्त अंकाची गरज पडते.
- 'b' विधान उपयोगी पडत नाही, कारण दशमस्थानी असलेल्या संख्यपेक्षा मोठी पाहिजे आणि 7 आणि 10 यांचा गुणक पाहिजे ते 70 आहे. म्हणजे 70 मध्ये0 अंक 7 पेक्षा लहान आहे.
- 'c' विधान उपयोगी पडते. कारण 7 चे गुणक म्हणजे पुष्कळ संख्यांना काढुन टाक़ण्यासाटी उपयोगी पडते.
- 'd' विधान उपयोगी पडते कारण ही सम संख्या असल्यामुळे याने पुष्कळ संख्या काढुन टाकता येते.
- 'e' विधान उपयोगी पडत नाही. कारण 7,11 चे गुणक हा फक्त 77 आहे त्यामधील एक आणि दहम स्थानाचे अंक समान आहे. कोणताही क अंक दुसऱ्या पेक्षा मोठा नाही.
- 'f' हे विधान उपयोगी पडत नाही.
- 'g' विधान उपयोगी पडत नाही कारण यामुळे काही संख्याच उरतात.
- 'h' विधान उपयोगी पडत नाही. यामुळे फक्त 35 उरतात.

म्हणुन - 3, 4, 7 आणि 8 उपयोगी पडतात. यावरुन आपणास हवी असलेली संख्या येते.

अभ्यास - 15.3

1. (i) तिन शक्य अनुमान खाली आहेत.
   a) कोणत्याही तिन कमवार विषम संख्याचा गुणाकार हा विम संख्या आहे.
   b) कोणत्याही तिन क्मवार विषम संख्याचा गुणाकारास 3 नी भाग जातो.
   c) कोणत्याही तिन कमवार विषम संख्याचा गुणाकारामधील अंकाची बेरीज सम संख्या आहे.

   (ii) यासाठी तीन क्य अनुमान आहेत.
   a) कोणत्याही तीन कमवार संख्यांची बेरीज नेहमी सम संख्या असते.
   b) कोणत्याही तीन कमवार संख्याच्या बेरजेला नेहमी 3 नी भाग जातो.
   c) कोणत्याही तीन कमवार संख्याच्या बेरजेला नेहमी 6 नी भाग जातो.

4. $111111^2 = 12345654321$ $1111111^2 = 1234567654321$
   अनुमान सत्य आहेत.

6. अनुमान असत्य आहे. $x = 41$.

अभ्यास - 15.4

1. (i) नाही (ii) होय (iii) नाही
   (iv) होय (v) नाही

2. (i) आयताला समान कोन असतात परंतु तो चौरस नसतो.
   (ii) $x = 2; y = 3$ साठी विधान सत्य नाही
   ($x = 0; y = 1$ किंवा $x = 0, y = 0$ साठीच फक्त सत्य आहे.)
   (iii) $n = 11$ साठी $2n^2 + 11 = 253$ जी मुळ संख्या नाही.
   (iv) समान कोनाचे कोणतेही दोन त्रिकोण काढु कता परंतु दोन्हि बाजु वेगवेगळ्या असतात.
   (v) समलंब चौकोनास समान बाजु असतात पण तो चौरस होत नाही.

3. समजा x आणि y दोन विषम संख्या आहेत. तर $x = 2m + 1$ काही नैसर्गिक संख्या m साठी आणि $y = 2n + 1$ काही नैसर्गिक संख्या n साठी
   $x + y = 2\ (m + n + 1)$. म्हणुन $x + y$ 2 ने भागल्यास

4. समजा $x = 2m$ आणि $y = 2n$
   xy गुणाकार$= (2m)\ (2n)$
   $= 4\ mn$ 111

6. (i) समजा तुमची मुळ संख्या n आहे. तर आपण खालील किया करीत आहेा.

$$n \rightarrow 2n \rightarrow 2n+9 \rightarrow +n = 3n+9 \rightarrow \frac{3n+9}{3} = n+3 \rightarrow n+3+4 = n+7 \rightarrow n+7-n = 7$$

   (ii) $7 \times 11 \times 13 = 1001$ ची नोंद घ्या. कोणतीही तिन अंकी संख्या abc घ्या. तर abc $\times$ 1001 = $abcabc$. ही सहा अंकी संख्या संख्येला $abcabc$ संख्येला 7, 11 आणि 13 भाग जातो.

अभ्यासक्रम

संख्या पध्दती (50 तास) **(i) वास्तविक संख्या**	**(i) वास्तविक संख्या** • नैसर्गिक संख्या पुर्णांक संख्या, आणि परिमेय संख्यांना संख्या रेषेवर दर्शविण्याची उजळणी • अनावृत्ती/ वृत्ती दंशाश संख्या, संख्यारेषेवर मोठे करुन दर्शविणे. • परिमेय संख्या वारंवार/ आवर्ती दशांसा सारखे • $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ चे वर्गमुळ भागाकार पध्दतीने 6-दशांश स्थळा पर्यंत काढेण. • आवर्ती दशांसाची उदाहरणे जसे 1.01011011101111— 1.12112111211112— आणि $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ इत्यादी. • परिमेय नसणाऱ्या संख्या जसे $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ आणि त्यांची संख्या रेषेवरील दर्शवणुक • पायथागोरसच्या निकालावरुन प्रत्येक वास्तविक संख्येचे संख्यारेषेवर अस्तीत्व • सारणीची कल्पना • सरणीचे परिमेयकरण
बिजगणित (20 तास) **(i) बहुपदी** **(ii) दोन चलातील रेषीय समीकरणे**	**(i) बहुपदी** • एकचलीय बहुपदीची व्याख्या, उदाहरणासोबत त्यांची सहगुणक, त्यांची पदे, शुन्य बहुपदी • स्थिरसंख्या, रेषीय, वर्ग, घन, बहुपदी, व्दिपदी, त्रिपदी, बहुपदीचा शुन्य, मुळ, बहुपदीचे समीकरण. • शेषसिध्दांत उदाहरणासहीत आणि धनपुर्णांक मधील साम्य • अवयव सिध्दांताचे विधान आणि पडताळणी $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ चे अवयव विभाजन येथे a, b, c या वास्तविक संख्या आणि घन बहुपदीचे अवयव पध्दतीवरुन विभाजन.

	• बैजिक पदावली आणि समानतेची उजळणी • **खालील प्रकारच्या समानता:** $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+x^2+2xy+2yz+2zx$ $(x \pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy\,(x \pm y)$ $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$ $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ आणि बहुपदीत अवयव पाडण्यासाठी यांचा उपयोग. साधी समीकरणे याचे बहुपदीचे रुपांतर **(ii) दोन चलातील रेषीय समीकरणे** • एक चलीय रेषीय समीकरणाची उजळणी • दोन चलातील रेषीय समीकरणाची उजळणी • दोन चलातील रेषीय समीकरणाचा सोडवणुक • दोन चलातील रेषीय समीकरणाचा आलेख • x-अक्षा आणि y-अक्षाला समांतर असलेल्या रेषेचे समीकरण • x-अक्ष अणि y- अक्षाचे समीकरण
सह निर्देशन भुमिती **(5तास)**	**सहनिर्देशन भुमिती** • Cartesian (कार्तेशियन) प्रणाली(पध्दत) • सहनिर्देशांक दिले असता त्यास प्रतलात विस्थापन करणे
भुमिती (40 तास) **(i) भुमितीचे मुळ** **(ii) रेषा आणि कोन** **(iii) त्रिकोण** **(iv) चौकोन** **(v) क्षेत्रफळ** **(vi) वर्तुळ** **(vii) भुमितीय रचना**	**(i) भुमितीचे मुळ** • इतिहास - भारतात युक्लीड आणि भुमिती युक्लीडच्या पध्दतीवरुन व्याख्या सामान्य वैक्पीक रित्या लिहिने स्वयंसिध्द तत्व आधारातत्व आणि सिध्दांतास गणितातील कठोर तत्वज्ञानाचे निरिक्षण औपचारीके पणे करणे • दोन बिंदुतुन जाणारी एक सरळ रेषा • दोन विभीन्न रेषेवर एकापेक्षा जास्त सामाईक बिंदु नसतो(सिध्दता)

(ii) रेषा आणि कोन

- एका रेषेवर एखादे किरण असल्यास दोन्ही संलग्न कोनाची बेरीज 180^0 असते आणि त्याचा व्यत्यास.
- जर दोन रेषा छेदल्यास शिर्षाभीमुख कोन समान असतात.(सिध्दता)
- दोन समांतर रेषांना एका रेषेने छेदले असता तयार होणारे सदृष्य कोन एकांतर कोन, अंतर कोन
- दिलेल्या रेषेला असणारी समांतर रेषा समांतर असणे.
- त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांची बेरीज 180^0 असते.
- एका त्रिकोणाची कोणतीही बाजु वाढविल्यास तयार झालेल्या बाह्य कोन त्याच्या दोन विरुध्द आतील कोनांच्या बेरजेला समान असते.

(iii) त्रिकोण

- एका त्रिकोणातील कोणत्याही दोन बाजु आणि त्यामधील कोन दुसऱ्या त्रिकोणातील कोणत्याही दोन बाजु आणि त्यामधील कोनाशी समान असल्यास तर ते दोन त्रिकोण एकरुप होतात.(बा.को.बा. गुणधर्म)
- एका त्रिकोणातील दोन कोन आणि त्या मधील बाजु अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन कोन आणि त्यामधील बाजुला समान असल्यास ते दोन त्रिकोण एकरुप असतात(को.बा.को गुणधर्म)
- एका त्रिकोणाच्या तिन बाजु अनुक्रमे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तिन बाजुशी समान असल्यास ते दोन त्रिकोण एकरुप असतात (बा.बा.बा.)
- एका काटकोन त्रिकोणातील कर्ण आणि एक बाजु अनुक्रमे दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाच्या कर्ण आणि बाजुशी समान असल्यास ते दोन काटाकोन त्रिकोण एकरुप असतात.
- एका त्रिकोणात समान बाजुसमोरील कोन समान असतात. (सिध्दता)
- एका त्रिकोणात समान कोना समोरील भुजा (बाजु) समान असतात.
- त्रिकोणाच्या असमानतेचे गुणधर्म कोन, त्या समोरील बाजुंचा संबंध त्रिकोणामधील असमानता.

(iv) चौकोन (चर्तुभुज)

- (सिध्दता) एका समांतर चर्तुभुजाच्या कर्ण त्या एकरुप त्रिकोणात विभागतो.
- (कारणीभुत) एका समांतर चर्तुभुजात विरुध्द बाजु समान आणि या उलट (व्यत्यास)
- (कारणी भुत) समांतर चर्तुभुजात विरुध्द कोन समान असमान आणि व्यत्यास
- एका चौकोनात विरुध्द कोनांची एक जोडी समांतर आणि समान असल्यास तर तो समांतरचर्तुभुज होतो.
- समांतर चर्तुभुजात कर्ण एकमेकांस दुभागातात आणि व्यत्यास खरा असतो.
- एका त्रिकोणात कोणत्याही दोन बाजुच्या मध्य बिंदुना जोडणारा रेषाखंड तिसऱ्या बाजुस समांतर असते आणि त्याचा व्यत्यास खरा असतो.

(v) क्षेत्रफळ

- क्षेत्रफळाची कल्पना, समतल प्रांताचे क्षेत्राचे क्षेत्रफळ उजळणी
- आयताच्या क्षेत्रफळाची उजळणी
- एकाच पाया आणि एकाच रेषेमधील आकृत्या
- एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमधील तयार झालेल्या समांतर चर्तुभुजाला सारखे क्षेत्रफळ असते(सिध्दता)
- (कारणीभुत) एकाच पाया आणि एकाच समांतर रेषेमधील त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ समान असते आणि त्याच्या व्यत्यास

(vi) वर्तुळ

- उदाहरणाव्दारे वर्तुळाची कल्पनेशी संबंधीत व्याख्याख
- (सिध्दता) एका वर्तुळातील समान लांबीच्या जिवा वर्तुळ केंद्राशी केलेला कोन समान आणि व्यत्यास कारणीभुत होते.
- वर्तुळाच्या केंद्रावरुन जिवेवर काढलेला लंब त्या जिवेस दुभागते आणि त्या उलट, केंद्रातुन काढलेली रेषा जिवेस दुभागुन ती जागेवर लंब असते.

	• (प्रवृत्त करणे) तिन नैकरेषीय बिंदुतुन फक्त एकच आणि एकच वर्तुळ काढता येते. • (प्रवृत्त करणे) वर्तुळाच्या समान जिवा (किंवा एकरुप त्रिकोण) या त्याच्या केंद्रापासुन समान अंतरावर असमान आणि या उलट • (सिध्दता) केंद्रबिंदुवर कंसाने तयार केलेला कोन हा त्याने वर्तुळाच्या उरलेल्या कोणत्याही भागावर केलेल्या कोनाच्या दुप्पट असते. • (प्रवृत्त करणे) कोणत्याही दोन बिंदुना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्या एकाच बाजुवर असलेले दुसरे दोन बिंदुशी समान कोन केल्यास ते चार बिंदु चक्रीय होतात. • (प्रवृत्त करणे) एका चक्रिय चर्तुभुजातील प्रत्येंक विरुध्द कोनाच्या जोडीची बेरीज 180^0 असते आणि त्याचा व्यत्यास
	(vii) रचना • पाया, दोन बाजुमधील फरक किंवा बेरीज आणि आधार कोन दिला असता त्रिकोणाची रचना. • परिमीती आणि आधार कोन दिला असता त्रिकोणाची रचना • जिवा आणि कोन दिला असता वर्तुळाचा वर्तुळखंडाची रचना
महत्व मापण (15 तास) **(i) पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि घनफळ**	**(i) पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ आणि घनफळ** • घन आणि घनाभाच्या क्षेत्रफळ आणि घनफळाची उजळणी • दंडगोल, शंकु, गोल, अर्धगोल यांचे क्षेत्रफळ • दंडगोल, शंकु, गोल, (अर्धगोलाला मिळवुन) याचे घनफळ आणि उभा वर्तुळाकार दंडगोल/शंकु
सांख्यिकी आणि संभाव्यता (15 hrs) **(i) सांख्यिकी** **(ii) संभाव्यता**	**(i) सांख्यिकी** • असंग्रहीत आणि संग्रहीत वारंवारता वितरणाची उजळणी. • असंग्रहीत वारंवारता वितरणाचा (वजनाची गणना) मध्य, मध्यक आणि बहुलक **(ii) संभाव्यता** • प्रयोगाव्दारे ग्राफ माहितीवरुन संभाव्यताची जाणीव होणे. नाण्यांना फास्यांना वर फेकणे. • 1 ते 6 पर्यंची मोजणी करुन अंकाची विभागणी करणे.

	• नाण्यांच्या निरिक्षणाची तुलना नाण्याणे वर फेकल्यास निरिक्षण करणे, अनिर्बधतेचे संकेत चिन्ह • नाणेफेक, फासे फेकण्या सारख्या घटनांमध्ये कल्पनाचे एकत्रिकरण आणि सामान्य करण • सारखे नाणे किंवा फासे वारंवार फेकतांना त्याची वारंवारता निष्पत्ती दृष्यमान दर्शवणुक • जास्त संख्येत फासे/नाणे एकत्र फेकुतांना आणि परिणामाचे आकलन वैयक्तीक घटना जास्त संख्येत येण्यासाठी करणे. • वारंवार येणाऱ्या घटनावर सरासरी संख्याचे निरिक्षण. नाण्याच्या माहितीसाठी तुलना करणे. निर्भदय, कल्पना फेकण्याचे पध्दत
गणितातील सिध्दता **(5 तास)** **(i) गणितातील सिध्दता**	**(i) गणितातील सिध्दता** • गणितीय विधान त्याची पडताळणी • गणितातील कारणे, निगमन करणे. • प्रमेय, अनुमान आणि स्वयंसिध्दता • गणितीय सिध्दता काय आहे?

शैक्षणिक प्रमाण

विद्यार्थ्यांला काय माहित असायला पाहिजे आणि काय काय केले पाहिजे याबद्दलचे सुरळीत विधान म्हणजेच शैक्षणिक प्रमाण होय.या शैक्षणिक प्रमाणास खालील भागात वर्गीकरण केले.

1. समस्या (प्रश्न) सोडवा

गणितीय भाव आणि पध्दतीचा वापर करुन गणितीय प्रश्न सोडविणे.

अ. प्रश्नांचे प्रकार

प्रश्न वेगवेगळ्या रुपात असतात. जसे कोडे, लेखी प्रश्न, चित्ररुपात प्रश्न पध्दतीनुसार सोडविणारे गणित, माहितीचे वाचन, तक्ते, आलेख इत्यादी.

ब. प्रश्न सोडविण्याच्या पायऱ्या

- प्रश्न वाचा
- दिलेले सर्व माहिती ओळखणे
- संबंधीत माहिती वेगळी करणे.
- त्या मध्ये असलेले भाव समजुन घेणे.
- संबंधीत प्रणाली, सुत्रे इत्यादीची उजळणी
- पद्धतीची निवड करणे
- प्रश्न सोडविणे
- उत्तराचा पडताळा सिध्दांतावर आधारीत प्रश्न

क. संक्लीष्टता

प्रश्नांची क्लिष्टता खालील गोष्टीवर अवलंबुन आहे.

- संबंध बनविणे
- प्रश्नातील पायऱ्यांची संख्या
- प्रश्नांतील क्रियांची संख्या
- प्रश्न सोडविण्यासाठी दिलेली संदर्भ माहिती कशी आहे.
- प्रश्नातील पद्धतीचे स्वरुप

कारणे सिद्धता

- वेगवेगळया पायऱ्यांमधील कारणे दाखविणे.
- गणिताचे सामान्य करण आणि अनुमानाचे अर्थ समजुन घेणे.
- पध्दतीस समजुन घेणे आणि न्याय देणे.

- वादाची पाहाणी करणे, तर्क
- आगमन आणि निगमन तर्काचा वापर.
- गणितीय अनुमानाची पडताळणी करा.

व्यक्तीकरण

- गणितीय पदावलीला वाचने आणि लिहिने जसे (शाब्दीक आणि संज्ञारुप)

  उदा. $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, कोनांची बेरीज $= 180^0$
- गणितीय पदावली तयार करणे.
- गणिताच्या उपयास स्वतःच्या भाषेत स्पष्ट करणे जसे चौरस ही चार समान बाजु चार समान कोनांनी बनलेली आकृती आहे.
- गणितीय पद्धतीला स्पष्ट करणे, जसे दोन अंकीस संख्येच्या बेरजेमध्ये सुरुवालीला एकम स्थानाच्या अंकाची बेरीज करणे आणि नंतर दहम (दशम) स्थानातील अंकाची बेरेजी करणे (हातचे घेणे विसरु नका)
- गणितीय तर्काचे स्पष्टीकरण

अनुसंधान

- गणितीय प्रांतामधील भावांचे अनुसंधान करणे, जसे गुणाकाराशी बेरजेचा संबंध, पुर्ण संख्येमधील भागाचे गुणोत्तर आणि भागाकारा, नमुने आणि सममीती, मापण आणि जागा
- दैनंदिन जिवनाशी संबंध बनविणे.
- वेगवेगळ्या विषयाशी गणिताचा अनुसंधान करणे.
- गणितातील वेगवेगळ्या पाठ्यांशी संबंधीत भावनेला अनुसंधान करणे जसे, माहिती हाताळणे आणि अंकगणित किंवा आणि प्रदेश
- अनेक प्रकारच्या पध्तीच्या संकल्पनेचा अनुसंधान करणे.

दृष्यकरण आणि दर्शवणुक

- तक्त्यातील माहिती वाचुन त्याचे स्पष्टीकरण करणे जसे संख्यारेखा, चित्रालेख, स्तंभोलख, 2-D आकृती, 3-D आकृती आणि चित्र
- सारणी बनविणे, संख्या रेषा, चित्रालेख, स्तंभालेख,आकृती बनविणे.
- गणितीय संज्ञा आणि आकृत्या