అధ్యాయం - 5

అభ్యసన ఆధార పత్రాలు

అ) సంఖ్యావ్యవస్థ – అభ్యసన ఆధార పత్రం

(Approach paper on number system)

A. ఆవశ్యకత :

సహజ సంఖ్యలలో సంకలన, గుణకార పరిక్రియల వరకు మాత్రమే చేయు స్వాతంత్ర్యము కలదు. వాటిలో విలోమ పరిక్రియలైన వ్యవకలన భాగహార పరిక్రియలు ఎల్లప్పుడు సాధ్యముకాదు. వాటికి ఋణ సంఖ్యలను చేర్చగా వచ్చు పూర్ణ సంఖ్యలలో వ్యవకలన స్వేచ్ఛత కలదు. భాగహార పరిక్రియలకై అకరణీయ సంఖ్యల ఆవశ్యకత వచ్చింది. వర్గసమీకరణాల మూలలకై కరణీయ సంఖ్యలు అవసరము.

B. భిన్నములు :

a, b రెండు పూర్ణ సంఖ్యల క్రమయుగ్మము సామాన్య భిన్నము. దీనిని $\frac{a}{b}$ లేదా a/b గా రాయుదుము. ఇందులో $b \neq 0$; a ను లవమైన b ని హారమని పిలుస్తాం.

ఉదా : $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ మొ॥

ఉదా : $\frac{x^3+1}{x^2+1}$, $\frac{x^2+3x+4}{x}$ మొ॥ వీటిని బీజీయ భిన్నాలు అంటాము.

$\frac{a}{10^n}$ రూపంలో గల భిన్నాన్ని దశాంశ భిన్నము అంటాం. ఇందులో a పూర్ణ సంఖ్య మరియు n సహజ సంఖ్య.

C. అకరణీయ సంఖ్య నిర్వచనము :

"a, b లు పూర&ణసంఖ్యలై $b \neq 0$ అయినపుడు $\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయగలిగిన సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు" అంటాం.

నిర్వచనాన్ని జాగ్రత్తగా గమనించండి.

(i) b ని శూన్యేతరముగా తీసుకొనడమైనది. అనగా $b \neq 0$. ఎందుకనగా ఇక్కడ b సార్థక భాజకము.

(a) a = 27, b = 3 అయినపుడు $\frac{a}{b} = \frac{27}{3} = 9$ ఇక్కడ b భాజకము.

(b) a = 27, b = 7 అయినపుడు $\frac{a}{b} = \frac{27}{3} = 3\frac{2}{7}$ ఇక్కడ సామాన్య దృక్పథంలో 'b' భాజకమే, 23 భాజ్యము, 2 విభక్తము (భాగఫలము) 2 శేషము. $\frac{a}{b}$ లు 'b' సార్థక భాజకము, '0' భాజకముగా ఉండకూడదు కావున $b \neq 0$ గా తీసుకొనడమైనది.

(ii) "$\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయగలిగిన సంఖ్యలు" అన్నాము "$\frac{a}{b}$ రూపంలో గలవి" అనలేదు. ఎందుకో కింది ఉదాహరణను గమనించండి.

$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}$ ఇక్కడ $\sqrt{20}$ మరియు $\sqrt{5}$ రెండును పూర్ణ సంఖ్యలు కావు ఇది $\frac{a}{b}$ రూపంలో $(a, b \notin z)$ లేదు. కాని $\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయగలిగినాము. కావున $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ అకరణీయ సంఖ్య.

(iii) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3}$ దీనిని $\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయలేము కావున ఇది (కరణీయ) అకరణీయ సంఖ్యకాదు.

(iv) సామాన్యంగా $\frac{a}{b}$ లో 'b' ని ధనసంఖ్యగా రాస్తాం.

D. స్వర్ణ నిష్పత్తి (Golden Ratio) :

$F_1 = 1$మరియు $F_2 = 1$ లతో ప్రారంభమయి వాటి తరువాత పరంపరగా $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ అగునట్లు (n = 1, 2, 3,...) వచ్చు సంఖ్యల శ్రేణిని ఫిబనాకి సంఖ్యలు అంటాం. కావున $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$ అగును. $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$ అను అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ నుండి వచ్చినవి వాటిని. ఆరోహన క్రమంలో రాయండి. తరువాత $\frac{13}{8}$ యొక్క స్థానాన్ని నిర్ధారించండి.

పై నిష్పత్తులు (అకరణీయ సంఖ్యలు) గమనించిన అవి ఒక అవధికి చేరుతున్నట్లు అది 1.6 దగ్గరగా ఉన్నట్లు గమనిస్తాం. దీనిని "నిష్పత్తి" అధ్యాయములో స్వర్ణ నిష్పత్తి (Golden Ratio) గా పేర్కొనుట జరిగింది. తిరిగి దీనిపై కరణీయ సంఖ్యలలో చర్చిద్దాం.

ఇంకా కొన్ని సంఖ్యల వరకు ఫిబానాకి శ్రేణిని రాయండి. ఇందులో 144 మాత్రమే వర్గ సంఖ్య ఇదికాక ఇంక ఉన్నాయా? దీనికి జవాబు ఇంతవరకు కనుగొనబడలేదు.

E. నడిమి సంఖ్యలు :

(i) a, b రెండు సంఖ్యల సరాసరి / మధ్య సంఖ్య $\frac{a+b}{2}$ ఇది గా $a < \frac{a+b}{2} < b$ ఉండును. ఉదా: 6, 10 ల మధ్య సంఖ్య $\frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$ మరియు $6 < 8 < 10$.

(ii) a, b ల మధ్యగల సంఖ్య అనగా అది 'a' కంటే పెద్దదిగాను 'b' కంటే చిన్నదిగాను ఉండును. 3, 4, 5, 6, 7 లు 2, 8 ల మధ్యగల సంఖ్యలే.

(iii) a, b ల మధ్యగతము అనగా 'a' తో 'b' వరకు దాని మధ్యగల సంఖ్యలు ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో రాసిన వాటిలో నట్టనడిమి సంఖ్య మధ్యగతము $a < x < y < z < b$ లు y మధ్యగతము.

(iv) $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ అకరణీయ సంఖ్యలలో b, d లు ధన సంఖ్యలైనపుడు $\frac{a+c}{b+d}$ ని $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ల మధ్యస్థము (Mediant) అంటాం మరియు ఇది $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ గా ఉంటుంది.

పై వానిలో మధ్యసంఖ్యకు, మధ్యస్థమునకు నిర్ధిష్ఠమగు సూత్రము కలదు కావున ఏమని రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలు రాయుటకు ఉపయోగిస్తాము.

ఉదా:- $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ల మధ్య సంఖ్య $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+15}{20}}{2} = \frac{23}{40}$

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ల మధ్యస్థము $\frac{2+3}{5+4} = \frac{5}{9}$

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ అయినపుడు $\frac{a+mc}{b+md}$ (ఇచ్చట m ఏదేని సంఖ్య)

మధ్యగల బిందువులను ఇచ్చును. m విలువ మారుస్తూ ఎన్నో మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలు రాయవచ్చు. $\frac{a}{b} < \frac{a+mc}{b+md} < \frac{c}{d}$ అని నిరూపించండి.

F. ఫారే సంఖ్యలు :

0 నుండి 1 వరకు అనగా నుండి వరకు గల సామాన్య భిన్నాలను క్రమం శ్రేణి F_nచే సూత్రము. ఆ భిన్నములలో దేని హారము కూడ 'n' కంటే ఎక్కువగా ఉండదు. వీటిని 'n'వ ఫారే శ్రేణి / భిన్నాలు (Farey seque±e / fractions) అంటారు.

ఉదా: $F_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

$F_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$

$F_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$

$F_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1$

F_5 మరియు F_7 ల సామాన్య భిన్నాల శ్రేణి రాయండి. (మధ్యస్తమును ఉపయోగించండి)

F_n ను 'n' వ ఫారే భిన్నాలు అంటారు.

G. అంత, ఆవృత, అనావృత, అనంత దశాంశ సంఖ్యలు :

$\frac{p}{10^n}$ రూపంలో గల భిన్నాలను దశాంశ భిన్నాలని అన్నాం.

(i) హారాన్ని గమనిస్తే హారము 2, 5 కారణాంకాలుగా గలది కావున హారము $2^m.5^n$ల రూపములో నున్న అకరణీయ సంఖ్య $\frac{a}{b}$ ని అంతమగు దశాంశ సంఖ్యగా రాయవచ్చు.

$\frac{a}{b}$ లు $b = 2^m.5^n$ అయిన $m \geq n$ అయినపుడు

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m.5^n} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^n.5^{m-n}} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^m} = \frac{a.5^{m-n}}{10^m}$$

$m-n \geq 0$ కావున 5^{m-n} పూర్ణసంఖ్య మరియు $a.5^{m-n} = c$

పూర్ణ సంఖ్యయే కావున $\frac{4}{b} = \frac{c}{10^m}$ అగును. ఇక 'c' ను రాసి 'm' విలువ కనుగుణ్యముగా దశాంశ బిందువు నుంచడమే తరువాయి.

ఉదా:- $\frac{17}{40} = \frac{17}{2^3.5} = \frac{17 \times 5^2}{2^3.5^3} = \frac{17 \times 25}{10^3} \quad \frac{425}{10^3} = 0.425$

ఇక 40) 17 (0.425
0
170
160
100
80
200
200
0

రెండు పద్ధతులను అనువర్తనము చేయుచు సోపానాలు రాయండి.

(ii) $\frac{a}{b}$ లు $b = 2^m 5^n$ రూపంలో లేనిచో a ని 'b' తో భాగించినప్పుడు ప్రతి శేషము 0, 1, 2, ... b – 2, b – 1 లలో ఏదో ఒక సంఖ్య వచ్చును. కావున $a \div b$ భాగహారము ఒక సోపానములో వచ్చు శేష సంఖ్య తిరిగి తరువాత ఏదో ఒక సోపానములో వచ్చిన మధ్యలో వచ్చిన శేషములు మళ్ళి, మళ్ళి అదే క్రమములో ఆవృతమగును కావున హరము $2^m.5^n$ రూపములో లేని అకరణీయ సంఖ్య దశాంశ రూపము ఆవృతమవుతుంది.

ఇక 7) 10 ($1.\overline{428571}$

$$
\begin{array}{r}
10 \\
\underline{7} \\
\rightarrow 30 \\
\underline{28} \\
20 \\
\underline{14} \\
60 \\
\underline{56} \\
40 \\
\underline{35} \\
50 \\
\underline{40} \\
10 \\
\underline{7} \\
\rightarrow 30
\end{array}
$$

'3' శేషము రెండవసారి వచ్చినది కావున అక్కడి నుండి శేషములు ఆవృత మగును. కావున దశాంశ సంఖ్యలు అవే అంకెలు అదే వరుసలో ఆవృత మవుతాయి.

H. కావున $\frac{a}{b}$ రూపంలోగల అకరణీయ సంఖ్యను అంతమగు దశాంశ సంఖ్యగా లేక, ఆవృతమగు అనంత దశాంశ సంఖ్యగా రాయవచ్చును. అదే విధంగా అంతమగు దశాంశ సంఖ్యను ఆవృతమగు అనంత దశాంశ సంఖ్యను సామాన్య భిన్నరూపము అనగా $\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయవచ్చును.

I. రెండు ఒకటే :

$$1 = 0.9999\,.\,.\,.\,. = 0.\overline{9}$$

$$0.1 = 0.999\,.\,.\,.\,. = 0.0\overline{9}$$

$$0.01 = 0.00999\,.\,.\,.\,. = 0.00\overline{9}$$

అని మనకు తెలుసు. కావున అంతమయ్యే ప్రతి దశాంశ సంఖ్యను ఆవర్తన అనంత దశాంశ సంఖ్యగా రాయవచ్చు.

అయితే క్రమబహుభుజి భుజాల సంఖ్య అనంతముగా పెంచుతూపోయిన వచ్చు ఆకారపు అవధి వృత్తమని తెలుసు. కాని భుజముల సంఖ్య ఎంత పెంచినను బహుభుజి వృత్తము కాదు. కావున 0.999.... లో $\overline{9}$లు అనంతముగా ఉన్నను అది 1 కి సమాన మెందుకవుతుంది? అని అనుమానము రావచ్చు. $0.\overline{9}$ మరియు 1లు వేరు వేరు అకరణీయ సంఖ్యలైన వాటి మధ్యలో వేరు అకరణీయ సంఖ్యలుండాలి (ఎందుకు?) అది వాటి సరాసరి కూడ కావచ్చు.

కావున 1, 0.9ల సరాసరి $= \frac{1 + 0.9999\,.\,.\,.}{2} = \frac{1.999\,.\,.\,.}{2} = 0.9999 = 0.\overline{9}$ తిరిగి $0.\overline{9}$ ఏ వచ్చినది. కావున 1, $0.\overline{9}$ ల మధ్య ఏ అకరణీయ సంఖ్య లేదు కావున $0.\overline{9} = 1$

a. కరణీయ సంఖ్యలు :

పైథాగరస్ (580 BCE – 500 BCE) మరియు అతని అనుచరులు నూతన ఆవిష్కరణలకై రహస్య సంస్థను స్థాపించారు. వీరు ఎన్నో గణిత భావనలు కనుగొని తమలో తామే రహస్యంగా ఉంచుకొన్నారు. సంఖ్యలన్నీ అకరణీయ సంఖ్యలే అని

వారి భావన. సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజపు కర్ణపు కొలత భుజముతో పోల్చిన కరణీయ సంఖ్య అయినది. దీనిపై పిథగోరియన్‌లు తీవ్రంగా స్పందించేరు. దీనిని రహస్యంగా ఉంచాలనుకొన్నారు. బయటకు చెప్పిన వారిని నావలలో బంధించేరు. దీనిపై 5వ శతాబ్దంలో Elements పై వ్యాఖ్యానము రాసిన ప్రోక్లస్ "కరణీయ సంఖ్యల రహస్యాన్ని బయటకు పెట్టినవారు పడవ ప్రమాదాలలో చనిపోయారు. మిగిలిన వారెవరైన జనవాసము లేని ద్వీపము చేర్చి సముద్రపు అలల దెబ్బలు తినుటకు వదిలివేసేరు" అన్నాడు.

b. వాస్తవ సంఖ్యలు :

సంఖ్యారేఖపై గల బిందువులను సూచించు ప్రతి సంఖ్య వాస్తవ సంఖ్య అంటే సంఖ్యారేఖపై గల సంఖ్యలన్నియు వాస్తవ సంఖ్యలే.

c. ఒక్కసారి అకరణీయ సంఖ్యల నిర్వచనాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనండి "$\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయగలిగినది" ($a, b \notin z$ మరియు $b \neq 0$) "అంతము కాని ఆవర్తన దశాంశాలుగా రాయగలిగినవి" (ప్రతి అంతమగు దశాంశ సంఖ్యను ఆవర్తన అనంత దశాంశ సంఖ్యగా రాయవచ్చు) అకరణీయ సంఖ్యలు అన్నాం. అకరణీయ సంఖ్య కాని సంఖ్యారేఖపై గల సంఖ్య కరణీయ సంఖ్య. అనగా $\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయలేని, ఆవృత అనంత దశాంశముగా రాయలేని సంఖ్య కరణీయ సంఖ్య.

ఉదా: 1.01011011101111.........

5.245246247248...........

d. వివిధ సంఖ్యామానములలో వాస్తవ సంఖ్య :

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ అనగా 142857 అంకెల గుంపు అదే క్రమములో ఆవృత మగును. కాని దీనిని దశాంశ మానములో నుండి సప్తాంశ మానములోని మారిస్తే $\frac{1}{7}_{(10)} = 0.1_{(7)}$ అంతమగు సప్తాంశ సంఖ్య అవుతుంది. అంటే ఒక అకరణీయ సంఖ్యను వేరొక సంఖ్యామానంలో రాస్తే ఆవర్తన సంఖ్య, అంతమగు సంఖ్యగా కావచ్చు కాని కరణీయ సంఖ్య ఏ సంఖ్యా మానములో రాసినను అది కరణీయంగానే ఉండి ఆవర్తన లేదా అంతమగు సంఖ్యగా మారదు.

$\sqrt{2} = 1.4142135623731$........... దశాంశ సంఖ్యామానము

$= 1.0110101000001001110$........ సంఖ్యామానంలో

$\sqrt{2}$ ఏ రూపంలో రాసినను ఆవర్తన / అంతమగు సంఖ్యగా మారుటలేదు.

e. సమ్మేళనము :

$\sqrt{2} + 3$ కరణీయ సంఖ్యా? లేక అకరణీయ సంఖ్యయా?

$\sqrt{2} + 3 = a$ అకరణీయ సంఖ్య అనుకొనిన

$\sqrt{2} = a - 3$ $a - 3$ అకరణీయ సంఖ్య (ఎందుకు?)

కాని $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య. కావున $\sqrt{2} + 3$ కరణీయ సంఖ్య.

a కరణీయ సంఖ్య మరియు 'b' అకరణీయ సంఖ్య అయిన $a + b, a - b$ లు కరణీయ సంఖ్యలే అని చూపండి.

$3\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్యయా? అకరణీయ సంఖ్యయా?

$3\sqrt{2} = x$ అకరణీయ సంఖ్య అనుకొనిన

$\sqrt{2} = \frac{x}{3}$ ($\frac{x}{3}$ అకరణీయ సంఖ్య ఎందుకు?)

కాని $\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్య. కావున $3\sqrt{2}$ కరణీయ సంఖ్యయే.

> a, b లు వరసగా కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యలైన a.b, $\frac{a}{b}$ లు కరణీయ సంఖ్యలే అని నిరూపించండి.

f. $(\sqrt{a})^2 = a$

$(\sqrt{a})^3 = a\sqrt{a}$ కావున కరణీయ సంఖ్య యొక్క ఘాతము అకరణీయ సంఖ్య ఐన అది కరణీయ లేక అకరణీయ సంఖ్య ఏదైన కావచ్చు.

g. ఎలా?

$2^{\sqrt{2}}$ కరణీయ సంఖ్య మరియు $(\sqrt{2})^2$ = అకరణీయ సంఖ్య

కాని $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ అకరణీయ సంఖ్య.

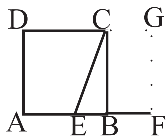
కరణీయ సంఖ్య యొక్క ఘాత సంఖ్య కరణీయ లేక అకరణీయ సంఖ్య అయిన ఆ సంఖ్య కరణీయ లేక అకరణీయ సంఖ్య ఏదైన కావచ్చు కాని

$\pi^{\pi}, 2^{\pi}, \pi^{\sqrt{2}}$ లను చూస్తే కరణీయ సంఖ్యలుగానే కనిపిస్తున్నాయి. కాని ఎలా నిరూపించాలో ఇంతవరకు కనుగొనబడలేదు.

h. **అలసటలేని :**

ఫిబోనాకి సంఖ్యలను గూర్చి చెప్పినప్పుడు వానిలోని రెండు వరుస సంఖ్యల నిష్పత్తుల అవధి 1.6 దగ్గరగా ఉంటుందని దానిని స్వర్ణ నిష్పత్తి అంటాం అని చర్చించాము. దీర్ఘచతురస్రాకారపు వస్తువుల పొడవు వెడల్పుల స్వర్ణ నిష్పత్తిలో ఉంటే అది కంటికి ఇంపుగా వుండునని దీనిని ఆధారముగా తీసుకొని చిత్రకారులు చిత్తర్వులు, ఇంజనీర్లు కట్టడములకు ప్లాన్లు వేస్తారని నిష్పత్తి అధ్యాయంలో చెప్పబడింది. అయితే ఆ స్వర్ణ దీర్ఘ చతురస్రము (Golden rectangle) ఎలా నిర్మిస్తారు?

కావలసిన దీర్ఘచతురస్రపు వెడల్పు కొలతతో ABCD చతుర్భుజాన్ని నిర్మించుము. E, AB యొక్క మధ్యబిందువు గుర్తించుము EC = EF అగునట్లు AB పై F బిందువు గుర్తించుము AF పై AFGD దీర్ఘచతురస్రాన్ని నిర్మించండి.



ఇప్పుడు మనకు కావలసిన స్వర్ణ (Golden) దీర్ఘచతురస్రము AFGD వచ్చును.

EB = 1 తీసుకొని $\frac{AF}{AB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ అని చూపండి దీనినే $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ గా రాస్తారు. ఆ విలువను మూడు దశాంశ స్థానముల వరకు కనుగొనండి. ఆ విలువ కరణీయ సంఖ్య.

i. పై పటములో AFGD స్వర్ణ దీర్ఘచతురస్రము నుండి ABCD చతురస్రాన్ని వేరుచేసిన మిగిలి BFGC దీర్ఘచతురస్రము కూడ స్వర్ణ దీర్ఘచతురస్రమే. ఈ విధంగా స్వర్ణ దీర్ఘచతురస్రములలో చతురస్ర భాగాలను తొలగించిన మిగులు దీర్ఘచతురస్ర భాగాలు స్వర్ణ దీర్ఘచతుస్రాలే.

ఈ ప్రక్రియ అనంతముగా కొనసాగిన స్వర్ణ దీర్ఘచతురస్రాలే వస్తాయి. కావున వీటిని Dynamic rectangle (అలసటలేని దీర్ఘ చతురస్రాలు) అంటారు.

j. **కాగితపు సైజులు :**

మనము ఇంకొక సందర్భములో కూడ అలసటలేని దీర్ఘచతురస్రాలు ఏర్పడుట గమనిస్తాము.

కంప్యూటరు ప్రింటరులో ఉపయోగించి కాగితమును A_4 సైజు కాగితము అంటాం. ఎందుకో తెలుసా?

పొడవు వెడల్పుల నిష్పత్తి $\sqrt{2}$ గా గల్గి 1 చదరపు మీటరు వైశాల్యము గల కాగితమును A_0 సైజుకాగితము అంటారు. దీనిని పొడవు మధ్యబిందువు నుండి సగానికి మడచిన వచ్చు కాగితమును A_1 సైజు కాగితము అంటారు. దానిని తిరిగి మడచిన

A_2 అలాగే A_3, A_4 ... సైజుకాగితాలు వస్తాయి. వాటి పొడవు వెడల్పుల నిష్పత్తులన్నియు $\sqrt{2}$ (కరణీయ సంఖ్య)గానే ఉండును. కావున వచ్చునవన్నియు అలసటలేని దీర్ఘచతురస్రాలే.

పై రెండు సందర్భాలలోను అలసటలేని ఆకారాలు వచ్చుటకు వాటి కొలతల నిష్పత్తులు కరణీయ సంఖ్యలుగా ఉండుట గమనించండి.

మీరు కరణీయ సంఖ్యల ఉపయోగము ఇంక ఎక్కడైన చూసారా? చర్చించండి.

k. పక్కన ఖాళీలేదు ఇరుగుపొరుగు లేరా? :

వాస్తవ సంఖ్యా రేఖపై కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యలు కలవు. అవి ఎంత దట్టంగా ఉన్నాయంటే వాటిమధ్య ఖాళీస్థలం లేదు. అంటే సంఖ్యారేఖపై ఖాళీ స్థలాలు లేకుండ వాస్తవ సంఖ్యలు ఆక్రమించుకొని ఉన్నాయనవచ్చు. ఒక సంఖ్యకు ఇరువైపుల వాస్తవసంఖ్యలు కలవు కాని దానికి ఇరుగు, పొరుగు సంఖ్యలు లేవు. అంటే ఒక దానికి ఆనుకొని ఉన్న సంఖ్య ఏదో చెప్పలేము ఎందుకు? చర్చిచండి.

l. సంభావ్యత :

చర్చనీయాంశాలలో చివరది. సంఖ్యారేఖపై అనంతమైన కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యలను సూచించే బిందువులున్నాలు. అనాలోచితంగా ఒక పెన్సిల్ మొనను సంఖ్యారేఖపై ఉంచిన బిందువు అది కరణీయ బిందువా? లేక అకరణీయ బిందువా? దేని సంభావ్యత ఎక్కువ? ఈ ప్రశ్నకు జవాబు క్లిష్టము.

అయితే ఈ కింద పేర్కొనిన ప్రయోగము దానికి జవాబును సూచిస్తుంది.

10 ముఖములుగల ఒక పాచికను తీసుకొనండి. దాని ముఖంపై వరుసగా 0, 1, 2, . . . 9 వరకు అంకెలు రాయండి. పాచికను విసరి వచ్చు అంకెను దశాంశబిందువు తరువాత రాయండి. రెండవసారి పాచిక విసరి వచ్చు సంఖ్యను రెండవ దశాంశ స్థానంలో రాయండి. ఇలా రాస్తూ పోతే వచ్చు సంఖ్య కరణీయమా? అకరణీయమా? ఆలోచించండి. (కరణీయ సంఖ్యయే ఎందుకనగా పాచికలు విసరినప్పుడు వచ్చు సంఖ్యల ఆవర్తన గుంపుఉండును).

భారతదేశంలో 'కళలు' మరియు 'రంగోళీ' సాంప్రదాయాలు కేవలం చూడటానికి బావుండటం మాత్రమే కాదు. అందులో ఒక గణిత విద్యార్థి నేర్చుకోవడానికి అవసరమైన ఎంతో జ్ఞానం ఇమిడి ఉంది.

– SCF 2011

ఆ) బీజగణితం - అభ్యసన ఆధార పత్రం

(Approach paper on Algebra)

ప్రాముఖ్యత :

1. క్యాలెండర్ :

ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

- పై క్యాలెండర్‌లో ఏదైనా ఒక 3 × 3 చతురస్రాన్ని తీసుకొని వానిలోని అంకెల / సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.
- అదే 3 × 3 చదరంలో అతిచిన్న సంఖ్యను తీసుకొనండి.
- ఆ చిన్న సంఖ్యకు 8ని కలిపి మొత్తాన్ని 9 చే గుణించండి.
- పై రెండు పద్ధతులలోని ఫలితాన్ని సరిచూడండి.
- బీజగణితం సహాయంతో దీనిని వివరించగలరా?

2. పైథాగొరియన్ ట్రిపుల్స్ :

- రెండు వరుస సరి సంఖ్యలను తీసుకొనండి.

  ఉదా : 2, 4
- వాని వ్యుత్క్రమాల మొత్తమును కనుగొనండి.

  ఉదా : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- వచ్చిన భిన్నములో లవము, హారము, (హారము + 1) లను తీసుకొనండి. ఉదా: 3, 4, (4 + 1) = 3, 4, 5.
- ఇవి పైథాగొరియన్ ట్రిపుల్స్ అవుతాయేమో పరిశీలించుము.
- ఏ రెండు వరుస సరిసంఖ్యలను తీసుకొన్నా ఇదే ఫలితమును పొందగలమేమో సరిచూడండి.
- ఇలా సరిచూచుటలో గణితములోని ఏ విభాగాన్ని ఉపయోగిస్తాం?

3. వింత చదరాలు :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

3 × 3 వింత చదరం

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

4 × 4 వింత చదరం

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

5 × 5 వింత చదరం

పైన 3 × 3, 4 × 4, 5 × 5 వింత చదరాలు ఇవ్వబడినవి. వీనిలో మొదటి సహజ సంఖ్యలను నింపినప్పుడు అనగా 3 × 3 వింత చదరంలో 1 నుండి 9 వరకూ, 4 × 4 లో 1 నుంచి 16 వరకూ; 5 × 5 లో 1 నుంచి 25 వరకూ అంకె / సంఖ్యలను నింపినపుడు వాని స్థిరాంకం (ఏదైనా నిలువు / అడ్డు వరుసలలో అంకె / సంఖ్యల మొత్తము) ఈ కింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది.

వింత చదరం యొక్క పరిమాణం	3 × 3	4 × 4	5 × 5
స్థిరాంకం	15	34	65

పై పట్టిక నుంచి 6 × 6 వింత చదరం యొక్క స్థిరాంకం ఎంతో ఊహించగలరా?

పై పట్టికను మరికొంత వివరణాత్మకంగా చూద్దాం.

వింత చదరం యొక్క పరిమాణం	3 × 3	4 × 4	5 × 5
స్థిరాంకం	$15 = 3 \times 5$ $= \frac{3 \times 10}{2}$ $= \frac{3\,(3^2 + 1)}{2}$	$34 = \frac{4 \times 17}{2}$ $= \frac{4\,(4^2 + 1)}{2}$	$65 = 5 \times 13$ $= \frac{5 \times 26}{2}$ $= \frac{5\,(5^2 + 1)}{2}$

ఈ అమరికలోని నియమాలు మీకీపాటికి అర్థమయ్యే వుంటుంది. ఈ నియమం ప్రకారం 6 × 6 వింత చదరం యొక్క స్థిరాంకము = $\frac{6\,(6^2 + 1)}{2}$ = 111 అవుతుంది. అయితే ఈ అమరికలోని నియమాన్ని బీజగణితం సహాయంతో సాధారణీకరించగలరా? సరిచూడగలరా?

4. నిరూపించండి :

- ఒక నాలుగు అంకెల సంఖ్య, అందులోని అంకెలను తారుమారు (రివర్సు) చేయగా వచ్చే సంఖ్యల మొత్తము 11చే భాగించబడుతుంది.
- నాలుగు వరుస సంఖ్యలను వరుస క్రమములో తీసుకున్న అంత్య సంఖ్యల లబ్దము, మధ్య సంఖ్యల లబ్దముల తేడా ఎల్లప్పుడూ రెండే.
- రెండు వరుస సంఖ్యల మొత్తము ఎల్లప్పుడూ బేసి సంఖ్యయే.
- ✦ వీని నిరూపణలో మీరు ఉపయోగించిన గణిత శాస్త్ర విభాగమేది?

తదుపరి మీరు ఈ కింది విషయాలతో ఏకీభవిస్తారా?

1) సమస్యలు / పజిల్స్ మొదలైన వానిని సాధించుటలో ఉపయోగపడే అత్యంత శక్తివంతమైన గణిత విభాగం – బీజగణితం.

2) నియమాలను సరిచూచుటలో బీజగణితం తోడ్పడుతుంది.

3) నియమాలను సామాన్యీకరించటంలో బీజగణితం తోడ్పడుతుంది.

4) అమరికలను సామాన్యీకరించుటలో బీజగణితం ఉపయోగపడుతుంది.

5) తెలియని రాశి / విలువను కనుగొనుటలో బీజగణితం ఉపయోగపడుతుంది.

ఈ విధంగా బీజగణిత సామర్థ్యము పజిల్స్ సాధనలో, సామాన్యీకరించటంలో నిజ జీవిత సమస్యల సాధనలో ఉపయోగపడటమే కాకుండా గణితశాస్త్ర పురోభివృద్ధికి ఉపయోగపడుతుంది.

బీజగణితమును నేర్చుకోకపోతే రసాయన శాస్త్రము, భౌతిక శాస్త్రము, భౌగోళిక శాస్త్రము, అర్థ శాస్త్రము, వ్యాపారము మరియు మానసిక శాస్త్రాలలో చాలా విషయాలను మనం అర్థం చేసుకోజాలము. బీజగణిత జ్ఞానలేమి ఈ శాస్త్రాలలో మన అవకాశాలను పరిమితం చేస్తుంది. వాస్తవానికి బీజగణితం లేకపోతే ఈ శాస్త్రాలలోని చాలా విషయాలను ఇప్పుడు మనం చేస్తున్నంత సులభంగా చేయటం వీలు అయ్యేది కాదు. కొన్ని ఫలితాలను అయితే అసలు పొందే వీలు ఉండేది కాదు.

ఏదైనా ఒక విషయాన్ని ఒకేసారి వివరించవలసి వచ్చినప్పుడు బీజగణిత అవసరం లేకపోవచ్చు. కానీ అదే విషయాన్ని తిరిగి తిరిగి వివరించవలసి వచ్చినప్పుడు బీజగణితం తప్పనిసరి. బీజగణితం అలాంటి వానిని సులభంగా వివరించుటకు ఉపయోగపడే గణితభాష. ఉదాహరణకి రెండు భిన్నాల లబ్ధమును కనుగొనే విషయమును వివరించవలసి వస్తే దానిని కింది విధంగా రాయవలసి వస్తుంది.

"మొదటి భిన్నములోని లవమును రెండవ భిన్నములోని లవముతో మొదట భిన్నంలోని హారమును, రెండవ భిన్నములోని హారముతో గుణించి ఫలితాలను వరుసగా లవ, హారాలుగా రాయవలెను."

దీనినే బీజగణితమును ఉపయోగించి అత్యంత్య సులువుగా, అందరికీ అర్థమయ్యే రీతిలో ఈ కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

ఈ విధంగా బీజ గణితం యొక్క ఉపయోగాన్ని వివరించగలిగితే విద్యార్థులు దీనిని నేర్చుకోవడానికి ప్రేరణ పొందుతారు.

కొన్ని బీజగణిత అంశాలు – వినియోగం :

1) ఫార్ములాలు : ఒక సందర్భములో చికాగో నగరంలోని ఒక వార్తాపేపర్‌లో క్రీడా కాలమ్‌లో ఈ విధంగా పేర్కొన్నారు.

"పోటీలు ఇంకొక 3 వారాలలో ప్రారంభించబడుతాయి. అయినప్పటికీ శుక్రవారం రాత్రి జరిగే సన్నాహక పోటీ – హైస్కూల్ స్థాయిలో ఫార్ములాలు నేర్చుకోవడం అంత ముఖ్యమైనది – కనుక తప్పక వీక్షించండి."

దీనిని బట్టి ఫార్ములాలు ఎంత ముఖ్యమైనవో మనం అర్థం చేసుకోవచ్చు. ఇంకా క్రీడా సంబంధ గణాంకాలలో, విషయాలలో ఫార్ములాల వినియోగం ఎంత అవసరమో ఈ వార్తా రచయితకు విధితమే అని కూడా మనం భావించవచ్చు. వాస్తవానికి క్రీడా సంబంధ అంశాలన్నీ ఫార్ములాలతోనే ముడిపడి ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు ఒక క్రీడాకారునికి $\in_1$ గేములలో మొత్తం T పాయింట్లు వస్తే అతని సగటు స్కోరు $A = \frac{\in_1}{T}$. అదే విధంగా ఒక క్రీడా కారుని గరిష్ఠ, కనిష్ఠ స్కోరుల ఆధారంగా అతని వ్యక్తిగత సామర్థ్యమును అంచనావేయవచ్చు. ఇంకా ఒక టీము యొక్క గెలుపు శాతమును $\frac{W}{W+L}$ ఆధారముగా లెక్కించవచ్చు. ఇచ్చట W = గెలుపుల సంఖ్య మరియు L = ఓటముల సంఖ్య.

అదే విధంగా మనం నివసించే ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యం తెలుసుకొనుటకు, మన చొక్కాకు ఎంత పరిమాణంగల గుడ్డ అవసరమో తెలుసుకొనుటకు, మనం నివసించే ఇంటి చుట్టూ కంచె వేయవలెనన్న ఎంత పొడవున్న కంచె అవసరమో తెలుసుకొనుటకు, మనం మిత్రులకు ఇచ్చే గిఫ్టలను అందంగా ప్యాక్ చేయడానికి ఎంత పొడవైన రిబ్బను అవసరమో తెలుసుకొనుటకు ఇంకా రిబేటు, రుసుము, అమ్మకపు పన్ను, ఆదాయపు పన్ను వంటి ఆర్థిక విషయాలలోనూ మనం అనునిత్యం ఈ ఫార్ములాలను వాడుతూ ఉంటాము. వీటన్నింటిని మనం చాలా చిన్న చిన్న ఫార్ములాలను ఉపయోగించి సులభంగా కనుగొనగలుగుతాం. అయితే అన్ని ఫార్ములాలు ఇదే విధంగా సులభమైనవిగా ఉండకపోవచ్చు. ఉదాహరణకి ఏ తేదీ ఏ వారం అవుతుందో కనుగొనుటకు ఈ కింది ఫార్ములాను ఉపయోగిస్తాము.

$$W = d + 2m + \left[\frac{3(m+1)}{5}\right] + y + \left[\frac{y}{4}\right] - \left[\frac{y}{100}\right] + \left[\frac{y}{400}\right] + 2$$

ఇచ్చుట d = తేదీలోని రోజు (day)

m = తేదీలోని నెల

y = తేదీలోని సంవత్సరము

అయితే నెల (m) ను తీసుకొనప్పుడు జనవరి 13 గా, ఫిబ్రవరిని 14గా మిగిలిన నెలలను యథావిధిగా అనగా మార్చిని 3గా, ఏప్రిల్‌ను 4గా . . . . డిసెంబర్‌ను 12గా తీసుకోవలెను. మరియు [ ] అనగా విలువలోని పూర్ణాంక భాగమునే తీసుకోవాలని అర్థం.

అనగా [5.2] = 5; [14.75] = 14 అని అర్థం.

'W' ను గణించిన తరువాత ఫలితంను 7చే భాగించి వచ్చిన శేషము ఆధారంగా వారమును లెక్కిస్తాము. శేషము '0' అయిన శనివారము, '1' అయిన ఆదివారము........ '6' అయిన శుక్రవారము.

అదే విధంగా A సొమ్మును, r రేటు ప్రకారం, m నెలలకు అప్పుగా తెచ్చుకున్నప్పుడు తిరిగి నెలనెలకు చెల్లించవలసిన సొమ్ము P ని కింది ఫార్ములా నుంచి కనుగొనవచ్చు.

$$P = A\,x^m \left(\frac{x-1}{x^m-1}\right)$$

ఇచ్చుట $x = 1 + \frac{r}{1200}$

ఈ ఫార్ములా ప్రకారం ₹ 8,500/- లను 11.25% వడ్డీరేటు ప్రకారం 4 సం॥లకు అప్పుగా తెచ్చుకున్న నెలకు చెల్లించవలసిన సొమ్ము ₹ 220.72.

2) ప్రమేయాలు :

ఆరోగ్యమును ప్రభావితం చేసే వివిధ అంశాలు వయస్సుతోపాటు ఎలా మారుతాయి? బరువుతో పాటు ఎలా మారుతాయి? ఒక కుటుంబం ఖర్చు చేసే విధానంలోని మార్పు వారి బడ్జెట్‌ను ఎలా ప్రభావితం చేస్తుంది? జనాభా పెరుగుదల వివిధ శక్తి వనరుల వినియోగంపై ఎలాంటి ప్రభావాన్ని చూపిస్తుంది. మొదలైనవన్నీ ప్రమేయాలకు ఉదాహరణలు. బీజగణితమును ఉపయోగించకుండా పెద్దపెద్ద పట్టికల ద్వారా గ్రాఫ్‌ల ద్వారా వీనిని వివరించవచ్చు. అయితే బీజగణితాన్ని ఉపయోగించినప్పుడు మనం పొందే స్పష్టత, సరళత పట్టికల ద్వారా గ్రాఫ్‌ల ద్వారా పొందలేము. ఇంకా బీజగణితము ఆధారంగా ఇవి ఎప్పుడు అత్యల్ప విలువను, అత్యధిక విలువను కలిగి ఉంటాయో కూడా చెప్పవచ్చు. ఇవన్నీ కలన గణితానికి ఆధారాలు.

3) రేఖీయ సమీకరణాలు :

ఒక స్థిర రేటులో మార్పుకు లోనయ్యే ఏ అంశమైనా ఒక రేఖీయ సమీకరణం $T = Ax + by$ ని సూచిస్తుంది. ఇలాంటి సమీకరణాల ఆధారంగా నిజ జీవితంలోని అనేక సమస్యలను ఎలా సాధించవచ్చో 8వ తరగతి నూతన గణిత పాఠ్య గ్రంథంలో ఇవ్వబడినవి. అదే విధంగా ఒక కారు / ఆటోను అద్దెకు తీసుకున్నప్పుడు చెల్లించవలసిన మొత్తము, లైబ్రరీ నుంచి ఒక పుస్తకమును అద్దెకు తెచ్చుకున్నప్పుడు చెల్లించవలసిన మొత్తము మొదలైన వానిని ఎలా కనుగొంటామో 9వ తరగతి నూతన పాఠ్య గ్రంథములో ఇవ్వబడింది.

4) వాలు (Slope) :

మార్పు చెందుతున్న ఏ అంశానికైనా ఒక మార్పు రేటు ఉంటుంది. ఒక్కొక్కసారి ఈ మార్పు రేటు అత్యంత్య ప్రాధాన్యతగల అంశమౌతుంది. కారు వేగంలోని మార్పురేటు దాని త్వరణాన్ని ప్రభావితం చేస్తుంది. ఆదాయంలోని మార్పు రేటు మన ఫైనాన్సియల్ స్టేటస్‌ను మార్చగలదు. నిరుద్యోగంలోని మార్పు రేటు ద్రవ్యోల్బణంను ప్రభావితం చేయగలదు. వీటన్నింటి వెనుక గల బీజగణిత అంశం "వాలుతనము".

5) ఘాతాంకాలు :

ఒక సంఘటన యొక్క సాధ్యాసాధ్యాలను అంచనావేయుట కొరకు తయారుచేయబడిన గణితశాస్త్ర విభాగమే సంభావ్యత. ప్రస్తుతం ఈ గణిత విభాగంలో ఘాతాంకాలను వినియోగిస్తున్నారు. ఏదైనా ఒక అంశం నిరంతరాయంగా స్థిర రేటులో పెరుగుతూ ఉంటే ఆ పెరుగుదలను ఘాతాంక పెరుగుదల (Expenential Growth) అంటాం. ఇలాంటి పెరుగుదలను మనం మన నిత్య జీవితంలోని అనేక ద్రవ్య సంబంధ విషయాలలో చూస్తూ ఉంటాం. చక్రవడ్డీ, వాహనాల మోర్టేజ్, క్రెడిట్ కార్డుల చెల్లింపులు, జీవిత భీమ పాలసీల చెల్లింపులు, రిటైర్‌మెంట్ సమయంలో ఇచ్చే మొత్తాలు ఈ కోవకు చెందినవే. ఇంకా జనాభా పెరుగుదల, జంతువుల పెరుగుదల / తరుగుదల మొదలైనవన్నీ కూడా ఈ కోవకు చెందినవే.

6) బీజీయ సమాసాలు :

గురుత్వాకర్షణ శక్తికి లోబడి ప్రయోగించే ఏ వస్తువు మార్గమునైనా $Ax^2 + Bxy + cy^2 + Dx + Ey + F$ అనే బీజీయ సమాసం వర్ణించగలుగుతుందని న్యూటన్ కనుగొనినాడు ఇదే ఫలితం నక్షత్రాలకు, గ్రహాలకు, తోకచుక్కలకు, చందమామలకు వర్తిస్తుంది. అదే విధంగా ఇదే ఫలితం రాకెట్లకు, బుల్లెట్లకు, బేస్‌బాల్స్, బాస్కెట్ బాల్స్ యొక్క మార్గాలకు వర్తిస్తుందని మనం గుర్తించగలం. అంటే ఈ ఫలితమును భౌతిక శాస్త్రం, ఖగోళ శాస్త్రం, సైనిక సేవలలో, క్రీడలలో ఉపయోగిస్తాం.

7) సంవర్గమానాలు :

భూకంప తీవ్రతను కొలవడానికి ఉపయోగించే రిక్టర్ స్కేల్, ఆమ్లత్వమును లెక్కించడానికి ఉపయోగించే Ph స్కేలులో, ఖగోళ శాస్త్రంలో ఉపయోగించే నక్షత్ర పరిమాణ స్కేలులో ఈ సంవర్గమానాలను ఉపయోగిస్తారు.

8) ప్రస్తారాలు – సంయోగాలు :

లాటరీలలో గెలుపు, ఓటములను అంచనావేయుటకు, ఓపీనియన్ పోల్స్ నిర్వహించుటకు అవసరమయ్యే ఓటర్ల సంఖ్యను నిర్ధారించుటకు, టి.వి. రేటింగ్స్‌ను అంచనా వేయుటలో వీనిని ఉపయోగిస్తారు.

ఈ విధంగా బీజగణితం అత్యంత్య ప్రాముఖ్యమైనది. మనం ఏదైనా ఒక ప్రాంత సందర్శనకు వెళ్లినప్పుడు ఆ ప్రాంత ప్రజలు మాట్లాడే భాష రాకపోయినా ఏదో ఒక విధంగా మూగసైగలతోనైనా మన పని పూర్తిచేసుకొని రాగలం. కానీ దీనివల్ల వారి సామాజిక, ఆర్థిక, రాజకీయ స్థితిగతులను, వారి పూర్వ తరాల వైభవమును వారి సంస్కృతిని అర్థం చేసుకోలేం. మన స్ఫూర్తిగా అభినందించలేం. ఇంకా విచిత్రం ఏమిటంటే ఆ పర్యటనలో మనం ఏం చూడలేకపోయినామో, ఏమి కోల్పోయామో కూడా గుర్తించలేం. అదే విధంగా బీజగణితం లేకుండా కూడా గణితాన్ని నేర్చుకోవచ్చు. అయితే గణితం యొక్క సౌందర్యాన్ని దర్శించలేము దాని ఆవశ్యకతను, ప్రాముఖ్యతను గుర్తించలేము, అభినందించలేము.

చరిత్ర :

సాధారణంగా కింది తరగతులలో బోధించే అంకగణితము సులభమైనదిగా, పై తరగుతలలో బోధించే బీజగణితము కష్టమైనదిగా భావిస్తాము. అంకగణితము సుపరిచితమైన అంకెలు / సంఖ్యల వంటి గుర్తులను ఉపయోగించుటము బీజగణితము అంతగా సుపరిచితం కాని x, y . . . . . ల వంటి గుర్తులను ఉపయోగించటమే ఇలా భావించడానికి కారణం కావచ్చు. అయితే ప్రయోగాత్మకంగా పరిశీలించినప్పుడు అంకెలు / సంఖ్యల వంటి గుర్తులను ఉపయోగించుటకు, x, y . . . . . వంటి గుర్తులను ఉపయోగించుటకు మధ్య తేడా ఏమీ లేదు.

నాగరికత అభివృద్ధి చెందుతున్న మొదటి రోజులలో “నీ వద్ద ఆరు పండ్లు కలవు. నేను అదేరకమైన పండ్లు మరి ఐదింటిని ఇస్తే మొత్తం నీ దగ్గర పండ్లు ఎన్ని?” – అని వుండేది. దీనికి సమాధానం పదకొండు పండ్లు అని మనకు తెలుసు. అనగా

ఆరు పండ్లు + ఐదు పండ్లు = పదకొండు పండ్లు

అయితే సంఖ్యలు మరీ పెద్దవి అయినప్పుడు ఈ విధంగా రాయటం శ్రమతో కూడుకున్నదే గాక కాలం వృధా అవుతుంది. దీనికి పరిష్కారంగా అభివృద్ధి చేయబడినవే 0, 1, 2 . . . . . 9. వీనినే సంఖ్యా సంజ్ఞలు (Numerals) అంటాం. 9 కంటే ఎక్కువైన సంఖ్యలను ఈ సంజ్ఞలను ఉపయోగించి రాయడం ఎలానో మనం నేర్చుకున్నాం. దీనివల్ల "ఆరువేల ఏడు వందల యాభై రెండు" అనే పెద్ద వాక్యమును అతి సూక్ష్మంగా 6752 అని రాయటం వీలైంది.

గుర్తులు, సంజ్ఞల యొక్క ఉపయోగం ఈ పాటికి మీకు అర్థమయ్యే ఉంటుంది. వాస్తవంగా ఇలాంటి సంఖ్యలు / గుర్తులను మనము వాడుతున్నవే. "గుర్రం" అనే పదం భూమి మీద వున్న ఒక జీవిని సూచించుటకు మనం వాడే సంజ్ఞ / గుర్తు. ఈ విధంగా మనం నిజ జీవితంలో ప్రతీ విషయాన్ని సులభంగా వివరించుటకు అనేకరకమైన సంఖ్యలు / గుర్తులను వాడుతాం. అయితే వీటన్నింటిని మనం కింది తరగతులలోనే నేర్చుకోవటం వల్ల వానిపై తగినంత తర్ఫీదు పొందడంవల్ల అవి సులభమైనవిగా భావిస్తాం. అదే పై తరగతులలో క్రొత్త సంజ్ఞలు / గుర్తులు ఉపయోగించవలసివస్తే అవి క్రొత్తగా అసహజంగా కనిపిస్తుంది. ఉపయోగించడానికి అంత త్వరగా ఇష్టపడము. అయితే ఇదే విధమైన అఇష్టము, అసహజత్వము అంకగణితములో 0, 1, 2 . . . . 9, +, –, ×, ÷, = వంటి గుర్తులను నేర్చుకొనే సమయంలో కూడా వుంటుందని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. కాకపోతే వానిపై తర్ఫీదు ఉండటంవల్ల వానిని సులభమైనవిగా భావిస్తున్నాం. ఏదిఏమైనా సంఖ్యలు జీవన గమనాన్ని సులభతరం చేస్తాయనేది నిర్వివాదాంశం. అయితే ఈ క్రమంలో ఒక్కొక్కసారి క్రొత్త సంజ్ఞలు / గుర్తులను కనుగొనవలసిన అవసరం ఏర్పడుతుంది.

ఈ కింది ప్రశ్నలను పరిశీలించుము.

1) రెండుకు రెండు కలిపిన మొత్తం ఎంత?

2) ఎనిమిది నుంచి ఐదును తీసివేసిన ఫలితం ఎంత?

ఈ రెండింటిని సంజ్ఞలు / గుర్తులను ఉపయోగించి ఇలా రాయవచ్చు.

1) $2 + 2 =$

2) $8 - 5 =$

అయితే ఇలా సంజ్ఞా రూపంలోకి మార్చినపుడు ఒకటవ ప్రశ్నలలోని మొత్తం ఎంత? రెండవ ప్రశ్నలలోని ఫలితం ఎంత? అనే వానికి సంజ్ఞలేకపోవడం వల్ల రాయలేకపోయినాము. అంటే మనకు (కొత్త సభ్యులు) గుర్తులు అవసరం. అయితే ఇక్కడ సంజ్ఞ రాయవలసిన అవసరం ఏముంది ఆ ప్రదేశంలో కొంత ఖాళీ స్థలమును వదిలితే సరిపోతుంది కదా అని మనం భావించవచ్చు. కానీ ఈ కింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

ఎన్ని మామిడి పండ్లకు ఆరు మామిడి పండ్లు కలిపితే అవి పదకొండు అవుతాయి? అంటే మొదటవున్న మామిడి పండ్ల సంఖ్య మనకు తెలియదు. ఇది తెలియని రాశి / అవ్యక్తరాశి. దీనికి ఖాళీ స్థలమును వదలి పై విషయాన్ని కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$$6 = 10 \rightarrow (1)$$

ఇది అర్థవంతంగా వున్నట్లు అనిపించదు. అంటే తెలియని రాశికి ఖాళీ స్థలం వదలటం అంత శ్రేయస్కరం కాదు. 'ఆరుకు' '6'; 'పది' కి '10' ఏ విధంగా అయితే గుర్తులు ఉన్నాయో అదే విధంగా తెలియని రాశికి కూడా ఒక గుర్తు / సంజ్ఞ ఉండడం అవసరం.

తెలియని రాశికి ఒక గుర్తు / సంజ్ఞ యొక్క అవసరం మీకీపాటికి అర్థమై ఉంటుంది. తెలియని రాశికి ఒక సంజ్ఞ / గుర్తుకు మనం సూచించాలని భావిస్తున్నామంటే మనం బీజగణితమును గురించి ఆలోచిస్తున్నామనే అర్థము. తెలియని రాశికి ఒక సంజ్ఞ తయారైన మరుక్షణం మనం అంకగణితంలోని ప్రతీ సమస్యలో తెలియని రాశికి ఆ సంజ్ఞను వాడుతాము. అందువల్లనే సాధారణీకరించబడిన అంకగణితమునే బీజగణితం అంటాం. ఇక ఇప్పుడు మన సమస్య ఏమిటంటే ఈ తెలియని రాశికి ఒక

సంజ్ఞ / గుర్తును కనుగొనడం దీని కొరకు అనేక గుర్తులను పరిశీలించడం జరిగింది. ఈ పరిశీలనలో ముఖ్యంగా గుర్తుంచుకున్న అంశాలేమిటంటే ఈ (కొత్త సంజ్ఞ) గుర్తు అందరికీ తెలిసినదై ఉండాలి. పలకడానికి చిన్నదిగా ఉండాలి మరియు అది ఇంతకు ముందు ఎక్కడైతే ఉపయోగించబడుతుందో అక్కడ తక్కువగా ఉపయోగించబడాలి. ఇలాంటి లక్షణాలలో లభించినవే x, y, z...

పై సమీకరణములో తెలియని రాశిని 'x' చే సూచిస్తే అది కింది విధంగా ఉంటుంది.

$$x + 6 = 10 \rightarrow (2)$$

(1), (2) లను చూసినప్పుడు (1) కంటే (2) ను అర్థం చేసుకోవడం సులభం అని మనం గుర్తించగలం. తదుపరి

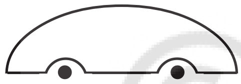
మీరు ఈ కింది ప్రవచనంలో ఏకీభవిస్తారా?

గుర్తులను ఉపయోగించడంవల్ల జీవితం సులభతరమౌతుంది.

తెలియని రాశికి ఇలా గుర్తును మొదటగా 1590లో ఫ్రెంచి గణితవేత్త ఫ్రాన్‌కోయిస్ వియోటా (francois vieta) ఉపయోగించాడు.

చరరాశి :

పావని, సాగర్‌లు పేపర్‌పై కార్ల నమూనాను గీస్తున్నారు. వారు కార్ల చక్రాలకు బదులుగా పై పటంలో చూపినట్లు నల్లబొట్టు బిళ్లలను వాడుతున్నారు. పావని రెండు బొట్టుబిళ్లల సహాయంతో ఒక కారు పటాన్ని కింద చూపిన విధంగా తయారు చేసింది.



వెంటనే సాగర్ మరి రెండు బొట్టు బిళ్లల సహాయంతో మరి ఒక కారు పటాన్ని మొదటి దాని ప్రక్కనే తయారుచేశారు.

ఇలా తయారుచేస్తున్న సమయంలో వారి మిత్రుడు రవి వచ్చి ఒక వేళ ఇలాంటి పటాలను నాల్గింటిని తయారుచేయాలంటే ఎన్ని బొట్టు బిళ్లలు కావాలి అని అడిగాడు. పావని వెంటనే వారు తయారుచేసిన రెండు పటాలకు ఎన్ని బొట్టు బిళ్లలు అవసరమో అయ్యాయో లెక్కపెట్టి వానిని రెట్టింపు చేసి 8 కావాలని చెప్పింది. దానికి రవి పావనిని మెచ్చుకుంటూ తిరిగి "ఒక వేళ ఇలాంటి పటాలను 59 తయారుచేయాలంటే ఎన్ని బొట్టు బిళ్లలు కావాలి?" అని అడిగాడు.

పావని సాగర్‌లకు ఇంతకు ముందు విధంగా లెక్కించి చెప్పటం కష్టమని అర్థమైంది. వారు కొద్దిసేపు ఆలోచించి కింది పట్టికను తయారుచేశారు.

కార్ల సంఖ్య	1	2	3	4	...
కావలసిన బొట్టు బిళ్లల సంఖ్య	2	4	6	8	...

పై పట్టిక నుంచి మీరేమైనా ఒక సంబంధాన్ని రాబట్ట గలరా? ఇదే సంబంధాన్ని పావని, సాగర్‌లు ఈ కింది విధంగా రాశారు. కావలసిన బొట్టు బిళ్లల సంఖ్య = 2× కావలసిన కార్ల బొమ్మల సంఖ్య → (1)

దీని ఆధారంగా 59 కార్ల నమూనా పటాలను తయారుచేయుటకు అవసరమయ్యే బొట్టుబిళ్లల సంఖ్యను పావని, సాగర్‌లు కనుగొనగలిగారు. సులభంగా ఉండుటకు కావలసిన కార్ల సంఖ్యను 'x' అనుకొంటే (1) ని కింది విధంగా రాయవచ్చు.

కావలసిన బొట్టు బిళ్లల సంఖ్య = $2x$.

మనం ఒక కారు పటాన్ని తయారుచేయాలనుకుంటే $x = 1$ అవుతుంది. కనుక కావలసిన బొట్టు బిళ్లల సంఖ్య = 2

అదే విధంగా రెండు కార్లను తయారుచేయాలనుకుంటే $x = 2$ అవుతుంది కనుక కావలసిన బొట్టు బిళ్లల సంఖ్య = $2 \times 2 = 4$

ఈ విధంగా అవసరమైనన్ని కార్ల బొమ్మల తయారీకి అవసరమయ్యే బొట్టు బిళ్లల సంఖ్యను కనుగొనవచ్చు.

ఇచ్చట 'x' ను చరరాశి అంటాము. దీని విలువ 1 లేదా 2 లేదా 3 ...... కావచ్చు. అంటే x విలువ స్థిరం కాదు. దీని విలువ సందర్భమును బట్టి మారుతూ ఉంటుంది.

నిజజీవితంలో మనం ఉపయోగించే రాశులలో చరరాశులకు కొన్ని ఉదాహరణలివ్వండి.

ఇ) రేఖాగణితం – అభ్యసన ఆధార పత్రం

(Approach paper on Geometry)

రేఖాగణిత అధ్యయన ప్రాధాన్యత :

రేఖాగణిత అధ్యయనం అనేది మానవ చరిత్రలో అద్భుతమైన ప్రాచీనమైన, సౌందర్య కళ, ప్రాచీన నాగరికత నుండి గణిత విజ్ఞాన పరిణామ క్రమాన్ని పరిశీలిస్తే బాబిలోనియన్లు మొదలు ఈజిప్టియన్ల వరకు అంటే క్రీ.పూ. 300 నుండి క్రీ.శ.100 వరకు ఇది ఒక ప్రత్యేక అధ్యయన అంశంగానే ప్రాచుర్యం పొందింది. ప్రాచీన ఈజిప్ట్‌లో తత్వశాస్త్రవేత్త "టోలమీ–1" అంతర్జాతీయ విశ్వవిద్యాలయం స్థాపించినపుడు ప్రముఖ విద్యావేత్త అయిన "యూక్లిడ్" (గ్రీస్)ను గణిత శాస్త్ర విభాగాధిపతిగా చేసాడు. ఆకాలంలో యూక్లిడ్ తన సహచరులతో కలసి తొలిసారిగా రేఖాగణితాన్ని స్వీకృతాధార అధ్యయన విధానంగా రూపొందించి ప్రపంచవ్యాప్తంగా దానిని "యూక్లిడ్ రేఖాగణితం" గా ప్రాచుర్యం కల్పించాడు. యూక్లిడ్ సంకలన గ్రంథమైన "ద ఎలిమెంట్స్" ప్రపంచ వ్యాప్తంగా జ్యామితి అధ్యయనంలో విప్లవాత్మకమైన మార్పులు తీసుకొని రావడమే కాకుండా బైబిల్ తర్వాత అత్యంత ప్రాచుర్యం, అనేక ఇతర భాషలలోనికి తర్జుమా కాబడిన గ్రంథంగా కీర్తి గడించింది.

రేఖాగణిత అధ్యయనం అనేది పాశ్చాత్యదేశాల విద్యావిధానానికి పునాదిగానూ, యువకులలో తార్కిక ఆలోచనలు ప్రేరేపించి పటిష్ఠ పరిచే శాస్త్రంగా యూక్లిడ్ కాలం నుండే భావింపబడేది. తర్వాత కాలంలో యూక్లిడేతర రేఖాగణితం రూపొందించబడడంతో గణితంలో వివిధ రకాలైన సమస్యల సాధనకు దీని అధ్యయనం మరింత విస్తృతమైనది. శాస్త్రవేత్తలు, ఇంజనీర్లు ఆధునిక రేఖాగణిత భావాలను ఉపయోగించి ప్రకృతి రహస్యాలను చేధించి మానవ అవసరాలను తీర్చడానికి అనేక వనరులు (కట్టడాలు, వంతెనలు, రవాణా మార్గాలు మొదలగునవి) సృష్టించడం జరిగింది. ఇదే విధంగా వివిధ కళారంగాలు అభివృద్ధి చెందాయి. చిత్రకారులు, డిజైనర్లు, నిర్మాణ కౌశలాలు పెంపొందించే దిశలో త్రిమితీయ ఆకారాల నుండి సమతల పటాలను (ద్విమితీయ ఆకారాలు) రూపకల్పనచేసారు. ఉదాహరణకు సినిమా తెరలు, టెలివిజన్ తెరలు ప్రధానంగా జ్యామితీయ భావాలైనప్పటికీ ప్రాకృతికంగా యూక్లిడేతర జ్యామితికి అనువర్తనాలుగా భావించవచ్చు. అయితే దురదృష్టవశాత్తూ అనేక సందర్భాలలో ఈ ఆధునిక జ్యామితీయ భావాలకు వాటి అనువర్తనాలకు మన సెకండరీ స్థాయి గణిత ప్రణాళికలో చోటు కల్పించబడలేదు.

జామెట్రీ (Geometry) అనే పదం రెండు గ్రీకు పదాలైన జియో (Geo) అంటే "భూమి" మరియు మెట్రాన్ (Metron) అంటే "కొలత" నుండి నిర్వచించబడ్డాయి. ప్రాచీన గ్రీకులు, జ్యామితీయ భావాలను మానవ అవసరాలు, ఆసక్తులకు అనుగుణంగా క్రమబద్ధంగానూ, హేతుబద్దంగానూ అమర్చారు. అదే విధంగా బాబిలోనియన్లు వృత్తపరిధిని 360 సమాన భాగాలు చేసారని, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం పైథాగరస్ కన్నా ముందుగానే వినియోగించారని, నిష్పత్తి అనుపాత సమస్యలకు, త్రిభుజ ధర్మాలను, భుజాలకు, కోణాలకు మధ్య సంబంధాలు కనుగొన్నారని చెప్పడానికి చాలా ఆధారాలున్నాయి.

బాబిలోనియన్ల నుండి ఈజిప్టియన్ల వరకు గణిత అధ్యయనం ముఖ్యంగా అనేక ప్రశ్నలకు సమాధానాలను ఇస్తుంది. మొదట్లో ఈ ప్రశ్నలన్నీ "ఎలా?" తో ప్రారంభమయ్యాయని చెప్పవచ్చు. ఉదాహరణకు అప్పుతీసుకున్న సొమ్ముపై వడ్డీని 'ఎలా' లెక్కిస్తాం? ఇచ్చిన కొలతల ఆధారంగా పిరమిడ్ ఘనపరిమాణాన్ని 'ఎలా' గణిస్తాం? ఇచ్చిన సంఖ్యకు వర్గమూలం 'ఎలా' కనుగొంటాం? వంటి అనేక ప్రశ్నలు తార్కిక ఆలోచనలకు పదును పెట్టాయి. క్రీ.శ.100 సం॥ నుండి పాశ్చాత్యదేశాలలోనూ, మధ్యప్రాచ్య ప్రాంతాలలోనూ అర్థశాస్త్ర ప్రాధాన్యత పెరిగి క్రమంగా గణితభాష, నాణాలకు సంబంధించిన అంశాలు పునాది వేశాయి. తర్వాత కాలంలో గణితంలో ప్రశ్నలు వేయడంలోనూ, ఆలోచనా విధానాలలోనూ మార్పులు వచ్చి "ఎందుకు?" వంటి ప్రశ్నలు మొదలైనాయి. ఉదాహరణకు త్రిభుజ వైశాల్యం దాని భూమి, ఎత్తుల లబ్దంలో సగం "ఎందుకు" అయింది? లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మీద వర్గం, మిగిలిన రెండు భుజాల మీద వర్గాల

మొత్తానికి సమానం "ఎందుకు" అయింది? వంటి ప్రశ్నలు మరింత హేతుబద్ధంగా ఆలోచించడానికి, తార్కికంగా కారణాలు చెప్పడానికి దోహదపడ్డాయి. ఏదేమైనా గణితంలో విప్లవాత్మకమైన మార్పులు శాస్త్ర సాంకేతిక రంగాలలోనూ, వాణిజ్య రంగాలలో ప్రగతి సాధించుటకు దోహదపడింది. జ్యామితి అధ్యయనం ఎన్ని మార్పులకు గురైనప్పటికీ గ్రీకులు వేసిన ఆలోచనా విధానం నేటికీ సమాజాన్ని ప్రభావితం చేస్తున్నదని చెప్పవచ్చును.

రేఖాగణితం - నేర్చుకునే క్రమం :

రేఖాగణితం నేర్చుకునే క్రమంను ముఖ్యంగా మూడు దశలుగా విభజింపవచ్చును.

ప్రాకృతిక రేఖాగణితం
(Natural Geometry)

ప్రాకృతిక స్వీకృతాధార రేఖాగణితం
(Natural axiomatic Geometry)

నియత స్వీకృతాధార రేఖాగణితం
(Formal axiomatic Geometry)

"ప్రాకృతిక రేఖాగణితం" పరిసరాలలో లభించే వస్తుసముదాయాలనుండి ప్రారంభమౌతుంది. ఇది నిజజీవిత అనుభవాలకు దగ్గరగా ఉండి, ఆత్మపరిశీలన ద్వారా తార్కిక ఆలోచనలను ప్రేరేపించే విధంగా ఉంటుంది. ఈ రేఖాగణిత అధ్యయన దశలో ప్రధానంగా వస్తువులు, కాగితాలపై గీచే రేఖాచిత్రాలు, కంప్యూటర్ తెరపై వేసే బొమ్మలు ప్రధాన పాత్ర పోషిస్తాయి. గీయడం, కొలవడం వంటి సాధారణ ప్రక్రియలు, జ్యామితి పరికరాలు వినియోగించి ప్రయోగాత్మకంగా నేర్చుకోవడం, ప్రతిక్షేపణ పద్ధతుల ద్వారా స్వీయ అనుభవాలు పొందడం దీనిలో భాగం. నూతన పాఠ్యపుస్తకాలలో అంటే 6, 7, 8 తరగతుల గణితంలో పరిసరాలలో లభించే వివిధ వస్తువులు, ఆకారాలద్వారా రేఖాగణిత భావాలను రాబట్టిన విధానం రాయబడింది. ఇదే విధంగా మూల మట్టాలు ఉపయోగించి ఏవిధంగా సమాంతర రేఖలు గీస్తామో చూపబడింది. వృత్తలేఖిని, కొలబద్ద ఉపయోగించి ప్రాథమిక రేఖాగణిత నిర్మాణాలు చర్చించబడ్డాయి. పరిశీలనలు, అనుభవాలు, రుజువుల ద్వారా కారణాలను అన్వేషించి వస్తురూపాలకు ఆకృతులు, ఆకృతులను పటాలుగా ఊహించుకొని నిర్దిష్టమైన ప్రవచనాలు ఉత్పాదించబడతాయి.

"ప్రాకృతిక స్వీకృతాధార రేఖాగణితం" లో వస్తువుల ప్రేరణ ద్వారా పొందిన రేఖాగణిత పటాల ధర్మాల ఆధారంగా కారణాలను అన్వేషించి పటాలలో వివిధ భాగాలమధ్య సంబంధాలు ఏర్పరచబడతాయి. సునిర్వచిత పదాలు, స్వీకృతాలు, ప్రతిపాదనలను తార్కికంగా అవగాహన చేసుకొని నూతన సంబంధాలను ఆవిష్కరించడం జరుగుతుంది. ఈ క్రమంలో వ్యవస్థలోపల వివిధ అంశాలమధ్య సంబంధాలను ఏర్పరచడం ద్వారా విశ్వసనీయత, ఖచ్చితత్వం పెంపొందుతుంది. వీటి విశ్వసనీయతకు దత్తాంశ పరమైన నిగమన సూత్రాలు వినియోగించబడతాయి. 9, 10 తరగతుల రేఖా గణిత అధ్యయనంలో సిద్ధాంతాల నిరూపణకు పటాల ద్వారా ప్రయోగాత్మకంగా పరిశీలించి, జ్యామితీయ స్వీకృతాలనుపయోగిస్తాము. ఉదాహరణకు "సమాంతర చతుర్భుజంను కర్ణము రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది" అనే సిద్ధాంత నిరూపణకు సమాంతర చతుర్భుజ పటం, దానిలో భాగాలు తెలిసి ఉండాలి. అదే విధంగా త్రిభుజ సర్వసమానత్వ నియమాల స్వీకృతాలు తెలిసి ఉండాలి. సిద్ధాంత నిరూపణలో క్రమయుతమైన విధానం అవగాహన కలిగి ఉండాలి. ఈ విధంగా, ఈ దశలో అమూర్తంగా ఉన్న కీలక భావనలను మనం నమ్మేకొన్ని సత్యాల (స్వీకృతాలు) ఆధారంగా నిరూపించడానికి అవకాశం కలుగుతుంది.

"నియత స్వీకృతాధార రేఖాగణితం" అమూర్త భావనల నుండి మరిన్ని అమూర్త భావనలకు దారితీసి అంతరాళంలో ప్రతి వస్తువును ఊహించి, వాటి ధర్మాలను సాంకేతిక రూపంలో అన్వయించడం మొదలవుతుంది. రేఖలను, వక్రాలను బీజగణిత సమీకరణాలలో వ్యక్తపరచడం ద్వారా అమూర్తమైన భావజాలాన్ని అభివృద్ధి చేయడం జరుగుతుంది. తద్వారా రేఖాగణితం వైశ్లేషికంగా రూపాంతరం చెంది, నూతన ఆవిష్కరణలకు దారితీస్తుంది. ఉదాహరణకు $ax + b = c\ (a\neq 0)$ అనేది ఏక చలరాశిలో రేఖీయ సమీకరణం అయితే $ax^2 + bx + c=0\ (a\neq 0)$ ఒక వర్గసమీకరణం మరియు దీని రూపం ఒక వక్రం అవుతుంది. ఈ విధంగా రేఖలకు, వక్రాలకు, వృత్తాలకు, స్థూపాలకు వివిధ బీజయ సమాసాలు జతపర్చబడతాయి.

గణితంలో క్రమానుగతమైన హేతుబద్ధీకరణ అన్ని సందర్భాలలోనూ కుదరదు. గణిత శాస్త్రానికున్న విలువలు, దృక్పథం ఖచ్చితంగా దీనిని ప్రభావితం చేస్తాయి. ఉపపత్తి ప్రధానమైనదే అయినప్పటికీ నిగమన పద్ధతి ద్వారా పాఠశాల స్థాయిలో రాబట్టే నిరూపణల వలన కొన్ని సందర్భాలలో గణిత స్వభావం దెబ్బతినవచ్చు. కొన్ని సందర్భాలలో ఒక పటం, మరికొన్ని సందర్భాలలో ఒక నిర్మాణం ద్వారా ఉపపత్తి చెప్పవచ్చు. అందుచే ఒక సిద్ధాంతానికి ఇచ్చే ఉపపత్తి ఒకే విధంగా ఉండాలనే సాంఘిక నియమం ఏదీలేదు. పైథాగరస్ సిద్ధాంతానికి సుమారు 100కుపైగా నిరూపణలున్నాయంటే ఆశ్చర్యం కలుగకమానదు. గణిత తార్కికతకు అనుగుణంగా ఏర్పరచుకున్న నియమాలకు అనుగుణంగా ఉపపత్తిని రాబట్టవచ్చు. ఒక సిద్ధాంత నిరూపణలో ముఖ్యంగా వాదనలకు చోటు కల్పించాలి. ఈ వాదనలను క్రమబద్ధంగా అమరిక చేసి, స్వీకృతాలను జోడించి సిద్ధాంతాలను నిరూపించే విధంగా విద్యార్థులను ప్రోత్సహించాలి.

చర్చనీయాంశాలు

చర్చించి – రాయండి.

1) మీ ఇంటిలో ఉన్న వివిధ వస్తువుల జాబితాను రూపొందించి వాటిలో ఇమిడి ఉన్న రేఖాగణిత భావనలు వివరించండి.

2) పాఠశాల స్థాయిలో ఏ రేఖాగణిత భావాలు (a) వస్తువుల ద్వారా (b) రేఖాగణిత పరికరాల ద్వారా (c) ప్రయోగాత్మకంగా (d) తార్కిక కారణాల ద్వారా విద్యార్థులు నేర్చుకుంటారో రెండేసి ఉదాహరణలు తెల్పండి.

3) "త్రిభుజంలో మూడు కోణాల మొత్తం 180^0" అనే ప్రతిపాదన నిరూపణకు మీరు అవలంబించే విధానాలు (నిరూపణ పద్ధతులు) తెల్పండి. వివరించండి.

రేఖాగణిత నిర్మాణాలు – ప్రత్యేకశైలి :

రేఖాగణిత అధ్యయనంలో జ్యామితీయ నిర్మాణాలు ప్రత్యేకపాత్ర పోషిస్తాయి. ప్రాకృతిక రేఖాగణితం నుండి ప్రాకృతిక స్వీకృతాధార రేఖాగణిత దశకు మారే క్రమంలో ఈ నిర్మాణాలు అందు ఇమిడివున్న తార్కికత ఖచ్చితంగా విద్యార్థులను ప్రభావితం చేస్తాయి.. ప్రకృతి సిద్ధమైన, మానవ నిర్మితమైన వస్తువులను, ఆకారాలను పటాలుగా గీయడం అనేది అన్ని వయస్సుల వ్యక్తులకు ఒక అనుభూతిని కలిగించే ప్రక్రియ. ఇది చాలా మంది విద్యార్థులకు ఒక సవాలు వంటిది. ప్రాథమిక రేఖాగణిత నిర్మాణాల ప్రక్రియకు గల ప్రత్యేక శైలిని అవగాహన చేసుకుంటే ఇవి గణితశాస్త్ర అధ్యయనానికి ఏ విధంగా దోహదపడతాయో అవగాహన అవుతుంది.

ప్రాథమిక జ్యామితీయ నిర్మాణాలను సాధన చేయడంతోబాటు, వాటిని అర్థవంతమైన సందర్భాలలో వినియోగించడం, సరియగు భాష వినియోగించడం, తగిన పరికరాల ఎంపిక మొదలగునవి పిల్లలు గణితంలో నేర్చుకునే అమూర్త భావనలకు, ప్రక్రియలకు నాంది పలుకుతాయి. రేఖాగణితం ఒక క్రమయుతమైన అధ్యయన విభాగంగా గుర్తింపు పొందడానికి నిర్మాణాలే మూలస్తంభాలు.

జ్యామితీయ నిర్మాణాలను రూపొందించిన విధానంలో ప్రతిపాదనలకు అనుగుణంగా ప్రతి సోపానంకు తగిన కారణాలు, స్వీకృతాలు ఎంతైనా అవసరం. ప్రాథమిక జ్యామితి నిర్మాణాలు ప్రధానంగా రెండు పరికరాలు రూలర్ (కొలతలులేని

కొలబద్ద) మరియు వృత్తలేఖినిని మాత్రమే వినియోగించి చేయాలనేది ఒక నియమం. కాని ఇటీవల కాలంలో కొలబద్ద (స్కేలు), కోణమానిని ఎక్కువగా ఉపయోగించుకొని, నిర్మాణాలు సులభతరంగా చేయవచ్చుననే వాదనతో నిర్మాణాల ప్రత్యేకశైలి దెబ్బతినడమే కాకుండా, పిల్లలలో సహజసిద్ధమైన నిర్మాణకౌశలాలు పెంపొందించలేకపోతున్నాము. అదే విధంగా జ్యామితీయ నిర్మాణాలలో సౌందర్యాన్ని, ఖచ్చితత్వాన్ని పొందలేకున్నాము.

'రూలర్' అనేది రెండు బిందువులు తెలిస్తే వాటి మధ్య రేఖాఖండం గీయడానికి, 'వృత్తలేఖిని' అనేది స్థిరబిందువు, స్థిర వ్యాసార్థం తెలిసినపుడు చాపరేఖను గీయడానికి ఉపయోగిస్తాం.

వీటిని వినియోగించి అన్నికొలతలకు రేఖా ఖండాలనూ, కోణాలను గీయలేమని వాదన. అదేవిధంగా అన్ని కోణాలను

రూలర్ (కొలబద్ద)


కాంపాస్ (వృత్తలేఖిని)

త్రిథాకరించలేము (Trisection). అయితే రేఖాగణిత అధ్యయనం చేయడంలో గ్రీకుల ఉద్దేశ్యం సరళతర్కం (Simple logic) ద్వారా సమస్యలు సాధించడం కాబట్టి ఈ రెండు పరికరాలే ప్రాథమికంగా వాడాలన్నారు.

జ్యామితీయ నిర్మాణాలకు సంబంధించిన మనం చూసే ప్రశ్నలు రెండు విధాలుగా ఉంటాయి. ఇచ్చిన కొలతలతో

1) పటాన్ని గీయండి. (Draw the figure) 2) పటాన్ని నిర్మించండి. (Construct the figure)

- 'పటాన్ని గీయండి' అంటే అందుబాటులో ఉన్న ఎటువంటి జ్యామితి పరికరాలనైనా వినియోగించవచ్చు.
- 'పటాన్ని నిర్మించండి' అంటే రూలర్ / స్కేలు (కొలతలేనిది) మరియు వృత్తలేఖిని మాత్రమే వినియోగించాలి. నూతన పాఠ్యపుస్తకాలలో జ్యామితీయ నిర్మాణాలను ప్రత్యేక శైలిలో ప్రవేశపెట్టి, తదనుగుణంగా నిర్మాణాలు చేయడంలో అవగాహన కల్పించబడింది. వివిధ కోణాలను, సమద్విఖండన రేఖలను గీయడంలో వృత్తలేఖినికి అధిక ప్రాధాన్యత కల్పించబడింది. కోణమానిని అనేది కోణ కొలతను సరిచూచుకోవడానికే అని భావించాలి. వివిధ జ్యామితి నిర్మాణాలలో ఇమిడిఉన్న మౌళిక ప్రక్రియలైన సమస్యాసాధన, తార్కికంగా ఆలోచించి కారణాలు చెప్పడం పిల్లలకు అవగాహన పర్చాలి. సోపానయుత నిర్మాణ విధానాన్ని కొనసాగించడంలో ప్రోత్సహించాలి.

<u>చర్చనీయాంశాలు</u>

చర్చించి – రాయండి.

1) రూలర్ / స్కేలు, కాంపాస్ ఉపయోగించి సమద్విబాహుత్రిభుజం నిర్మించండి. నిర్మాణ క్రమం రాయండి.
2) రూలర్ / స్కేలు, కాంపాస్‌లను మాత్రమే ఉపయోగించి కింది కోణాలను గీయండి. కోణమానినితో సరిచూడండి.

   a) 45^0 b) 90^0 c) 135^0 d) 180^0
3) 90^0 కోణమును ఏ విధంగా త్రిథాకరించవచ్చునో సోపాన యుత క్రమాన్ని తెలపండి.
4) యూక్లిడ్ సమాంతర స్వీకృతం "ఒక రేఖకు, దానిపై లేనటువంటి బిందువు గుండా ఒకే ఒక సమాంతర రేఖను గీయగలం". రూలర్, కాంపాస్ ఉపయోగించి నిర్మాణం చేసి చూడండి.

రిఫరెన్సు గ్రంథాలు :

- The Geometry reasoning of Primary and Secondary school stuedents - George panaoura, Dept. of Education, University of Cyprus.
- Position paper "Teaching of Mathematics" National curriculam Frame work 2005, New Delhi.
- Position paper "Teaching of Mathematics" State Curriculum frame workd-2011, A.P.

ఈ) సాంఖ్యక శాస్త్రం - అభ్యసన ఆధార పత్రం

(Approach paper on Statistics)

సాంఖ్యక శాస్త్రం అంటే ఏమిటి?

సేకరించిన సమాచారమును శాస్త్రీయముగా విశ్లేషించి, ఫలితాలు రాబట్టుటను దత్తాంశముపై వ్యాఖ్యానం చేయుటను సాంఖ్యకశాస్త్రం అంటారు. ఇందులో ప్రధానంగా సమాచార సేకరణ, దత్తాంశ నిర్వహణ. దత్తాంశ ప్రదర్శన, విశ్లేషణ, వ్యాఖ్యానం చేయుట, పూర్వ పరిశీలనల నుంచి భవిష్యత్ ప్రణాళికలపై అంచనాలు చేయుట వంటి అంశాలు చర్చింబడతాయి.

సాంఖ్యక శాస్త్రమును ఎందుకు అధ్యయనం చేయాలి?

నేటి సమాజంలో అన్ని రంగాలలో అనగా వ్యాపారం, వైద్యము, విజ్ఞానశాస్త్ర విభాగాలు, పరిపాలన, అర్థిక విభాగం మొదలగు వానిలో సంఖ్యాత్మక వివరాలను విశ్లేషించుటకు, వివిధ అంశాలను లేక దత్తాంశములను బేరీజు వేయుట, భవిష్యత్ కార్యక్రమాలకు ప్రణాళికలు తయారుచేయుట, అమలు పరచిన కార్యక్రమాల స్థితిని పరిశీలించు ఫలితాలను బేరీజువేయుట మొదలగు కార్యక్రమాలు నిత్యకృత్యమై ఉన్నాయి. ఈ అన్ని కార్యక్రమాలకు సమగ్రమైన సహకారాన్ని శాస్త్రీయతను అందించగల శాస్త్రం సాంఖ్యక శాస్త్రమే. పెరుగుతున్న పరిజ్ఞానముతోపాటు ప్రపంచంలో సంఖ్యాత్మక సమాచార విశ్లేషణ అవసరం అధిక ప్రాధాన్యతను సంతరించుకొనుచున్నది. వేల సంఖ్యలో ఉద్యోగులు సమాచార విశ్లేషణలో సేవలు అందించవలసిన అవసరమున్నది.

ప్రతి వ్యక్తి కూడా సంఖ్యాత్మక సమాచారమును వాటిపై చేసిన వ్యాఖ్యానములను తెలుసుకొన్నప్పుడు శాస్త్రీయ పరిజ్ఞానం నుండి స్వప్రయోజనాలను పొందగలడు.

ఏ కార్యాలయంలో అయినా సమాచారమంతా పట్టికల రూపంలో రేఖాచిత్రాల రూపంలో ప్రదర్శించబడి ఉంటుంది. ఈ సమాచార పట్టికలు, రేఖాచిత్రాలు చదవగలిగిన వ్యక్తి మాత్రమే ఆ కార్యాలయం నుండి ఎక్కువ ప్రయోజనాన్ని పొందగలడు. పై కారణాలన్నింటి వలన ప్రతి ఒక్కరు సాంఖ్యశాస్త్ర అధ్యయనం చేయవలసిన అవసరం ఎంతైనా కలదు.

> రానున్న దశాబ్దంలో గొప్పగా రాణించు ఉద్యోగం 'సాంఖ్యక శాస్త్రజ్ఞుడు' (Statastician) ఎందుకంటే మనముందు ఇప్పుడు అవధులు లేని స్వేచ్ఛగా లభించు సమాచారం ఉన్నది. ఆ సమాచారమును అర్థంచేసుకొని, విశ్లేషించి, మదింపు చేయగల సామర్థ్యాలు అవసరం.
>
> – హాల్ వేరియన్, గూగుల్ ప్రధాన ఆర్థిక శాస్త్రవేత్త, 2009

సాంఖ్యక శాస్త్ర ఆవిర్భావం - చరిత్ర :

1662లో జాన్ గ్రాంట్‌చే ప్రచురించబడిన 'Natural and Political Observation upon the Bills of Mortality' తో సాంఖ్యకశాస్త్రం ఒక శాస్త్రంగా ఆవిర్భవించడం పలువురి నమ్మకం. తొలుత సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులను జాతి, మతపరమైన ప్రజల విస్తుతి, ఆర్థిక సమాచారములను విశ్లేషణ నుండి సాంఖ్యకశాస్త్ర వినియోగం యొక్క పరిధి పెరిగినది. ప్రస్తుతం ప్రభుత్వ రంగం, వ్యాపార రంగం, వైజ్ఞానిక, సామాజిక రంగాలు మొదలగు అన్ని రంగాలలో సాంఖ్యకశాస్త్ర పరిజ్ఞానం వినియోగిస్తున్నారు. ఇంకా సాంఖ్యకశాస్త్ర పరిజ్ఞానం వినియోగించుకొనని రంగం లేదంటే అతిశయోక్తిలేదు. కంప్యూటర్ల ఆవిష్కారంతో సాంఖ్యకశాస్త్ర పరిజ్ఞానం వినియోగం మరింత మెరుగుపడినది.

సెకండరీ విద్యలో సాంఖ్యకశాస్త్రం గురించి ఏమి చర్చించబోవుచున్నాము?

విద్యార్థుల స్థాయిని అనుసరించి 1) చిన్న చిన్న దత్తాంశములను సేకరించడం 2) దత్తాంశ నిర్వహణ 3) రేఖా చిత్రముల ద్వారా దత్తాంశ ప్రదర్శన – అర్థం చేసుకోవడం మరియు నిర్మించడం 4) పౌనఃపున్య విధానములను తయారుచేయుట 5) కేంద్రస్థాన

కొలతలను కనుగొనుట మరియు 6) వ్యాఖ్యానం చేయుటల గురించి 6వ తరగతి నుండి 10వ తరగతి వరకు స్థాయిల వారీగా క్రమంగా చర్చించుట జరిగినది.

దత్తాంశం అంటే ఏమిటి? పౌనఃపున్య విభాజనము ఎందుకు చేయాలి?

ఒక ప్రత్యేక ప్రయోజనము కొరకు ప్రత్యక్ష పరిశీలన (Survay) ద్వారా సేకరించబడిన (లేక కొన్ని దత్తాంశముల నుండి సేకరించబడిన) సంఖ్యాత్మక విలువలు లేక మరి ఏ ఇతర సమాచారమునైనా దత్తాంశము అంటారు.

దత్తాంశములో పరిమిత సంఖ్యలో రాశులు ఉన్నప్పుడు ఆ దత్తాంశమును విశ్లేషించుట లేక వ్యాఖ్యానించుట సులభము కానీ దత్తాంశములోని రాశులు సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఆ దత్తాంశమున పట్టిక రూపములో నిర్వహించినప్పుడు విశ్లేషణ సులభ సాధ్యమవుతుంది. కొన్ని దత్తాంశములను పట్టిక రూపంలో (పౌనఃపున్య విభాజనము) చూపడంతో పూర్తి అవగాహన ఏర్పడుతుంది. మరొక విశ్లేషణ అవసరం లేదు.

2 10 11 17 18 46 47 47 21
35 44 45 48 26 26 37 27 7
9 54 54 54 54 54 54 13 14
49 36 21 24 25 25 28 29 5
3 30 31 32 32 38 38 39 41
15 68 69 33 34

అవర్గీకృత ప్రాథమిక దత్తాంశం

పటం - 1

తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యం
0 – 10	5
10 – 20	7
20 – 30	10
30 – 40	12
40 – 50	8
50 – 60	6
60 – 70	2

పౌనఃపున్య విభాజనం

పటం - 2

అవగాహన కొరకు లేక దత్తాంశములని రాశుల సంఖ్య అధికంగా ఉన్నప్పుడు కూడా పౌనఃపున్య విభాజనము రూపంలోని దత్తాంశము సంక్షిప్తంగాను, సమగ్రంగాను ఉంటుంది.

తరువాత స్థాయి; దత్తాంశమును విశ్లేషణ చేసి వ్యాఖ్యానములు చేయడం, కొన్ని విలువలు / రాశులు గల దత్తాంశమునకు ప్రాథమిక రూపం నుండి కూడా విశ్లేషణ చేయవచ్చును. కానీ అధిక సంఖ్యలో విలువలు / రాశులు గల దత్తాంశములకు పౌనఃపున్య విభజనము తయారుచేసుకొని దాని విశ్లేషణలు వ్యాఖ్యానము చేయవలసి ఉంటుంది. ఈ క్రమంలో విద్యార్థుల స్థాయి, అవసరాలను బట్టి సాంఖ్యక శాస్త్రంలో వివిధ స్థాయిలను అభ్యసించ వలసి ఉంటుంది. అందువల్ల సెకండరీ స్థాయిలోని సాంఖ్యకశాస్త్ర పాఠ్యాంశము క్రమాన్ని కింది విధంగా నిర్వహించడం జరిగినది.

సేకరించిన దత్తాంశములోని రాశులు / విలువల సంఖ్య పరిమితంగా ఉన్నప్పుడు వానిని రికార్డు చేయడము, రాశులను పరస్పరం పోల్చడం, మరొక దత్తాంశముతో పోల్చడం చేయుట సులభమేకానీ దత్తాంశంలోని రాశులసంఖ్య ఎక్కువగానున్నప్పుడు లేక రాశులకు పౌనఃపున్యములున్నప్పుడు దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజనము రూపములో ప్రదర్శించినప్పుడు అధ్యయనం అవగాహన పెరుగుతుంది.

ఉదా:- 50 మంది విద్యార్థుల మార్కులు కింది విధాలుగా ప్రదర్శిస్తే

ప్రాథమిక దత్తాంశము

31,	14,	0,	12,	20,	23,	26,	36
33,	41,	37,	25,	22,	14,	3,	25
27,	34,	38,	43,	32,	22,	28,	18
7,	21,	20,	35,	36,	45,	9,	19
29,	25,	33,	47,	35,	38,	25,	34
38,	24,	39,	1,	10,	24,	27,	25
18,	8						

పౌనఃపున్య విభాజనము

తరగతి అంతరం	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం
0 - 7	$\vert\vert\vert\vert$	4
8 - 15	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert$	6
16 - 23	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	9
24 - 31	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert$	13
32 - 39	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert\vert$	14
40 - 47	$\vert\vert\vert\vert$	4

పై రెండు విధాలను పరిశీలిస్తే పౌనఃపున్య విభాజనమే ఎక్కువ అవగాహనను కల్పిస్తున్నదని తెలియుచున్నది కదా.

పరిమిత సంఖ్యలో రాశులు గల దత్తాంశమును విశ్లేషణ చేయుట.

కింది ఉదాహరణ ద్వారా పరిశీలిద్దాము.

ఒక మార్కెట్టునందలి వివిధ దుకాణములలో 1 కిలో మసూరి బియ్యము ధర 22, 35, 37, 42, 24, 35, 41, 37, 40, 37, 30, 39, 42, 38, 37, 41, 37 (రూపాయలలో)

ఈ విలువలన్నింటిని ఆరోహణ క్రమములో రాయగా 22, 24, 30, 35, 35, 37, 37, 37, 37, 37, 38, 39, 40, 41, 41, 42, 42.

- దత్తాంశములోని కనిష్ఠరాశి : 22, గరిష్ఠ రాశి : 42 వీనిబేధం : 42-22 = 20. ఈ బేధమును దత్తాంశ వ్యాప్తి అంటారు. ఇవి దత్తాంశములోని రాశులు ఎక్కడ నుండి ఎక్కడ వరకు విస్తరించి ఉన్నాయో తెలుపుతుంది.
- దత్తాంశములోని 17 రాశులతో మధ్యమరాశి (9వ రాశి) అనగా 37 రూ. 1 కిలో బియ్యం ధర మరియు అంతకన్నా తక్కువ ధర కూడా అన్నే దుకాణములలో దత్తాంశము యొక్క **మధ్యగతము** అంటారు.
- దత్తాంశమును పరిశీలిస్తే - ₹ 37 ఎక్కువసార్లు పునరావృతం అయినది అనగా పెక్కు దుకాణములలో 1 కిలో బియ్యం వెల ₹ 37 అని నిర్ధారించవచ్చును. ఈ విలువను దత్తాంశమునకు **బాహుళకము** అంటారు.
- ఇదే విధంగా దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల మొత్తమును రాశుల సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చు సంఖ్యను దత్తాంశము యొక్క **సరాసరి** లేక **సగటు** అంటారు.
- వీటిలో సరాసరి / సగటు / అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము దత్తాంశ మధ్యభాగంలో ఉండి దత్తాంశమునకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తాయి కావున వీటిని **ప్రాతినిధ్య విలువలు / మధ్యంతర విలువలు (Values of Control Tendency)** అంటారు. ఇవే కాక మరికొన్ని మధ్యంతర విలువలు కూడా కలవు వాటిని పై తరగతులలో అధ్యయనం చేయవలసి వస్తుంది.

ఏయే మధ్యంతర విలువలు ఎప్పుడు వినియోగించాలి?

6, 7 తరగతులలో ప్రాథమిక దత్తాంశమునకు మధ్యంతర విలువలు కనుగొనుట గురించి చర్చించడం జరిగినది. అయితే అన్ని మధ్యంతర విలువలను అన్ని సందర్భములలో ఉపయోగించనవసరం లేదని, ఏ సందర్భములో ఏ మధ్యంతర విలువను ఉపయోగించాలో విద్యార్థులతో చర్చించవలసిన అవసరం ఉన్నది. దీనికొరకై 7వ తరగతిలో ప్రత్యేక సమస్యలు కేటాయించబడ్డాయి.

పౌనఃపున్య విభాజనములను నిర్మించుట ఎట్లు?

పెక్కు రాశులు గల దత్తాంశములో కొన్ని విభిన్న రాశులు మాత్రమే ఉండి అవి మరల మరల పునరావృతం అవుతూ ఉంటే రాశులను వాటి పౌనఃపున్యములతో చూపు పట్టిక రూపాన్ని (సంక్షిప్త రూపాన్ని) అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము అంటారు.

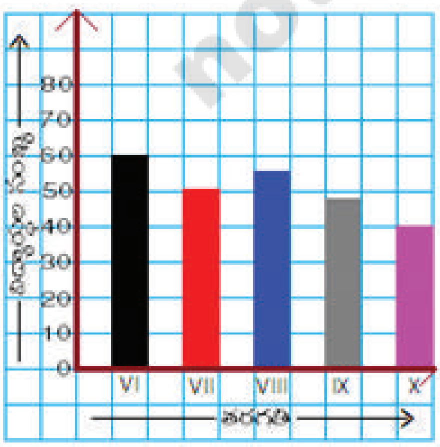
ఇదే విధంగా పెక్కు రాశులు గల దత్తాంశములో విభిన్న రాశులు కూడా ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు పై విధమైన పౌనఃపున్య విభాజనము సంక్షిప్తంగా చూపలేరు. కావున విభిన్న రాశులను ఆరోహణ / అవరోహణ క్రమములో కొన్ని వర్గములుగా విభజించి పౌనఃపున్యములలో మరింత సంక్షిప్తముగా సూచించవచ్చును. దీనిని వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనము అంటారు. పై రెండు రకముల పౌనఃపున్య విభాజనములు ఎట్లు, ఎప్పుడు, ఎందుకు తయారుచేసుకొనవలెనో 8వ తరగతిలో వివరించబడినది.

అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనములకు మధ్యంతర విలువలు (అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము) సంక్షిప్త పద్ధతులు అనగా సూత్రములను ఉపయోగించి కనుగొనుట 9వ తరగతిలో సవివరంగా, సహేతుకంగా వివరించబడినది.

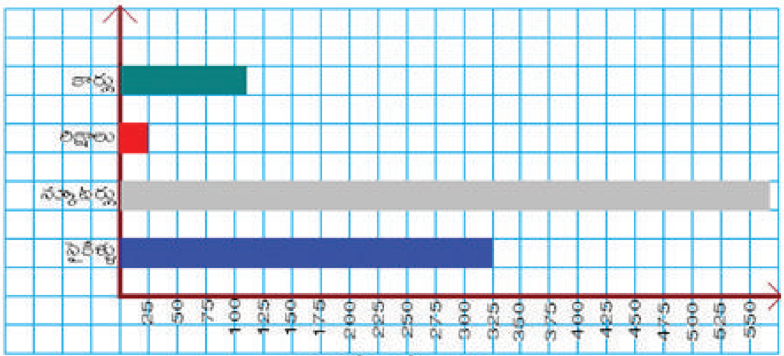
దత్తాంశముపై సార్వజనీన అవగాహన కొరకు రేఖా చిత్రాలు :

దత్తాంశమును సంఖ్యాత్మకముగా పట్టికలలో ప్రదర్శించుట కంటే చిత్రముల ద్వారా చూపినప్పుడు అవగాహన మరికొంచెం మెరుగుగా ఉంటుంది. దత్తాంశములోని విభక్త రాశులు / ఒక దానిని మరొకటి ప్రభావితం చేయని రాశులను వాటి పరిమాణములలో చూపుటకు చిన్న చిన్న సంజ్ఞలు (బొమ్మలు) ఉపయోగించి చిత్రపటాలు (pictograph) గా చూపుతాము. ఈ పటాలలోని సారాంశం చిన్న పిల్లలకు, చదువురానివారికి సైతం అర్థం అవుతాయి. కావున వీటిని పరిశీలించుట, వినియోగించుట 3వ తరగతి నుండి అభ్యసింపజేస్తున్నాము. చిత్రపటాల నిర్మాణం 6వ తరగతిలో బోధించినప్పటికి వీటి నిర్మాణానికి అవసరమయ్యే సమయం ఎక్కువ కావున దీని రూపాంతరము “కమ్మీరేఖాచిత్రము”లను అభ్యసింపజేస్తాము.

కమ్మీరేఖా చిత్రములలోని కమ్మీలు ఒక దానిపై ఒకటి ఆధారపడని అంశాలు కావున కమ్మీల వరుస క్రమము మార్చినను అవగాహనలో ఎటువంటి మార్పు ఉండదు. ఈ చిత్రాలలోని కమ్మీల వెడల్పులు సమానంగా ఉండి వేరువేరు పొడవుల వలన మాత్రమే దారుల విలువలను చూపుతాము. వివిధ రాశుల పరిమాణముల మధ్య బేధం తక్కువగా ఉన్నప్పుడు నిలువు కమ్మీ రేఖాచిత్రాలు మరియు రాశుల పరిమాణముల మధ్య బేధం ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు అడ్డు కమ్మీ రేఖాచిత్రములు ఉపయోగిస్తాము. దీనివలన సౌలభ్యం గమనించండి (?) విద్యార్థి స్థాయి పెరుగుతున్న దృష్ట్యా 7వ తరగతిలో రెండు కమ్మీల రేఖాచిత్రములను ప్రవేశపెట్టడం జరిగినది.



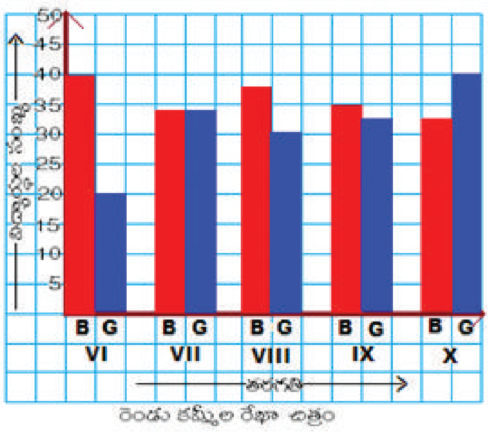
నిలువు కమ్మీల రేఖా చిత్రం



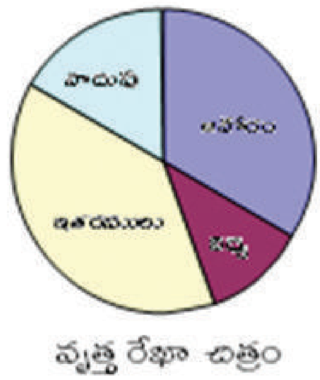
అడ్డు కమ్మీల రేఖా చిత్రం

పటం – 3

పటం – 4



పటం – 5



పటం –6

కింది వాటిలో వేటిని నిలువు రేఖాచిత్రములుగా, వేటిని అడ్డ కమ్మీరేఖాచిత్రములుగా చూపవలెనో అవకాశములను చర్చించండి.

1) ఒక కాలనీలోని బాలబాలికలు, యువత, పేదవారు, ముసలివారు సంఖ్యలను తెలిపే దత్తాంశం.

2) ప్రభుత్వ చౌక దుకాణంలో స్టాకును తెలిపే పట్టిక.

3) భారతదేశంలోని వివిధ రకాల కార్ల ఉత్పత్తి.

4) ఒక సాధకం (కూర) తయారుచేయుటకు అవసరమగు పదార్థముల భారములు.

5) వరుస సంవత్సరాలలో ఒక ప్రాంతము నందు వర్షపాతము.

దత్తాంశములోని రాశులన్నింటిని కలిపి 1 ప్రమాణముగా లెక్కించినపుడు అందులోని ఒక రాశి పరిమాణములోని హెచ్చుతగ్గులు మిగిలిన రాశులను ప్రభావితం చేయునపుడు వృత్త రేఖా చిత్రమును ఉపయోగిస్తాము. వృత్త రేఖాచిత్రంలోని అన్ని విభాగములు (Sectors) యొక్క కోణముల మొత్తం ఒక సంపూర్ణ కోణము అనగా 360^0 అని గ్రహించాలి.

కమ్మీరేఖాచిత్రానికి, వృత్తరేఖా చిత్రానికి భేదమేమి?

కమ్మీ రేఖాచిత్రాలలో కమ్మీల పొడవులను పోల్చుతాము. కానీ అవి ఒకదానిపై ఒకటి ఆధారపడవు. వృత్త రేఖా చిత్రంలో ప్రతి విభాగము అది ప్రకటించే రాశి పరిమాణము మొత్తం దత్తాంశములో ఎన్నవ భాగం (ఎంత భిన్నం) అని తెలియజేస్తుంది. కావున ఒక రాశి పరిమాణంలో మార్పు మిగిలిన రాశులను చూపు విభాగములపై కూడా ప్రభావం చూపుతాయి.

కింది వాటిలో ఏయే దత్తాంశములను కమ్మీరేఖా చిత్రములుగా లేక వృత్త రేఖా చిత్రములుగా చూపవచ్చునో పరిశీలించండి.

1) ఒక గ్రాములోని వివిధ పంటల ఉత్పత్తి.

2) ఒక విద్యార్థి వివిధ విషయాల పరీక్షలలో సాధించిన మార్కులు.

3) ఒక వ్యక్తి ఆదాయంలో వివిధ అంశాల వ్యయమునకు కేటాయింపు.

4) ఆంధ్రప్రదేశ్ బడ్జెట్‌నందు వివిధ అంశములకు కేటాయింపు.

5) ఒక పాఠశాలలో వివిధ తరగతుల విద్యార్థుల సంఖ్య.

విశ్లేషణకు ఉపయోగించు రేఖాచిత్రాలు :

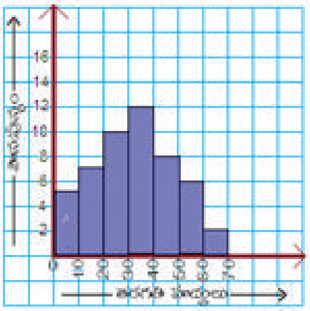
వర్గీకృత దత్తాంశమును సూచించుటకు వివిధ రకాలయిన రేఖాచిత్రములను ఉపయోగిస్తాము. సోపాన చిత్రం (histogram), పౌనఃపున్య బహుభుజి (frequency polygon). పౌనఃపున్య వక్రము (frequency curve) పై మూడు రేఖాచిత్రముల దత్తాంశములో

వివిధ స్థాయిలలో (అంతరాలలో) రాశుల పౌనఃపున్యాలను అనుపాతములో ప్రదర్శించినప్పటికి, వాని వినియోగంలో ఒకదాని తరువాత మరొకటి ఎక్కువ ఖచ్చితత్వాన్ని కలిగి ఉంటాయి.

తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యం
0 – 10	5
10 – 20	7
20 – 30	10
30 – 40	12
40 – 50	8
50 – 60	6
60 – 70	2

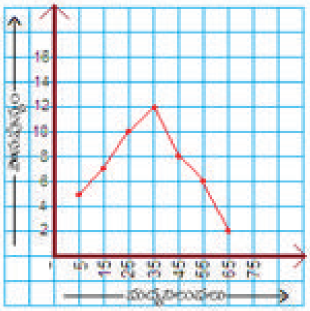
పౌనఃపున్య విభాజనం

పటం – 7



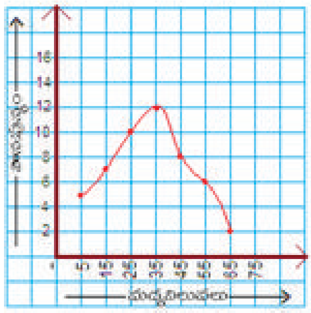
పౌనఃపున్య సోపాన చిత్రం

పటం – 8



పౌనఃపున్య బహుభుజి

పటం – 9



పౌనఃపున్య వక్రం

పటం – 10

మీరు ఇది గమనించారా?

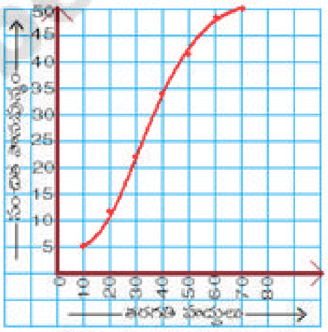
పట చిత్రాలు కమ్మీరేఖాచిత్రాలు, వృత్తరేఖా చిత్రాలలో ఒక దత్తాంశములోని వివిధ రకాల రాశులను సూచిస్తాము. కానీ సోపాన చిత్రం, పౌనఃపున్య బహుభుజి లేక వక్రములలో ఒకే రకమైన రాశులకు సంబంధించి వివిధ తరగతి అంతరాలలో (స్థాయిలలో) పౌనఃపున్యములను సూచిస్తాము.

కమ్మీరేఖా చిత్రములలో కమ్మీలు విడివిడిగా ఉంటాయి. సోపాన చిత్రంలోని కమ్మీలన్నీ ఒకదానికొకటి అంటుకొని ఉంటాయి ఎందుకు? సోపాన చిత్రాలలోని కమ్మీల వరుసను మార్చవచ్చునా? దత్తాంశమునందు వివిధ స్థాయిలు (తరగతి అంతరాల వరుస ఎగువ హద్దులు / దిగువ హద్దులు) వద్ద రాశుల పరిమాణముల మధ్య పరస్పర సంబంధము (ఎక్కువ / తక్కువ / ఎక్కువ మార్పురేటు / తక్కువ మార్పురేటు) తెలుపుటకు సంచిత పౌనఃపున్య వక్రములను ఉపయోగిస్తాము. ఇందు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు వరుస తరగతుల ఎగువ హద్దులతో, అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు దిగువ హద్దులతో సంబంధము కలిగి ఉంటాయి.

తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యం	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
0 – 10	5	5	50
10 – 20	7	12	45
20 – 30	10	22	38
30 – 40	12	34	28
40 – 50	8	42	16
50 – 60	6	48	8
60 – 70	2	50	2

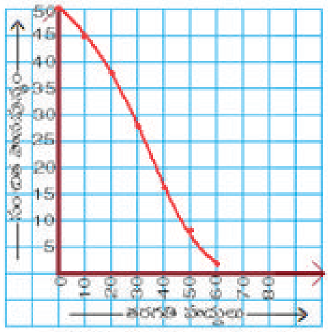
సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనం

పటం – 11



ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం

పటం – 12



అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం

పటం – 13

ఒక దత్తాంశమునకు ఆరోహణ మరియు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను ఒకే రేఖాచిత్రంలో గుర్తించినపుడు వాని ఖండన బిందువు ఆ దత్తాంశమునకు మధ్యగతమును తెలుపుతుంది.

గమనిక :

వర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క బాహుళకము ఆ దత్తాంశంలోని గరిష్ఠ పౌనఃపున్యంగల తరగతిలో ఉంటుందని ఊహిస్తాము. అందువల్ల దత్తాంశము యొక్క సోపాన చిత్రంలో గరిష్ఠ ఎత్తుగల సోపానంలో బాహుళకమును లెక్కిస్తాము. కానీ దాని ప్రాథమిక దత్తాంశమును పరిశీలించినప్పుడు కనుగొన్న బాహుళకము అసత్యమయ్యే అవకాశం కలదు. మరికొన్ని వివరాలకై పాఠ్యపుస్తకాలను చదవండి, విద్యార్థులచే చదివించండి.

ఉ) క్షేత్రమితి - అభ్యసన ఆధార పత్రం

(Approach paper on Mensuration)

మానవ దైనందిన జీవితములో ఆహారం, వస్త్రం, నివాసం ప్రాథమిక అవసరములు. వీటిని కొలిచేందుకుపయోగించేవి ప్రాథమిక కొలతలు. ఆహారం నిల్వచేసే పాత్రయొక్క ఘనపరిమాణము తెలుసుకోవాలన్న, మనం నివసించడానికి అనువైన ఇండ్లని నిర్మాణము చేయాలన్న, వివిధ రకముల వస్త్రములను ధరించాలన్న వైశాల్యము, ఘనపరిమాణము అను భావనలను గూర్చిన జ్ఞానమును మనము పొందియుండాలి. ఇంతటి ప్రాముఖ్యత కల్గిన, ఆవశ్యకత కల్గిన అంశమును 7,8 మరియు 9వ తరగతులలో పాఠ్యాంశములుగా పొందు పరిచారు. 7వ తరగతిలో దీర్ఘచతురస్రము, చతురస్రము, త్రిభుజము మరియు వృత్తాకార ఆకృతులలో యున్న వస్తువులు లేదా స్థలముయొక్క వైశాల్యము, పరిధి (చుట్టుకొలత)లను ఏవిధముగా కనుగొనాలి, ఈ భావనల యొక్క అన్వయం నిత్యజీవితములో ఏవిధముగా ఉంటుంది అనుఅంశములను పరిశీలించడము ద్వారా అవగాహన చేసుకొని వాటిని సూత్రీకరణ చేయడం జరిగింది.

8వ తరగతిలో "సమతల పటముల వైశాల్యములు" అను శీర్షికతో అధ్యాయము 9గా పరిచయము చేశాం. ఇంటి స్థలము దీర్ఘచతురస్రాకార ఆకృతిలో ఉండగా నిర్మాణము సులభము అదే సమలంబ చతుర్భుజ ఆకృతిలో ఉంటే ఏవిధముగా నిర్మాణము చేయవచ్చు అనే దైనందిన కృత్యమును ఆధారముగా చేసుకొని సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యమును సూత్రీకరణ చేశాము. ఒక కృత్యము ద్వారా గ్రాఫు కాగితముపై సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మింపచేసి, దానిని ఒక త్రిభుజముగా మలచి, ముందు తరగతిలో త్రిభుజవైశాల్యమును నేర్చుకొన్నాము, కనుక ఆ సూత్రమును ఆధారముగా చేసుకొని సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొన్నాము. ఈకృత్యములో "తెలిసిన విషయాలనుండి కొత్తవిషయం నేర్చుకోవడం" (Known to Unknown) అను సూత్రమునుపయోగించాము. సమలంబ చతుర్భుజాకృతిలోయున్న ఆటస్థలముయొక్క వైశాల్యమును కనుగొనేందుకు ఆ ఆటస్థలమును దీర్ఘచతురస్రము మరియు రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించి, వాటివైశాల్యములను కనుగొని, వాటిని కూడి సమలంబ చతుర్భుజాకృతిలోయున్న ఆటస్థలము వైశాల్యమును కనుగొన్నాము. ఈ మూడు సందర్భములలో వైశాల్యములను కనుగొని మూడు ఒకే విధమైన సూత్రము నిస్తున్నట్లుగా చూపి సూత్రమును "సామాన్యీకరణము" చేశారు. సూత్రమును, భావనను బలపరిచేందుకు, అవగాహన చేసుకొనేందుకు 6 ఉదాహరణ సమస్యల ద్వారా వివరించడం జరిగింది.

చతుర్భుజవైశాల్యం "త్రిభుజీకరణ" పద్ధతిద్వారా కనుగొనే విధానము వివరించి, ప్రయత్నించండి అను శీర్షిక ద్వారా సమాంతర చతుర్భుజమును రెండు త్రిభుజములుగా విభజించి వైశాల్యమును కనుగొనమని, ఈ రెండు సందర్భములలో చతుర్భుజ వైశాల్యములను సరిపోల్చి, అ భావనను సూత్రీకరణ చేశాము. సమచతుర్భుజ వైశాల్యమును కనుగొనే విధానమును 7వ తరగతిలో వివరించననూ, మరోసారి 8వ తరగతిలో వివరించడము జరిగింది.

మన నిత్య జీవితములో వ్యవసాయభూములు, నివాసభూములు యొక్క వైశాల్యముల ఆవశ్యకత ఎంతైనా వుంది. బహుభుజి ఆకృతిలో ఉన్న పొలంను దీర్ఘచతురస్రం, త్రిభుజము మొదలగు సమతల పటములుగా విభజించి వాటి వైశాల్యములను కనుగొని వాటిని కూడి పొలము వైశాల్యమును కనుగొనే విధానము సచిత్రముగా వివరించబడింది. నిత్యజీవితంలో గణిత ఆవశ్యకతను, ప్రాముఖ్యతను ఈ అంశము ఎంతగానో బలపరుస్తుంది. ఒక సర్వేయరుకు ఈ అంశముపై పట్టు ఎంతైనా అవసరము. దీనిపై నైపుణ్యము సాధించిన వారు దీనిని ఒక వృత్తిగా స్వీకరించి జీవనము సాగించడము మనం చూస్తూనే ఉన్నాం.

వృత్తము రేఖాఖండములచే నిర్మింపబడదుకనుక దానిని ముందుగా గ్రాఫు కాగితముపై నిర్మించి లేదా గీచి దానివైశాల్యమును కనుగొన్నాము. కాని ఇది ఖచ్చితమైన వైశాల్యమునివ్వదు కనుక వృత్తమును 8 సమానభాగములుగా మడిచి, కత్తిరించి ఆ సెక్టరులను ఒక క్రమపద్ధతిలో ఏర్పరిస్తే ఒక సమాంతర చతుర్భుజమును పోలి ఉంటుంది. ఈ సందర్భములో కూడా వైశాల్యం

ఖచ్చితత్వము కల్గి ఉండదు కనుక వృత్తమును 64 భాగాలుగా కత్తిరించి వాటిని అమర్చి ఒక దీర్ఘచతురస్రముగా ఏర్పరచి వైశాల్యమును కనుగొని ఆ భావనను సూత్రీకరణ చేశాము. ఈ సూత్రమును 'ఏ బుక్ అఫ్ జ్యూస్' లో వివరించిన ఒక కృత్యము ద్వారా పరిశీలించి, సత్యమని ఋజువు అయిన తరువాత సామాన్యీకరించాము. ఈ విధముగా ఒక భావనను వివిధ కృత్యముల ద్వారా పరిశీలించి, సామాన్యీకరణ చేయుట ద్వారా విద్యార్థులలో మరియు ఉపాధ్యాయులలో దోషరహితమైన, అవగాహనపూరితమైన భావనలను పెంపొందించడానికి కృషిచేశాము. చివరగా ఈ అధ్యాయములో అర్ధవృత్తవైశాల్యము, బాట లేదా కంకణాకారస్థల వైశాల్యములను గూర్చి కూడా చర్చించాము. జాతీయస్థాయి పోటీ పరీక్షలకు సన్నద్ధమయ్యే విద్యార్థుల కొరకు కొన్ని సంక్లిష్ట సమస్యలను కూడా వివరించి వాటిని ప్రాక్టీసు చేసేందుకు, అవగాహన చేసుకొనేందుకు మరికొన్ని సమస్యలను అభ్యాసములో ఇవ్వడము జరిగింది.

9వ తరగతిలో విద్యార్థుల అవగాహనస్థాయి కాస్త మెరుగుగా ఉంటుంది కనుక కొన్ని ద్విపరిమాణాత్మక వస్తువులను, త్రిపరిమాణాత్మక వస్తువులనిచ్చి వాటిని వర్గీకరింపచేసి త్రిపరిమాణాత్మక వస్తువులు అయిన స్థూపము, శంఖువు, గోళము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యములు, సంపూర్ణతల వైశాల్యములు మరియు ఘనపరిమాణములను ఏవిధముగా కనుగొందురో ఆ విధానములను వివరించి, వివిధ కృత్యముల ద్వారా ఆ భావనలను అవగాహన చేసేందుకు కృషి చేశాము. ఘనపరిమాణము, సామర్థ్యము అను భావనల మధ్య పోలికలు, వ్యత్యాసములను వివరించి, అవి ఏసందర్భాలలో ఒకటిగా ఉంటాయి. ఏసందర్భాలలో భిన్నముగా ఉంటాయో వివరించడము జరిగింది.

దీర్ఘఘనాకృతిలో యున్న ఒక అట్టపెట్టెను తీసుకొని పరిశీలింపజేసి ఎన్ని ముఖాలు, ఎన్ని మూలాలు, ఎన్ని అంచులు కల్గియుందో విద్యార్థులచే చెప్పించి, ఏ ముఖాల జతలు ఒకే పరిమాణము కల్గి యున్నాయో పరిశీలింపజేసి దాని ఆధారముగా అంచుల వెంబడి కత్తిరించి దీర్ఘఘనము యొక్క ప్రక్కతలవైశాల్యము, సంపూర్ణతలవైశాల్యము కనుగొనే విదానము వివరించబడింది. ఈ భావన స్థిరీకరణకు "ఇవి చేయండి" అనుశీర్షిక ద్వారా సమస్యాసాధనలు ఇయ్యబడ్డాయి. ఘనపరిమాణము, సామర్థ్యము అనే భావనలు చాలా పోలికలు, కొద్దిపాటి వ్యత్యాసములు కల్గియున్నాయి. వాటిని విపులముగా విశదీకరించి ఒక కృత్యముద్వారా ప్రదర్శించబడింది. దీర్ఘఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమును ఒక కృత్యము ద్వారా పరిశీలింపచేసి సూత్రమును సామాన్యీకరణము చేయబడింది. దీర్ఘఘన పరిమాణమునుండి సమఘనపరిమాణము ఉత్పాదించబడింది.

ప్రపంచ ఏడు వింతలలో ఒకటైన పిరమిడ్‌ను గూర్చి తెలుసుకోవాలన్న ఆసక్తి ఎవ్వరికైనా ఉంటుంది. గణితపరముగా పిరమిడ్ అంటే ఏమిటి? దానియొక్క లక్షణములు ఏమిటి? పట్టకము, పిరమిడ్ అను భావనల మధ్య వ్యత్యాసములేమిటీ? అను ప్రశ్నల ద్వారా మేధోమధనము చేసి పట్టకముయొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనే విధానము వివరించబడింది. భూమి, ఎత్తు సమానముగాగల ఘనమును, చతురస్రాకార పిరమిడ్‌ను తీసుకొని ఒక కృత్యము ద్వారా ఘనపరిమాణమును కనుగొని నేర్చుకొన్న సూత్రమును స్థిరీకరణ చేయుట జరిగింది.

అభ్యాసములోని సమస్యలు కూడా చాలా వరకూ నిత్యజీవితములోని సంఘటనలకి అనుసంధానం అయ్యే పదసమస్యలు (Word Problems) ఇవ్వబడ్డాయి. స్థూపము అనే భావనను చర్చించి, స్తూపమును ఏవిధముగా నిర్మించవచ్చో వివరించి ఆ నిర్మాణక్రమమును ప్రక్కతల వైశాల్యము, సంపూర్ణతలవైశాల్యము కనుగొనుటలో "అన్వయించి" సూత్రీకరణ చేయబడింది. ఈవిధముగా 5 విద్యాప్రమాణాలను సముచిత రీతిలో ఉపయోగించి, అన్వయించి పుస్తక రచన చేయబడింది.

ఒక కృత్యం ద్వారా స్థూపం ఘనపరిమాణం కనుగొని, దాన్ని అభివృద్ధి చేసే విధానము విద్యార్థులలో "పనిద్వారా నేర్చుకోవడం" అను వైఖరి పెంపొందించును మనము నిత్యము చూస్తూ ఉండే, దైనందిన చర్యలో తరచుగా మనకు కనబడే శంఖువు ఆకృతిని పోలి యుండే 'బతుకమ్మ', బొంగరం, క్యారెట్, ముల్లంగి, ఐస్‌క్రీం మున్నగు వస్తువులను గూర్చి ఆసక్తి ఉంటుంది. అందుకు 9వ తరగతిలో ఉపరితలవైశాల్యము ఘనపరిమాణము అధ్యాయములో శంఖము అనే భావన గూర్చి వివరించబడింది. ఒక కృత్యము ద్వారా శంఖువును నిర్మించేవిధానము, ఆవిధాన క్రమసోపానములు ఆధారముగా చేసుకొని శంఖువు ప్రక్కతలవైశాల్యము లేదా వక్రతల వైశాల్యము, సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొనే విధానము వివరించబడింది.

క్రమ వృత్తాకారస్థూపమును, శంఖువును తీసుకొని ఒక కృత్యము ద్వారా రెండు ఘనపరిమాణములను సరిపోల్చి, పోలిక ద్వారా ఘనపరిమాణమును కనుగొనడము జరిగింది. వృత్తము ద్విమితీయము, గోళము త్రిమితీయ అనే భావనపై స్పష్టత కల్గించి, గ్లోబు, ఫుట్‌బాల్, పిల్లలు ఆడుకునే బంతి, మనము ఇష్టముగా తినే 'లడ్డూ' లను పరిశీలింపచేసి గోళము త్రిమితీయ వస్తువు అనే భావనను స్థిరీకరింపజేసి ఒక కృత్యముద్వారా గోళము భావనను ప్రదర్శింపజేసి వివరించడమైనది. ఒక కృత్యము ద్వారా గోళము ఘనపరిమాణము కనుగొని దాని ఆధారముగా అర్ధగోళము యొక్క ఘనపరిమాణము కనుగొనే విధానముకూడా వివరించడమైనది.

కృత్యఆధారిత, సమకాలిన, పరిసరాలలోయున్న వస్తువుల పరిశీలనద్వారా భావనలను రూపొందించి, ఆభావనల అవగాహనలో స్పష్టతకోసం 'ఇవిచేయండి', "మీరు ఏమి గమనించారు?" "చర్చించండి" అను శీర్షికల ద్వారా అభ్యాసనము ఇచ్చి ఆలోచింపజేసి, అభ్యాసములలో భిన్న స్థాయిలలో విద్యాప్రమాణాలను చూపించి ఇచ్చిన సమస్యలును సాధింపజేసి చివరగా 'మీరు ఏమి నేర్చుకున్నారు' అను శీర్షికతో పునఃశ్చరణ చేయుట జరిగింది.

సమస్యాసాధన, స్వీయ అన్వేషణ, అంచనా, రమారమి విలువపొందడం, ఆవర్తనా క్రమాలు (Successive Patterns), ఊహాచిత్రాలు వేయగలగటం, సరియైన గుర్తులు, అక్షరాలు వాడుతూ సమస్యను లేదా సాధనను చెప్పటం (Representation), తార్కిక విచారణ, ఋజువు చేయడం వంటి అనేక గణిత పద్ధతులకు వీలు కల్పించే అభ్యసన వాతావరణం తరగతి గదిలో ఉండాలి.

– SCF 2011

ఊ) క్షేత్రమితి - అధ్యయన అవగాహనపత్రం

✦ **పరిచయం :**

ద్విపరిమాణాత్మక వస్తువులు, త్రిపరిమాణాత్మక వస్తువులను రెండు గ్రూపులుగా చూపి వాటిని పరిశీలించి, గుర్తించమనడం.

✦ **దీర్ఘఘనము ఉపరితలవైశాల్యము :**

- ప్రక్కతల వైశాల్యము, సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొని సూత్ర రూపకల్పన.
- కృత్యము ద్వారా సమఘన ప్రక్కతలవైశాల్యము, సంపూర్ణతల వైశాల్యము కనుగొనుట.

✦ **ఘనపరిమాణము :**

- భావనను కృత్యము ద్వారా వివరించుట.
- పాత్రయొక్క సామర్థ్యము అనే భావనను నేర్చుకొంటారు.
- దీర్ఘ ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము కనుగొనేవిధానం, సూత్రీకరణ.
- దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణం నుండి సమఘన ఘనపరిమాణ సూత్ర ఉత్పాదన.
- దీర్ఘ ఘన ఘనపరిమాణం సూత్రము నుపయోగించి క్రమ పట్టకము యొక్క ఘనపరిమాణం కనుగొనుట.
- పిరమిడ్ యొక్క ఘనపరిమాణమునకు సూత్రీకరణ.
- పిరమిడ్ ఘనపరిమాణము కనుగొనేందుకు కృత్యము.

✦ అభ్యాసము 10.1లో దీర్ఘఘన, సమఘన ప్రక్కతలవైశాల్యము, సంపూర్ణతలవైశాల్యములు దీర్ఘఘన, సమఘన, పిరమిడ్, పట్టకపు ఘనపరిమాణములపై సమస్యలు ఇయ్యబడినవి. చివరగా సామర్థ్యము పై ఒక ప్రశ్న ఇయ్యబడింది.

✦ **క్రమ వృత్తాకార స్థూపం :**

- కృత్యము ద్వారా స్థూప భావనను పెంపొందించడం.
- క్రమస్థూపంలు అయినవి, కానివాటిని గుర్తించడం.
- స్థూపము యొక్క ప్రక్కతలవైశాల్యము సూత్రీకరణ - ఇవిచేయండి ద్వారా సమస్య సాధన.
- స్థూపము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము సూత్రీకరణ - ఇవిచేయండి ద్వారా సమస్య సాధన.
- స్థూపము ఘనపరిమాణమును కృత్యము ద్వారా సూత్రీకరణ.
- 5 ఉదాహరణ సమస్యల ద్వారా స్థూపము ప్రక్కతలవైశాల్యము, సంపూర్ణతలవైశాల్యం, ఘనపరిమాణము అర్థము చేసుకోవడము.

✦ అభ్యాసము - 10.2లో స్థూపము యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం, సంపూర్ణతల వైశాల్యము, ఘనపరిమాణమునకు సంబంధించిన 11 సమస్యల సాధన అభ్యాసముగా ఇయ్యబడినది.

✦ కృత్యము ద్వారా శంఖువు భావనను కలిగించడం.

✦ **శంఖువు :**

- కృత్యము ద్వారా శంఖువు భావనను కలిగించడం.
- ప్రక్కతల వైశాల్యమును కృత్యము ద్వారా కనుగొని సూత్రీకరణ చేయడం.
- సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కృత్యము ద్వారా కనుగొనే సూత్రీకరణ చేయడం.
- ఇవిచేయండి లో ప్రక్కతల, సంపూర్ణతలవైశాల్యమునకు సంబంధించి రెండు సమస్యలు.
- శంఖువు ఘనపరిమాణంను కృత్యము ద్వారా కనుగొని, సూత్రీకరణ చేయడం.
- 4 ఉదాహరణల ద్వారా ప్రాక్టీసుచేయడం

✦ అభ్యాసము 10.3లో శంఖువు యొక్క ప్రక్కతలవైశాల్యం, సంపూర్ణతలవైశాల్యము, ఘనపరిమాణమునకు సంబంధించిన 12 సమస్యలు ఇయ్యబడ్డాయి.

✦ **గోళం :**

- మన చుట్టూ ఉన్న, మనము ఉపయోగిస్తున్న ఆకృతులనుండి గోళమును గుర్తించి గోళము భావనను పెంపొందించడం (పరిచయం).
- గోళము ఉపరితలవైశాల్యమును కృత్యము ద్వారా కనుగొని సూత్రీకరణ చేయడం.
- అర్ధగోళము ఉపరితలవైశాల్యం, సంపూర్ణతలవైశాల్యము భావనను పెంపొందించుకోవడం, వాటి సూత్రీకరణ.
- గోళం ఘనపరిమాణమును కృత్యము ద్వారా కనుగొనడం.

✦ అభ్యాసము 10.4లో గోళము యొక్క ఉపరితలవైశాల్యం, ఘనపరిమాణముల 12 సమస్యలు ఇవ్వబడ్డాయి.

✦ మనం ఏమి నేర్చుకున్నాం ద్వారా పునఃశ్చరణ.

బడి లోపలి గణితం, బడి బయట గణితంల మధ్య ఉండే అనేక రకాలైన అనుసంధానాలు (links) పిల్లలు అన్వేషించి తెలుసుకొనేలా చేస్తే వారిలో సహజసిద్ధ గణితీకరణ పద్ధతి (Natural Mathematization Process) వేళ్ళూనుతుంది.

– SCF 2011