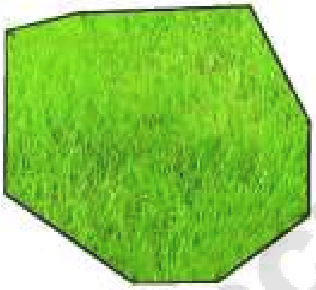
వైశాల్యం - చుట్టుకొలత

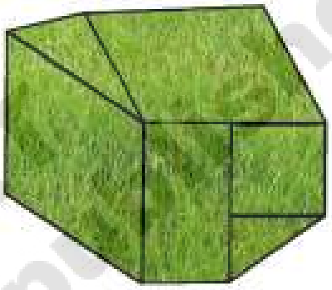
13

13.0 పరిచయం

ఇరా తన పొలం (పటం -1) వైశాల్యం కనుగొనాలని అనుకొంది. కాని ఇది క్రమకారంలో లేదని గుర్తించింది. కావున ఇరా తన పొలంను (పటం-2) లో చూపిన విధంగా త్రిభుజం, దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, రాంబస్ మొదలైన క్రమాకార రూపాలుగా విభజించింది. ఈ క్రమాకార ఆకారాలన్నింటి వైశాల్యంను కనుగొన గలిగితే తన పొలం మొత్తం వైశాల్యంను కనుక్కోవచ్చునని భావించింది.



పటం -1



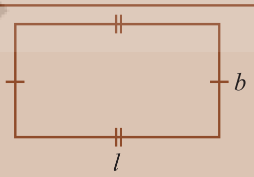
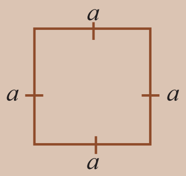
పటం -2

©SCERT not to be republished

దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రంల యొక్క చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలను ఎలా కనుగొంటామో మనం కింది తరగతులలో నేర్చుకున్నాం. ఈ అధ్యాయంలో త్రిభుజం, సమాంతర చతుర్భుజం, సమ చతుర్భుజం (రాంబస్) వైశాల్యాలను ఎలా కనుగొంటామో తెలుసుకుందాం. ముందుగా చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రాల చుట్టుకొలత, వైశాల్యాల గురించి కింది తరగతులలో మనమేమి నేర్చుకున్నామో గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

అభ్యాసం 1

1. కింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూరించండి.

పటం	ఆకారం	వైశాల్యం	చుట్టుకొలత
	దీర్ఘచతురస్రం	$l \times b = lb$	________
	చతురస్రం	________	4a

2. కొన్ని చతురస్రాల కొలతల వివరాలు కింది పట్టికలో ఇవ్వబడినాయి. అయితే ఇవి అసంపూర్తిగా ఉన్నాయి. వీటిని గణించి పూర్తి చేయండి?

చతురస్ర భుజం	వైశాల్యం	చుట్టుకొలత
15 సెం.మీ.	225 చ.సెం.మీ.	
		88 సెం.మీ.

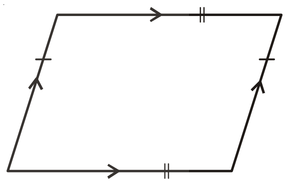
3. కొన్ని దీర్ఘచతురస్రాలకు సంబంధించిన కొలత వివరాలు కింది పట్టికలో అసంపూర్తిగా ఇవ్వబడినాయి. అసంపూర్తిగా ఉన్న వివరాలను గుర్తించి పూరించండి?

పొడవు	వెడల్పు	వైశాల్యం	చుట్టుకొలత
20 సెం.మీ.	14 సెం.మీ.		
	12 సెం.మీ.		60 సెం.మీ.
15 సెం.మీ.		150 సెం.మీ.^{2}	

© SCERT not to be republished

13.1 సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

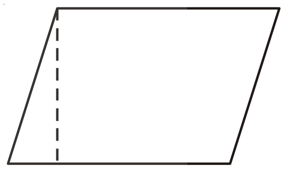
పక్క పటం-1 ఆకారాన్ని చూడండి. ఇది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. దీని వైశాల్యంను ఎలా కనుగొంటామో నేర్చుకుందాం.



పటం -1

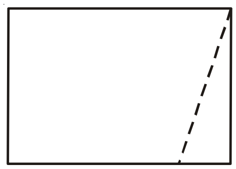
కృత్యం 1

- కాగితంపై ఒక సమాంతర చతుర్భుజం (పటం-2) ను గీయండి.
- ఈ సమాంతర చతుర్భుజంను కాగితం నుండి కత్తిరించి వేరు చేయండి.
- పటం 2లో చూపిన విధంగా చుక్కల గీత వెంట కత్తిరించి త్రిభుజంను, సమాంతర చతుర్భుజం నుంచి వేరు చేయండి.



పటం -2

- కత్తిరించిన త్రిభుజం పటం-3 లో చూపిన విధంగా సమాంతర చతుర్భుజంనకు మరొక వైపు అమర్చండి. అయితే ఈ రెండు కాగితం ముక్కలను కలపడం వలన దీర్ఘ చతురస్రం ఏర్పడింది.

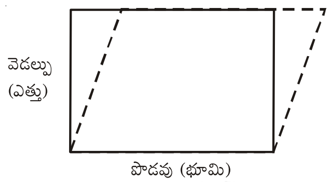


పటం -3

పటం (2) లోని సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం, పటం (3)లోని దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యంనకు సమానమే అని చెప్పవచ్చా? సమానమే అని మీరు కనుక్కోవచ్చు.

కింది కృత్యం నుంచి సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం సమానమని గుర్తించగలం.

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, పొడవు × వెడల్పునకు సమానమని మనకు తెలుసు. దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమికి మరియు దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వెడల్పు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తుకు సమానమని కూడా మనకు తెలుసు.

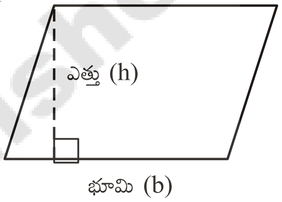


కాబట్టి సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం

= పొడవు × వెడల్పు

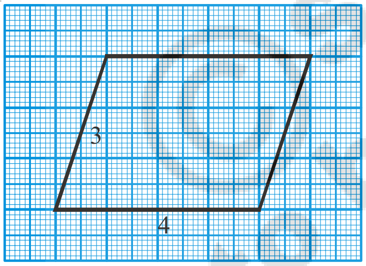
= భూమి × ఎత్తు (పొడవు = భూమి, వెడల్పు = ఎత్తు)

కావున సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం దాని భూమి (b) మరియు అనురూప ఎత్తు అనగా (h) ల లబ్ధానికి సమానం అనగా A = bh.



ఉదాహరణ 1 : (i), (ii) పటాలలో ఇవ్వబడిన సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలను కనుగొనుము.

(i)



సాధన :

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి (b) = 4 యూనిట్లు.

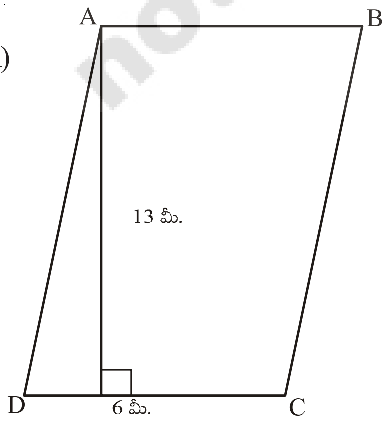
సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు (h) = 3 యూనిట్లు.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం (A) = bh

కాబట్టి, A =4 × 3 = 12 చ. యూనిట్లు.

అందుచే సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 12 చ.యూనిట్లు.

(ii)



సాధన :

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి (b) = 6 మీ.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు (h) = 13 మీ.

వైశాల్యం (A) = bh

కాబట్టి A =6×13 = 78 మీ.^{2}

ABCD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = 78 చ.మీ.^{2}

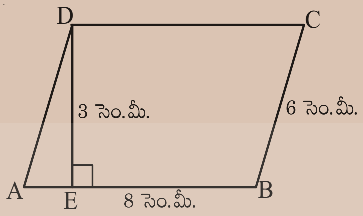
not to be republished SCERT

ప్రయత్నించండి.

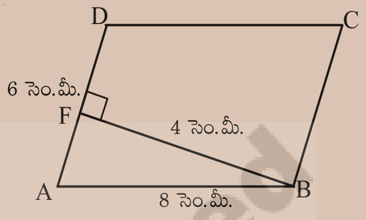
ABCD సమాంతర చతుర్భుజం పటం – 1 యొక్క భుజాలు 8సెం.మీ., 6 సెం.మీ. అయిన సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి పొడవు ఎంత? ఎత్తు ఎంత? దాని వైశాల్యం ఎంత?

పటం – 2 లోని సమాంతర చతుర్భుజంలో భూమి ఏది? ఎత్తు ఏది? దీని వైశాల్యం ఎంత?

పటం – 1 మరియు పటం – 2 లో వైశాల్యాలు సమానమేనా?

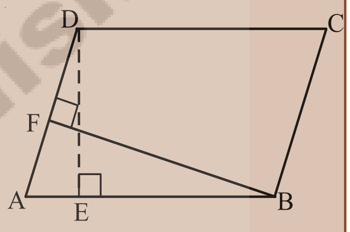


పటం – 1



పటం – 2

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఏ భుజాన్నైనా దాని భూమిగా ఎంచుకోవచ్చు లేదా తీసుకోవచ్చు. పటం–1లో AB మీదకు గీయబడిన లంబం $\overline{DE}$ కనుక ఈ సమాంతర చతుర్భుజంలో భూమి $\overline{AB}$, ఎత్తుగా $\overline{DE}$ అవుతుంది. అదే విధంగా పటం –2లో $\overline{AD}$ పైకి గీయబడిన లంబం $\overline{BF}$ కనుక ఈ సమాంతర చతుర్భుజంలో AD భూమి. ఎత్తు $\overline{BF}$ అవుతుంది.

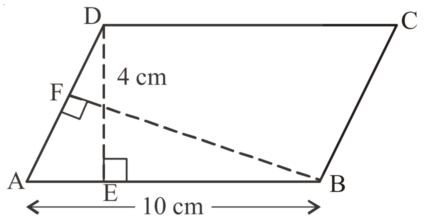


ఇవి చేయండి.

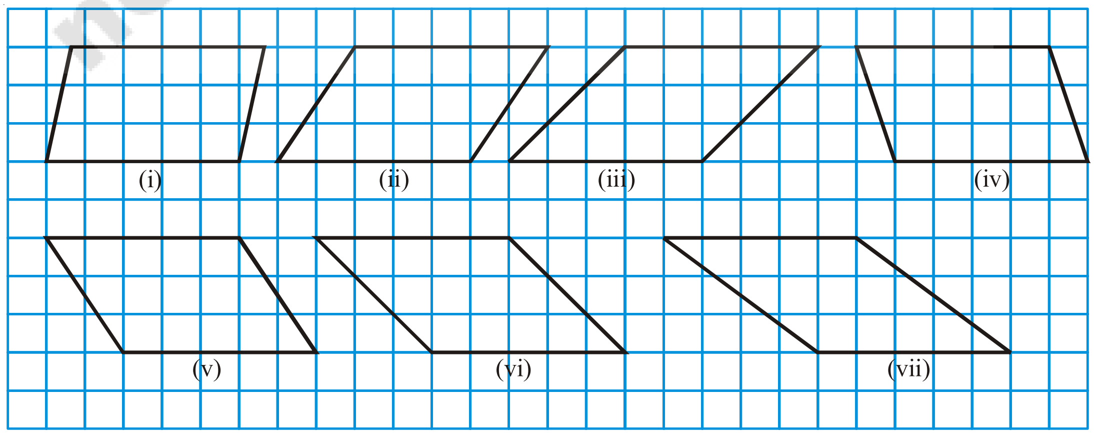
1. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో $\overline{AB}$ = 10 సెం.మీ. $\overline{DE}$ = 4 సెం.మీ. అయిన కింది వాటిని కనుక్కోండి.

(i) ABCD వైశాల్యం

(ii) $\overline{AD}$ = 6 సెం.మీ. అయిన $\overline{BF}$ యొక్క పొడవు



2. కింది పటాలను జాగ్రత్తగా పరిశీలించండి.



© SCERT not to be republished

(i) ప్రతీ సమాంతర చతుర్భుజంలోని గళ్ళు (చతురస్రాల)ను లెక్కించుట ద్వారా దాని వైశాల్యమును కనుగొనండి? ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజంలో అసంపూర్ణ చతురస్రాలను లెక్కించునపుడు రెండు అసంపూర్ణ చతురస్రాలు కలిసి ఒక చతురస్రం అయ్యేలా తీసుకోండి.

వీటి ఆధారంగా కింది పట్టికను పూరించండి?

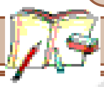
సమాంతర చతుర్భుజం	భూమి	ఎత్తు	వైశాల్యం	లెక్కించిన చతురస్రాల ఆధారంగా వైశాల్యం		
				పూర్తి చతురస్రాల సంఖ్య	అసంపూర్ణ చతురస్రాల సంఖ్య	మొత్తం
(i)	5 యూనిట్లు	3 యూనిట్లు	5 × 3 = 15 చదరపు యూనిట్లు	12	6	15
(ii)						
(iii)						
(iv)						
(v)						
(vi)						
(vii)						

(ii) సమాన భూమి, సమాన ఎత్తు గల సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉంటాయా?

ప్రయత్నించండి.

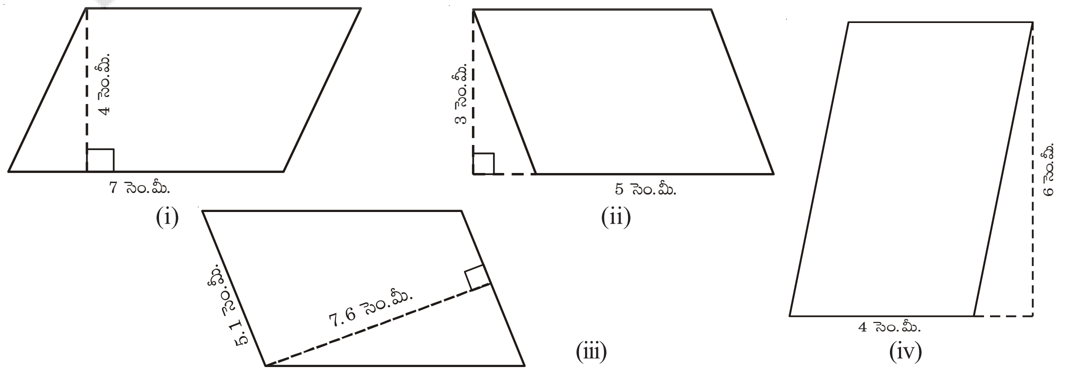
(i) దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యాలను కనుగొనుటకు ఉపయోగించే సూత్రాలు ఒకే విధంగా ఎందుకు ఉన్నాయి.

(ii) ప్రతీ దీర్ఘచతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజమైంది. కానీ ప్రతీ సమాంతర చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘచతురస్రము కాకపోవచ్చు వివరించండి.



అభ్యాసం - 2

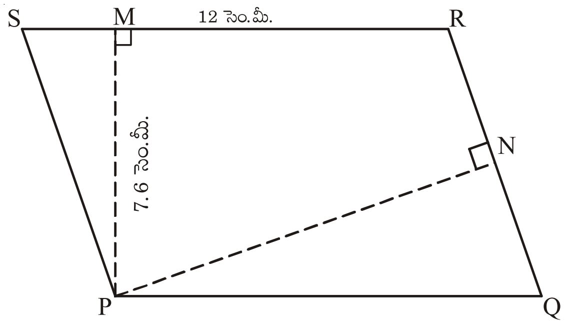
1. ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి?



(i) (ii) (iii) (iv)

© SCERT not to be republished

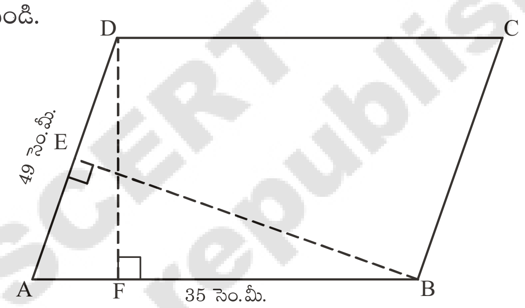
2. PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. P నుండి $\overline{SR}$ పైకి గీయబడిన లంబం $\overline{PM}$. మరియు P నుండి $\overline{QR}$ పైకి గీయబడిన లంబం $\overline{PN}$. $\overline{SR}$ = 12 సెం.మీ. PM = 7.6 సెం.మీ. అయిన



(i) PQRS సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యమెంత?

(ii) $\overline{QR}$ = 8 సెం.మీ. అయిన $\overline{PN}$ విలువను కనుగొనండి?

3. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో $\overline{DF}$, $\overline{BE}$ లు వరుసగా $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ ల పైకి గీయబడిన లంబాలు. $\overline{AB}$ = 35 సెం.మీ. $\overline{AD}$ = 49 సెం.మీ. మరియు సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం 1470 సెం.మీ.^{2} అయిన BE, DF లను కనుగొనండి.



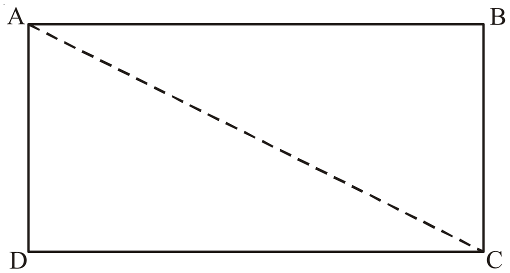
4. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు, దాని భూమిలో 1/3 వ వంతు ఉంది. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 192 సెం.మీ.^{2} అయిన దాని భూమిని, ఎత్తును కనుగొనండి?

5. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి, ఎత్తులు 5:2 నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం 360 చ.మీ. అయిన దాని భూమి మరియు ఎత్తులను కనుగొనండి?

6. ఒక చతురస్రం, మరియు ఒక సమాంతర చతుర్భుజంల యొక్క వైశాల్యం సమానం. చతురస్రం యొక్క భుజము 40 మీ. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు 20మీ. అయిన సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమిని కనుగొనండి.

13.2 త్రిభుజ వైశాల్యం

13.2.1 దీర్ఘచతురస్రంలో భాగాలుగా త్రిభుజాలు



ఒక దీర్ఘచతురస్రాన్ని ఒక కాగితంపై గీయండి. దీనిని పటంలో చూపిన విధంగా దాని కర్ణము వెంట కత్తిరించగా ఏర్పడిన రెండు త్రిభుజాలను తీసుకోండి.

వీటిని ఒక త్రిభుజంపై మరొక త్రిభుజం ఏకీభవించునట్లుగా ఉంచండి. ఈ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమేనా? రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమని చెప్పవచ్చా?

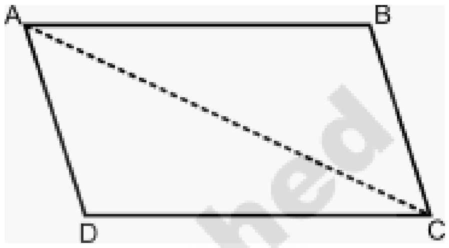
© SCERT not to be republished

ఈ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం. అందుచే దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాల మొత్తంనకు సమానం.

కాబట్టి, త్రిభుజం వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ (దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం)

$$= \frac{1}{2} \times (l \times b) = \frac{1}{2}\, lb$$

13.2.2 సమాంతర చతుర్భుజాలలో భాగాలుగా త్రిభుజాలు



పటంలో చూపిన విధంగా కాగితంపై ఒక సమాంతర చతుర్భుజంను గీయండి. దీనిని రెండు త్రిభుజాలుగా కర్ణము వెంట కత్తిరించుము. ఏర్పడిన రెండు త్రిభుజాలను ఒక దానిపై మరొకటి ఉంచండి. ఈ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమేనా?

సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం దాని భూమి, ఎత్తుల లబ్ధానికి సమానం అని మనకు తెలుసు కాబట్టి,

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ (సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం)

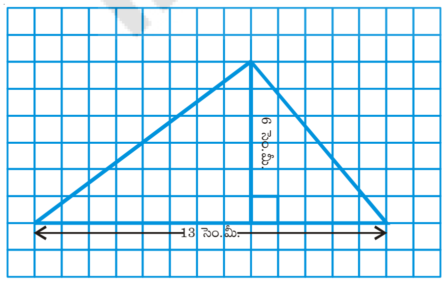
$= \frac{1}{2} \times$ (భూమి × ఎత్తు)

$= \frac{1}{2} \times b \times h \quad = \frac{1}{2}\, bh$

అందుచే ఒక త్రిభుజవైశాల్యం దాని భూమి (b), ఎత్తు (h)ల లబ్ధంలో సగానికి సమానం.

అనగా త్రిభుజ వైశాల్యం $A = \frac{1}{2}\, bh$

ఉదాహరణ 2 : కింది పటంలోని త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.



సాధన :

త్రిభుజ భూమి (b) = 13 సెం.మీ.

త్రిభుజ ఎత్తు (h) = 6 సెం.మీ.

త్రిభుజ వైశాల్యం (A) $= \frac{1}{2}$ (భూమి × ఎత్తు) లేదా $= \frac{1}{2}\, bh$

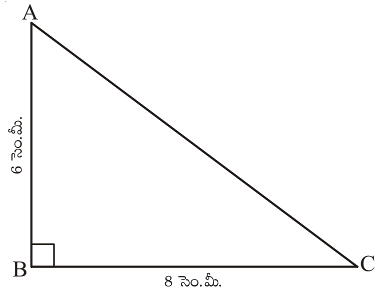
కాబట్టి, $A = \frac{1}{2} \times 13 \times 6$

$= 13 \times 3 = 39$ చ.సెం.మీ.

త్రిభుజ వైశాల్యం = 39 చ.సెం.మీ.

©SCERT not to be republished

ఉదాహరణ 3 : త్రిభుజం ABC యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి



త్రిభుజం యొక్క భూమి (b) $= 8$ సెం.మీ.

త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు (h) $= 6$ సెం.మీ.

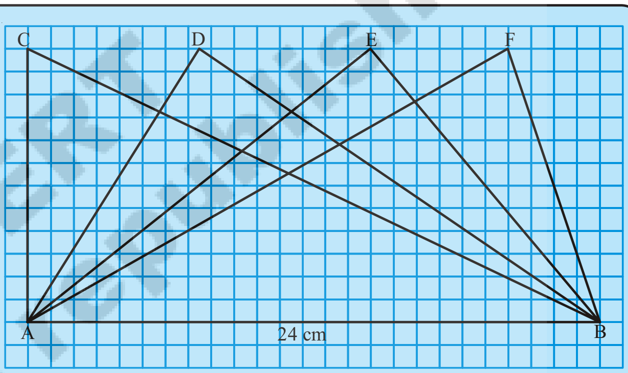
త్రిభుజ వైశాల్యం (A) $= \frac{1}{2}$ bh

కాబట్టి, త్రిభుజ వైశాల్యం $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ సెం.మీ.^{2}

అందుచే ABC త్రిభుజ వైశాల్యం $= 24$ సెం.మీ.^{2}

లంబకోణ త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలలో దేనినైనా ఎత్తుగా తీసుకోవచ్చని గమనించగలరు.

ప్రయత్నించండి.



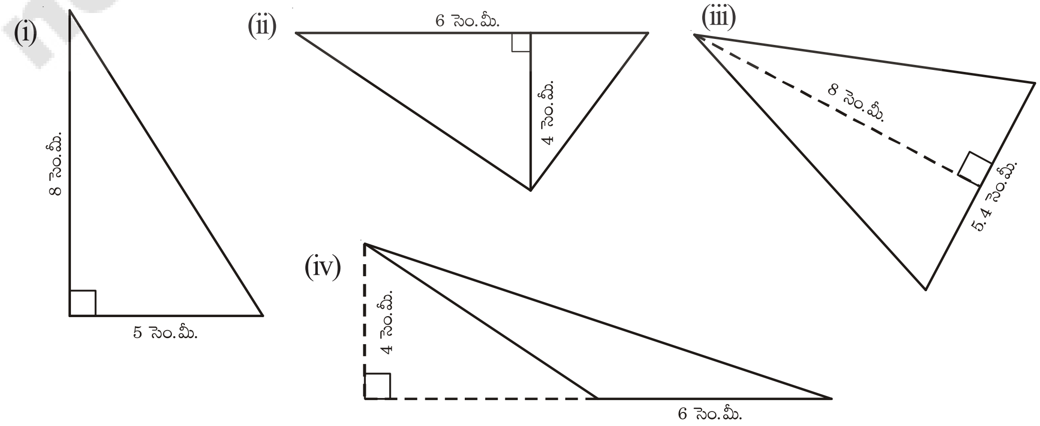
పక్క పటంలో అన్ని త్రిభుజాలు ఒకే భూమి AB = 24 సెం.మీ. పై గీయబడినవి. ఒకే భూమి AB పై గీయబడిన అన్ని త్రిభుజాల ఎత్తులు సమానమేనా?

అన్ని త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమేనా? నీ సమాధానానికి తగిన కారణాలు తెలపండి.

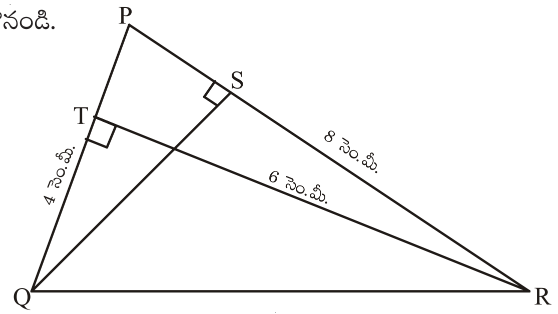
ఈ త్రిభుజాలు సర్వసమానం కూడా అవుతాయా?

అభ్యాసం - 3

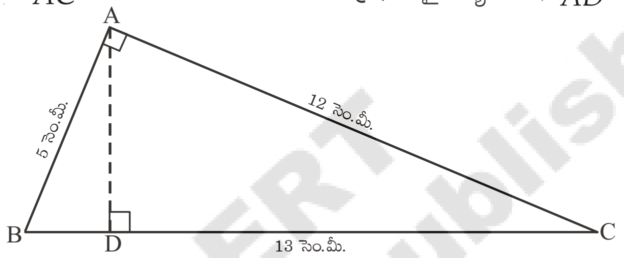
1. కింది త్రిభుజాల వైశాల్యాలను కనుగొనండి.



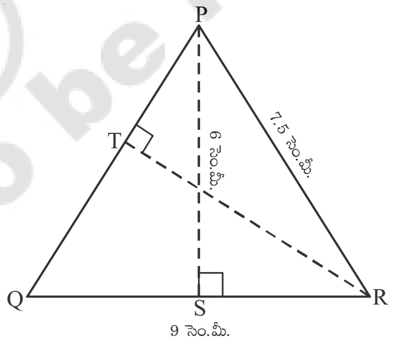
2. ΔPQR లో $\overline{PQ} = 4$ సెం.మీ., $\overline{PR} = 8$ సెం.మీ., $\overline{RT} = 6$ సెం.మీ. అయిన (i) ΔPQR వైశాల్యంను (ii) $\overline{QS}$ పొడవును కనుగొనండి.



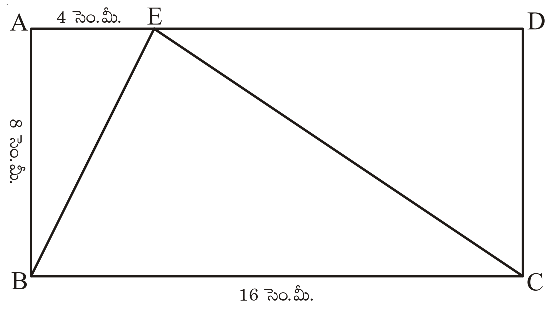
3. ΔABC లో A వద్ద లంబకోణం కలదు. $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ పైకి గీయబడిన లంబం. AB = 5 సెం.మీ., $\overline{BC} = 13$ సెం.మీ. $\overline{AC} = 12$ సెం.మీ.అయిన ABC త్రిభుజ వైశాల్యమును, $\overline{AD}$ పొడవును కనుగొనండి?



4. PQR ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం. $\overline{PQ} = \overline{PR} = 7.5$ సెం.మీ. మరియు $\overline{QR} = 9$ సెం.మీ. P నుంచి $\overline{QR}$ పైకి గీయబడిన ఎత్తు $\overline{PS}$ = 6 సెం.మీ. అయిన ΔPQR వైశాల్యంను మరియు $\overline{RT}$ పొడవును కనుగొనండి?



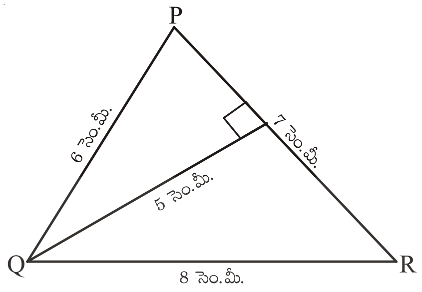
5. ABCD దీర్ఘచతురస్రంలో $\overline{AB} = 8$ సెం.మీ., $\overline{BC} = 16$ సెం.మీ., $\overline{AE} = 4$ సెం.మీ. అయిన ΔBCE వైశాల్యంను కనుగొనండి? ΔBAE, ΔCDE త్రిభుజాల వైశాల్యాల మొత్తం, ΔBEC వైశాల్యం సమానమేనా? ఎందుకు?



© SCERT not to be republished

6. రాము PQR త్రిభుజ వైశాల్యం $A = \frac{1}{2} \times 7 \times 5$ సెం.మీ.^{2} అని చెప్పాడు.

గోపి, అదే త్రిభుజ వైశాల్యం $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5$ సెం.మీ.^{2} అని చెప్పాడు. ఎవరు సరిగా చెప్పారు? ఎందుకు?

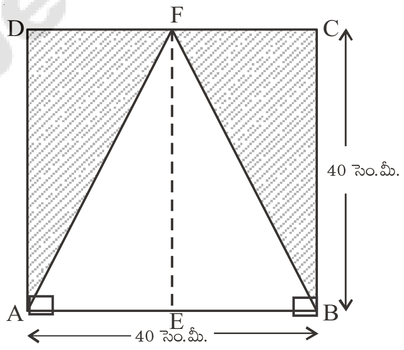


7. ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం 220 సెం.మీ.^{2} దాని ఎత్తు 11 సెం.మీ. అయిన దాని భూమిని కనుగొనండి?

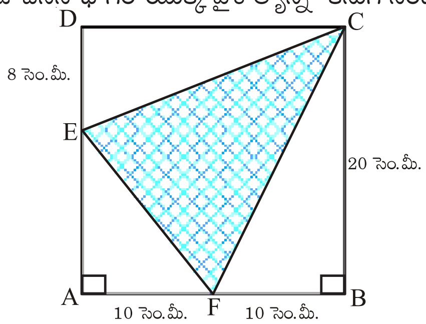
8. ఒక త్రిభుజం ఎత్తు దాని భూమికి రెండు రెట్లు ఉంది. త్రిభుజ వైశాల్యం 400 సెం.మీ.^{2} అయిన త్రిభుజ భూమిని, ఎత్తును కనుగొనండి?

9. ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యంనకు సమానం. దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పులు వరుసగా 20 సెం.మీ., 15 సెం.మీ. త్రిభుజం యొక్క భూమి 30 సెం.మీ. అయిన త్రిభుజం యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి?

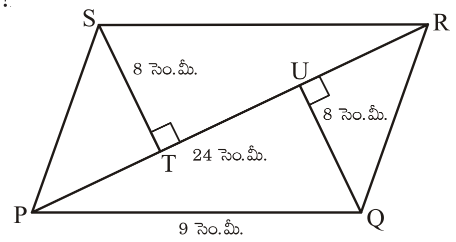
10. పటం ABCD లో షేడ్ చేయబడిన భాగం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి? ($\overline{DF} = \overline{CF}$)



11. ABCD పటంలో షేడ్ చేసిన భాగం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి?



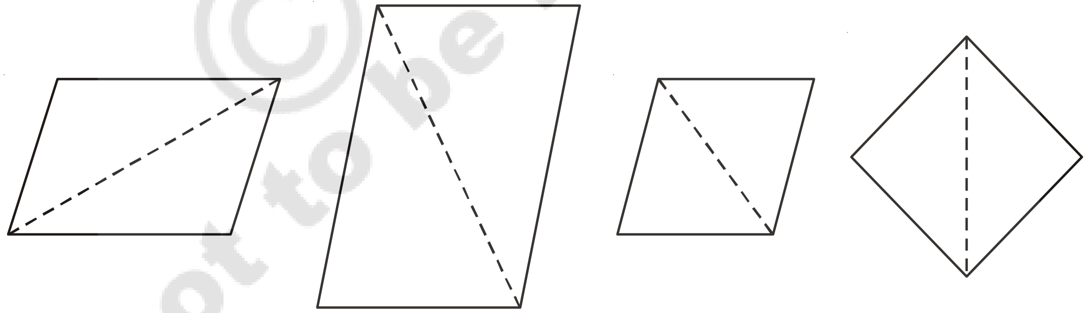
12. PQRS సమాంతర చతుర్భుజంలో $\overline{PR} = 24$ సెం.మీ. మరియు $\overline{QU} = \overline{ST} = 8$ సెం.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం కనుగొనండి?



13. ఒక త్రిభుజం యొక్క భూమి, ఎత్తులు 3:2 నిష్పత్తిలో కలవు. త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం 108 సెం.మీ.^{2} అయిన దాని భూమి, ఎత్తులను కనుగొనండి?

13.3 సమచతుర్భుజం (రాంబస్) యొక్క వైశాల్యం

సంతోష్, అఖిల మంచి మిత్రులు. కాగితంతో వివిధ ఆకారాలను కత్తిరించి వాటితో ఆడుతున్నారు. ఒకరోజు సంతోష్ వివిధ త్రిభుజాల ఆకారాలను అఖిలకు ఇచ్చాడు. అఖిల వాటితో వేరువేరు ఆకారాలు కల్గిన సమాంతర చతుర్భుజాలను ఏర్పరచింది. ఈ సమాంతర చతుర్భుజాలు కింద చూపబడినవి.



"వీటిలో అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉన్న సమాంతర చతుర్భుజాలు ఏవి?" అని సంతోష్ అఖిలను అడిగాడు.

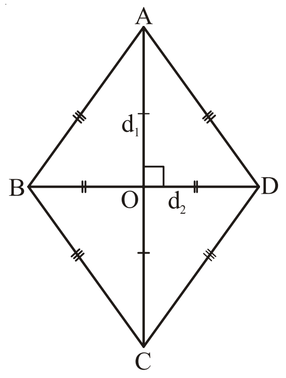
దానికి అఖిల "చివరి రెండు" సమాన భుజాలు కల్గి ఉన్నాయి అని తెలిపింది.

వెంటనే సంతోష్ **"ఈ విధంగా అన్ని భుజాలు సమానంగా గల సమాంతర చతుర్భుజాన్ని సమచతుర్భుజం (రాంబస్) అంటాం".** అని తెల్పాడు.

మనమిప్పుడు సమచతుర్భుజం వైశాల్యాన్ని ఎలా గణించవచ్చో నేర్చుకుందాం!

త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనడానికి సమాంతర చతుర్భుజంను రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా ఎలా విభజించామో, అదే పద్ధతిని సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనుటలో కూడా ఉపయోగిద్దాం.

ABCD ఒక సమచతుర్భుజం (రాంబస్)



ABCD సమచతర్భుజ వైశాల్యం = (ΔACD వైశాల్యం) + (ΔACB వైశాల్యం)

$$= \left(\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{OD}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{OB}\right)$$

(సమచతుర్భుజములో కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి

$$= \frac{1}{2}\overline{AC} \times (\overline{OD} + \overline{OB})$$

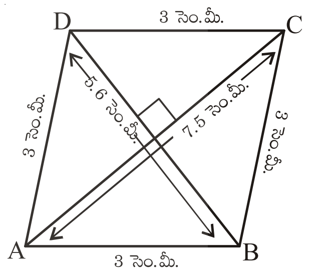
$$= \frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} d_1 \times d_2 \quad (AC = d_1 \text{ మరియు } BD = d_2)$$

సమచతుర్భుజ, వైశాల్యం దాని కర్ణాల లబ్ధంలో సగానికి సమానం.

అనగా $A = \frac{1}{2} d_1 d_2$

ఉదాహరణ 4 : ABCD సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి?



సాధన : మొదటి కర్ణం పొడవు (d_1) = 7.5 సెం.మీ.

రెండవ కర్ణం పొడవు (d_2) = 5.6 సెం.మీ.

సమచతుర్భుజ వైశాల్యం (A) = $\frac{1}{2}$ d_1 d_2

సమచతుర్భుజ వైశాల్యం A = $\frac{1}{2} \times 7.5 \times 5.6 = 21$ సెం.మీ.^{2}

అందుచే, సమచతుర్భుజం ABCD వైశాల్యం = 21 సెం.మీ.^{2}

ఉదాహరణ 5 : ఒక సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 60 సెం.మీ.^{2} దాని ఒక కర్ణం 8 సెం.మీ. అయిన రెండవ కర్ణంను కనుగొనండి.

సాధన : మొదటి కర్ణం పొడవు (d_1) = 8 సెం.మీ.

రెండవ కర్ణం పొడవు = d_2

సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

కాబట్టి $60 = \frac{1}{2} \times 8 \times d_2$

d_2 = 15 సెం.మీ.

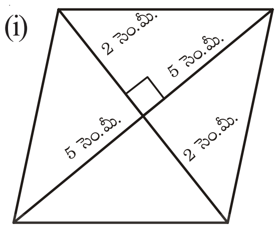
అందుచేత, రెండవ కర్ణం యొక్క పొడవు = d_2 = 15 సెం.మీ.

© SCERT not to be republished

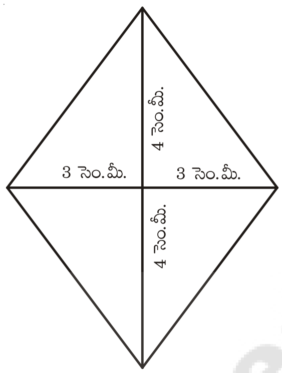
అభ్యాసం - 4

1. కింది సమచతుర్భుజాల వైశాల్యం కనుగొనండి?

(i)



(ii)



2. ఖాళీ గళ్ళను పూరించండి?

మొదటి కర్ణం (d_1)	రెండవ కర్ణం (d_2)	సమచతుర్భుజ వైశాల్యం
12 సెం.మీ.	16 సెం.మీ.	
27 మి.మీ.		2025 మి.మీ.^{2}
24 మీ.	576 మీ.	

3. ఒక సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 216 చ.సెం.మీ. ఒక కర్ణం 24 సెం.మీ. అయిన ఆ సమచతుర్భుజం యొక్క రెండవ కర్ణం ఎంత?

4. ఒక భవనం నేలపై సమచతుర్భుజాకారంలో ఉన్న 3000 టైల్స్ పరుచబడి ఉన్నాయి. ఒక్కొక్క టైల్ యొక్క కర్ణాలు 45 సెం.మీ., 30 సెం.మీ. ఒక చదరపు మీటరు వైశాల్యం గల నేలను పాలిష్ చేయుటకు ₹ 25 ఖర్చు అయిన మొత్తం నేలను (టైల్స్) పాలిష్ చేయుటకు ఎంత ఖర్చగును.

©SCERT not to be republished

13.4 వృత్తం చుట్టుకొలత

నజియా సైకిల్ టైరుతో ఆడుకుంటుంది. ఆమె టైరును కర్రతో తిప్పుతూ దాని వెంట పరిగెత్తుతుంది. టైరు ఒక పూర్తి చుట్టు తిరిగినపుడు అది ప్రయాణించిన దూరం ఎంత?

సైకిల్ టైరు ఒక పూర్తి చుట్టు తిరిగినపుడు అది ప్రయాణించిన దూరం, ఆ టైరు చుట్టూ ఉన్న పొడవుకు సమానం. సైకిల్ టైరు యొక్క ఈ చుట్టూ వున్న పొడవునే దాని చుట్టుకొలత అంటారు.

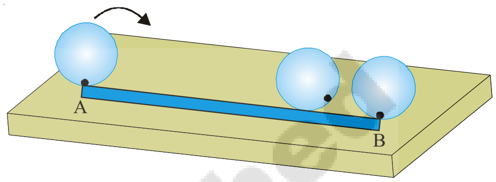
సైకిల్ టైరు ప్రయాణించిన మొత్తం దూరానికి అది తిరిగిన చుట్ల సంఖ్యకు మధ్యగల సంబంధం ఏమిటో చెప్పగలరా?

మొత్తం ప్రయాణించిన దూరం = టైరు తిరిగిన చుట్ల సంఖ్య × టైరు చుట్టుకొలత.

కృత్యం : 2

జయ ఒక వృత్తాకార ముక్కను కార్డుబోర్డునుండి కత్తిరించి తీసుకొంది. దీనిని అందంగా తయారుచేయటం కొరకు దీనిచుట్టూ ఒక లేసును పటంలో చూపిన విధంగా అతికించాలనుకున్నది. అయితే ఆమెకు కావలసిన లేసు యొక్క పొడవు వృత్తాకార కార్డుబోర్డు యొక్క చుట్టుకొలతకు సమానమేనా? వృత్తాకార కార్డుబోర్డు యొక్క చుట్టుకొలత స్కేలు సహాయంతో కొలవగలదా?

జయ ఏమి చేసిందో పరిశీలిద్దాం?



జయ టేబుల్‌పై ఒక రేఖను గీసి ఆ గీతపై బిందువు A ను గుర్తించింది. వృత్తాకార కార్డుబోర్డుపై అంచువెంట ఒకచోట ఒక చుక్కను గుర్తించింది. ఈ చుక్కను రేఖపై గుర్తించిన A బిందువుతో ఏకీభవించునట్లు కార్డుబోర్డును టేబుల్‌పై ఉంచింది. పటంలో చూపిన విధంగా దొర్లించటం ప్రారంభించింది. కార్డుబోర్డు అంచువెంట గుర్తించిన చుక్క తిరిగి టేబుల్‌పై గీచిన రేఖతో ఏకీభవించే వరకూ దానిని దొర్లించింది. కార్డుబోర్డుపైన ఉన్న చుక్క మళ్లీ రేఖను ఏకీభవించిన బిందువును B గా గుర్తించింది. AB రేఖ పొడవు వృత్తాకార కార్డుబోర్డు యొక్క చుట్టుకొలతకు సమానమవుతుంది కనుక AB రేఖ పొడవుకు సమానమైన లేస్ పొడవు వృత్తాకార కార్డు బోర్డుకు అవసరమౌతుంది.

ప్రయత్నించండి.

సీసామూత, గాజు లేదా ఏదైనా ఒక వృత్తాకార వస్తువును తీసుకోండి. వాటి యొక్క చుట్టుకొలతను తీగ సహాయంతో కనుగొనండి.

అయితే ప్రతీ వృత్తాకార వస్తువు యొక్క చుట్టుకొలతను ఈ విధంగా కనుగొనటం సులభం కాదు. కనుక వేరే ఒక పద్ధతిని తెలుసుకోవలసి ఉంది. దీనికొరకై వృత్తం యొక్క వ్యాసంనకు దాని చుట్టుకొలతకు మధ్యసంబంధమేమైనా ఉందేమో పరిశీలిద్దాం.

ఒక వ్యక్తి వేరువేరు వ్యాసార్ధాలున్న 6 వృత్తాకార కార్డుబోర్డులను తయారు చేసి తీగ సహాయముతో వీని చుట్టుకొలతలను కనుగొన్నాడు. ఇంకా వ్యాసమునకు, చుట్టుకొలతకు మధ్యగల నిష్పత్తిని కూడా కనుగొన్నాడు.

ఈ విలువలన్నింటిని కింది పట్టికలో నమోదు చేశాడు.

వృత్తము	వ్యాసార్ధము	వ్యాసము	చుట్టుకొలత	చుట్టుకొలతకు, వ్యాసమునకు మధ్యగల నిష్పత్తి
1.	3.5 సెం.మీ.	7.0 సెం.మీ.	22.0 సెం.మీ.	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 సెం.మీ.	14.0 సెం.మీ.	44.0 సెం.మీ.	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 సెం.మీ.	21.0 సెం.మీ.	66.0 సెం.మీ.	
4.	21.0 సెం.మీ.	42.0 సెం.మీ.	132.0 సెం.మీ.	
5.	5.0 సెం.మీ.	10.0 సెం.మీ.	32.0 సెం.మీ.	
6.	15.0 సెం.మీ.	30.0 సెం.మీ.	94.0 సెం.మీ.	

© SCERT not to be republished

పట్టికలోని ఫలితాల ఆధారంగా మీరేమి గ్రహించారు? ప్రతీ వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత, దాని వ్యాసంనకు మధ్యగల నిష్పత్తి సుమారుగా సమానమేనా? ఎల్లప్పుడు వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత, దాని వ్యాసంనకు దాదాపు మూడు రెట్లు ఉంటుందని చెప్పవచ్చా?

వృత్తం చుట్టుకొలత దాని వ్యాసంనకు మధ్యగల నిష్పత్తి విలువ సుమారుగా $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14గా ఉంటుంది. దీనిని π (పై) చేత సూచిస్తాం. ఇది ఒక స్థిర విలువ.

కాబట్టి వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలతను 'c' చేత వ్యాసంను 'd' చేత సూచిస్తే $\frac{c}{d} = \pi$ అవుతుంది.

కావున $\frac{c}{d} = \pi$

$c = \pi d$

అయితే, వృత్తం యొక్క వ్యాసం, వ్యాసార్ధానికి రెండింతలు అవుతుంది. అనగా $d = 2r$ (r = వ్యాసార్ధం)

$c = \pi \times 2r$ లేదా $c = 2\pi r$

అయితే, వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత $c = 2\pi r$

ఉదాహరణ 6 : 10 సెం.మీ. వ్యాసం కలిగిన వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకొనిన)

సాధన : వృత్తం యొక్క వ్యాసం (d) = 10 సెం.మీ.

వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత (c) $= \pi d$

$= 3.14 \times 10$

c = 31.4 సెం.మీ.

అందుచేత వృత్తం చుట్టుకొలత = 31.4 సెం.మీ.

ఉదాహరణ 7 : 14 సెం.మీ. వ్యాసార్ధం గల వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి? ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనిన)

వృత్త వ్యాసార్ధం (r) = 14 సెం.మీ.

వృత్తం చుట్టుకొలత (c) $= 2\pi r$

$c = 2 \times \frac{22}{7} \times 14$

c = 88 సెం.మీ.

అందుచే, వృత్తం చుట్టుకొలత = 88 సెం.మీ.

©SCERT not to be republished

అభ్యాసం - 5

1. కింది వ్యాసార్థాలుగా గల వృత్తాల చుట్టుకొలతలను కనుగొనండి.

   (i) 35 సెం.మీ. (ii) 4.2 సెం.మీ. (iii) 15.4 సెం.మీ.

2. కింది వ్యాసాలుగా గల వృత్తాల చుట్టుకొలతలను కనుగొనండి?

   (i) 17.5 సెం.మీ. (ii) 5.6 సెం.మీ. (iii) 4.9 సెం.మీ.

   గమనిక : పై రెండు సందర్భాలలో $\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనుము.

3. (i) $\pi = 3.14$ గా తీసుకొని కింది వ్యాసార్థాలు కల్గిన వృత్తాల చుట్టుకొలతలు కనుగొనండి?

   (a) 8 సెం.మీ. (b) 15 సెం.మీ. (c) 20 సెం.మీ.

   (ii) చుట్టుకొలత 44 సెం.మీ.గా గలిగిన వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థంను కనుగొనండి?

4. ఒక వృత్తం చుట్టుకొలత 264 సెం.మీ. దాని వ్యాసార్థంను కనుగొనండి. $\pi = \frac{22}{7}$.

5. ఒక వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత 33 సెం.మీ. అయిన దాని వ్యాసంను కనుగొనండి.

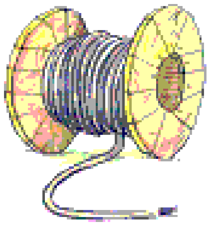
6. 35 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల ఒక చక్రం ఎన్ని చుట్లు తిరిగిన అది 660 మీ. దూరం ప్రయాణించగలదు?

   ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనిన)

7. రెండు వృత్తాల వ్యాసాల నిష్పత్తి 3 : 4 అయిన వాని చుట్టుకొలతల నిష్పత్తిని కనుగొనండి?

8. ఒక రోడ్డురోలరు 2200 మీ. దూరంను చదును చేయుటకు 200 చుట్లు తిరుగును. అయిన రోలరు యొక్క వ్యాసార్థంను కనుగొనండి?

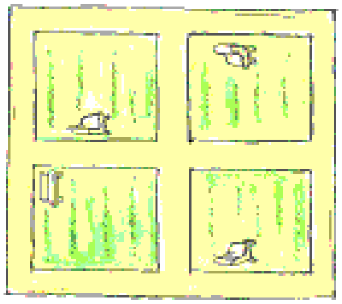
9. ఒక నిమిషాల ముల్లు పొడవు 15 సెం.మీ. దాని చివరి కొన 1 గంటలో ప్రయాణించే దూరమును కనుగొనండి.? ($\pi = 3.14$ గా తీసుకొనిన).

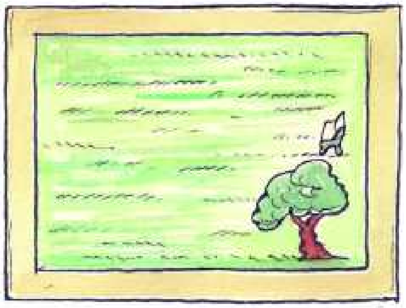
10. 

    ఒక తీగతో 25 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల వృత్తాకారాన్ని మలిచి అదే తీగతో ఒక చతురస్రాకారాన్ని తయారు చేసిన ఆ చతురస్ర భుజం పొడవు ఎంత?

© SCERT not to be republished

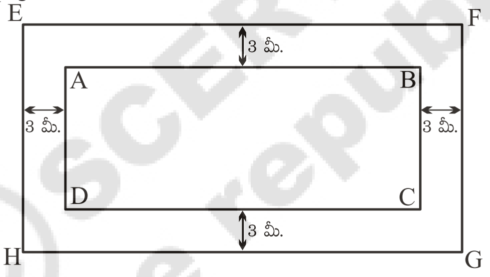
13.5 దీర్ఘచతురస్రాకార బాటలు





సాధారణంగా మనం తోటలు, పార్కులు, ఆట స్థలాలలో నడక కోసం బాటలను ఏర్పరచడం గమనించి ఉంటాం. అయితే మనం ఉపయోగం కోసం నిర్మించుకొనే ఈ బాటల కోసం అయ్యే ఖర్చు లెక్కించడానికి వాటి వైశాల్యాలు ఎలా లెక్కిస్తారో తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ 8 : 60మీ. పొడవు 40 మీ. వెడల్పు గల ఒక ప్లాటు చుట్టూ 3 మీ. వెడల్పు గల బాట నిర్మించారు. అయిన ఆ బాట వైశాల్యంను కనుగొనండి?



సాధన : పై పటంలో ABCD దీర్ఘచతురస్రాకార ప్లాటును సూచిస్తుంది. దీని చుట్టూ 3 మీ. బాటను నిర్మించడమైంది. ఈ బాట వైశాల్యాన్ని కనుగొనవలెనన్న EFGH బయటి దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాల నుండి ABCD లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యాన్ని తీసివేయాలి.

లోపలి దీర్ఘ చతురస్రం ABCD యొక్క పొడవు	=	60 మీ.
లోపలి దీర్ఘ చతురస్రం ABCD యొక్క వెడల్పు	=	40 మీ.
లోపలి దీర్ఘ చతురస్రం ABCD వైశాల్యం	=	(60 x 40) మీ.^{2}
	=	2400 మీ.
బాట వెడల్పు	=	3 మీ.
వెలుపలి దీర్ఘచతురస్రం EFGH పొడవు	=	60 మీ. + (3+3) మీ.
	=	66 మీ.
వెలుపలి దీర్ఘచతురస్రం EFGH వెడల్పు	=	40 మీ. + (3+3) మీ.
	=	46 మీ.

© SCERT not to be republished

∴ వెలుపలి దీర్ఘచతురస్రం EFGH వైశాల్యం = 66 x 46 మీ^{2} = 3036 మీ^{2}

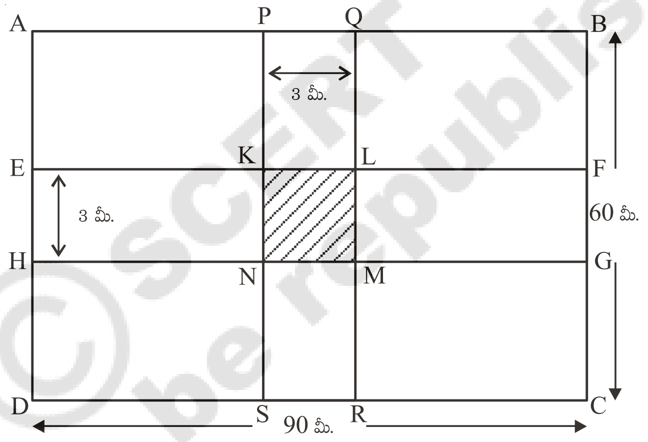
∴ బాట వైశాల్యం = (వెలుపలి దీర్ఘచతురస్ర EFGH వైశాల్యం)
–(లోపలి దీర్ఘచతురస్ర ABCD వైశాల్యం)
= (3036 - 2400) మీ^{2} = 636 మీ^{2}

ఉదాహరణ 9 : ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార మైదానం యొక్క పొడవు, వెడల్పు వరుసగా 90 మీ., 60 మీ. ఈ మైదానంలో పటంలో చూపిన విధంగా PQRS, EFGH అనే రెండు రోడ్లను ఒక్కొక్కటి 3 మీ. వెడల్పు ఉండేటట్లు నిర్మించినారు. ఈ రోడ్లు దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క భుజాలకు సమాంతరంగా ఉండి, మైదానం మధ్య భాగంలో అవి ఒక దానికొకటి కలుసుకున్నాయి. అయితే

(i) రోడ్డు వైశాల్యం

(ii) మీటరుకు ₹ 110 చొప్పున రోడ్డు నిర్మాణానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.

సాధన :



(i) సమస్యలో ఇచ్చిన అంశాలు

PQ = 3 మీ. మరియు PS = 60 మీ. EH = 3 మీ. మరియు EF = 90 మీ.

KL = 3 మీ. **అనగా KLMN ఒక చతురస్రం.**

రోడ్డు వైశాల్యం PQRS మరియు EFGH దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానం. అయితే ఈ పటంను గమనించినట్లయితే KLMN చతురస్ర వైశాల్యాన్ని రెండు సార్లు తీసుకోబడుతున్నట్లుగా తెలుస్తుంది. అందువల్ల KLMN చతురస్ర వైశాల్యాన్ని రోడ్లు వైశాల్యం (PQRS, EFGH) ల నుండి ఒకసారి తీసివేయాలి.

∴ రోడ్డు వైశాల్యం = దీర్ఘ చతురస్రం PQRS వైశాల్యం + దీర్ఘచతురస్రం EFGH వైశాల్యం
– చతురస్రం KLMN వైశాల్యం
= (PS × PQ) + (EF × EH) – (KL × KN)
= (60 × 3) + (90 × 3) – (3 × 3) మీ^{2}
= (180 + 270 – 9) మీ^{2}
= 441 మీ^{2}

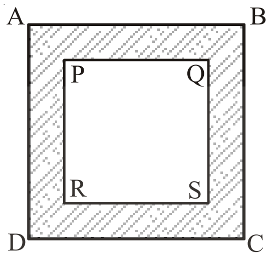
© SCERT not to be republished

(ii) 1 మీ^{2} నిర్మాణానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹ 110

441 మీ^{2} నిర్మాణానికి అయ్యేఖర్చు = 110×441

రోడ్డు నిర్మాణానికి అయ్యేఖర్చు = ₹ 48,510

ఉదాహరణ 10 : 100మీ. భుజంగల ఒక చతురస్ర మైదానం చుట్టు బయట 5 మీ. వెడల్పుగల బాట గలదు. అయిన బాట వైశాల్యంను కనుగొనండి? 10 చ.మీ. బాటను సిమెంటుతో నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు ₹ 250 అయిన మొత్తం బాటను నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.



సాధన : పటం PQRS చతురస్ర మైదానం. షేడ్‌చేసిన భాగం 5 మీ. వెడల్పు గల బాట.

PQRS చతురస్ర భుజం = 100 మీ.

PQRS చతురస్ర వైశాల్యం = $100^2 = 10000$ చ.మీ.

AB భుజం యొక్క పొడవు = $100 + (5+5) = 110$ మీ.

ABCD చతురస్ర వైశాల్యం = $110^2 = 12100$ చ.మీ.

బాట వైశాల్యం = ABCD వైశాల్యము – PQRS వైశాల్యము

= $12100 - 10000 = 2100$ చ.మీ.

10 చ.మీ. బాట నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు = ₹ 250

1 చ.మీ. బాట నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు = $\frac{250}{10}$

2100 చ.మీ. బాట నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు = $\frac{250}{10} \times 2100$

= ₹ 52,500

బాట నిర్మాణానికి అయ్యే ఖర్చు = ₹ 52,500

© SCERT not to be republished

అభ్యాసం - 6

1. 45మీ. భుజముగల ఒక చతురస్రాకార మైదానం చుట్టూ 2.5 మీ. వెడల్పు గల బాట కలదు. బాట వైశాల్యంను కనుగొనండి?

2. ఒక పాఠశాల భవనంలో 18మీ. పొడవు, 12.5 మీ. వెడల్పు గల హాలు కలదు. హాలునేలపై గోడలనుంచి 50 సెం.మీ. వెడల్పున స్థలం వదిలి హాలు మధ్యలో ఒక కార్పెట్ పరచబడింది. కార్పెట్ వైశాల్యంను, కార్పెటుకు గోడల అంచుకు మధ్యగల ఖాళీ ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి?

3. ఒక చతురస్రాకార గడ్డి మైదానం యొక్క భుజం 80మీ. దీనిలో నడవడానికి వీలుగా మైదానం యొక్క భుజాలకు సమాంతరంగా రెండు రోడ్లు ఒకదానికొకటి మైదానం యొక్క మధ్యభాగంలో పరస్పరం ఖండించుకొనే విధంగా నిర్మించబడినవి. రోడ్ల వెడల్పు 4 మీ. అయిన ఆ రోడ్డు వైశాల్యంను కనుగొనండి?

4. 8మీ. × 5మీ. కొలతలు గల ఒక గదిచుట్టూ 2 మీ. వెడల్పుగల వరండా కలదు. వరండా ఆక్రమించిన ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి?

5. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కు యొక్క పొడవు, వెడల్పులు వరుసగా 700మీ. మరియు 300 మీ. దీని భుజాలకు సమాంతరంగా 10 మీ. వెడల్పుగల రెండు రోడ్లు పార్కు మధ్యభాగంలో పరస్పరం ఖండించుకొనే విధంగా నిర్మించబడినవి. రోడ్డు వైశాల్యంను కనుగొనండి? అలాగే రోడ్డు కాకుండా మిగిలిన పార్కు వైశాల్యంను కనుగొనండి?

మనం నేర్చుకున్నవి

- సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం (A) దాని భూమి (b) ఎత్తుల (h) లబ్ధానికి సమానం. అనగా A = bh. (సమాంతర చతుర్భుజంలో ఏ భుజాన్నైనా భూమిగా తీసుకోవచ్చు).
- త్రిభుజ వైశాల్యం (A) దాని భూమి (b) ఎత్తు (h) ల లబ్దంలో సగానికి సమానము. అనగా $A = \frac{1}{2}$ bh.
- రాంబస్ వైశాల్యం (A) దాని కర్ణాల లబ్దంలో సగానికి సమానం అనగా $A = \frac{1}{2} d_1 d_2$.
- వృత్త పరిధి (C) = 2 π r ఇచ్చుట r వ్యాసార్ధము మరియు $\pi = \frac{22}{7}$ లేదా 3.14.

© SCERT not to be republished

ఆర్కిమెడిస్ (గ్రీసు)

287 - 212 BC

ప్రప్రథమంగా ఇతడు π విలువను గణించాడు.

వృత్తం చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలకు గణిత సూత్రాలను కనుగొన్నాడు.