ఘాతాంకాలు

11

11.0 పరిచయం

2011 జనాభాలెక్కల ప్రకారం భారతదేశ జనాభా దాదాపు 120,00,00,000 గావుంది.

సూర్యుడు, మరియు భూమి మధ్యదూరం దాదాపుగా 15,00,00,000 కి.మీ.

శూన్యంలో కాంతి వేగం సెకనుకు, 30,00,00,000 మీ. దూరాన్ని ప్రయాణిస్తుంది.

2011 జనాభా లెక్కల సేకరణ ప్రకారం ఆంధ్రప్రదేశ్ జనాభా దాదాపుగా 8,50,00,000 గా వుంది.

ఇవి అన్నీ చాలా పెద్ద సంఖ్యలు. వీటిని వ్రాయడం, చదవడం, అర్థం చేసుకోవడం సులభమేనా? ఖచ్చితంగా సులభం కాదు అని చెప్పవచ్చు. కాబట్టి పెద్దసంఖ్యలను సరళమయిన రీతిలో వ్యక్తపరచడానికి మనకు ఒక పద్ధతి అవసరం. ఆ విధంగా వ్యక్తపరచడానికి ఘాతాంకాలు మనకు దోహదపడతాయి. ఈ అధ్యాయంలో మీరు ఘాతాంకాలు మరియు ఘాతాంక న్యాయాల గురించి వివరంగా తెలుసుకుంటారు.

11.1 ఘాతాంక రూపం

ఈ కింది పునరావృత సంకలనాలను పరిశీలిద్దాం.

$4 + 4 + 4 + 4 + 4$

$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$

$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$

మనం ఈ పునరావృత సంకలనాల సూక్ష్మీకరణను గుణకారాన్ని ఉపయోగించి వరుసగా 5×4, 6×5 మరియు 8×7 రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు.

ఇదే విధంగా ఒకసంఖ్య యొక్క పునరావృత గుణకారాన్ని కూడా సరళమయిన రీతిలో వ్యక్తపరచవచ్చా?

ఈ క్రింది ఉదాహరణలను గమనించండి.

2011 జనాభా లెక్కల ప్రకారం బీహార్ రాష్ట్ర జనాభా సుమారుగా 10,00,00,000.

ఇక్కడ 10 అనే సంఖ్య 8 సార్లు గుణించబడింది. $10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10$

కాబట్టి బీహార్ రాష్ట్ర జనాభాను 10^8 చే సూక్ష్మరూపంలో సూచించవచ్చు. ఇందులో 10ని భూమి లేక ఆధారము అని 8 ని ఘాతాంకమని అంటాం. 10^8 ని ఘాతరూపం అని అంటాం. 10^8 ని "10 యొక్క 8వ ఘాతం" అని చదువుతాం.

శూన్యంలో కాంతివేగం 30,00,00,000 m/sec. దీన్ని ఘాతరూపంలో 3×10^8 మీ/సె.గా వ్యక్తపరుస్తాం. 10^8 లో 10 ని ఆధారం లేక భూమి అని 8 ని ఘాతాంకం అని అంటాం. "10 యొక్క 8వ ఘాతం" అని చదువుతాం.

సూర్యుడు మరియు భూమి మధ్య దూరము సుమారుగా 15,00,00,000 కి.మీ. ఉంటుంది. దీనిని ఘాతరూపంలో $15\times100,00,000 = 15\times10^7$ కి.మీ. గా వ్రాస్తాము. 10^7 లో 10 ని భూమి అని 7 ను ఘాతాంకమని అంటాం.

2011 జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఆంధ్రప్రదేశ్ జనాభా దాదాపుగా 8,50,00,000. దీనిని ఘాతరూపంలో 85×10^6 గా వ్యక్తపరుస్తాము. 10^6 లో 10 భూమి మరియు 6 ఘాతాంకం. దీనిని "10 యొక్క 6 వ ఘాతం" గా చదువుతాం.

ఘాతాంకాలను ఉపయోగించి మనం ఒకసంఖ్య యొక్క విస్తృత రూపాన్ని కూడా వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణకు 36,584 యొక్క విస్తృత రూపం.

$$36584 = (3\times10000) + (6\times1000) + (5\times100) + (8\times10) + (4\times1)$$
$$= (3\times10^4) + (6\times10^3) + (5\times10^2) + (8\times10^1) + (4\times1)$$

ఇవి చేయండి.

1. కింది వాటిని ఘాతరూపంలో వ్రాయండి. (విలువలు సవరింపబడినవి)
   (i) భూమి యొక్క సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం 510,000,000 చ.కి.మీ.
   (ii) రాజస్థాన్ రాష్ట్ర జనాభా దాదాపుగా 7,00,00,000.
   (iii) భూమి యొక్క వయస్సు దాదాపుగా 4550 మిలియన్ సంవత్సరాలు
   (iv) 1000 కి.మీ. లను మీటర్లలో.
2. (i) 48951 (ii) 89325 లను ఘాతాంకాల నుపయోగించి విస్తృత రూపంలో వ్రాయండి.

11.1.1 వేరువేరు భూములు గల ఘాతాంకాలు

ఇంతవరకు మనం 10 భూమిగా కలిగిన సంఖ్యలను గురించి చర్చించాం. కానీ భూమిగా ఏ సంఖ్య అయినా ఉండవచ్చు.

ఉదాహరణకు $81 = 3\times3\times3\times3 = 3^4$

ఇక్కడ భూమి = 3, ఘాతాంకం = 4

$125 = 5\times5\times5 = 5^3$

ఇక్కడ భూమి = 5, మరియు ఘాతాంకం 3.

ఉదాహరణ 1: 3^4 మరియు 4^3 లలో ఏదిపెద్దది?

$3^4 = 3\times3\times3\times3 = 81$

$4^3 = 4\times4\times4 = 64$

$81 > 64$

కావున $3^4 > 4^3$

ఇవి చేయండి.

1. 3^2 అనేది 2^3 కు సమానమా? మీ జవాబును సమర్థించండి.

2. క్రింది సంఖ్యలను ఘాతరూపంలో రాయండి. వాటి (a) భూమి (b) ఘాతాంకం మరియు (c) ఎలా చదువుతారో సూచించండి.

   (i) 32 (ii) 64 (iii) 256 (iv) 243 (v) 49

వర్గము మరియు ఘనము

ఏ భూమినైనా ఘాతాంకం 2 లేదా 3 కు పెంచిన వాటిని ప్రత్యేకమయిన పేర్లతో పిలుస్తాం.

$10 \times 10 = 10^2$ ను **'10** యొక్క **2** వ ఘాతము**'** లేక **'10** యొక్క వర్గము**'**. అలాగే $4 \times 4 = 4^2$ మరియు "4యొక్క రెండవ ఘాతము" లేక "4 యొక్క వర్గము" అని చదువుతాం.

$10 \times 10 \times 10 = 10^3$. దీనిని "10 యొక్క 3వ ఘాతం" లేక "10 యొక్క ఘనము" అని చదువుతాం.

$6 \times 6 \times 6 = 6^3$ దీనిని "6 యొక్క 3వ ఘాతం" అని లేక "6 యొక్క ఘనము" అని చదువుతాం.

సాధారణంగా ఏదయినా ఒక ధన సంఖ్య a ను భూమిగా తీసుకొని ఇలా రాస్తాం.

$a \times a = a^2$ (దీనిని "a యొక్క రెండవ ఘాతం" లేక "a యొక్క వర్గము" అని చదువుతాం).

$a \times a \times a = a^3$ (దీనిని 'a యొక్క మూడవ ఘాతం' లేక 'a యొక్క ఘనము' అని చదువుతాం).

$a \times a \times a \times a = a^4$ (దీనిని 'a యొక్క నాలుగవ ఘాతం" అని చదువుతాము).

__________ $= a^5$ (దీనిని ______________________________ అని చదువుతాం).

__________ $= a^6$ (దీనిని ______________________________) అని చదువుతాం.

అలాగే దీనిని బట్టి $\boldsymbol{a \times a \times a \times a \times a \times a \times}$........................ **'m'** సార్లు $= \boldsymbol{a^m}$ అని చదువుతాం.
ఇక్కడ **'a'** భూమి **'m'** ఘాతాంకం

ఇవి చేయండి.

1. కింది వాటికి విస్తృత రూపాలు రాయండి.

   (i) p^7 (ii) l^4 (iii) s^9 (iv) d^6 (v) z^5

2. కింది వాటిని ఘాతరూపంలో రాయండి.

   (i) $a \times a \times a \times$ .... 'l' సార్లు

   (ii) $5 \times 5 \times 5 \times$.................... '$n$' సార్లు

   (iii) $q \times q \times q \times$.................. 15 సార్లు

   (iv) $r \times r \times r \times$ .... 'b' సార్లు

11.2 ఒక సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించి ఘాతరూపంలో రాయడం

ఇచ్చిన సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతిని ఉపయోగించి ఘాతరూపంలో రాయవచ్చు.

(i) 432 (ii) 450

సాధన (i) $432 = 2 \times 216$

$= 2 \times 2 \times 108$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= 2^4 \times 3^3$

2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

కాబటి $432 = 2^4 \times 3^3$

(ii) $450 = 2 \times 225$

$= 2 \times 3 \times 75$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 25$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$= 2 \times 3^2 \times 5^2$

కాబట్టి $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

ఇవి చేయండి.

(i) 2500 (ii) 1296 (iii) 8000 (iv) 6300

లను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి నుపయోగించి ఘాతరూపంలో రాయండి.

అభ్యాసం - 1

1. కింది వాటికి ఆధారము, ఘాతాంకములను సూచిస్తూ వాటిని విస్తృత రూపంలో రాయండి.

(i) 3^4 (ii) $(7x)^2$ (iii) $(5ab)^3$ (iv) $(4y)^5$

2. కింద వ్యక్తపరచిన రూపాలకు ఘాతరూపాలను రాయండి.

(i) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

(ii) $3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

(iii) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

3. కింది వాటిని ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసి వాటిని ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) 288 (ii) 1250 (iii) 2250 (iv) 3600 (v) 2400

4. కింద ఇవ్వబడిన జతలలో పెద్దదానిని గుర్తించండి.

(i) 2^3 లేదా 3^2 (ii) 5^3 లేదా 3^5 (iii) 2^8 లేదా 8^2

5. $a = 3, b = 2$ అయిన క్రింది విలువలను కనుక్కోండి.

(i) $a^b + b^a$ (ii) $a^a + b^b$ (iii) $(a+b)^b$ (iv) $(a-b)^a$

11.3 ఘాతాంక న్యాయాలు

ఘాతరూపంలో ఉన్న పదాల గుణకారం సులభంగా చేయడానికి, వాటి లబ్ధాలను కనుగొనడానికి మనం కొన్ని సూత్రాలను ఉపయోగిస్తాము. వాటి గురించి ఇక్కడ చర్చిద్దాం.

11.3.1 ఒకే ఆధారముగాగల పదాల గుణకారం

ఉదాహరణ 2 : $2^4 \times 2^3$

సాధన : $2^4 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times 2)}_{4 \text{ మార్లు}} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{3 \text{ మార్లు}}$

$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{7 \text{ మార్లు}}$

$= 2^7$ మరియు ఇది 2^{4+3} కు సమానం (ఎందుకంటే $4 + 3 = 7$)

కావున $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3}$

ఉదాహరణ 3: $5^2 \times 5^3$

సాధన : $5^2 \times 5^3 = \underbrace{(5 \times 5)}_{2 \text{ మార్లు}} \times \underbrace{(5 \times 5 \times 5)}_{3 \text{ మార్లు}}$

$= \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}_{5 \text{ మార్లు}}$

$=$ 5^5 మరియు ఇది 5^{2+3} కు సమానం ($2 + 3 = 5$ కాబట్టి)

కాబట్టి $5^2 \times 5^3 = 5^{2+3}$

ఇవి చేయండి.

2^4 ,2^3 మరియు 2^7 విలువలను కనుగొని

$2^4 \times 2^3 = 2^7$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.

5^2 ,5^3 మరియు 5^5 విలువలు కనుక్కొని $5^2 \times 5^3 = 5^5$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.

ఉదాహరణ 4 : $a^4 \times a^5$

సాధన : $a^4 \times a^5 = (a \times a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a)$

$= (a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a)$

$= a^9$ మరియు ఇది a^{4+5} కి సమానము. ($4 + 5 = 9$ కావున)

కావున $a^4 \times a^5 = a^{4+5}$

పై పరిశీలనలనుంచి మనం

$a^m \times a^n = (a \times a \times a$ ....'m' సార్లు) $\times$ ($a \times a \times a \times$ ....'n' సార్లు)$= a^{m+n}$ అని చెప్పగలం.

'a' ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య 'm', 'n' లు పూర్ణసంఖ్యలయితే

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ఇవి చేయండి.

1. ఈ కింది వాటిని $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ను ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరించండి.

   (i) $3^{11} \times 3^9$ (ii) $p^5 \times p^8$

2. కింద నివ్వబడిన ? గుర్తు స్థానంలో ఉండదగిన సంఖ్యను కనుక్కోండి. (k ఏదేని ఒక శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య).

   (i) $k^3 \times k^4 = k^?$ (ii) $k^{15} \times k^? = k^{31}$

11.3.2 ఘాతం యొక్క ఘాతం

ఉదాహరణ 5 : $(3^2)^3$ ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : ఇక్కడ భూమి 3^2 మరియు ఘాతాంకం 3

$(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$= 3^{2+2+2}$ (సమాన భూములు గల పదాల లబ్ధం)

$= 3^6$ మరియు ఇది $3^{2\times3}$ కి సమానం ($2 \times 3 = 6$ కాబట్టి)

కావున $(3^2)^3 = 3^{2\times3}$

ఇవి చేయండి.

3^2 విలువ 3^2 యొక్క ఘనం విలువలను కనుగొని $(3^2)^3 = 3^6$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.

ఉదాహరణ 6 : $(4^5)^3$ ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : $(4^5)^3 = 4^5 \times 4^5 \times 4^5$

$= 4^{5+5+5}$ (సమాన భూములు గల పదాల లబ్ధం)

$= 4^{15}$ మరియు ఇది $4^{5\times3}$ కు సమానం

కావున $(4^5)^3 = 4^{5\times 3}$

ఉదాహరణ 7 : $(a^m)^4$ ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : $(a^m)^4 = a^m \times a^m \times a^m \times a^m$

$= a^{m+m+m+m}$ (సమాన భూములు గల పదాల లబ్ధం)

$= a^{4m}$ మరియు ఇది $a^{m\times4}$ కు సమానం $(4 \times m = 4m)$

కావున $(a^m)^4 = a^{m\times4}$

పై ఉదాహరణల నుంచి $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots$ n సార్లు $= a^{m+m+m+\ldots}$ n సార్లు $= a^{mn}$

'a' ఏదేని ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు 'm', 'n' లు పూర్ణసంఖ్యలు అయితే $(a^m)^n = a^{mn}$

11.3.3 లబ్ధం యొక్క ఘాతం

ఉదాహరణ 8 : $3^5 \times 4^5$ ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : ఇక్కడ 3^5 మరియు 4^5 లు ఒకే ఘాతాంకం 5ను కలిగి ఉన్నాయి. కాని వాటి భూములు వేరువేరుగా ఉన్నాయి.

$$3^5 \times 4^5 = (3\times3\times3\times3\times3) \times (4\times4\times4\times4\times4)$$
$$= (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4)$$
$$= (3\times4)^5$$

కావున $3^5 \times 4^5 = (3 \times 4)^5$

ఉదాహరణ 9 : $4^4 \times 5^4$ ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : ఇక్కడ 4^4 మరియు 5^4 లు ఒకే ఘాతాంకం 4 ను కలిగి ఉన్నాయి.

కాని వాటి భూములు వేరువేరుగా ఉన్నాయి.

$$4^4 \times 5^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$$
$$= (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)$$
$$= (4 \times 5)\times (4 \times 5) \times (4 \times 5)\ (4 \times 5)$$
$$= (4 \times 5)^4$$

కావున $4^4 \times 5^4 = (4 \times 5)^4$

ఉదాహరణ 10 : $p^7 \times q^7$ ను పరిశీలిద్దాం.

సాధన : ఇక్కడ p^7 మరియు q^7 లు ఘాతాంకం 7ను కలిగి ఉన్నాయి. మరియు వాటి భూములు వేరుగా ఉన్నాయి.

$$p^7 \times q^7 = (p \times p \times p \times p \times p \times p \times p) \times (q \times q \times q \times q \times q \times q \times q)$$

$$= (p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times q \times q \times q \times q \times q \times q \times q)$$

$$= (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q)$$

$$= (p \times q)^7$$

కావున $p^7 \times q^7 = (p \times q)^7$

పై ఉదాహరణల నుంచి $\boldsymbol{a^m \times b^m = (a \times b)^m = (ab)^m}$ గా రాయవచ్చు.

> **'a', 'b' లు ఏవైనా రెండు శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు 'm' ఏదైనా ధన పూర్ణసంఖ్య అయితే**
>
> $$a^m \times b^m = (ab)^m$$

ఇవి చేయండి.

1. కింది వాటిని $a^m \times b^m = (a\,b)^m$ సూత్రాన్నుపయోగించి సూక్ష్మీకరించండి.

   (i) $(2 \times 3)^4$ (ii) $x^p \times y^p$ (iii) $a^8 \times b^8$ (iv) $(5 \times 4)^{11}$

11.3.4 ఘాతాంకాల భాగహారము

ఘాతరూపాల భాగహారమును చర్చించుటకు ముందు మనం ఋణఘాతరూపాల గురించి చర్చిద్దాం.

11.3.4 (అ) ఋణ ఘాతాంకాలు

కింది వాటిని పరిశీలించండి.

2^5	=	32	3^5	=	243
2^4	=	16	3^4	=	81
2^3	=	8	3^3	=	27
2^2	=	4	3^2	=	9
2^1	=	2	3^1	=	3
2^0	=	1	3^0	=	1
2^{-1}	=	...	3^{-1}	=	...
(సూచన : 1లో సగము)			(సూచన : 1 లో 3 వ వంతు)		
2^{-2}	=	...	3^{-2}	=	...

32 లో ఎన్నవ భాగం 16 అవుతుంది?

2^5 మరియు 2^4 ల మధ్య బేధం ఎంత?

ఘాతాంకం విలువ 1 తగ్గిన ప్రతిసారి దానివిలువ $\frac{1}{2}$ రెట్లు తగ్గటం మీరు గమనించే ఉంటారు.

పై పరిశీలనల నుంచి మనం

$2^{-1} = \frac{1}{2}$ మరియు $2^{-2} = \frac{1}{4}$

$3^{-1} = \frac{1}{3}$ మరియు $3^{-2} = \frac{1}{9}$

ఇంకా $2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$

అదేవిధంగా $3^{-1} = \frac{1}{3}$ మరియు $3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$

> 'a' ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు 'n' ఒక పూర్ణసంఖ్యకు
>
> $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ఇవి చేయండి.

1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ను ఉపయోగించి కిందివానిని సూక్ష్మీకరించండి.

(i) x^{-7} (ii) a^{-5} (iii) 7^{-5} (iv) 9^{-6}

11.3.4 (ఆ) శూన్యఘాతాంకం

ముందు చర్చించిన విధానంలో

$2^0 = 1$, $3^0 = 1$ అని మనం గమనించాము.

ఇదేవిధంగా $4^0 = 1$, $5^0 = 1$, ... అని మనం చెప్పవచ్చు.

కాబట్టి a ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య అయితే $a^0 = 1$.

11.3.4 (ఇ) ఒకే భూమి కలిగిన ఘాత రూపాల భాగహారము

ఉదాహరణ 11 : $\frac{3^8}{3^3}$

సాధన : $\frac{3^8}{3^3} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}} = 3\times3\times3\times3\times3$

$= 3^5$ ఇది 3^{8-3} కు సమానం (8 – 3 = 5 కావున)

కాబట్టి $\frac{3^8}{3^3} = 3^{8-3}$

ఉదాహరణ 12 : $\frac{5^5}{5^8}$

సాధన : $\frac{5^5}{5^8} = \frac{\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}}{5\times5\times5\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}} = \frac{1}{5\times5\times5} = \frac{1}{5^3}$

$\frac{1}{5^3}$ మరియు ఇది $\frac{1}{5^{8-5}}$ కు సమానం. (8 – 5 = 3 కాబట్టి)

కాబట్టి $\frac{5^5}{5^8} = \frac{1}{5^{8-5}}$

ఉదాహరణ 13 : $\frac{7^7}{7^3}$

సాధన : $\frac{7^7}{7^3} = \frac{7\times7\times7\times7\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}}{\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}} = 7\times7\times7\times7$

$= 7^4$ మరియు ఇది 7^{7-3} కు సమానం (ఎందుకంటే 7 – 3 = 4)

కాబట్టి $\frac{7^7}{7^3} = 7^{7-3}$

ఉదాహరణ 14 : $\frac{a^2}{a^7}$

సాధన : $= \frac{a^2}{a^7} = \frac{\cancel{a}\times\cancel{a}}{a\times a\times a\times a\times a\times\cancel{a}\times\cancel{a}} = \frac{1}{a\times a\times a\times a\times a}$

$= \frac{1}{a^5}$ మరియు ఇది $\frac{1}{a^{7-2}}$ కు సమానం (7 – 2 = 5 కాబట్టి)

అందువల్ల $\frac{a^2}{a^7} = \frac{1}{a^{7-2}}$

పై అన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలించిన తరువాత

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ **($m > n$** అయితే) మరియు $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ **($m<n$** అయితే)

'a' ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు 'm', 'n' లు పూర్ణ సంఖ్యలైన

$m > n$ అయిన $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ మరియు $m < n$ అయిన $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

$m = n$ అయినప్పుడు ఏం జరుగుతుంది? సమాధాన మివ్వండి.

ఉదాహరణ 15 : $\frac{4^3}{4^3}$ ను కనుగొందాం.

సాధన : $\frac{4^3}{4^3} = \frac{4\times4\times4}{4\times4\times4} = \frac{1}{1} = 1$.............(I)

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ అని మనకు తెలుసు.

కావున $\frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0$.....1

పై విధంగా $\frac{7^4}{7^4}$ ను కనుగొనండి.

సాధన : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ నుండి

$\frac{7^4}{7^4}$ = ? పై వాటి నుంచి మీరు ఏమి గమనించారు?

అదే విధంగా $\frac{a^4}{a^4} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a\times a\times a} = 1$

కానీ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ నుండి

$\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0 = 1$ ఇక్కడ ఏదేని శూన్యేతర సంఖ్య a ఐతే $a^0 = 1$ మరియు

m, n లను పరిశీలించగా $m=n$. ఆ విధంగా $m = n$ అయినప్పుడు $\frac{a^m}{a^n} = 1$ అవుతుంది.

ఇవి చేయండి.

1. కింది వానిని సూక్ష్మీకరించి a^{m-n} లేదా $\frac{1}{a^{n-m}}$ రూపంలో రాయండి.

(i) $\frac{13^8}{13^5}$ (ii) $\frac{3^4}{3^{14}}$

2. $\square$ (ఖాళీ గడి) ని సరైన సంఖ్యతో నింపండి.

ఉదాహరణ : $\frac{8^8}{8^3} = 8^{\boxed{8-3}} = 8^{\boxed{5}}$

(i) $\frac{12^{12}}{12^7} = 12^{\square} = 12^{\square}$ (ii) $\frac{a^{18}}{a^{\square}} = a^{\square} = a^{\boxed{10}}$

11.3.4 (ఈ) ఒకే ఘాతాంకం గల పదాలను భాగించడం

ఉదాహరణ 16 : $\left(\frac{7}{4}\right)^5$

సాధన : $\left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}$

$= \frac{7\times7\times7\times7\times7}{4\times4\times4\times4\times4}$

$= \frac{7^5}{4^5}$ (ఘాతరూపం నిర్వచనం నుంచి)

కాబట్టి $\left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{7^5}{4^5}$

ఉదాహరణ 17 : $\left(\frac{p}{q}\right)^6$

సాధన : $\left(\frac{p}{q}\right)^6 = \left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)$

$= \frac{p\times p\times p\times p\times p\times p}{q\times q\times q\times q\times q\times q}$

$$= \frac{p^6}{q^6} \quad \text{(నిర్వచనం నుంచి)}$$

కాబట్టి $\left(\frac{p}{q}\right)^6 = \frac{p^6}{q^6}$

పై పరిశీలనల నుంచి మనం ఈ విధంగా చెప్పగలం.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a \text{ 'm' మార్లు}}{b \times b \times b \times b \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times b \text{ 'm' మార్లు}} = \frac{a^m}{b^m}$$

a, b లు ఏవైనా రెండు శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు 'm' ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

ఇవి చేయండి.

1. ఖాళీగడులను పూరించండి.

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{\square}$ (ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\square} = \frac{3^5}{2^5}$

(iii) $\left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{\square}{\square}$ (iv) $\left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \frac{\square}{y^{11}}$

11.3.5 ఋణ ఆధారాలుగల ఘాతరూపాలు

ఉదాహరణ 18 : $(1)^4$, $(1)^5$, $(1)^7$, $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, $(-1)^5$ విలువలను లెక్కించండి.

సాధన : $(1)^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(1)^7 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

పై ఉదాహరణల నుండి మనం క్రింది విషయాలు గమనించవచ్చు.

(i) 1 యొక్క ఏ ఘాతంకైనా దానివిలువ 1

(ii) (-1) యొక్క బేసి ఘాతం విలువ (-1) మరియు సరిఘాతం విలువ $(+1)$

కాబట్టి $(-a)^m = -a^m$ (m, బేసి సంఖ్య అయితే)

$(-a)^m = a^m$ (m, సరి సంఖ్య అయితే)

ఇప్పుడు మరి కొన్ని ఉదాహరణలను గమనిద్దాం.

$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

$(-a)^4 = (-a) \times (-a) \times (-a) \times (-a) = a^4$

$$(-a)^{-3} = \frac{1}{(-a)^3} = \frac{1}{(-a)} \times \frac{1}{(-a)} \times \frac{1}{(-a)} = \frac{1}{-a^3} \text{ లేక } \frac{-1}{a^3}$$

ఉదాహరణ 19 : $\frac{-27}{125}$ ను ఘాతరూపంలో వ్యక్తపరచండి.

సాధన : $-27 = (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^3$

$125 = 5 \times 5 \times 5 = (5)^3$

కావున $\frac{-27}{125} = \frac{(-3)^3}{(5)^3}$; $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ నుంచి

$$\frac{-27}{125} = \left(\frac{-3}{5}\right)^3$$

ఇవి చేయండి.

1. విస్తరణ రూపంలో రాయండి.

   (i) $(a)^{-5}$ (ii) $(-a)^4$ (iii) $(-7)^{-5}$ (iv) $(-a)^m$

2. ఘాతరూపంలో రాయండి.

   (i) $(-3) \times (-3) \times (-3)$ (ii) $(-b) \times (-b) \times (-b) \times (-b)$

   (iii) $\frac{1}{(-2)} \times \frac{1}{(-2)} \times \frac{1}{(-2)}$ ...... 'm' సార్లు.

అభ్యాసం - 2

1. ఘాతాంక న్యాయాలనుపయోగించి కిందివానిని సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $2^{10} \times 2^4$ (ii) $(3^2) \times (3^2)^4$ (iii) $\dfrac{5^7}{5^2}$

(iv) $9^2 \times 9^{18} \times 9^{10}$ (v) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^8$ (vi) $(-3)^3 \times (-3)^{10} \times (-3)^7$

(vii) $(3^2)^2$ (viii) $2^4 \times 3^4$ (ix) $2^{4a} \times 2^{5a}$

(x) $(10^2)^3$ (xi) $\left[\left(\dfrac{-5}{6}\right)^2\right]^5$ (xii) $2^{3a+7} \times 2^{7a+3}$

(xiii) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5$ (xiv) $(-3)^5 \times (-5)^3$ (xv) $\dfrac{(-4)^6}{(-4)^3}$

(xvi) $\dfrac{9^7}{9^{15}}$ (xvii) $\dfrac{(-6)^5}{(-6)^9}$ (xviii) $(-7)^7 \times (-7)^8$

(xix) $(-6^4)^4$ (xx) $a^x \times a^y \times a^z$

2. 3^{-4} ను ఏ సంఖ్యచే గుణించగా లబ్ధం 729 అవుతుంది?

3. $5^6 \times 5^{2x} = 5^{10}$ అయితే x విలువ కనుగొనుము.

4. $2^0 + 3^0$ విలువ లెక్కించుము.

5. $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^a \times \left(\dfrac{x^b}{x^a}\right)^a \times \left(\dfrac{x^a}{x^a}\right)^b$ సూక్ష్మీకరించండి.

6. సత్యమా లేదా అసత్యమా తెలిపి కారణాలు తెలపండి.

(i) $100 \times 10^{11} = 10^{13}$ (ii) $3^2 \times 4^3 = 12^5$ (iii)) $5^0 = (100000)^0$

(iv) $4^3 = 8^2$ (v) $2^3 > 3^2$ (vi) $(-2)^4 > (-3)^4$

(vii) $(-2)^5 > (-3)^5$

ప్రాజెక్ట్ పని

మీ పరిసర ప్రాంతంలోని ఏవేని 10 కుటుంబాల యొక్క వార్షిక ఆదాయం వివరాలను సేకరించి, వేలు మరియు లక్షల స్థానానికి సవరించి ఒక్కొక్క కుటుంబం యొక్క వార్షిక ఆదాయాన్ని ఘాత రూపంలో చూపండి.

11.3.6 మిక్కిలి పెద్దసంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచటం

భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి దాదాపుగా 5976×10^{21} కి.గ్రా. పాలపుంత ఒక అంచునుంచి మరొక అంచు వరకు గల దూరం = 946×10^{15} కి.మీ. ఈ రకం సంఖ్యలను అర్థంచేసుకోవటం సులభం కాదు. కావున వీటిని ప్రామాణిక రూపంలో రాస్తే అవగాహన సులభం అవుతుంది.

భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి = 5.976×10^{24} ప్రామాణిక రూపం.

అదే విధంగా, 946×10^{15} ప్రామాణిక రూపం 9.46×10^{17}

కాబట్టి ఒక సంఖ్యను 1.0 మరియు 10.0 మధ్యగల దశాంశ భిన్నంగారాసి దానికి కావలసిన 10 యొక్క ఘాతాలతో లబ్ధం చేయటాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచటం అంటాం.

అభ్యాసం - 3

కింది వాక్యాలలో గల సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

(i) భూమి మరియు చంద్రుడి మధ్యదూరం 384,000,000మీ.

(ii) విశ్వం యొక్క వయస్సు 12,000,000,000 సంవత్సరాలుగా అంచనా వేశారు.

(iii) పాలపుంత గెలాక్సీ యొక్క మధ్యబిందువునుంచి సూర్యునికి గల దూరం300,000,000,000,000,000,000మీ. గా అంచనా వేయబడింది.

(iv) భూమి 1,353,000,000 ఘన కి.మీ.ల ఘనపరిమాణంగల నీటిని కలిగిఉంది.

మనం నేర్చుకున్నవి

- మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యలను ఘాతరూపంలో రాసినప్పుడు వాటిని చదవటం, వ్రాయటం మరియు అర్థం చేసుకోవటం సులభమవుతుంది.
- $10,000 = 10^4$ ని 10 యొక్క నాలుగవ ఘాతం అని చదివి 10ని భూమి అని, 4ను ఘాతాంకం అని అంటాం.

  $243 = 3^5$ ని 3 యొక్క 5 ఘాతం అని చదివి, 3ను భూమి అని, 5ను ఘాతాంకం అని అంటాం.
- ఘాతాంక న్యాయాలు : 'a', 'b' ఏవైనా రెండు శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు 'm', 'n' లు పూర్ణసంఖ్యలు.

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n=a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(iv) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (v) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m > n$ అయిన

(vi) $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$, $n > m$ (vii) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ (viii) $a^0 \neq 1$ $(a=0)$