ગુજરાત શૈક્ષણિક સંશોધન અને તાલીમ પરિષદના પત્ર-ક્રમાંક
જીસીઈઆરટી/સીએન્ડઈ/2018/5808, તા.07/03/2018થી મંજૂર

ریاضی

آٹھویں جماعت کے لیے درسی کتاب

4817

ગણિત ધોરણ - 8 (ઉર્દૂ)

عہد نامہ

بھارت میرا وطن ہے۔
تمام بھارتی میرے بھائی بہن ہیں۔
میں اپنے وطن سے محبت کرتا ہوں اور اس کے شاندار بوقلموں ورثے پر فخر کرتا ہوں۔
میں ہمیشہ اس کے شایان شان بننے کی کوشش کرتا رہوں گا۔
میں اپنے والدین، اساتذہ اور بزرگوں کی تعظیم کروں گا
اور ہر شخص کے ساتھ ادب سے پیش آؤں گا۔
میں اپنے وطن اور اہلِ وطن کو اپنی عقیدت پیش کرتا ہوں۔
ان کی فلاح و بہبودی میں ہی میری خوشی ہے۔

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

گجرات راجیہ شالا پاٹھیہ پستک منڈل
'ودیاین'، سیکٹر-10-A، گاندھی نگر-382010

ترتیب

شری آشش ایچ. بوری ساگر

(سبجیکٹ کوآرڈینیٹر-ریاضی)

اشاعت ترتیب

شری ہرین پی. شاہ

(منڈل کے نائب دائریکٹر، اکیڈمک)

طباعت ترتیب

شری ہریش ایس لمباچیا

(منڈل کے نائب ڈائریکٹر- پروڈکشن)

پیش لفظ

قومی سطح پر 'مساوی نصاب پالیسی' کے نفاذ کے نقطۂ نظر سے ریاستِ گجرات اور GCERT نے براہِ راست NCERT نئی دہلی کی درسی کتابوں کے استعمال کا فیصلہ لیا تھا۔ یہ فیصلہ مورخہ 17-7-19 کی تجویز نمبر JSBH/1217/Single file-62/N کے تحت لیا گیا تھا۔ اِس ہدف کے پیش نظر NCERT کے ذریعے شائع شدہ اس درسی کتاب کو جماعت 8 ریاضی کی درسی کتاب کے طور پر قبول کیا گیا ہے۔ اس کاز کے لیے سب سے پہلے NCERT کی درسی کتاب کا گجراتی ترجمہ تیار کیا گیا ہے۔

گجراتی ترجمے کے دوران موجودہ صورت حال اور گجرات کے مخصوص علاقائی پس منظر کو مدّنظر رکھتے ہوئے خصوصی ناموں، اعداد وشمار اور اسباق میں معمولی ردّوبدل کیا گیا ہے، جس کے لیے NCERT سے پیشگی اجازت لی گئی تھی۔ اب گجراتی کی کتاب میں کی گئی اِن معمولی تبدیلیوں کو اُردو میڈیم کی اِس درسی کتاب میں بھی برضا ورغبت شامل کرلیا گیا ہے۔

اِس پورے عمل کے لیے بورڈ جناب نصیراحمد۔ایم۔پٹھان کی قابلیت اور عطیے کا اعتراف کرتا ہے۔ اُن کے اِس قابلِ قدر عطیے کے لیے بورڈ اُن کا شکر گزار ہے۔

گجرات راجیہ شالا پاٹھیہ پستک منڈل اس پورے عمل میں بھرپور تعاون کے لیے NCERT کا بھی ممنون ہے۔

اِس درسی کتاب کے معیار میں اصلاح کی غرض سے دی جانے والی تعمیری تجاویز اور آپ کی قیمتی آراء کا بورڈ ہمیشہ استقبال کرتا رہے گا۔

پی۔ بھارتی (IAS)

ڈائریکٹر

تاریخ : 21-11-2019

پاٹھیہ پُستک منڈل

گاندھی نگر

پہلی طباعت- 2019 ، طباعتِ نو- 2020

ناشر : گجرات راجیہ شالا پاٹھیہ پستک منڈل-'وِدیاین'، سیکٹر 10-A، گاندھی نگر کی جانب سے۔ پی۔ بھارتی (IAS)، ڈائریکٹر۔

طابع :

پیش لفظ

’قومی درسیات کا خاکہ —2005‘ میں سفارش کی گئی ہے کہ بچوں کی اسکول کی زندگی، ان کی باہر کی زندگی سے ہم آہنگ ہونی چاہیے۔ یہ زاویہ نظر، کتابی علم کی اس روایت کی نفی کرتا ہے جس کے باعث آج تک ہمارے نظام میں گھر اور سماج کے درمیان فاصلے حائل ہیں۔ نئے قومی درسیات کے خاکے پر مبنی نصاب اور درسی کتابیں اسی بنیادی خیال پر عمل آوری کی ایک کوشش ہے۔ اس کوشش میں مختلف مضامین کو ایک دوسرے سے الگ رکھنے اور رٹ کر پڑھنے کے طریقۂ کار کی حوصلہ شکنی بھی شامل ہے۔ ہمیں امید ہے کہ ان اقدامات سے قومی تعلیمی پالیسی 1986 میں مذکور ’تعلیم کے طفل مرکوز نظام‘ کی طرف مزید پیش رفت ہوگی۔

اس کوشش کی کامیابی کا انحصار اس پر ہے کہ اسکولوں کے پرنسپل اور اساتذہ بچوں میں اپنے تاثرات خود ظاہر کرنے اور ذہنی سرگرمیوں اور سوالوں کے ذریعے سیکھنے کی ہمّت افزائی کریں۔ ہمیں یہ ضرور تسلیم کرنا چاہیے کہ بچوں کو اگر موقع، وقت اور آزادی دی جائے تو وہ بڑوں سے حاصل شدہ معلومات سے وابستہ ہو کر، نئی معلومات مرتب کرتے ہیں۔ آموزش کے دوسرے ذرائع اور محل وقوع کو نظر انداز کرنے کے بنیادی اسباب میں سے ایک اہم سبب مجوزہ درسی کتاب کو امتحان کے لیے واحد ذریعہ بنانا ہے۔ بچّوں کے اندر تخلیقی صلاحیت اور پیش قدمی کے رجحان کو فروغ دینا اسی وقت ممکن ہے جب ہم آموزشی عمل میں بچّوں کو بحیثیت شریک کار قبول کریں اور اُن سے اسی طرح پیش آئیں۔ انھیں محض مقررہ معلومات کا پابند نہ سمجھیں۔

یہ مقاصد اسکول کے معمولات اور طریقۂ کار میں معقول تبدیلی کا مطالبہ کرتے ہیں۔ روزمرہ نظام الاوقات (Time-Table) میں لچیلا پن اُسی قدر ضروری ہے جتنی کہ سالانہ کیلنڈر کے نفاذ میں سخت محنت کی تا کہ مطلوبہ ایام کو حقیقتاً تدریس کے لیے وقف کیا جا سکے۔ تدریس اور اندازۂ قدر کے طریقوں سے بھی اس امر کا تعین ہوگا کہ یہ درسی کتاب، بچوں میں ذہنی تناؤ اور اکتاہٹ کا ذریعہ بننے کے بجائے ان کی اسکولی زندگی کو خوش گوار بنانے میں کس حد تک مؤثر ثابت ہوتی ہے۔ نصابی بوجھ کے مسئلے کو حل کرنے کے لیے نصاب سازوں نے مختلف سطحوں پر معلومات کی تشکیل نو اور اسے نیا رخ دینے کی غرض سے بچوں کی نفسیات اور تدریس کے لیے دستیاب وقت پر زیادہ سنجیدگی کے ساتھ توجہ دی ہے۔ اس مخلصانہ کوشش کو مزید بہتر بنانے کے لیے یہ درسی کتاب سوچنے اور محسوس کرنے کی تربیت، چھوٹے گروپوں میں بحث و مباحثہ کرنے اور عملاً انجام دی جانے والی سرگرمیوں کو زیادہ اولیت دیتی ہے۔

این سی ای آر ٹی اس کتاب کے لیے تشکیل دی جانے والی ’’کمیٹی برائے درسی کتاب‘‘ کی مخلصانہ کوششوں کی شکر گزار ہے۔ کونسل سائنس اور ریاضی کی درسی کتب کی مشاورتی کمیٹی کے چیئرپرسن پروفیسر جے۔ وی۔ نارلیکر اور اس کتاب کے خصوصی صلاح کار ڈاکٹر ایچ۔ کے۔ دیوان کی ممنون ہے۔ اس درسی کتاب کی تیاری میں جن اساتذہ نے حصّہ لیا، ہم ان کے متعلقہ اداروں کے بھی شکر گزار ہیں۔ ہم ان سب ہی اداروں اور تنظیموں کا بھی شکریہ ادا کرتے ہیں جنھوں نے اپنے وسائل، مآخذ اور عملے کی فراہمی میں فراخ دلی کا ثبوت دیا۔

ہم وزارت برائے فروغ انسانی وسائل، حکومت ہند کے شعبہ برائے ثانوی اور اعلیٰ ثانوی تعلیم کی جانب سے پروفیسر مرنال مری اور پروفیسر جی۔ پی۔ دیش پانڈے کی سربراہی میں تشکیل شدہ نگراں کمیٹی (مانیٹرنگ کمیٹی) کے اراکین کا بھی خصوصی شکریہ ادا کرتے ہیں جنھوں نے اپنا قیمتی وقت اور تعاون ہمیں دیا۔ کونسل اس کتاب کے اردو ترجمے کے لیے ڈاکٹر اطہر پرویز کی شکرگزار ہے۔ باضابطہ اصلاح اور اپنی اشاعت کے معیار کو مسلسل بہتر بنانے کے مقصد کی پابند ایک تنظیم کے طور پر این سی ای آر ٹی تمام مشوروں اور آرا کا خیر مقدم کرتی ہے تاکہ کتاب کو مزید غور و فکر کے بعد اور زیادہ کارآمد اور بامعنی بنایا جاسکے۔

نئی دہلی
30 نومبر *2007*

ڈائریکٹر
نیشنل کونسل آف ایجوکیشنل ریسرچ اینڈ ٹریننگ

دیباچہ

یہ کتاب اپر پرائمری سیریز کی آخری کڑی ہے۔ ریاضی کی آموزش کی مختلف انداز میں تعریف کرنا ایک دلچسپ سفر رہا ہے۔ ریاضی کی نوعیت کو برقرار رکھنے کے ساتھ ساتھ ہماری کوشش یہ بھی رہی ہے کہ اس سوال کا جواب بھی دینا ہے کہ ریاضی کیوں پڑھایا پڑھایا جائے، ہماری جدوجہد کا محور فراہم کرنا ہے کہ جس سے اس مرحلے پر طلبا کی دلچسپی میں اضافہ ہو سکے اور ان کے لیے مواد قابل دسترس بنایا جا سکے۔ اسکول کی سطح پر ریاضی کی تعلیم کے مقصد کے بارے میں مختلف نظریات کا امکان ہے۔ یہ نظریات مکمل طور پر اور خالصتاً جمالیاتی بھی ہیں۔قومی خاکہ درسیات (NCF) کا زور نظریات اور تجربات کے مطابق ریاضی کاری کی اہلیت کی ارتقا کی ضرورت پر ہے۔ آس پاس کی دنیا کے ساتھ باہمی تعلقات اور خوشگوار زندگی کی دریافت کے لیے ریاضی ہمیں نظریات اور فریم ورک تلاش کرنے کی صلاحیت عطا کرتی ہے۔

تفہیم مشکل امر ہے اور معاملات زندگی میں اس کا اطلاق اور بھی مشکل ہے۔ این سی ایف (NCF) کے سامنے جو مقصد ہے وہ بھی کٹھن ہے یعنی کلاس کے اندر یا باہر اس عمر کے ہر طالب علم کو ریاضی میں مشغول اور منہمک کر دینا۔ اس سیریز کی تیاری میں ہماری تمام تر توجہ اور مساعی کا یہی ایک مقصد ہے۔

اس کے لیے، ہم نے بچوں کو ایسے مواقع فراہم کرنے کی کوشش کی ہے کہ وہ غور وفکر میں لگ جائیں، اپنے نظریات کا منطقی تجزیہ اور حل شدہ مسئلوں کی اساس پر اپنی تعریفیں اور اپنے ہی طور طریقے ایجاد کریں۔ ہمارا مطمح نظر یہ نہیں ہے کہ طلبا خوارزمی اصولوں کو زبانی یاد کر لیں، مشکل حسابی مسئلوں کو حل کر لیں یا ثبوتوں کو رٹ لیں بلکہ ہمارا مقصد یہ ہے کہ بچے یہ سمجھ لیں کہ ریاضی کا عمل کیا ہے اور یہ پہچان لیں کہ مسائل کو حل کرنے کا راستہ کیا ہے۔

ہمارا سب سے اہم کردار یہی ہے کہ طلبا ریاضی سیکھ جائیں اور زندگی کے مسائل سے اس کی ہم رشتگی کے سلسلے میں ان کے اندر خود اعتمادی پیدا ہو جائے۔ ہم نے اس امر میں طلبا کی مدد کرنے کی کوشش کی ہے کہ وہ کتاب سے استفادہ کریں، قدم قدم پر ٹھہریں اور جہاں جہاں نئے نظریات پیش کیے گئے ہیں وہاں وہاں غور وفکر کریں نیز کتاب مشکل اور ڈراؤنی نہ لگے۔ اس کے لیے ہم نے اس میں اشکال اور مثالیں شامل کی ہیں۔ متن، مثالوں اور اشکال کی مدد سے نظریات کی تفہیم آسان ہوگی۔ اس کتاب میں ہی نہیں پوری سیریز میں ہماری کوشش یہ رہی ہے کہ تکنیکی الفاظ کے استعمال سے بچا جائے اور پیچیدہ ضابطہ سازی سے اجتناب کیا جائے۔ اس لیے ہم نے بہت سی باتیں خود طلبا کے لیے چھوڑ دی ہیں کہ وہ خود اپنی زبان اور استدلال سے کام لیں۔

ہماری کوشش یہ رہی ہے کہ زبان طلبا کے لیے قابل فہم ہو۔ اہم نکات کی طرف طلبا کی توجہ مبذول کرانے کے لیے ان نکات کو نمایاں طور پر آراستہ کرایا گیا ہے۔ ان تمام کوششوں کے پس پردہ یہی مدعا ہے کہ طویل توضیحات کا بوجھ طلبا پر نہ پڑے اور وہ یکسانیت سے اوب نہ جائیں۔

آٹھویں جماعت، نویں جماعت کے لیے پل کا کام کرتی ہے۔ چوں کہ نویں جماعت میں ریاضی نسبتاً زیادہ رسمی ہو جاتی ہے اس لیے کوشش اس بات کی گئی ہے کہ نئے نظریات اس طرح متعارف کرائے جائیں کہ وہ بتدریج رسمی ہوتے جائیں۔

جن لوگوں نے اس درسی کتاب کی تیاری میں حصہ لیا ہے ان میں تجربہ کار اور ریاضی کی تدریس سے وابستہ اساتذہ شامل ہیں۔ اس ٹیم میں وہ لوگ شامل ہیں جنھیں ریاضی کی درس وتدریس کا تحقیقی تجربہ بھی ہے اور ریاضیاتی مواد کو متعارف کرانے کا بھی۔ اس درسی کتاب کی تیاری میں چھٹی اور ساتویں جماعتوں کی کتابوں کی بازرسی کو بھی پیش نظر رکھا گیا ہے کتاب کی تیاری کے دوران اساتذہ کے درمیان بحث ومباحثہ بھی ہوئے اور ورک شاپ کے دوران مسودے پر تجدید نظر بھی۔ آخر میں اپنی تمام ٹیم کی طرف سے پروفیسر کرشن کمار، ڈائرکٹر، این سی ای آر ٹی؛ پروفیسر جی۔ رونڈرا، جوائنٹ ڈائرکٹر، این سی ای آر ٹی اور پروفیسر حکم سنگھ، ہیڈ، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی کا شکرادا کرنا اپنا فرض سمجھتا ہوں جنھوں نے بھر پور آزادی اور تحفظ کے ساتھ اس موضوع پر ہمیں کام کرنے کا موقع عنایت کیا۔ میں پروفیسر جے۔ وی۔ نارلیکر، چیئرمین، مشاورتی کمیٹی برائے سائنس اور ریاضی کا بھی ان کے مشوروں کے لیے ممنون ومتشکر ہوں۔ میں این سی ای آر ٹی کی ٹیم کے تمام اراکین، پروفیسر ایس۔ کے۔ سنگھ۔ گوتم، ڈاکٹر وی۔ پی۔ سنگھ اور خاص طور پر ڈاکٹر اشوتوش کے وزالوار کا بے حد مشکور ہوں جنھوں نے تمام انتظامات کو پایۂ تکمیل تک پہنچایا اور کام کے دوران تال میل بنائے رکھا۔ آخر میں پبلیکیشن ڈیپارٹمنٹ، این سی ای آر ٹی کے تعاون اور ودیا بھون کی ٹیم کی مدد اور مشوروں کا بھی شکرگزار ہوں جنھوں نے اس کتاب کی تیاری میں مدد دی۔

یہ بات محتاج بیان نہیں ہے کہ سبھی مصنفین نے ایک ساتھ مل کر کام کیا اور ہم سب نے ایک دوسرے کے مشوروں اور نظریوں کو بحث ومباحثے کے بعد قبول کیا۔ ہم نے کھلے دل سے ایک دوسرے کے خیالات سے استفادہ کیا اور ہمیں امید ہے کہ ہمیں جس چیلنج کا سامنا تھا اس میں ہم نے کوتاہی نہیں کی۔

بہرحال، کتاب کی تیاری ایک مسلسل عمل ہے اور ہمیں امید ہے کہ یہ کتاب خوب سے خوب تر ہوتی رہے گی۔ کتاب کو بہتر بنانے کے لیے آپ کی رائے اور آپ کی تجاویز کا ہمیشہ خیر مقدم کیا جائے گا۔

ایچ۔ کے۔ دیوان
خصوصی صلاح کار
کمیٹی برائے درسی کتب

اساتذہ کے لیے نوٹ

یہ کتاب اس سیریز کی تیسری اور آخری کتاب ہے۔ یہ ریاضی کے اصولوں اور نظریوں کے سیکھنے والوں کی مدد کے لیے شروع کی گئی کوششوں کا ہی ایک حصہ ہے۔ ریاضی کی تفہیم اور اس کے نظریات کے اطلاق کے سلسلے میں طلبا کی اہم ضرورت یہ ہوتی ہے کہ ان کی بنیاد منطقی ہو اور وہ نئے ضابطوں کی تشکیل میں استدلال سے کام لے سکیں۔ قومی خاکۂ درسیات (NCF) 2005 میں ریاضی کے حوالے سے جو نکات پیش کیے گئے تھے ان کا مقصد طلبا میں وسیع تر صلاحیتوں کا ارتقا اور ریاضی کی پیچیدہ تحسیبات سے ہٹ کر تفہیم کے ایک نئے فریم ورک کی پیروی کرنا تھی۔ ریاضی کے نظریات کا ارتقا صرف ان کو زبانی طور پر بتا کر نہیں کیا جا سکتا۔ ضرورت اس بات کی ہے کہ ریاضی کے تصورات کے سلسلے میں طلبا کا خود اپنا ایک فریم ورک ہو، ان کو ایک ایسا کلاس روم مہیا کیا جائے جہاں وہ نظریات پر بحث کر سکیں، مسائل کا حل تلاش کر سکیں، نئے نئے مسائل اٹھا سکیں اور ان مسائل کو حل کرنے کے لیے خود اپنے طریقوں کی کھوج اور تعریفات پیش کر سکیں۔

جیسا کہ ہم نے اس سے قبل عرض کیا کہ ریاضی کی تدریس کے سلسلے میں سب سے اہم بات یہ ہے کہ درسی کتاب سمجھ کر پڑھنے اور سیکھنے میں طلبا کی مدد کی جائے۔ ریاضیاتی مواد کو سمجھ کر پڑھنے سے یقینی طور پر طلبا کو ریاضی کے سمجھنے میں مدد ملے گی۔ آٹھویں جماعت میں طلبا کی ذہنی و عملی صلاحیتوں کو پیش نظر رکھ کر ہی ان کو متون پڑھنے کے مزید مواقع فراہم کیے جائیں تا کہ وہ ریاضیاتی زبان اور علامتوں کو صحیح طور پر اور سمجھ کر استعمال کر سکیں۔ ایسی زبان ہو جس میں جامعیت ہو اور جو حشو و زوائد سے پاک ہو۔ اس مقصد کے حصول کے لیے کوشش کی جائے کہ طلبا کو دیگر متون پڑھنے کا بھی موقع ملے۔ آپ یہ بھی کر سکتے ہیں کہ طلبا نے کیمیا کے جو اصول پڑھے ہیں یا طبیعات کے جو نظریے پڑھے ہیں ان کا رشتہ ریاضی سے قائم کریں۔ اس عمل سے ریاضی کی تفہیم کے سلسلے میں ان کے اندر ایک نئے شعور کا ارتقا ہوگا اور وہ ریاضی کا رشتہ دیگر علوم اور دیگر شعبۂ زندگی سے مستحکم کر سکیں۔

ہم نے پہلے بھی یہ بات کہی ہے کہ اپر پرائمری سطح پر ریاضی کا رشتہ بچوں کے تجربات اور ان کے ماحول سے مربوط کرنا ضروری ہے اور ساتھ ہی ان کے اندر منطقی استدلال پیدا کرنا بھی ضروری ہے۔ موضوع کی سہولت کے لحاظ سے بچوں کے تجربات کو نظریات سے ہم آہنگ کرنا ہی بہتر تدریس کا جوہر ہے۔ اس استنباط نتائج سے ان کو ضابطہ سازی اور استدلال میں مدد ملے گی۔ علوم کے دیگر شعبوں کا ریاضی کے ساتھ تعلق تو ظاہر ہے خود ہماری زندگی اور ہمارے ماحول کے حوالے سے اس امر کی جو معنویت ہے اس کے پیش نظر اس پر غیر معمولی زور دینے کی ضرورت ہے۔

ریاضیاتی مسائل کو حل کرنے ان کی جانچ پڑتال کرنے اور اولین اہم اقدام کی حیثیت سے متعلقہ معلومات کا انتخاب کرنے کے لیے طلبا کے لیے ضروری ہے کہ وہ کسی مخصوص صورت حال میں استعمال ہونے والے اصولوں کی نشاندہی کرنے کے اہل ہوں۔ جب ایک بار طلبا ایسا کر لیں گے تو پھر وہ اپنی معلومات کو مشابہ اور مماثل صورتوں میں استعمال کرنے کے قابل ہوں گے اور مسائل کو خود حل کر سکیں گے۔ ضرورت یہ ہے کہ وہ مسئلہ کی نشاندہی خود کریں، اس کے امکانی حل تلاش کریں اور ضرورت ہو تو ان اقدامات کو ترتیب دیں۔ اس راہ میں قدم صحیح اٹھے گا تو مزید راہیں کھلیں گی۔ آٹھویں جماعت میں اس بات میں بھی طلبا کی مدد کی جائے کہ جن اقدامات کا وہ اتباع کر رہے ہیں ان کے بارے میں ان کا شعور بیدار ہو۔ طلبا میں مناسب ماڈلوں کی تشکیل و تعمیر کی صلاحیت کا ارتقا کرنا بھی بہت اہم ہے تا کہ وہ مسائل کو حل کرنے کے لیے ان کی زمرہ بندی اور ان کا تجزیہ کر سکیں۔

آموزش بذریعہ امداد باہمی، آموزش بذریعہ مکالمات، باہمی تعاون سے آموزش کی طلب اور یہ یقین کہ مکالمات کوئی شور وشغف کی چیز نہیں اور نہ ہی باہمی مشاورت کوئی فریب اور دھوکہ ہے۔ یہ سب باتیں طلبا اور اساتذہ دونوں کے رویے میں مثبت تبدیلی کا موثر ذریعہ ہوں گی۔ طلبا سے کہا جائے کہ وہ گروپ کی شکل میں کتاب کو سمجھ کر حل کریں اور جو کچھ وہ سمجھتے ہیں اس کی ضابطہ سازی کریں۔ امتحان یا اندازۂ قدر کو قدر کی نگاہ سے دیکھا جائے۔ کلاس روم ایسے ہوں کہ طلبا باہم مل کر یک گونہ خوشی

اور آسودگی کا احساس کریں اور گروپ کی شکل میں بحث ومباحثہ میں بھر پور حصہ لیں۔ مختلف گروپ مختلف طریقے استعمال کرتے ہیں۔ ان میں سے کچھ طریقے زیادہ سود مند اور کار آمد ہوتے ہیں کیوں کہ یہ ان کے طرز فکر کی نمائندگی کرتے ہیں۔ یہ سبھی طریقے مناسب ہو سکتے ہیں اور استاد کو چاہیے کہ وہ بچوں کے ساتھ مل کر ان سب طریقوں کا تجزیہ کرے۔ مختلف ریاضیاتی طریقوں کا انتخاب اور ان سے استفادہ، ریاضی کی بہتر تفہیم کی علامت ہے، ہر گروپ اپنی صلاحیتوں کے مطابق پیش رفت کا اظہار کرے گا لیکن ضرورت یہ ہوگی کہ اس کو خود اظہاریت کے مواقع پیش کیے جائیں۔

ہم اختصار کے ساتھ ریاضی کی آموزش کی کلیدی نظریات پیش کرتے ہیں اور امید کرتے ہیں کہ آپ کلاس روم میں ان باتوں کو یاد رکھیں گے۔

1. اقتباس کے سوالات کا طریقہ قدرتی بھی ہے اور مفید بھی۔ اس سے طلبا کے معلومات میں اضافہ بھی ہوتا ہے اور اس سے وہ معلومات کی تشکیل وتدوین بھی کر سکتے ہیں۔ نیز معلومات کے حصول کے لیے مشاہدات کی تخلیق کا سہارا بھی اس طریقے میں لیا جا سکتا ہے۔ طلبا سے ایسے مختلف النوع سوالات پوچھے جا سکتے ہیں جن سے ان کے ذوقِ جستجو اور ذوقِ تحقیق کو مہمیز ہو۔ یہ سوالات تفتیشی، سادہ، سیاق وسباق سے مربوط، غلطی کا پتہ چلانے والے اور جیومیٹری، الجبرا اور ارتھمیٹک وغیرہ کے مسائل سے مربوط ہو سکتے ہیں۔
2. طلبا کو منطقی استدلال کا اتباع ضروری ہے۔ یہ اساتذہ کا کام ہے کہ وہ اس سلسلے میں طلبا کی مدد کریں۔ طلبا کو چاہیے کہ وہ دلائل کی خامیوں کا پتہ لگائیں اور ثبوتوں کی ضرورت کو سمجھیں۔ دراصل یہ رسمی مرحلے کی شروعات ہوتی ہے اور اس بات کی ضرورت ہوتی ہے کہ ان کی تخلیقیت اور ان کی تخیل کی قوتوں کو بروئے کار لایا جائے اور زبانی نیز تحریری طور پر ان کے ریاضیاتی استدلال کی ترسیل ہو۔
3. ریاضی کا کلاس روم ریاضی کی آموزش کی زبان سے مربوط ہونا چاہیے تاکہ طلبا اپنی زبان میں اور اپنے تجربات کے حوالے سے ریاضی کے نظریات پر گفتگو کر سکیں۔ اساتذہ طلبا میں یہ شوق پیدا کریں کہ وہ اپنی بات، اپنی زبان اور اپنے الفاظ میں ہی ادا نہ کریں بلکہ بتدریج رسمی زبان اور علامتوں کے استعمال کی طرف آگے بڑھیں۔
4. عدد نظام اور ناطق اعداد اور ان کی خاصیتوں کے تعمیر کی سطح ایک ایسے فریم ورک کے ارتقا تک وسیع ہے جس میں تمام سابقہ نظام جیسے تعمیہ شدہ ناطق اعداد کے ذیلی گروپ شامل ہیں۔ تعمیے ریاضیاتی زبان میں پیش کیے جائیں۔ طلبا یہ خیال رکھیں کہ الجبرا اور اس کی چھوٹی علامتی شکلوں میں متن کے بڑے حصے کے اظہار میں ان کے مددگار ہیں۔
5. جیسا کہ پہلے عرض کیا گیا ہے کہ ضرورت ہے کہ طلبا مسائل کو خود حل کریں۔ چوں کہ طلبا کے پیش نظر مختلف النوع اور پیچیدہ مسائل بھی ہوں گے اس لیے وہ ان سے عہدہ برآ ہونے کے لیے زیادہ خود اعتمادی سے کر سکیں گے۔
6. آٹھویں جماعت کی اس کتاب میں یہ کوشش کی گئی ہے کہ ریاضی کے مختلف پہلوؤں کو یکجا کر دیا جائے اور مشترکہ نکات پر زور دیا جائے وحدانی طریقہ، نسبت، تناسب، سود اور ڈویڈینڈ وغیرہ سب ایک ہی مشترکہ منطقی فریم ورک کے حصے ہیں۔ جہاں کہیں ہمیں ریاضی کے کسی شعبے میں نامعلوم مقدار کا پتہ لگانا ہوتا ہے تو وہاں مساواتوں اور متغیرات کی نظریے کی ضرورت پڑتی ہے۔

ہمیں امید ہے کہ یہ کتاب نہ صرف ریاضی سیکھنے کے لیے طلبا کی معاون ہوگی بلکہ ان میں موضوع سے لطف اندوزی کا احساس بھی پیدا کرے گی اور ان کے بنائے گئے تصورات کے بارے میں اعتماد بھی پیدا کرے گی۔ ہم طلبا میں انفرادی اور اجتماعی غور وفکر کے مواقع پیدا کرنا چاہتے ہیں۔

ہم اس کتاب کے بارے میں آپ کی تجاویز اور آپ کے مشوروں کا خیر مقدم کریں گے۔

ہم امید کرتے ہیں اس کتاب کو مزید بہتر بنانے کے لیے آپ ایسی دلچسپ اور مفید مشقیں مشغلے اور عملی کام ہم کو ارسال کریں گے جنھیں آپ نے تدریس کے دوران ترتیب دیا ہوگا۔ یہ کام اسی وقت ممکن ہے جب آپ بچوں کی باتوں کو غور سے سنیں گے اور ان کے سوالات پر دھیان دیں گے اور کتاب کی ترتیب وتدوین میں اگر کہیں خلا یا خامی راہ پائی گئی ہے تو اس کی نشاندہی کریں گے۔ نیز یہ کہ مزید کن امور کو کتاب میں شامل کیا جا سکتا ہے اس پر بھی آپ کی توجہ مرکوز رہے گی۔

کمیٹی برائے درسی کتب

چیئر پرسن، مشاورتی کمیٹی برائے سائنس اور ریاضی

جے۔وی۔نارلیکر، ایمریٹس پروفیسر، انٹر یونیورسٹی سینٹر فار ایسٹرونومی اور ایسٹروفزکس (IUCCA) گنیش کھنڈ، پونہ یونیورسٹی، پونہ

خصوصی صلاح کار

ایچ۔کے۔دیوان، ودیا بھون سوسائٹی، اودے پور، راجستھان

چیف کوآرڈینیٹر

حکم سنگھ، پروفیسر اور ہیڈ، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

اراکین

انجلی گپتا، ٹیچر، ودیا بھون پبلک اسکول، اودے پور، راجستھان

اونتیکا دام، ٹی جی ٹی، سی آئی ای ایکسپریمینٹل پبلک اسکول، ڈپارٹمنٹ آف ایجوکیشن، دہلی

بی۔سی۔بستی، سینئر لیکچرر، ریجنل انسٹی ٹیوٹ آف ایجوکیشن، میسور، کرناٹک

ایچ۔سی۔پردھان، پروفیسر، ہومی بھابھا سینٹر فار سائنس ایجوکیشن، ٹی آئی ایف آر، ممبئی، مہاراشٹر

کے۔اے۔ایس۔ایس۔وی۔کامیشوراراؤ، لیکچرر، ریجنل انسٹی ٹیوٹ آف ایجوکیشن، بھوپال، مدھیہ پردیش

مہندر شنکر، لیکچرر (ایس۔جی) (ریٹائرڈ)، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی۔

میناشری مالی، ٹیچر، ودیا بھون سینئر سیکنڈری اسکول، اودے پور، راجستھان

پی۔بھاسکر کمار، پی جی ٹی، جواہر نوودیہ ودیالیہ، لیپا کشی، اننت پور، آندھرا پردیش

آر۔آتھمارمن، میتھ میٹکس ایجوکیشن کنسلٹینٹ، ٹی آئی میٹرک ہائر سیکنڈری اسکول اور اے ایم ٹی آئی، چینئی، تمل ناڈو

رام اوتار، پروفیسر (ریٹائرڈ)، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

شیلیش شیرالی، رشی ویلی اسکول، رشی ویلی، مدانا پلے، آندھرا پردیش

ایس۔ کے۔ ایس۔ گوتم، پروفیسر، ڈی ای ایم ای، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

شردھا اگروال، پرنسپل، فلوریٹس انٹرنیشنل اسکول، پنکی، کانپور، اترپردیش

سری جاتا داس، سینئر لیکچرر، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

وی۔ پی۔ سنگھ، ریڈر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

ممبر کوآرڈینیٹر

آشوتوش کے۔ وزالوار، پروفیسر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

اردو ترجمہ

محمد قاسم، پی جی ٹی، اینگلو عربک سینئر سیکنڈری اسکول، دہلی

پروگرام کوآرڈینیٹر (اردو ترجمہ)

محمد فاروق انصاری، پروفیسر، ڈپارٹمنٹ آف لینگویجز، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی

اظہارتشکر

کونسل اس نصابی کتاب کے مسودے پرنظر ثانی کے لیے منعقدہ ورکشاپ کے مندرجہ ذیل شرکا کی خدمات اور تعاون کا اعتراف کرتی ہے : شری پردیپ بھاردواج، ٹی جی ٹی (حساب)، بال استھلی پبلک سیکنڈری اسکول، کراری، نانگلوئی، نئی دہلی؛ شری شنکر مشرا، ریاضی ٹیچر، ڈیمونسٹریشن ملٹی پرپز اسکول، ریجنل انسٹی ٹیوٹ آف ایجوکیشن، بھونیشور (اڑیسہ)؛ شری منوہر ایم۔ دھوک سپروائزر ایم۔ پی۔ دیو سمرتی لوکانچی شالہ، ناگپور (مہاراشٹر)؛ شری منجیت سنگھ جانگرا، ریاضی ٹیچر، گورنمنٹ سینئر سیکنڈری اسکول، سیکٹر 4/7، گوڑگاؤں (ہریانہ)؛ ڈاکٹر راجندر کمار پونی والا، یو ڈی ٹی، گورنمنٹ سبھاش ایکسیلینس اسکول، برہان پور (ایم پی)؛ شری کے۔ بالاجی، ٹی جی ٹی (ریاضی)، کیندریہ ودیالیہ نمبر 1، تروپتی (اے۔ پی)؛ مس مالا منی، ایمیٹی انٹرنیشنل اسکول، سیکٹر 44، نوئیڈا؛ مس اوم لتا سنگھ، ٹی جی ٹی (ریاضی)، پریزینٹیشن کانوینٹ سینئر سیکنڈری اسکول، دہلی؛ مس منجو دتا، آرمی پبلک اسکول، دھولا کنواں، نئی دہلی؛ مس نروپما ساہنی، ٹی جی ٹی (ریاضی)، شری مہاویر دگمبر جین سینئر سیکنڈری اسکول، جے پور (راجستھان)؛ شری ناگیش شنکر مونے، ہیڈ ماسٹر، کانتی لال پرشوتم داس شاہ پرا شالہ، وشرام باغ، سانگلی (مہاراشٹر)؛ شری انل بھاسکر جوشی، سینئر ٹیچر (ریاضی)، منوتائی کنیا شالہ، تلک روڈ، اکولہ (مہاراشٹر)، ڈاکٹر ششما جے رتھ، ریڈر، ڈی ڈبلیو ایس، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی؛ شری ایشور چندرا، لیکچرر (ایس۔ جی) (ریٹائرڈ)، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی۔

کونسل کمیٹی برائے نصابی کتب کی ورکشاپ کے دوران شرکا کے بیش بہا قیمتی مشورے اور تجاویز کی تہہ دل سے شکر گزار ہے۔ ان میں شری سنجے بولیا اور شری دیپک منتری، ودیا بھون بیسک اسکول، اودے پور، راجستھان؛ شری اندر موہن سنگھ چھابڑا، ودیا بھون، ایجوکیشنل ریسورس سینٹر، اودے پور کے اسمائے گرامی شامل ہیں۔

کونسل کتاب کو مزید بہتر بنانے کے لیے ڈاکٹر آر پی موریہ، ریڈر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی دہلی؛ ڈاکٹر سنجے مدگل، لیکچرر، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی؛ ڈاکٹر ٹی پی شرما، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی کے مشوروں اور تجاویز کا بھی شکریہ ادا کرتی ہے۔

کونسل ودیا بھون سوسائٹی، اودے پور اور اس کے عملے کے ذریعے مہیا کرائی گئی سہولیات اور تعاون کا بھی اعتراف کرتی ہے۔ ساتھ ہی سینٹر آف سائنس ایجوکیشن اینڈ کمیونیکیشن (سی ایس ای سی)، دہلی یونیورسٹی کے ڈائرکٹر کا بھی شکریہ ادا کرتی ہے جنھوں نے لائبریری کے استعمال کی اجازت دی۔

کونسل پروفیسر حکم سنگھ، ہیڈ ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی کے انتظامی تعاون کا بھی اعتراف کرتی ہے۔

کونسل اس کتاب کے اردو مسودے کی ویٹنگ کے لیے منعقد کی گئی ورکشاپ کے شرکا جناب قاسم رضا، ممبئی؛ جناب محمد قاسم، اینگلو عربک سینئر سیکنڈری اسکول، دہلی، ڈاکٹر اطہر پرویز، این پی کوایڈ سینئر سیکنڈری اسکول، نئی دہلی؛ جناب شباہت حسین، ڈاکٹر ذاکر حسین میموریل سینئر سیکنڈری اسکول، دہلی؛ ڈاکٹر نسیم احمد، گورنمنٹ سبھاش ہائر سیکنڈری اسکول، سیہور؛ اے۔ کے۔ وزلوار، ڈی ای ایس ایم، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی؛ پروفیسر محمد نعمان خاں، ڈپارٹمنٹ آف لینگویجز، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی؛ ڈاکٹر محمد فاروق انصاری، ڈپارٹمنٹ آف لینگویجز، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی اور ڈاکٹر چمن آرا خاں، ڈپارٹمنٹ آف لینگویجز، این سی ای آر ٹی، نئی دہلی کے بیش قیمت مشوروں کے لیے بے حد ممنون ہے۔

اس کتاب کی تیاری کے لیے کونسل اسسٹنٹ ایڈیٹر محمد اکبر اور حسن البنّا، پروف ریڈر شبنم ناز، ڈی ٹی پی آپریٹرز شمائلہ فاطمہ، فلاح الدین فلاحی، محمد وزیر عالم اور نرگس اسلام اور کمپیوٹر اسٹیشن انچارج پرش رام کوشک کی تہہ دل سے شکر گزار ہے۔

بھارت کا آئین

تمہید

ہَـم بھارت کے عوام متانت وسنجیدگی سے عزم کرتے ہیں کہ بَھـارَت کـو ایک مقتَدر، سمَاج وَادی، غیر مَذھَبی عَوامی جَمھُوریَه بنائیں اور اس کے تمام شہریوں کے لیے حاصل کریں۔

انصاف سماجی، معاشی اور سیاسی

آزادی خیال، اظہار، عقیدہ، دین اور عبادت

مساوات بہ اعتبار حیثیت اور موقع اور ان سب میں

اخوت کو ترقی دیں جس سے فرد کی عظمت اور قوم کے اتحاد اور سالمیت کا تیقن ہو۔

اپنی آئین ساز اسمبلی میں آج چھبیس نومبر 1949ء کو یہ آئین ذریعہ ہذا اختیار کرتے ہیں، وضع کرتے ہیں اور اپنے آپ پر نافذ کرتے ہیں۔

1۔ آئینی (بیالیسویں ترمیم) ایکٹ، 1976 کے سیکشن 2 کے ذریعہ ''مقتدر عوامی جمہوریہ'' کی جگہ (1977-1-3 سے)
2۔ آئینی (بیالیسویں ترمیم) ایکٹ، 1976 کے سیکشن 2 کے ذریعہ ''قوم کے اتحاد'' کی جگہ (1977-1-3 سے)

فہرست

بھارت کا آئین

حصہ III (دفعہ 12 سے 35)

(بعض شرائط، چند مستثنات اور واجب پابندیوں کے ساتھ)

بنیادی حقوق

کے ذریعہ منظور شدہ

حق مساوات

- قانون کی نظر میں اور قوانین کا مساویانہ تحفظ
- مذہب، نسل، ذات، جنس یا مقام پیدائش کی بنا پر عوامی جگہوں پر مملکت کے زیر انتظام
- سرکاری ملازمت کے لیے مساوی موقع
- چھوت چھات اور خطابات کا خاتمہ

حق آزادی

- اظہار خیال، مجلس، انجمن، تحریک، بود و باش اور پیشے کا
- سزا کے جرم سے متعلق بعض تحفظات کا
- زندگی اور شخصی آزادی کے تحفظ کا
- 6 سے 14 سال کی عمر کے بچوں کے لیے مفت اور لازمی تعلیم کا
- گرفتاری اور نظر بندی سے متعلق بعض معاملات کے خلاف تحفظ کا

استحصال کے خلاف حق

- انسانوں کی تجارت اور جبری خدمت کی ممانعت کے لیے
- بچوں کو خطرناک کام پر مامور کرنے کی ممانعت کے لیے

مذہب کی آزادی کا حق

- آزادیٔ ضمیر اور قبولِ مذہب اور اس کی پیروی اور تبلیغ
- مذہبی امور کے انتظام کی آزادی
- کسی خاص مذہب کے فروغ کے لیے ٹیکس ادا کرنے کی آزادی
- کلی طور سے مملکت کے زیر انتظام تعلیمی اداروں میں مذہبی تعلیم یا مذہبی عبادت کی آزادی

ثقافتی اور تعلیمی حقوق

- اقلیتوں کی اپنی زبان، رسم خط یا ثقافت کے مفادات کا تحفظ
- اقلیتوں کو اپنی پسند کے تعلیمی ادارے کے قیام اور ان کے انتظام کا حق

قانونی چارہ جوئی کا حق

- سپریم کورٹ یا کورٹ کی جانب سے ہدایات، احکام یا رٹ کے اجرا کو تبدیل کرانے کا حق

باب

1

ناطق اعداد

4817CH01

1.1 تعارف

ریاضی میں اکثر ہم آسان قسم کی مساوات حل کرتے ہیں۔مثال کے طور پر، مساوات

$$x + 2 = 13 \qquad (1)$$

کو $x = 11$ کے لیے حل کیا جاتا ہے کیوں کہ x کی یہ قدر مساوات مطمئن کرتی ہے۔اس کا حل 11 ایک **طبعی عدد** **(Natural Number)** ہے۔دوسری طرف مساوات

$$x + 5 = 5 \qquad (2)$$

کا حل صفر ہے جو ایک **مکمل عدد** **(Whole Number)** ہے۔اگر ہم صرف طبعی اعداد پر ہی غور کریں تو مساوات (2) کو حل نہیں کیا جاسکتا۔مساوات (2) کو حل کرنے کے لیے ہم طبعی اعداد کے سیٹ میں صفر کا اضافہ کرتے ہیں اور اس طرح مکمل اعداد حاصل کرتے ہیں لیکن

$$x + 18 = 5 \qquad (3)$$

جیسی مساوات کو حل کرنے کے لیے مکمل اعداد بھی ناکافی ہوتے ہیں۔کیا آپ جانتے ہیں 'کیوں'؟ کیوں کہ اس مساوات کو حل کرنے کے لیے عدد 13– درکار ہے جو مکمل عدد نہیں ہے۔یہ ہمیں ان **صحیح اعداد** کو سوچنے پر مجبور کرتا ہے جو **(مثبت اور منفی)** ہوتے ہیں۔غور کیجیے کہ مثبت صحیح اعداد دراصل طبعی اعداد ہی ہیں۔آپ سوچ سکتے ہیں کہ سبھی آسان قسم کی مساوات کو حل کرنے کے لیے ہمارے پاس موجود صحیح اعداد کی فہرست میں تمام اعداد ہیں اب مندرجہ ذیل مساوات پر غور کیجیے

$$2x = 3 \qquad (4)$$

$$5x + 7 = 0 \qquad (5)$$

ان کے حل صحیح اعداد میں موجود نہیں ہیں۔(ان کی جانچ کیجیے)

ہمیں مساوات (4) کو حل کرنے کے لیے عدد $\frac{3}{2}$ اور مساوات (5) کو حل کرنے کے لیے $\frac{-7}{5}$ کی ضرورت ہے۔اس کی وجہ سے ہمیں **ناطق اعداد** کا پتا چلتا ہے۔

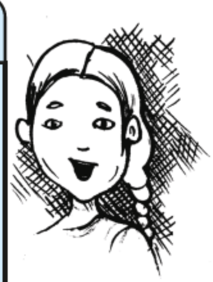
ہم ناطق اعداد پر بنیادی عملیات کا مطالعہ پہلے بھی کر چکے ہیں۔آیئے اب تک معلوم مختلف قسم کے اعداد پر عملیات کی کچھ خصوصیات جاننے کی کوشش کریں۔

1.2 ناطق اعداد کی خصوصیات

1.2.1 بندشی خصوصیت

(i) مکمل اعداد (Whole Numbers)

آیئے مختصر طور پر مکمل اعداد پر تمام عملیات کی بندشی خصوصیت کو دوہرائیں۔



عمل	اعداد	رائے زنی (Remarks)
جمع	$0 + 5 = 5$، ایک مکمل عدد ہے $4 + 7 =$ ..... ، کیا یہ ایک مکمل عدد ہے؟ عمومی طور پر $a + b$ کسی بھی مکمل اعداد a اور b کے لیے ایک مکمل عدد ہے۔	دو مکمل اعداد کو جمع کریں تو ہمیشہ ایک مکمل عدد ہی حاصل ہوگا
تفریق	$5 - 7 = -2$، جو ایک مکمل عدد نہیں ہے۔	دو مکمل اعداد کی تفریق کرنے پر ضروری نہیں ہے کہ ہمیشہ مکمل عدد ہی حاصل ہو
ضرب	$0 \times 3 = 0$، ایک مکمل عدد ہے کیا $3 \times 7 =$ .... ، ایک مکمل عدد ہے؟ عمومی طور پر اگر a اور b کوئی مکمل اعداد ہیں تو ان کا حاصل ضرب ab بھی ایک مکمل عدد ہے۔	دو مکمل اعداد کا حاصل ضرب ہمیشہ ایک مکمل عدد ہی ہوگا
تقسیم	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$ ، جو ایک مکمل عدد نہیں ہے۔	دو مکمل اعداد کی تقسیم کرنے پر ضروری نہیں ہے کہ مکمل عدد ہی حاصل ہو

طبعی اعداد پر چاروں عملیات کی بندشی خصوصیت کی جانچ کیجیے۔

(ii) صحیح اعداد (Inlegers Numbers)

آیئے ان عملیات کو دوہراتے ہیں جن کے تحت صحیح اعداد (Integers) پر بندشی خصوصیت لاگو ہوتی ہے۔

عمل	اعداد	رائے زنی (Remarks)
جمع	$-6 + 5 = -1$، ایک صحیح عدد ہے کیا $-7 + (-5)$ ایک صحیح عدد ہے؟ کیا $8 + 5$ ایک صحیح عدد ہے؟ عام طور پر ہر ایک صحیح عدد a اور b کے لیے $a + b$ ایک صحیح عدد ہے۔	جمع کے عمل کے لیے صحیح اعداد بندشی ہیں۔

تفریق	$7-5=2$، ایک صحیح عدد ہے کیا $5-7$ ایک صحیح عدد ہے؟ $-6-8=-14$، ایک صحیح عدد ہے $-6-(-8)=2$، ایک صحیح عدد ہے کیا $8-(-6)$ ایک صحیح عدد ہے؟ عام طور پر ہر ایک صحیح عدد a اور b کے لیے $a-b$ ایک صحیح عدد ہی ہے۔ جانچ کیجیے کہ کیا $b-a$ بھی ایک صحیح عدد ہے؟	تفریق کے عمل کے لیے صحیح اعداد بندشی ہیں۔
ضرب	$5\times 8=40$ ایک صحیح عدد ہے کیا -5×8 ایک صحیح عدد ہے؟ $-5\times(-8)=40$ ایک صحیح عدد ہے عام طور پر کوئی بھی صحیح اعداد a اور b کے لیے $a\times b$ بھی ایک صحیح عدد ہے۔	ضرب کے عمل کے لیے صحیح اعداد بندشی ہیں۔
تقسیم	$5\div 8=\frac{5}{8}$، جو ایک صحیح عدد نہیں ہے۔	تقسیم کے عمل کے لیے صحیح اعداد بندشی نہیں ہیں۔

آپ پڑھ چکے ہیں کہ مکمل اعداد جمع اور ضرب کے تحت بندشی ہیں لیکن تفریق اور تقسیم کے تحت بندشی نہیں ہیں جب کہ صحیح اعداد جمع، تفریق اور ضرب کے تحت بندشی ہیں لیکن تقسیم کے تحت نہیں ہیں۔

(iii) ناطق اعداد (Rational Numbers)

یاد کیجیے کہ ایسا عدد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہو، جہاں p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ، **ناطق عدد** (Rational Number) کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{6}{7}$ اور $-\frac{9}{5}$ تمام ناطق اعداد ہیں۔ کیوں کہ اعداد 0، -2، 4 کو ہم $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں اس لیے یہ بھی ناطق اعداد ہیں۔ (جانچ کیجیے!)

(a) آپ جانتے ہیں کہ دو ناطق اعداد کو کس طرح جمع کیا جاتا ہے۔ آیئے کچھ جوڑوں کو جمع کرتے ہیں۔

$$\frac{3}{8}+\frac{(-5)}{7}=\frac{21+(-40)}{56}=\frac{-19}{56}$$ (ایک ناطق عدد)

$$\frac{-3}{8}+\frac{(-4)}{5}=\frac{-15+(-32)}{40}=\ldots.$$ کیا یہ ایک ناطق عدد ہے؟

$$\frac{4}{7}+\frac{6}{11}=\ldots..$$ کیا یہ ایک ناطق عدد ہے؟

ہم دیکھتے ہیں کہ دو ناطق اعداد کا حاصل جمع ہمیشہ ایک ناطق عدد ہی ہوتا ہے۔ آپ کچھ اور ناطق اعداد کے جوڑے لے کر اس کی جانچ کیجیے۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ ناطق اعداد جمع کے تحت بندشی ہیں، یعنی کوئی دو ناطق اعداد a اور b کے لیے $a + b$ بھی ایک ناطق عدد ہے۔

(b) کیا دو ناطق اعداد کا فرق بھی ایک ناطق عدد ہی ہوگا؟

ہمارے پاس ہے،

$$\frac{-5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{-5 \times 3 - 2 \times 7}{21} = \frac{-29}{21}$$ (ایک ناطق عدد ہے)

$$\frac{5}{8} - \frac{4}{5} = \frac{25 - 32}{40} = ...$$ کیا یہ ایک ناطق عدد ہے؟

$$\frac{3}{7} - \frac{(-8)}{5} = ...$$ کیا یہ ایک ناطق عدد ہے؟

کچھ اور جوڑے لے کر حاصل فرق معلوم کیجیے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ناطق عدد تفریق کے عمل کے تحت بندشی ہیں، یعنی کوئی دو ناطق اعداد a اور b کے لیے $a - b$ بھی ایک ناطق عدد ہے۔

(c) آیئے اب ناطق عدد کے حاصل ضرب پر غور کرتے ہیں۔

$$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{-8}{15};\ \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$$ (دونوں حاصل ضرب ناطق اعداد ہیں)

$$-\frac{4}{5} \times \frac{-6}{11} = ...$$ کیا یہ ایک ناطق عدد ہے؟

ناطق اعداد کے کچھ اور جوڑے لیجیے اور ان پر ضرب کا عمل دوہرائیے۔ جانچ کیجیے کہ ان کا حاصل ضرب بھی ایک ناطق عدد ہے یا نہیں۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ ناطق اعداد ضرب کے عمل کے تحت بندشی ہیں، یعنی کوئی دو ناطق اعداد a اور b کے لیے $a \times b$ بھی ایک ناطق عدد ہے۔

(d) ہم نوٹ کرتے ہیں کہ $\frac{-5}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{-25}{6}$ (ایک ناطق عدد ہے)

$\frac{2}{7} \div \frac{5}{3} = ...$ کیا یہ ایک ناطق عدد ہے؟ $\frac{-3}{8} \div \frac{-2}{9} = ...$ کیا یہ ایک ناطق عدد ہے؟

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ ناطق اعداد تقسیم کے عمل کے تحت بندشی ہیں؟

ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی ناطق عدد a کے لیے $a \div 0$ معرف نہیں ہے۔

اس لیے ناطق اعداد تقسیم کے عمل کے تحت بندشی نہیں ہیں۔

اگر ہم صفر کو شامل نہ کریں تو باقی تمام ناطق اعداد، تقسیم کے عمل کے تحت بندشی ہوں گے۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل جدول کو پُر کیجیے۔

اعداد	عمل کے تحت بندشی ہیں			
	جمع	تفریق	ضرب	تقسیم
ناطق اعداد	ہاں	ہاں	.....	نہیں
صحیح اعداد	.....	ہاں	.....	نہیں
مکمل اعداد	.....	.....	ہاں	.....
طبعی اعداد	.....	نہیں	.....	.....

1.2.2 تقلیبیت (Commutativity)

(i) مکمل اعداد

مندرجہ ذیل جدول کو پُر کر کے مکمل اعداد پر مختلف عملیات کی تقلیبیت (Commutativity) کو دوہرائیے۔

عمل	اعداد	رائے زنی **(Remarks)**
جمع	$0+7=7+0=7$ $2+3=\ldots+\ldots=\ldots$ کوئی دو مکمل اعداد a اور b کے لیے $a+b=b+a$	جمع کا عمل تقلیبی ہے
تفریق	....	تفریق کا عمل تقلیبی نہیں ہے
ضرب	....	ضرب کا عمل تقلیبی ہے
تقسیم	....	تقسیم کا عمل تقلیبی نہیں ہے

جانچ کیجیے کہ آیا طبعی اعداد کے لیے بھی تمام عملیات تقلیبی ہیں۔

(ii) صحیح اعداد

مندرجہ ذیل جدول کو پُر کیجیے اور صحیح اعداد (Integers) کے لیے مختلف عملیات کی تقلیبیت کی جانچ کیجیے۔

عمل	اعداد	رائے زنی **(Remarks)**
جمع	....	جمع کا عمل تقلیبی ہے
تفریق	کیا $5-(-3)=-3-5$ ہے؟	تفریق کا عمل تقلیبی نہیں ہے
ضرب	....	ضرب کا عمل تقلیبی ہے
تقسیم	....	تقسیم کا عمل تقلیبی نہیں ہے

(iii) ناطق اعداد

(a) جمع

آپ جانتے ہیں کہ دو ناطق اعداد کو کس طرح جمع کرتے ہیں۔ آ یئے کچھ جوڑوں کو جمع کرتے ہیں۔

$$\frac{5}{7}+\frac{(-2)}{3}=\frac{1}{21} \quad \text{اور} \quad \frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{1}{21}$$

اس لیے، $\frac{-2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)$

مزید، $\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\ldots\ldots$ اور $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\ldots\ldots$

کیا $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\left(\frac{-8}{3}\right)+\left(\frac{-6}{5}\right)$?

کیا $\frac{-3}{8}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(\frac{-3}{8}\right)$?

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دوناطق اعداد کو کسی بھی ترتیب میں جوڑا جاسکتا ہے۔اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ جمع کاعمل ناطق اعداد کے لیے تقلیبی ہے یعنی کوئی دو ناطق اعداد a اور b کے لیے $a+b=b+a$

(b) تفریق

کیا $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$? ہے؟

کیا $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$? ہے؟

آپ دیکھتے ہیں کہ ناطق اعداد کے لیے تفریق (Subtraction) کا عمل تقلیبی نہیں ہے۔ یہاں نوٹ کیجیے کہ صحیح اعداد تفریق کے عمل کے لیے تقلیبی نہیں ہیں۔ نیز صحیح اعداد ناطق بھی ہیں۔

چنانچہ ناطق اعداد تفریق کے عمل کے لیے تقلیبی نہیں ہیں۔

(c) ضرب

ہمارے پاس ہے، $\frac{-7}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{-42}{15}=\frac{6}{5}\times\left(\frac{-7}{3}\right)$

کیا $\frac{-8}{9}\times\left(\frac{-4}{7}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$?

ایسے ہی کچھ اور حاصل ضرب لے کر جانچ کیجیے۔

آپ نوٹ کریں گے کہ ناطق اعداد کے لیے ضرب کا عمل تقلیبی ہے۔عام طور پر کوئی دو ناطق اعداد a اور b کے لیے، $a\times b=b\times a$

(d) تقسیم

کیا $\frac{-5}{4} \div \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \div \left(\frac{-5}{4}\right)$?

آپ دیکھیں گے دونوں طرف عبارتیں برابر نہیں ہیں۔

اس لیے ناطق اعداد کے لیے تقسیم کا عمل تقلیبی نہیں ہے۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل جدول کو پُر کیجیے:

اعداد	تقلیبی ہے			
	جمع کے لیے	تفریق کے لیے	ضرب کے لیے	تقسیم کے لیے
ناطق اعداد	ہاں	......	......	......
صحیح اعداد	......	نہیں	......	......
مکمل اعداد	......	......	ہاں	......
طبعی اعداد	......	......	......	نہیں

1.2.3 تلازمیت (Associativity)

(i) مکمل اعداد

مندرجہ ذیل جدول کے ذریعہ مکمل اعداد کے لیے چاروں عملیات کی تلازمیت (Associativity) کو دوہرائیے:

عمل	اعداد	(نوٹ-Note)
جمع	....	جمع تلازمی ہے
تفریق	....	تفریق تلازمی نہیں ہے
ضرب	کیا $7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$? کیا $4 \times (6 \times 0) = (4 \times 6) \times 0$? کوئی تین مکمل اعداد a، b اور c کے لیے $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ضرب کا عمل تلازمی ہے
تقسیم	....	تقسیم کا عمل تلازمی نہیں ہے

درج بالا جدول کو پُر کیجیے اور آخر کے کالم میں دی گئی رائے کی تصدیق کیجیے۔

طبعی اعداد کے مختلف عملیات کی تلازمیت کی جانچ کیجیے۔

(ii) صحیح اعداد

صحیح اعداد کے لیے چاروں عملوں کی تلازمیت کو درج ذیل جدول میں ظاہر کیا گیا ہے:

عمل	اعداد	(Note-نوٹ)
جمع	کیا $(-2)+[3+(-4)]$ $=[(-2)+3)]+(-4)$? کیا $(-6)+[(-4)+(-5)]$ $=[(-6)+(-4)]+(-5)$? کنھیں تین صحیح اعداد a، b اور c کے لیے $a+(b+c)=(a+b)+c$	جمع کا عمل تلازمی ہے
تفریق	کیا $5-(7-3)=(5-7)-3$?	تفریق کا عمل تلازمی نہیں ہے
ضرب	کیا $5\times[(-7)\times(-8)]$ $=[5\times(-7)]\times(-8)$? کیا $(-4)\times[(-8)\times(-5)]$ $=[(-4)\times(-8)]\times(-5)$? کنھیں تین صحیح اعداد a، b اور c کے لیے $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$	ضرب کا عمل تلازمی ہے
تقسیم	کیا $[(-10)\div 2]\div(-5)$ $=(-10)\div[2\div(-5)]$?	تقسیم کا عمل تلازمی نہیں ہے

(iii) ناطق اعداد

(a) جمع

ہمارے پاس

$$\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\frac{-2}{3}+\left(\frac{-7}{30}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$

$$\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{15}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-27}{30}=\frac{-9}{10}$$

اس لیے،

$$\frac{-2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\left[\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)$$

معلوم کیجیے $\frac{-1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ اور $\left[\frac{-1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{-4}{3}\right)$ کیا دونوں حاصل جمع برابر ہیں؟

کچھ اور ناطق اعداد لیجیے اور انھیں درج بالا طریقے سے جمع کیجیے اور معلوم کیجیے کہ دونوں حاصل جمع برابر ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ناطق اعداد کے لیے جمع کا عمل تلازمی ہے، یعنی کنھیں تین ناطق اعداد a، b اور c کے لیے $a + (b + c) = (a + b) + c$

(b) تفریق

کیا $\frac{-2}{3} - \left[\frac{-4}{5} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{-4}{5}\right)\right] - \frac{1}{2}$?

خود جانچ کیجیے۔

ناطق اعداد کے لیے تفریق کا عمل تلازمی نہیں ہے۔

(c) ضرب

آیئے ضرب کے عمل کی تلازمیت کی جانچ کریں۔

$$\frac{-7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{2}{9}\right) = \frac{-7}{3} \times \frac{10}{36} = \frac{-70}{108} = \frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{2}{9} = ...$$

ہم پاتے ہیں $\frac{-7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{-7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{2}{9}$

کیا $\frac{2}{3} \times \left(\frac{-6}{7} \times \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{-6}{7}\right) \times \frac{4}{5}$?

کچھ اور ناطق اعداد لیجیے اور ان کی جانچ کیجیے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ناطق اعداد کے لیے ضرب کا عمل تلازمی ہے، یعنی کنھیں تین ناطق اعداد a، b اور c کے لیے $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(d) تقسیم

یاد کیجیے کہ صحیح اعداد کے لیے تقسیم تلازمی نہیں ہے، تب ناطق اعداد کے بارے میں کیا خیال ہے۔

آیئے دیکھیں اگر $\frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right] = \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{2}\right)\right] \div \frac{2}{5}$ ہے

ہمیں حاصل ہوتا ہے $\text{LHS} = \frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right]$ با۔جا

$= \frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{2}\right)$ ($\frac{2}{5}$ کا مقلوب $\frac{5}{2}$ ہے)

$= \frac{1}{2} \div \left(-\frac{-5}{6}\right) = ...$

$$\text{RHS} = \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$$ دا۔ جا۔

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{-3}{1}\right) \div \frac{2}{5} = \frac{-3}{2} \div \frac{2}{5} = ...$$ دا۔ جا۔ = با۔ جا۔

کیا LHS = RHS ہے؟ خود جانچ کیجیے۔ آپ دیکھیں گے کہ ناطق اعداد کے لیے تقسیم کا عمل تلازمی نہیں ہے۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل جدول کو پُر کیجیے:

اعداد	تلازمی ہے			
	جمع کے لیے	تفریق کے لیے	ضرب کے لیے	تقسیم کے لیے
ناطق اعداد	......	......	......	نہیں
صحیح اعداد	......	......	ہاں	......
مکمل اعداد	ہاں	......	......	......
طبعی اعداد	......	نہیں	......	......

مثال 1 : معلوم کیجیے $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$

حل : $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$

$$= \frac{198}{462} + \left(\frac{-252}{462}\right) + \left(\frac{-176}{462}\right) + \left(\frac{105}{462}\right)$$ (نوٹ کیجیے کہ 7، 11، 21 اور 22 کا م۔ذ۔ا۔ 462 ہے)

$$= \frac{198 - 252 - 176 + 105}{462} = \frac{-125}{462}$$

اسے ہم اس طرح بھی حل کر سکتے ہیں۔

$$\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \frac{5}{22}$$

$$= \left[\frac{3}{7} + \left(\frac{-8}{21}\right)\right] + \left[\frac{-6}{11} + \frac{5}{22}\right]$$ (تقلیبیت اور تلازمیت کا استعمال کرنے پر)

$$= \left[\frac{9 + (-8)}{21}\right] + \left[\frac{-12 + 5}{22}\right]$$ (7 اور 21 کا م۔ذ۔ا۔ 21 ہے؛ 11 اور 22 کا م۔ذ۔ا۔ 22 ہے)

$$= \frac{1}{21} + \left(\frac{-7}{22}\right) = \frac{22 - 147}{462} = \frac{-125}{462}$$

کیا آپ ایسا سوچتے ہیں کہ تقلیبیت اور تلازمیت کی خصوصیات تحسیب کو آسان بنا دیتی ہیں؟

مثال 2 : معلوم کیجیے $\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$

حل : ہمارے پاس ہے

$$\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$= \left(-\frac{4 \times 3}{5 \times 7}\right) \times \left(\frac{15 \times (-14)}{16 \times 9}\right)$$

$$= \frac{-12}{35} \times \left(\frac{-35}{24}\right) = \frac{-12 \times (-35)}{35 \times 24} = \frac{1}{2}$$

اس کو ہم اس طرح بھی حل کر سکتے ہیں۔

$$\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{-4}{5} \times \frac{15}{16}\right) \times \left[\frac{3}{7} \times \left(\frac{-14}{9}\right)\right]$$ (تقلیبیت اور تلازمیت کا استعمال کرنے پر)

$$= \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

1.2.4 صفر (0) کی خصوصیت

مندرجہ ذیل پر غور کیجیے۔

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (مکمل عدد میں صفر کو جمع کرنا)

$-5 + 0 = \ldots + \ldots = -5$ (صحیح عدد میں صفر کو جمع کرنا)

$\frac{-2}{7} + \ldots = 0 + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{-2}{7}$ (ناطق عدد میں صفر کو جمع کرنا)

اس طرح کی مشق آپ پہلے بھی کر چکے ہیں۔ اسی طرح کی کچھ اور جمع کیجیے۔

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ دیکھتے ہیں کہ جب آپ کسی مکمل عدد میں صفر جمع کرتے ہیں تو حاصل جمع وہی مکمل عدد ہوتا ہے۔ یہ اصول صحیح اعداد اور ناطق اعداد کے لیے بھی درست ہے۔

عام طور پر $a + 0 = 0 + a = a$ جہاں a ایک مکمل عدد ہے

$b + 0 = 0 + b = b$ جہاں b ایک صحیح عدد ہے

$c + 0 = 0 + c = c$ جہاں c ایک ناطق عدد ہے

صفر ناطق اعداد کے جمع کے عمل کا تماثلہ (Identity) کہلاتا ھے۔ یہ صحیح اعداد اور مکمل اعداد کا بھی جمعی تماثلہ ھے۔

1.2.5 '1' کی خصوصیت

ہمارے پاس ہے

$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$ (مکمل عدد کی 1 سے ضرب)

$$\frac{-2}{7} \times 1 = ... \times .... \frac{-2}{7}$$

$$\frac{3}{8} \times .... = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے؟

آپ دیکھتے ہیں کہ جب آپ کسی بھی ناطق عدد کو 1 سے ضرب کرتے ہیں تو حاصل ضرب کے طور پر آپ کو بالکل وہی ناطق عدد حاصل ہوتا ہے۔ آپ کچھ اور ناطق اعداد لے کر اس کی جانچ کیجیے۔ آپ دیکھیں گے کہ کسی بھی ناطق عدد a کے لیے $a \times 1 = 1 \times a = a$ ہے۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ 1 ناطق اعداد کا ضربی تماثلہ ھے۔

کیا 1 صحیح اعداد کا ضربی تماثلہ ہے؟ مکمل اعداد کا بھی؟

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

اگر کوئی خصوصیت ناطق اعداد کے لیے درست ہے تو کیا یہ صحیح اعداد کے لیے بھی درست ہوگی؟ کیا مکمل اعداد کے لیے بھی؟ کس کے لیے درست ہوگی؟ کس کے لیے نہیں ہوگی؟

1.2.6 ایک عدد کا منفی

منفی اعداد کا مطالعہ کرتے وقت آپ کا سابقہ صحیح اعداد کے منفی سے ہوا ہوگا۔ 1 کا منفی کیا ہے؟ یہ -1 ہے کیوں کہ

$$1 + (-1) = (-1) + 1 = 0$$

اس لیے، (-1) کا منفی کیا ہوگا؟ یہ 1 ہوگا۔

مزید $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ ہے، اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ 2 ، -2 کا منفی یا جمعی معکوس ہے۔ عام طور پر کسی بھی صحیح عدد a کے لیے ہمارے پاس $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ہے؛ اس لیے a منفی ہے $-a$ کا اور a کا منفی $-a$ ہے۔

ناطق عدد $\frac{2}{3}$ کے لیے، ہمارے پاس ہے

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2 + (-2)}{3} = 0$$

مزید، $\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}=0$ (کیسے؟)

اسی طرح، $\frac{-8}{9}+\cdots=\cdots+\left(\frac{-8}{9}\right)=0$

$$\ldots+\left(\frac{-11}{7}\right)=\left(\frac{-11}{7}\right)+\ldots=0$$

عام طور پر ناطق عدد $\frac{a}{b}$، کے لیے ہمارے پاس $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$ ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $\frac{a}{b}$ کا جمعی معکوس $-\frac{a}{b}$ ہے اور $\left(-\frac{a}{b}\right)$ کا جمعی معکوس $\frac{a}{b}$ ہے۔

1.2.7 مقلوب (Reciprocal)

آپ $\frac{8}{21}$ کو کس ناطق عدد سے ضرب کریں گے کہ حاصل ضرب 1 ہو؟ ظاہر ہے کہ وہ عدد $\frac{21}{8}$ ہے، کیوں کہ $\frac{8}{21}\times\frac{21}{8}=1$

اسی طرح سے $\frac{-5}{7}$ کو $\frac{7}{-5}$ سے ضرب دیں تو 1 حاصل ہوگا۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\frac{21}{8}$ کا مقلوب $\frac{8}{21}$ ہے اور $\frac{-5}{7}$ کا مقلوب $\frac{7}{-5}$ ہے۔

کیا آپ 0 (صفر) کا مقلوب بتا سکتے ہیں؟ کیا کوئی ایسا ناطق عدد ہے جس کو صفر سے ضرب دینے پر 1 حاصل ہوتا ہو؟ لہٰذا، صفر کا کوئی مقلوب نہیں ہوتا۔

ہم کہتے ہیں کہ ناطق عدد $\frac{c}{d}$ دوسرے غیر صفر ناطق عدد $\frac{a}{b}$ کا ضربی معکوس ہے اگر $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=1$ ہے۔

1.2.8 ناطق اعداد کی جمع کے لیے ضرب کی تقسیمی خصوصیت

اس خصوصیت کو سمجھنے کے لیے ناطق اعداد $\frac{-3}{4}$، $\frac{2}{3}$ اور $\frac{-5}{6}$ پر غور کیجیے۔

$$\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{2}{3}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right\}=\frac{-3}{4}\times\left\{\frac{(4)+(-5)}{6}\right\}$$

$$=\frac{-3}{4}\times\left(\frac{-1}{6}\right)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

مزید $\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}=-\frac{-3\times2}{4\times3}=\frac{-6}{12}=\frac{-1}{2}$

اور $\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}=\frac{5}{8}$

اس لیے $\left(\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$

اس طرح $\frac{-3}{4}\times\left[\frac{2}{3}+\frac{-5}{6}\right]=\left(\frac{-3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{-3}{4}\times\frac{-5}{6}\right)$

جمع اور تفریق پر ضرب کی تقسیمی خصوصیت۔
تمام ناطق اعداد a، b اور c کے لیے
$a(b+c)=ab+ac$
$a(b-c)=ab-ac$

کوشش کیجیے

تقسیمی خصوصیت کا استعمال کر کے حل کیجیے۔ (i) $\left\{\frac{7}{5}\times\left(\frac{-3}{12}\right)\right\}+\left\{\frac{7}{5}\times\frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16}\times\frac{4}{12}\right\}+\left\{\frac{9}{16}\times\frac{-3}{9}\right\}$

مثال 3 : مندرجہ ذیل کا جمعی معکوس معلوم کیجیے:

(i) $\frac{-7}{19}$ (ii) $\frac{21}{112}$

جب ہم جمع اور تفریق پر ضرب کی تقسیمی خصوصیت استعمال کرتے ہیں تو حاصل ضرب کو دو حاصل ضربوں کے حاصل جمع یا حاصل فرق میں تقسیم کرتے ہیں۔

حل :

(i) $\frac{-7}{19}$ کا جمعی معکوس $\frac{7}{19}$ ہے کیوں کہ $\frac{-7}{19}+\frac{7}{19}=\frac{-7+7}{19}=\frac{0}{19}=0$

(ii) $\frac{21}{112}$ کا جمعی معکوس $\frac{-21}{112}$ ہے (جانچ کیجیے!)

مثال 4 : تصدیق کیجیے کہ $-(-x)$ اور x یکساں ہیں

(i) $x=\frac{13}{17}$ (ii) $x=\frac{-21}{31}$

حل : (i) ہمارے پاس ہے، $x=\frac{13}{17}$

$x=\frac{13}{17}$ کا جمعی معکوس $-x=\frac{-13}{17}$ ہے کیوں کہ $\frac{13}{17}+\left(\frac{-13}{17}\right)=0$

اس مساوات $\frac{13}{17}+\left(\frac{-13}{17}\right)=0$، سے معلوم ہوتا ہے کہ $\frac{-13}{17}$ کا جمعی معکوس $\frac{13}{17}$ ہے۔

یا $\frac{13}{17}=-\left(\frac{-13}{17}\right)$ یعنی $-(-x)=x$

(ii) $x=\frac{-21}{31}$ کا جمعی معکوس $-x=\frac{21}{31}$ ہے کیوں کہ $\frac{-21}{31}+\frac{21}{31}=0$ ہے۔

اس طرح مساوات $\frac{-21}{31}+\frac{21}{31}=0$ سے معلوم ہوتا ہے کہ $\frac{21}{31}$ کا جمعی معکوس $\frac{-21}{31}$ ہے، یعنی $-(-x)=x$

مثال 5 : معلوم کیجیے $\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}$

حل :

$$\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{1}{14}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}-\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$$ (تقلیبیت کی رو سے)

$$=\frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}+\left(\frac{-3}{7}\right)\times\frac{3}{5}-\frac{1}{14}$$

$$=\frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{14}$$ (تقسیمی خصوصیت کی رو سے)

$$=\frac{-3}{7}\times1-\frac{1}{14}=\frac{-6-1}{14}=\frac{-1}{2}$$

مشق 1.1

.1 مناسب خصوصیات کا استعمال کر کے معلوم کیجیے۔

(i) $-\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{5}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{5}\times\left(-\frac{3}{7}\right)-\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{14}\times\frac{2}{5}$

.2 مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا جمعی معکوس معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{-5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$ (v) $\frac{19}{-6}$

.3 تصدیق کیجیے کہ $-(-x)=x$

(i) $x=\frac{11}{15}$ کے لیے (ii) $x=-\frac{13}{17}$ کے لیے

.4 مندرجہ ذیل کا ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

(i) -13 (ii) $\frac{-13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8}\times\frac{-3}{7}$

(v) $-1\times\frac{-2}{5}$ (vi) -1

.5 مندرجہ ذیل میں ہر ایک کے لیے استعمال کی ہوئی ضرب کے تحت خصوصیت کا نام بتائیے۔

(i) $\frac{-4}{5}\times1=1\times\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{13}{17}\times\frac{-2}{7}=\frac{-2}{7}\times\frac{-13}{17}$

(iii) $\frac{-19}{29}\times\frac{29}{-19}=1$

.6 $\frac{6}{13}$ کو $\frac{-7}{16}$ کے مقلوب سے ضرب کیجیے۔

7. کس خصوصیت کی مدد سے آپ $\frac{1}{3}\times\left(6\times\frac{4}{3}\right)$ کو $\left(\frac{1}{3}\times 6\right)\times\frac{4}{3}$ کی طرح حل کر سکتے ہیں۔

8. کیا $-1\frac{1}{8}$ کا ضربی معکوس $\frac{8}{9}$ ہے؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

9. کیا $3\frac{1}{3}$ کا ضربی معکوس 0.3 ہے؟ کیوں یا کیوں نہیں؟

10. لکھیے۔

(i) ایک ایسا ناطق عدد جس کا مقلوب نہیں ہے۔

(ii) ایک ایسا ناطق عدد جو اپنے مقلوب کے مساوی ہو۔

(iii) ایک ایسا ناطق عدد جو اپنے منفی کے برابر ہو۔

11. خالی جگہوں کو پُر کیجیے؟

(i) صفر کا مقلوب ________ ہے۔

(ii) اعداد ________ اور ________ خود کے مقلوب ہیں۔

(iii) -5 کا مقلوب ________ ہے۔

(iv) $\frac{1}{x}$ کا مقلوب، جب کہ $x \neq 0$ ________ ہے۔

(v) دو ناطق اعداد کا حاصل ضرب ہمیشہ ________ ہوتا ہے۔

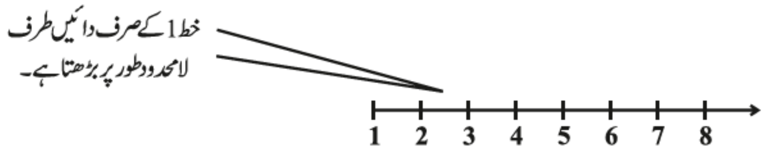
(vi) ایک مثبت ناطق عدد کا مقلوب ________ ہوتا ہے۔

1.3 عددی خط پر ناطق اعداد کا اظہار

آپ طبعی اعداد، مکمل اعداد، صحیح اعداد اور ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرنا سیکھ چکے ہیں۔ آیئے اس کو دوہرائیں۔

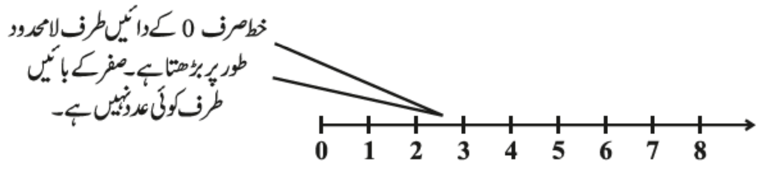
طبعی اعداد

(i)



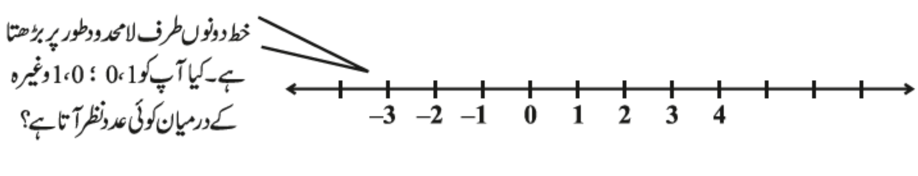
مکمل اعداد

(ii)



صحیح اعداد

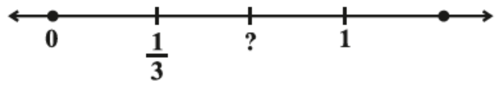
(iii)



ناطق اعداد

(iv)

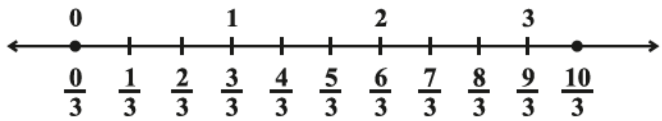
(v)



عددی خط (iv) پر جو نقطہ 0 اور 1 کے بالکل درمیان میں ہے وہ $\frac{1}{2}$ ہے۔اس طرح سے 0 اور 1 کے درمیان کے فاصلہ کو تین برابر حصوں میں بانٹنے والا پہلا نقطہ $\frac{1}{3}$ کو ظاہر کرتا ہے۔ جیسا کے خط (v) میں دکھایا گیا ہے۔ آپ عددی خط (v) پر اس تقسیم کے دوسرے نقطے کو کیا نام دیں گے؟

یہ نقطہ 0 کے دائیں طرف نقطہ 0 سے $\frac{1}{3}$ کے مقابلہ میں دوگنے فاصلہ پر ہے یعنی یہ $\frac{2}{3}$ ہے۔اسی طرح سے آپ مساوی فاصلوں پر موجود باقی نقطوں کو آسانی سے لکھ سکتے ہیں۔اسے آگے بڑھاتے ہوئے اگلا نشان 1 ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 1 ایسا ہی ہے جیسا کہ $\frac{3}{3}$ اس کے بعد $\frac{4}{3}$، $\frac{5}{3}$، $\frac{6}{3}$ (یا 2)، $\frac{7}{3}$ اور آگے خط (vi) پر دکھائے گئے ہیں۔

(vi)

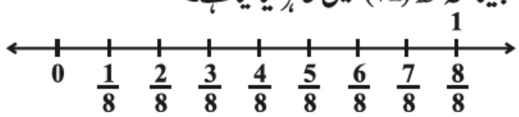


اسی طرح $\frac{1}{8}$ کو ظاہر کرنے کے لیے آپ عددی خط کو 8 برابر حصوں میں بانٹ لیجیے، جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔

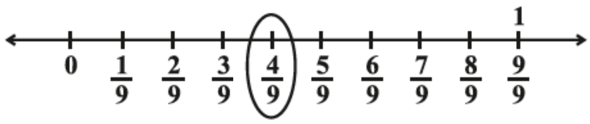
ہم اس تقسیم کے پہلے نقطے کو $\frac{2}{8}$ کہتے ہیں اور تیسرے نقطے کو $\frac{3}{8}$ اور اسی طرح آگے بھی جیسا کہ خط (vii) میں ظاہر کیا گیا ہے۔

یہاں ہم پہلے حصّے کے نقطے کو $\frac{1}{8}$، دوسرے حصّے کے نقطے کو $\frac{2}{8}$ کہتے ہیں اور تیسرے نقطے کو $\frac{3}{8}$ اور اسی طرح آگے بھی جیسا کہ خط (vii) میں ظاہر کیا گیا ہے۔

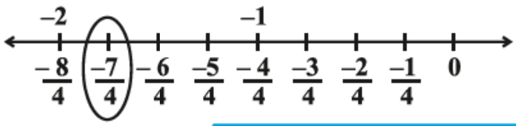
(vii)



ہم کسی بھی ناطق عدد کو اسی طرح عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔ ناطق اعداد میں بٹے کے نشان کے نیچے والا عدد یعنی نصب نما اس عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ جتنے مساوی حصوں میں پہلی اکائی کو بانٹا جاتا ہے۔ بٹے کے نشان کا اوپری عدد یعنی شمار کنندہ اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ ایسے کتنے حصہ لیے گئے ہیں۔اس لیے عدد $\frac{4}{9}$ کا مطلب ہے 0 کے دائیں طرف نو حصوں کے چار (عددی خط viii) $\frac{-7}{4}$ کے لیے ہم صفر کے بائیں طرف $\frac{1}{4}$ فاصلہ 7 حصے کے بناتے ہیں اور 0 سے شروع کرتے ہیں۔ ساتواں نشان $\frac{-7}{4}$ ظاہر کرے گا [عددی خط (ix)]۔



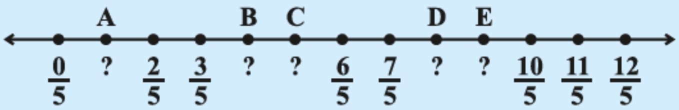
(viii)



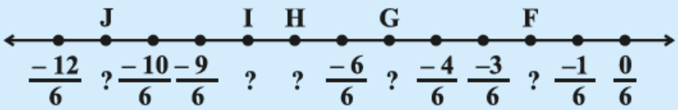
(ix)

کوشش کیجیے

حروف سے ظاہر ہونے والے ہر نقطے کا ناطق عدد لکھیے۔



(i)



(ii)

1.4 دو ناطق اعداد کے درمیان ناطق اعداد

کیا آپ 1 اور 5 کے درمیان تمام طبعی اعداد بتا سکتے ہیں؟ یہ 2، 3 اور 4 ہیں۔

7 اور 9 کے درمیان کتنے طبعی اعداد ہیں؟ صرف ایک اور وہ 8 ہے۔

10 اور 11 کے درمیان کتنے طبعی اعداد ہیں؟ ظاہر ہے کوئی نہیں۔

–5 اور 4 کے درمیان موجود تمام صحیح اعداد کی فہرست بنائیے۔ یہ –4، –3، –2، –1، 0، 1، 2، 3 ہیں۔

–1 اور 1 کے درمیان کتنے صحیح اعداد ہیں؟

–9 اور –10 کے درمیان کتنے صحیح اعداد ہیں؟

آپ دو طبعی اعداد کے درمیان ایک متعین طبعی اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

$\frac{3}{10}$ اور $\frac{7}{10}$ کے درمیان کتنے ناطق اعداد ہیں؟

آپ نے سوچا ہوگا کہ صرف $\frac{4}{10}$، $\frac{5}{10}$ اور $\frac{6}{10}$ ہی ہیں۔

لیکن آپ $\frac{3}{10}$ کو $\frac{30}{100}$ اور $\frac{7}{10}$ کو $\frac{70}{100}$ لکھ سکتے ہیں۔ اب اعداد، $\frac{31}{100}$، $\frac{32}{100}$، $\frac{33}{100}$، ...، $\frac{68}{100}$، $\frac{69}{100}$،
تمام $\frac{3}{10}$ اور $\frac{7}{10}$ کے درمیان ہیں۔ ایسے ناطق اعداد کی تعداد 39 ہے۔

اسی طرح $\frac{3}{10}$ کو $\frac{3000}{10,000}$ اور $\frac{7}{10}$ کو $\frac{7000}{10,000}$ لکھا جا سکتا ہے۔ اب ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{3}{10}$ اور $\frac{7}{10}$ کے درمیان

$\frac{3001}{10000}$ ، $\frac{3002}{10000}$ ،.... $\frac{6998}{10000}$ $\frac{6999}{10000}$ ، ناطق اعداد ہیں۔ان کی کل تعداد 3999 ہے۔

اسی طرح سے ہم $\frac{3}{10}$ اور $\frac{7}{10}$ کے درمیان لامحدود ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔اس لیے صحیح اعداد اور طبعی اعداد کی طرح دو ناطق اعداد کے درمیان اعداد کی تعداد متعین نہیں ہے۔یہاں دوسری مثال بھی دی ہے۔

$\frac{-1}{10}$ اور $\frac{3}{10}$ کے درمیان کتنے ناطق اعداد ہو سکتے ہیں؟

ظاہر ہے $\frac{0}{10}$ ، $\frac{1}{10}$ ، $\frac{2}{10}$ دیے ہوئے اعداد کے درمیان ناطق اعداد ہیں۔

اگر ہم $\frac{-1}{10}$ کو $\frac{-10000}{100000}$ اور $\frac{3}{10}$ کو $\frac{30000}{100000}$ لکھیں تو ہمیں $\frac{-1}{10}$ اور $\frac{3}{10}$ کے درمیان $\frac{-9999}{100000}$ ، $\frac{-9998}{100000}$ ،....، $\frac{-29998}{100000}$ ، $\frac{29999}{100000}$ ناطق اعداد حاصل ہوتے ہیں۔

آپ یہ دیکھ سکتے ہیں کہ دیے گئے دو ناطق اعداد کے درمیان لامحدود ناطق اعداد ہو تے ھیں۔

مثال 6 : 2– اور 0 کے درمیان کوئی 3 ناطق اعداد لکھیے۔

حل : 2– کو ہم $\frac{-20}{10}$ اور 0 کو $\frac{0}{10}$ لکھ سکتے ہیں۔

اس طرح 2– اور 0 کے درمیان $\frac{-19}{10}$ ، $\frac{-18}{10}$ ، $\frac{-17}{10}$ ، $\frac{-16}{10}$ ، $\frac{-15}{10}$ ،.....، $\frac{-1}{10}$ حاصل ہوتے ہیں۔

آپ ان میں سے کنھیں تین کا انتخاب کر سکتے ہیں۔

مثال 7 : $\frac{-5}{6}$ اور $\frac{5}{8}$ کے درمیان کوئی 10 ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

حل : پہلے ہم $\frac{-5}{6}$ اور $\frac{5}{8}$ کو یکساں نسب نما والے ناطق اعداد میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\frac{5\times3}{8\times3}=\frac{15}{24} \quad \text{اور} \quad \frac{-5\times4}{6\times4}=\frac{-20}{24}$$

اس طرح ہمارے پاس $\frac{-20}{24}$ اور $\frac{15}{24}$ کے درمیان ناطق اعداد $\frac{-19}{24}$ ، $\frac{-18}{24}$ ، $\frac{-17}{24}$ ،.....، $\frac{14}{24}$ ہیں۔

ان میں سے آپ کنھیں دس کا انتخاب کر سکتے ہیں۔

دوسرا طریقہ

آیئے 1 اور 2 کے درمیان ناطق اعداد معلوم کریں۔ان میں سے ایک 1.5 یا $1\frac{1}{2}$ یا $\frac{3}{2}$ ہے۔یہ 1 اور 2 کا اوسط ہے۔آپ ساتویں جماعت میں اوسط کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔

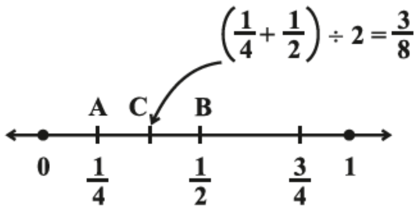
ہم دیکھتے ہیں کہ دیے ہوئے دو اعداد کے درمیان ضروری نہیں ہے کہ ہمیں صحیح اعداد ہی ملیں بلکہ اُن کے درمیان ہمیشہ ایک ناطق عدد ہوتا ہے۔

دو ناطق اعداد کے درمیان ناطق عدد معلوم کرنے کے لیے اوسط کا تصور بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 8 : $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان ایک ناطق عدد معلوم کیجیے۔

حل : ہم دیے ہوئے ناطق اعداد کا اوسط معلوم کرتے ہیں۔

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\left(\frac{1+2}{4}\right)\div 2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$



$\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان $\frac{3}{8}$ واقع ہے۔

اسے ہم عددی خط پر بھی تلاش کر سکتے ہیں۔

ہم AB کا وسطی نقطہ C معلوم کرتے ہیں ہے جو $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\frac{3}{8}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

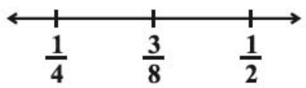
ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$ ہے۔

اگر a اور b دو ناطق اعداد ہیں تب a اور b کے درمیان ایک ناطق عدد $\frac{a+b}{2}$ ہے جیسے $a<\frac{a+b}{2}<b$

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ دو ناطق اعداد کے درمیان لامحدود ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

مثال 9 : $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان تین ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

حل : ہم دیے ہوئے ناطق اعداد کا اوسط معلوم کرتے ہیں۔



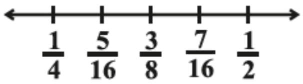
جیسا کہ مندرجہ بالا مثال میں دیا گیا ہے یہ اوسط $\frac{3}{8}$ ہے اور $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$

اب ہم $\frac{1}{4}$ اور $\frac{3}{8}$ کے درمیان ایک ناطق عدد معلوم کرتے ہیں۔ اس کے لیے ہم ایک مرتبہ پھر $\frac{1}{4}$ اور $\frac{3}{8}$ کا اوسط معلوم کرتے ہیں۔ یعنی $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)\div 2=\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$

$$\frac{1}{4}<\frac{5}{16}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$$

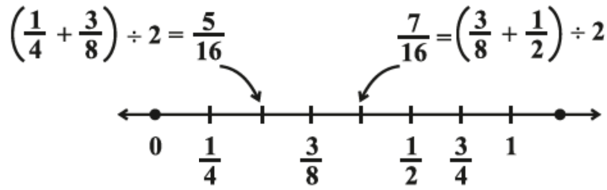
اب $\frac{3}{8}$ اور $\frac{1}{2}$ کا اوسط معلوم کرتے ہیں۔ ہمارے پاس $\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\frac{7}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$ ہے۔

اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$



لہٰذا، $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان $\frac{5}{16}$ ، $\frac{3}{8}$ ، $\frac{7}{16}$ تین ناطق اعداد ہیں۔

اس کو ہم عددی خط پر درج ذیل طریقے سے ظاہر کر سکتے ہیں:



اسی طریقے سے ہم دیے ہوئے دو ناطق اعداد کے درمیان جتنے چاہیں ناطق اعداد حاصل کر سکتے ہیں۔ آپ نے غور کیا ہوگا کہ دو ناطق اعداد کے درمیان لامحدود ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

مشق 1.2

1. ان اعداد کو عددی خط پر ظاہر کیجیے (i) $\frac{7}{4}$ (ii) $\frac{-5}{6}$

2. $\frac{-9}{11}$ ، $\frac{-5}{11}$ ، $\frac{-2}{11}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

3. 2 سے چھوٹے پانچ ناطق اعداد لکھیے۔

4. $\frac{-2}{5}$ اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان دس ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

5. مندرجہ ذیل کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{2}{3}$ اور $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ اور $\frac{5}{3}$ (iii) $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{2}$

6. 2– سے بڑے 5 ناطق اعداد لکھیے۔

7. $\frac{3}{5}$ اور $\frac{3}{4}$ کے درمیان دس ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1. ناطق اعداد عملیات جمع، گھٹا اور ضرب کے تحت بندشی ہیں۔
2. عملیات جمع اور ضرب
   (i) ناطق اعداد کے لیے تقلیبی ہیں۔
   (ii) ناطق اعداد کے لیے تلازمی ہیں۔
3. ناطق عدد کے لیے ناطق عدد 0 جمعی تماثلہ ہے
4. ناطق عدد 1 ناطق اعداد کا ضربی تماثلہ ہے۔
5. ناطق عدد $\frac{a}{b}$ کا جمعی معکوس $\frac{a}{b}$ – ہے اور اس کے برعکس بھی درست ہے۔
6. ناطق عدد $\frac{a}{b}$ کا مقلوب یا ضربی معکوس $\frac{c}{d}$ ہوتا ہے اگر $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ ہو۔
7. ناطق اعداد کی تقسیم پذیری: سبھی ناطق اعداد a ، b اور c کے لیے،
   $a(b+c) = ab + ac$ اور $a(b-c) = ab - ac$
8. ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
9. دیے گئے دو ناطق اعداد کے درمیان لامحدود اعداد ہوتے ہیں۔ اوسط یا درمیانہ (Mean) کے تصور سے ہم دو ناطق اعداد کے درمیان ناطق عدد معلوم کر سکتے ہیں۔

باب
2
ایک متغیر والی خطی مساوات

4817CH02

2.1 تعارف

پچھلی جماعتوں میں آپ بہت سی الجبری عبارتوں اور مساوات کے بارے میں پڑھ چکے ہیں ان میں سے الجبری عبارت کی کچھ مثالیں نیچے دی گئی ہیں:

$$5x,\ 2x-3,\ 3x+y,\ 2xy+5,\ xyz+x+y+z,\ x^2+1,\ y+y^2$$

مساوات کی کچھ مثالیں ہیں: $5x=25,\ 2x-3=9,\ 2y+\frac{5}{2}=\frac{37}{2},\ 6z+10=-2$

یاد کیجیے کہ مساوات کے لیے برابر (=) کا نشان استعمال کیا جاتا ہے؛ یہ نشان عبارتوں میں استعمال نہیں ہوتا۔

اوپر دی گئی بہت سی عبارتوں میں ایک سے زیادہ متغیر ہیں۔ مثال کے طور پر $2xy+5$ میں دو متغیر ہیں۔ حالاں کہ جب ہم مساوات بناتے ہیں تو ہم صرف ایک متغیر تک ہی محدود رہتے ہیں۔ مزید یہ کہ جن عبارتوں کا ہم مساوات بنانے میں استعمال کرتے ہیں وہ خطی ہیں یعنی عبارتوں میں موجود متغیر کی سب سے بڑی قوت 1 ہے۔

یہ خطی عبارتیں ہیں:

$$2x,\ 2x+1,\ 3y-7,\ 12-5z,\ \frac{5}{4}(x-4)+10$$

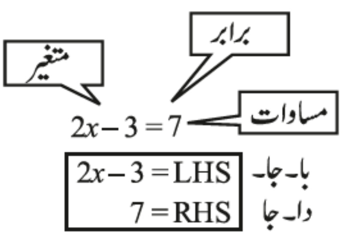
یہ خطی عبارتیں نہیں ہیں:

$x^2+1,\ y+y^2,\ 1+z+z^2+z^3$ (کیوں کہ متغیر کی سب سے بڑی قوت 1 سے زیادہ ہے یعنی >1)

یہاں ہم صرف ایک متغیر والی خطی مساواتوں پر ہی غور کریں گے۔ ایسی مساوات **ایک متغیر والی خطی مساوات** کہلاتی ہیں۔ ایسی تمام مساواتیں جو آپ پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں وہ سب اسی قسم کی تھیں۔

آیئے اب ہم مختصراً سابقہ معلومات کو دوہراتے ہیں:

(a) ایک الجبری مساوات ، متغیروں پر مشتمل ایک برابری ہے۔ اس میں ایک برابر کا نشان ہوتا ہے۔ برابر کے نشان کے بائیں طرف جو عبارت ہوتی ہے اسے (*Left Hand Side*) LHS کہتے ہیں اور عبارت جو برابر کے نشان کے دائیں طرف ہوتی ہیں، انہیں RHS (*Right Hand Side*) کہتے ہیں۔



(b) ایک مساوات میں بائیں جانب کی عبارت اور دائیں جانب کی عبارت کی قدریں برابر ہوتی ہیں یہ متغیر صرف کچھ قدروں کے لیے ہی صحیح ہوگا۔ ان قدروں کو مساوات کا حل کہتے ہیں۔

$x = 5$ مساوات $2x - 3 = 7$ کا حل ہے۔
$x = 5$ کے لیے،
$\text{LHS} = 2 \times 5 - 3 = 7 = \text{RHS}$
دوسری طرف $x = 10$ مساوات کا حل نہیں ہے۔
کیوں کہ $x = 10$ کے لیے $\text{LHS} = 2 \times 10 - 3 = 17$ ہے۔ یہ RHS کے برابر نہیں ہے

(c) کسی مساوات کا حل کیسے معلوم کیا جاتا ہے؟

فرض کیجیے کہ مساوات دونوں جانب سے متوازن ہیں۔ ہم مساوات کے دونوں طرف ریاضی کا ایک ہی عمل دوہراتے ہیں تا کہ مساوات کا توازن نہ بگڑے۔ ایسے ہی کچھ اقدام کے بعد مساوات کا حل حاصل ہوجاتا ہے۔

2.2 ایسی مساواتوں کا حل جن میں برابر کے نشان کے ایک طرف عبارت اور دوسری طرف کوئی عدد آئے

آیئے کچھ مثالوں کے ذریعہ مساواتوں کو حل کرنے کی تکنیک کو دوہراتے ہیں۔ ان کے حل پر غور کیجیے؛ یہ کوئی بھی ناطق عدد ہوسکتا ہے۔

مثال 1 : $2x - 3 = 7$ کا حل معلوم کیجیے

حل :

قدم 1 دونوں طرف 3 جمع کیجیے

$$2x - 3 + 3 = 7 + 3$$ (توازن نہیں بگڑتا)

یا
$$2x = 10$$

قدم 2 اب دونوں طرف 2 سے تقسیم کیجیے

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$

یا
$$x = 5$$ (مطلوبہ حل ہے)

مثال 2 : $2y + 9 = 4$ کو حل کیجیے

حل : 9 کو دائیں طرف (RHS) لے جانے پر

$$2y = 4 - 9$$

یا
$$2y = -5$$

دونوں طرف 2 سے تقسیم کرنے پر،
$$y = \frac{-5}{2}$$ (حل)

جواب کی جانچ : $\text{LHS} = 2\left(\frac{-5}{2}\right) + 9 = -5 + 9 = 4 = \text{RHS}$ (مطلوب ہے)

کیا آپ کو یاد ہے کہ حل $\left(\frac{-5}{2}\right)$ ایک ناطق عدد ہے؟ ساتویں جماعت میں ہم نے جو مساواتیں حل کیں ہیں ان میں ایسے حل نہیں تھے۔

مثال 3 : $\frac{x}{3}+\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$ کو حل کیجیے

حل : $\frac{5}{2}$ کو RHS لے جانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{x}{3}=\frac{-3}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{8}{2}$

یا $\frac{x}{3}=-4$

دونوں طرف 3 سے ضرب کرنے پر، $x=-4\times 3$

یا $x=-12$ (حل)

جانچ : $\text{LHS}=-\frac{12}{3}+\frac{5}{2}=-4+\frac{5}{2}=\frac{-8+5}{2}=\frac{-3}{2}=\text{RHS}$ (مطلوب ہے)

کیا آپ نے غور کیا کہ یہ ضروری نہیں ہے کہ مساوات میں متغیر کا ضریب صحیح عدد ہی ہو؟

مثال 4 : $\frac{15}{4}-7x=9$ کا حل معلوم کیجیے

حل : ہمارے پاس ہے $\frac{15}{4}-7x=9$

یا $-7x=9-\frac{15}{4}$ ($\frac{15}{4}$ کو RHS لے جانے پر)

یا $-7x=\frac{21}{4}$

یا $x=\frac{21}{4\times(-7)}$ (دونوں طرف -7 سے تقسیم کرنے پر)

یا $x=-\frac{3\times 7}{4\times 7}$

یا $x=-\frac{3}{4}$ (حل)

جانچ : $\text{LHS}=\frac{15}{4}-7\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{15}{4}+\frac{21}{4}=\frac{36}{4}=9=\text{RHS}$ (مطلوب ہے)

مشق 2.1

مندرجہ ذیل مساواتوں کو حل کیجیے۔

.1 $x-2=7$ .2 $y+3=10$ .3 $6=z+2$

.4 $\frac{3}{7}+x=\frac{17}{7}$ .5 $6x=12$ .6 $\frac{t}{5}=10$

.7 $\frac{2x}{3}=18$ .8 $1.6=\frac{y}{1.5}$ .9 $7x-9=16$

.10 $14y-8=13$ .11 $17+6p=9$ .12 $\frac{x}{3}+1=\frac{7}{15}$

2.3 کچھ استعمال

ہم ایک آسان مثال سے بات شروع کرتے ہیں۔

دو اعداد کا حاصل جمع 74 ہے۔ ان میں ایک عدد دوسرے سے 10 زیادہ ہے۔ وہ اعداد کیا ہیں؟

یہ ایک پہیلی ہے — ہم دونوں میں سے کسی بھی عدد کے بارے میں نہیں جانتے اور ہمیں دونوں عدد معلوم کرنے ہیں۔ ہمیں دو شرطیں دی گئی ہیں۔

(i) ایک عدد دوسرے سے 10 زیادہ ہے۔

(ii) ان کا حاصل جمع 74 ہے۔

ہم ساتویں جماعت میں پڑھ چکے ہیں کہ ایسی صورت میں کیسے آگے بڑھا جاتا ہے۔ اگر ہم چھوٹے عدد کو x مانتے ہیں تو بڑا عدد اس سے 10 زیادہ ہوگا یعنی وہ $x + 10$ ہوگا۔ دوسری شرط کے مطابق دونوں اعداد یعنی x اور $x + 10$ کا حاصل جمع 74 ہے۔

یعنی $x+(x+10)=74$

یا $2x+10=74$

10 کو RHS لے جانے پر $2x=74-10$

یا $2x=64$

دونوں طرف 2 سے تقسیم کرنے پر $x=32$ یہ ایک عدد ہے۔

دوسرا عدد ہے $x+10=32+10=42$

اس لیے مطلوبہ اعداد 32 اور 42 ہیں (ان کا حاصل جمع 74 ہے اور ایک عدد دوسرے سے 10 بڑا بھی ہے۔)

یہ طریقہ کتنا مفید ہے یہ دکھانے کے لیے آیئے ہم کچھ اور مثالوں پر غور کریں۔

مثال 5 : عدد $\frac{-7}{3}$ کے دُگنے میں کیا جمع کیا جائے کہ $\frac{3}{7}$ حاصل ہو؟

حل : ناطق عدد $\frac{-7}{3}$ کا دوگنا $\frac{-14}{3} = 2 \times \left(\frac{-7}{3}\right)$ ہے۔ مان لیجیے عدد x کو اس میں جمع کرنے پر $\frac{3}{7}$ حاصل ہوتا ہے یعنی

$$x + \left(\frac{-14}{3}\right) = \frac{3}{7}$$

یا

$$x - \frac{14}{3} = \frac{3}{7}$$

یا

$$x = \frac{3}{7} + \frac{14}{3} \qquad \text{(}\frac{14}{3}\text{ کو RHS لے جانے پر)}$$

$$= \frac{(3 \times 3) + (14 \times 7)}{21} = \frac{9 + 98}{21} = \frac{107}{21}$$

اس لیے $\frac{3}{7}$ حاصل کرنے کے لیے $2 \times \left(\frac{-7}{3}\right)$ میں $\frac{107}{21}$ جمع کرنا پڑے گا۔

مثال 6 : ایک مستطیل کا احاطہ 13 سینٹی میٹر ہے اور اس کی چوڑائی $2\frac{3}{4}$ سینٹی میٹر ہے۔ اس کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : مان لیجیے مستطیل کی لمبائی x سینٹی میٹر ہے۔

مستطیل کا احاطہ = 2 × (لمبائی + چوڑائی)

$$= 2 \times \left(x + 2\frac{3}{4}\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{11}{4}\right)$$

احاطہ 13 سینٹی میٹر دیا ہوا ہے۔ اس لیے

$$2\left(x + \frac{11}{4}\right) = 13$$

یا

$$x + \frac{11}{4} = \frac{13}{2} \qquad \text{(دونوں طرف 2 سے تقسیم کرنے پر)}$$

یا

$$x = \frac{13}{2} - \frac{11}{4}$$

یا

$$= \frac{26}{4} - \frac{11}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

اس لیے مستطیل کی لمبائی $3\frac{3}{4}$ سینٹی میٹر ہے۔

مثال 7 : ساحل کی ماں کی موجودہ عمر ساحل کی موجودہ عمر کی تین گنا ہے۔ پانچ سال بعد ان کی عمروں کا حاصل جمع 66 سال ہوگا۔ ان کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

حل : مان لیجیے ساحل کی موجودہ عمر x سال ہے۔

ہم ساحل کی پانچ سال بعد کی عمر کو بھی x مان کر آگے بڑھ سکتے ہیں۔ کیوں نہ آپ اسی طرح آگے بڑھنے کی کوشش کیجیے؟

	ساحل	ماں	حاصل جمع
موجودہ عمر	x	$3x$	
5 سال بعد کی عمر	$x+5$	$3x+5$	$4x+10$

یہ دیا گیا ہے کہ حاصل جمع 66 سال ہے۔

اس لیے $4x + 10 = 66$

اس مساوات سے ساحل کی موجودہ عمر x سال معلوم ہوتی ہے۔

مساوات کو حل کرنے کے لیے ہم 10 کو دائیں جانب (RHS) لے جاتے ہیں۔

$$4x = 66 - 10$$

یا $$4x = 56$$

یا $$x = \frac{56}{4} = 14 \quad (\text{حل})$$

اس طرح ساحل کی موجودہ عمر 14 سال اور اس کی ماں کی عمر 42 سال ہے (آپ آسانی سے اس کی جانچ کر سکتے ہیں کہ 5 سال بعد ان کی عمروں کا حاصل جمع 66 سال ہوگا)۔

مثال 8 : بنسی کے پاس جتنے 5 روپے کے سکّے ہیں اس کے تین گنا دو روپے کے سکّے ہیں۔ اگر اس کے پاس کل رقم 77 روپے ہے تو اس کے پاس ہر قسم کے کتنے سکے ہیں؟

حل : مان لیجیے بنسی کے پاس پانچ روپیوں کے x سکّے ہیں۔ تب اس کے پاس دو روپے والے سکّے x کے 3 گنا یعنی $3x$ ہیں۔

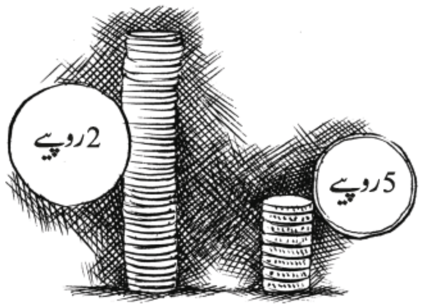
بنسی کے پاس کل رقم ہے:

(i) 5 روپیوں کے سکّوں سے ملی رقم $₹5 \times x = ₹5x$

(ii) دو روپیوں کے سکّوں سے ملی رقم $₹2 \times 3x = ₹6x$

اس طرح سے اس کے پاس کل رقم ہے $= 11x$ روپے

لیکن یہ رقم 77 روپے ہے، اس لیے



$$11x = 77$$

یا $$x = \frac{77}{11} = 7$$

اس طرح سے 5 روپیوں کے سکّوں کی تعداد ہے $= x = 7$

اور دو روپیوں کے سکّوں کی تعداد ہے $= 3x = 21$ (حل)

(آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ بنسی کے پاس کل ₹ 77 ہیں)

مثال 9 : 11 کے تین لگا تار اضعاف کا حاصل جمع 363 ہے۔ ان اضعاف کو معلوم کیجیے۔

حل : اگر 11 کا ایک ضعف x ہے تو اگلا ضعف $x + 11$ ہوگا اور اس سے اگلا $x + 11 + 11$ یا $x + 22$ ہوگا۔ اس طرح سے ہم x کے تین لگا تار اضعاف x, $x + 11$ اور $x + 22$ لے سکتے ہیں۔

دیا گیا ہے کہ ان لگا تار اضعاف کا حاصل جمع 363 ہے۔ اس سے ہمیں مندرجہ ذیل مساوات حاصل ہوتی ہیں:

$$x + (x + 11) + (x + 22) = 363$$

$$\therefore\ x + x + 11 + x + 22 = 363$$

$$\therefore\ 3x + 33 = 363$$

$$\therefore\ 3x = 363 - 33$$

$$\therefore\ 3x = 330$$

$$\therefore\ x = \frac{330}{3}$$

$$= 110$$

> متبادل طریقے سے ہم 11 کے اضعاف x سے پہلے بھی سوچ سکتے ہیں۔ یہ $(x-11)$ ہے۔ اس طرح سے ہم 11 کے تین لگا تار اضعاف یعنی $x-11, x, x+11$ بھی لے سکتے ہیں۔
>
> اس حالت میں ہماری مساوات $(x-11) + x + (x+11) = 363$ بنے گی
>
> یا $3x = 363$
>
> یا $x = \dfrac{363}{3} = 121$ اس طرح سے،
>
> $x = 121,\ x - 11 = 110,\ x + 11 = 132$
>
> لہٰذا تین لگا تار اضعاف 110، 121، 132 ہیں۔

اس طرح سے 11 کے تین لگا تار اضعاف 110، 121 اور 132 ہیں (جواب)۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی سوال کا حل معلوم کرنے کے لیے ہم مختلف طریقے استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 10 : دو مکمل اعداد کا فرق 66 ہے۔ اور ان دونوں اعداد کی نسبت $2 : 5$ ہے۔ دونوں اعداد معلوم کیجیے۔

حل : کیوں کہ دونوں اعداد کی نسبت $2:5$ ہے اس لیے ہم ایک عدد $2x$ اور دوسرا عدد $5x$ لے سکتے ہیں۔

(نوٹ $2x : 5x$ اور $2 : 5$ مساوی ہیں)۔

ان دونوں اعداد کا فرق $(5x - 2x)$ ہے۔ یہ فرق 66 دیا گیا ہے۔ اس لیے،

$$5x - 2x = 66$$

یا $3x = 66$

یا $x = 22$

کیوں کہ اعداد $2x$ اور $5x$ ہیں اس لیے یہ بالترتیب 22×2 یا 44 اور 22×5 یا 110 ان دونوں اعداد کا فرق ہے $110-44=66$ جو مطلوب ہے۔

مثال 11 : دیویشی کے پاس 50 روپے، 20 روپے اور 10 روپے کے نوٹ ہیں اس کے پاس کل رقم 590 روپے ہے۔ 50 روپے اور 20 روپے کے نوٹوں میں $3 : 5$ کی نسبت ہے۔ اگر اس کے پاس کل 25 نوٹ ہیں تو اس کے پاس ہر قسم کے کل کتنے نوٹ ہیں؟

حل : مان لیجیے 50 روپے اور 20 روپے کے نوٹ بالترتیب $3x$ اور $5x$ ہیں۔ لیکن اس کے پاس کل نوٹ 25 ہیں۔

اس لیے اس کے پاس 10 روپے کے نوٹوں کی تعداد $= 25-(3x+5x) = 25-8x$

اس کے پاس کل رقم

50 روپے کے نوٹ : $3x \times 50 =$ روپے $150x$

20 روپے کے نوٹ : $5x \times 20 =$ روپے $100x$

10 روپے کے نوٹ : $(25-8x) \times 10 =$ روپے $(250-80x)$

اس طرح سے اس کے پاس کل رقم $= 150x+100x+(250-80x) =$ روپے $(170x+250)$

لیکن اس کے پاس کل رقم 590 روپے ہے۔ اس لیے، $170x+250=590$

یا $170x = 590-250 = 340$

یا $x = \frac{340}{170} = 2$

50 روپے کے نوٹوں کی کل تعداد $= 3x$

$= 3 \times 2 = 6$

20 روپے کے نوٹوں کی کل تعداد ہے $5x = 5 \times 2 = 10$

10 روپے والے نوٹوں کی کل تعداد ہے $= 25-8x$

$= 25-(8\times 2) = 25-16 = 9$

مشق 2.2

1. اگر آپ کسی عدد میں سے $\frac{1}{2}$ گھٹائیں اور نتیجہ کو $\frac{1}{2}$ سے ضرب کریں تو $\frac{1}{8}$ حاصل ہوتا ہے۔ وہ عدد کیا ہے؟

2. ایک مستطیل نما سوئمنگ پول کا احاطہ 154 میٹر ہے۔ اس کی لمبائی اس کی چوڑائی کے دوگنے سے 2 میٹر زیادہ ہے۔ پول کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے؟

3. ایک مساوی الساقین مثلث کا قاعدہ $\frac{4}{3}$ سینٹی میٹر ہے۔ مثلث کا احاطہ $4\frac{2}{15}$ سینٹی میٹر ہے۔ باقی دو مساوی ضلعوں کی لمبائی معلوم کیجیے؟

4. دو اعداد کا حاصل جمع 95 ہے۔ اگر ایک عدد دوسرے سے 15 زیادہ ہے تو اعداد معلوم کیجیے؟

5. دو اعداد میں 5 : 3 کی نسبت ہے۔ اگر ان میں 18 کا فرق ہے تو اعداد معلوم کیجیے؟

6. تین لگاتار صحیح اعداد کو جمع کرنے پر 51 حاصل ہوتا ہے۔ صحیح اعداد معلوم کیجیے؟

7. 8 کے تین لگاتار اضعاف کا حاصل جمع 888 ہے۔ اضعاف معلوم کیجیے؟

8. تین لگاتار صحیح اعداد اس طرح سے لیے گئے ہیں کہ اگر ان کو بڑھتی ہوئی ترتیب میں بالترتیب 2 ، 3 اور 4 سے ضرب کر کے جمع کریں تو حاصل جمع 74 ہوتا ہے۔ ان اعداد کو معلوم کیجیے؟

9. راہل اور ہارون کی عمر کی نسبت 5:7 ہے۔ چار سال بعد ان کی عمر کا حاصل جمع 56 سال ہوگا۔ ان کی موجودہ عمر معلوم کیجیے؟

10. ایک کلاس میں لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد میں 7 : 5 کی نسبت ہے۔ لڑکوں کی تعداد لڑکیوں کی تعداد سے 8 زیادہ ہے۔ کلاس میں طلبا کی کل تعداد معلوم کیجیے؟

11. بھرت کے والد اس کے دادا سے 26 سال چھوٹے اور بھرت سے 29 سال بڑے ہیں۔ تینوں کی عمر کا حاصل جمع 135 سال ہے۔ ہر ایک کی موجودہ عمر معلوم کیجیے؟

12. 15 سال بعد روی کی عمر اس کی موجودہ عمر کی چار گنا ہوگی۔ روی کی موجودہ عمر کیا ہے؟

13. ایک ناطق عدد ایسا ہے اگر ہم اسے $\frac{5}{2}$ سے ضرب کریں اور حاصل ضرب میں $\frac{2}{3}$ جمع کریں تو $-\frac{7}{12}$ حاصل ہوتا ہے۔ وہ عدد کون سا ہے؟

14. لکشمی ایک بینک میں خزانچی ہے۔ اس کے پاس 100 ₹، 50 ₹ اور 10 ₹ والے کرنسی نوٹ ہیں۔ ان نوٹوں کی تعداد میں 2 : 3 : 5 کی نسبت ہے لکشمی کے پاس کل 4,00,000 ₹ ہیں۔ اس کے پاس ہر قسم کے کتنے نوٹ ہیں؟

15. میرے پاس 1 ₹، 2 ₹ اور 5 ₹ والے سکوں کی شکل میں کل 300 ₹ ہیں۔ 2 ₹ والے سکّوں کی تعداد 5 ₹ والے سکّوں کی تعداد کی 3 گنا ہے۔ اگر کل 160 سکّے ہوں تو ہر قسم کے کل کتنے سکّے ہیں؟

16. مضمون نگاری کے ایک انعامی مقابلہ میں منتظمین نے یہ طے کیا کہ مقابلہ جیتنے والے کو 100 ₹ اور ہارنے والے شرکا کو 25 ₹ کا انعام ملے گا۔ تقسیم کیے گئے انعام کی کل رقم 3000 ₹ ہے۔ جیتنے والوں کی کل تعداد معلوم کیجیے اگر مقابلہ میں حصہ لینے والوں کی کل تعداد 63 ہے۔

2.4 ایسی مساواتوں کوحل کرنا جس میں متغیر دونوں طرف موجود ہوں

ایک مساوات دوعبارتوں کی قدروں کی برابری کا نام ہے۔ جیسے مساوات $2x - 3 = 7$ میں دوعبارتیں $2x - 3$ اور 7 ہیں۔ اب تک ہم نے جتنی بھی مثالیں دیکھیں ان میں RHS ایک عدد ہی ہے، لیکن ہمیشہ ایسا نہیں ہوتا۔ دونوں طرف متغیر والی عبارتیں ہوسکتی ہیں۔ مثال کے طور پر $2x - 3 = x + 2$ کے دونوں طرف متغیر والی عبارتیں ہیں۔ بائیں طرف عبارت $(2x - 3)$ اور دائیں طرف $(x + 2)$ عبارت ہے۔

- اب ہم اس طرح کی مساواتوں کا ذکر کریں گے جس میں برابر کے دونوں طرف متغیر والی عبارتیں ہوں۔

مثال 12 : $2x - 3 = x + 2$ کوحل کیجیے

حل : ہمارے پاس ہے

$$2x = x + 2 + 3$$

یا $$2x = x + 5$$

یا $$2x - x = x + 5 - x \quad \text{(دونوں طرف } x \text{ گھٹانے پر)}$$

یا $$x = 5 \quad \text{(حل)}$$

یہاں ہم نے مساوات کے دونوں طرف جو عبارت گھٹائی ہے وہ عدد (مستقل نہیں) بلکہ ایک متغیر ہے۔ ہم ایسا کر سکتے ہیں کیوں کہ متغیر بھی اعداد ہوتے ہیں۔ نوٹ کیجیے کہ x دونوں طرف گھٹانے کا مطلب ہے x کو LHS میں لے جانا۔

مثال 13 : $5x + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}x - 14$ کوحل کیجیے

حل : مساوات کے دونوں طرف 2 سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2 \times \left(5x + \frac{7}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}x - 14\right)$$

$$(2 \times 5x) + \left(2 \times \frac{7}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2}x\right) - (2 \times 14)$$

$$10x + 7 = 3x - 28$$

$$10x - 3x + 7 = -28 \quad \text{(} 3x \text{ کو بائیں طرف لے جانے پر)}$$

$$7x + 7 = -28$$

$$7x = -28 - 7$$

$$7x = -35$$

$$x = \frac{-35}{7} \quad \text{یا} \quad x = -5 \quad \text{(حل)}$$

مشق 2.3

مندرجہ ذیل مساوات کو حل کیجیے اور نتائج کی جانچ کیجیے۔

.1 $3x = 2x + 18$ .2 $5t - 3 = 3t - 5$ 3. $5x + 9 = 5 + 3x$

.4 $4z + 3 = 6 + 2z$ .5 $2x - 1 = 14 - x$ 6. $8x + 4 = 3(x - 1) + 7$

.7 $x = \frac{4}{5}(x + 10)$ .8 $\frac{2x}{3} + 1 = \frac{7x}{15} + 3$ 9. $2y + \frac{5}{3} = \frac{26}{3} - y$

.10 $3m = 5m - \frac{8}{5}$

2.5 کچھ اور مزید مثالیں

مثال 14 : ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں میں 3 کا فرق ہے۔ اگر ہندسوں کی جگہ تبدیل کر دی جائے اور حاصل عدد کو اصل عدد میں جمع کر دیا جائے تو 143 حاصل ہوتا ہے۔ بتائیے اصل عدد کیا ہوسکتا ہے؟

حل : مثال کے طور پر ایک دو ہندسی عدد 56 لیجیے۔ اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں $56 = (10 \times 5) + 6$

اگر عدد 56 کے ہندسوں کی جگہ تبدیل کر دی جائے تو ہمیں 65 حاصل ہوگا۔ جس کو ہم $(10 \times 6) + 5$ لکھ سکتے ہیں۔

آیئے ایک ایسا دو ہندسی عدد لیتے ہیں جس کا اکائی کا ہندسہ b ہے۔ دہائی کے ہندسہ اور b میں 3 کا فرق ہے۔ اس لیے اسے $b + 3$ لکھتے ہیں۔ اس لیے دو ہندسی عدد $10(b + 3) + b = 10b + 30 + b = 11b + 30$ ہے۔

ہندسوں کی جگہ تبدیل کرنے کے بعد ملنے والا عدد ہوگا

$$10b + (b + 3) = 11b + 3$$

کیا ہم دہائی کے ہندسہ کو $(b - 3)$ لے سکتے ہیں؟ ایسا کیجیے اور دیکھیے کہ حل کیا ہوگا۔

اگر ہم ان دونوں اعداد کو جمع کریں تو ہمیں حاصل ہوگا

$$(11b + 30) + (11b + 3) = 11b + 11b + 30 + 3 = 22b + 33$$

لیکن ان کا حاصل جمع 143 دیا ہوا ہے۔ اس لیے $22b + 33 = 143$

یاد رکھیے کہ اس حل میں ہمیں دہائی کے ہندسہ کو اکائی کے ہندسہ سے 3 زیادہ لینا ہے۔ کیا ہوگا اگر ہم دہائی کا ہندسہ $(b - 3)$ لے لیں؟

$$\therefore 22b = 143 - 33$$

$$\therefore 22b = 110$$

$$\therefore b = \frac{110}{22}$$

$$\therefore b = 5$$

اس مثال کا بیان 58 اور 85 دونوں کے لیے درست ہے، اور دونوں ہی جوابات صحیح ہیں۔

اکائی کا ہندسہ 5 ہے تو دہائی کا ہندسہ $5 + 3$ یعنی 8 ہوگا اور عدد 85 ہوگا۔

جانچ : عدد کے ہندسے بدلنے سے ہمیں 58 حاصل ہوتا ہے اور 85 اور 58 کا حاصل جمع 143 دیا ہوا ہے۔

مثال 15 : ارجن کی عمر شریا کی عمر کی دُگنی ہے۔ پانچ سال پہلے اس کی عمر شریا کی عمر کی تین گنا تھی۔ ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

حل : آیئے شریا کی موجودہ عمر x سال مانتے ہیں۔

تب ارجن کی موجودہ عمر $2x$ سال ہوگی۔

5 سال پہلے شریا کی عمر $(x-5)$ سال تھی۔

5 سال پہلے ارجن کی عمر $(2x-5)$ تھی۔

یہ دیا ہوا ہے کہ 5 سال پہلے ارجن کی عمر شریا کی عمر کی تین گنا تھی۔

اس طرح سے

$$2x-5=3\ (x-5)$$

$$2x-5=3x-15$$

$$15-5=3x-2x$$

$$10=x$$

اس لیے، شریا کی موجودہ عمر x یعنی 10 سال ہے۔

ارجن کی موجودہ عمر $2x = 2\times 10 = 20$ یعنی 20 سال ہے۔

مشق 2.4

1. امینہ نے ایک عدد سوچا اور اس میں سے $\frac{5}{2}$ گھٹا دیا۔ اس نے نتیجے کو 8 سے ضرب کر دیا۔ اس طرح اُس کا حاصل عدد سوچے گئے عدد کا تین گنا ہے۔ عدد معلوم کیجیے۔
2. ایک مثبت عدد دوسرے عدد کا 5 گنا ہے۔ اگر دونوں اعداد میں 21 جمع کر دیا جائے، تو نئے اعداد میں ایک عدد دوسرے نئے عدد کا دوگنا ہو جائے گا۔ وہ اعداد معلوم کیجیے۔
3. ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں کا حاصل جمع 9 ہے۔ ہندسوں کی جگہ تبدیل کرنے پر ملنے والا عدد حاصل عدد سے 27 زیادہ ہے۔ بتایئے دو ہندسی عدد کون سا ہے؟
4. ایک دو ہندسی عدد کا ایک ہندسہ دوسرے ہندسہ کا تین گنا ہے اگر آپ ہندسوں کی جگہ تبدیل کر دیں اور اس طرح سے ملنے والے نئے عدد کو اصل عدد میں جمع کریں تو حاصل جمع 88 ہو جاتا ہے۔ اصل عدد معلوم کیجیے۔
5. سروج کی ماں کی موجودہ عمر شوبو کی موجودہ عمر کی 6 گنا ہے۔ پانچ سال بعد سروج کی عمر اس کی ماں کی عمر کی $\frac{1}{3}$ ہو جائے گی۔ ان کی موجودہ عمر بتایئے۔
6. مہولی گاؤں میں ایک مستطیل نما پلاٹ ایک اسکول کے لیے محفوظ ہے۔ اُس پلاٹ کی لمبائی اور چوڑائی میں 4 : 11 کی نسبت ہے۔ ₹100 فی مربع میٹر کی شرح سے اس پلاٹ کے چاروں طرف باڑھ لگانے کے لیے گاؤں کی پنچایت کو 75000 روپے خرچ کرنا پڑیں گے۔ پلاٹ کی ناپ لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

7. حسن نے اسکول کی یونیفارم کے لیے دو قسم کے کپڑے خریدے۔ اسے قمیص کا کپڑا 50 ₹ فی میٹر اور پینٹ کا کپڑا 90 ₹ فی میٹر کی قیمت میں ملا۔ اس نے قمیص کے ہر 3 میٹر کپڑے کے لیے 2 میٹر پینٹ کا کپڑا خریدا۔ اس نے اس کپڑے کو بالترتیب 12% اور 10% منافع پر فروخت کر دیا۔ اُس نے کل کپڑا 36,600 ₹ میں فروخت کیا۔ بتایئے اس نے پینٹ کے لیے کتنا کپڑا خریدا تھا؟

8. ہرنوں کے ایک جھنڈ کے آدھے ہرن میدان میں گھاس چر رہے ہیں اور باقی تین چوتھائی ہرن پاس میں ہی کھیل رہے ہیں باقی 9 ہرن تالاب میں پانی پی رہے ہیں۔ جھنڈ میں موجود ہرنوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

9. ایک دادا اپنی پوتی سے عمر میں 10 گنا بڑا ہے۔ ان کی عمر میں 54 سال کا فرق ہے۔ دونوں کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

10. امن کی عمر اس کے بیٹے کی عمر کا تین گنا ہے۔ 10 سال پہلے اس کی عمر اس کے بیٹے کی عمر کا پانچ گنا تھی۔ ان کی موجودہ عمر معلوم کیجیے؟

2.6 مساوات کو آسان شکل میں تبدیل کرنا

مثال 16 : $\frac{6x+1}{3}+1=\frac{x-3}{6}$ کو حل کیجیے

حل : مساوات کے دونوں طرف 6 سے ضرب کرنے پر

$$\frac{6\,(6x+1)}{3}+6\times 1=\frac{6(x-3)}{6}$$

6 سے ہی کیوں؟ کیوں کہ یہ دیے گئے نصب نماؤں کا LCM ہے۔

$$\therefore\ 2\,(6x+1)+6=x-3$$

$$\therefore\ 12x+2+6=x-3 \qquad \text{(بریکٹ کھولنے پر)}$$

$$\therefore\ 12x+8=x-3$$

$$\therefore\ 12x-x+8=-3$$

$$\therefore\ 11x+8=-3$$

$$\therefore\ 11x=-3-8$$

$$\therefore\ 11x=-11$$

$$\therefore\ x=-1 \qquad \text{(مطلوبہ حل)}$$

جانچ : $\text{LHS}=\frac{6(-1)+1}{3}+1=\frac{-6+1}{3}+1=\frac{-5}{3}+\frac{3}{3}=\frac{-5+3}{3}=\frac{-2}{3}$

$$\text{RHS} = \frac{(-1)-3}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$ (جو مطلوب ہے)

مثال 17 : $5x - 2\,(2x - 7) = 2\,(3x - 1) + \frac{7}{2}$ کو حل کیجیے

حل : آیئے پہلے بریکٹ کو کھولیں

$$\text{LHS} = 5x - 4x + 14 = x + 14$$

$$\text{RHS} = 6x - 2 + \frac{7}{2} = 6x - \frac{4}{2} + \frac{7}{2} = 6x + \frac{3}{2}$$

مساوات ہے $\therefore\ x + 14 = 6x + \frac{3}{2}$

$$\therefore\ 14 = 6x - x + \frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 14 = 5x + \frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 14 - \frac{3}{2} = 5x$$ ($\frac{3}{2}$ کو دوسری طرف لے جانے پر)

$$\therefore\ \frac{28-3}{2} = 5x$$

$$\therefore\ \frac{25}{2} = 5x$$

یا $\therefore\ x = \frac{25}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{2}$

کیا آپ نے غور کیا کہ دی ہوئی مساوات کو کس طرح مختصر کیا گیا ہے؟ یہاں ہمیں مساوات کے دونوں طرف ارکان کے نصب نماؤں کے LCM سے ضرب کرنا پڑا ہے۔

اس طرح سے مطلوبہ حل $x = \frac{5}{2}$ ہے۔

جانچ : $\text{LHS} = 5 \times \frac{5}{2} - 2\left(\frac{5}{2} \times 2 - 7\right)$

$$= \frac{25}{2} - 2(5-7) = \frac{25}{2} - 2(-2) = \frac{25}{2} + 4 = \frac{25+8}{2} = \frac{33}{2}$$

نوٹ کیجیے کہ اس مساوات کو ہم نے بریکٹ کھول کر اور یکساں ارکان کو دونوں طرف ایک ساتھ رکھ کر مختصر کیا ہے۔

$$\text{RHS} = 2\left(\frac{5}{2} \times 3 - 1\right) + \frac{7}{2} = 2\left(\frac{15}{2} - \frac{2}{2}\right) + \frac{7}{2} = \frac{2 \times 13}{2} + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{26+7}{2} = \frac{33}{2} = \text{LHS}$$ (جو مطلوب ہے)

مشق 2.5

مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کو حل کیجیے۔

.1 $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{4}$ **.2** $\dfrac{n}{2}-\dfrac{3n}{4}+\dfrac{5n}{6}=21$ **.3** $x+7-\dfrac{8x}{3}=\dfrac{17}{6}-\dfrac{5x}{2}$

.4 $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{x-3}{5}$ **.5** $\dfrac{3t-2}{4}-\dfrac{2t+3}{3}=\dfrac{2}{3}-t$ **.6** $m-\dfrac{m-1}{2}=1-\dfrac{m-2}{3}$

مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کو مختصر کیجیے اور حل کیجیے۔

.7 $3(t-3)=5(2t+1)$ **.8** $15(y-4)-2(y-9)+5(y+6)=0$

.9 $3(5z-7)-2(9z-11)=4(8z-13)-17$

.10 $0.25(4f-3)=0.05(10f-9)$

2.7 خطی شکل میں تحویل ہونے والی مساواتیں

مثال 18 : $\dfrac{x+1}{2x+3}=\dfrac{3}{8}$ کو حل کیجیے

حل : مشاہدہ کیجیے کہ دی ہوئی مساوات خطی نہیں ہے کیوں کہ LHS پر عبارت خطی نہیں ہے۔لیکن ہم اس کو خطی شکل میں تحویل کر سکتے ہیں۔ہم مساوات کے دونوں طرف $(2x+3)$ سے ضرب کرتے ہیں۔

$$\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)\times(2x+3)=\frac{3}{8}\times(2x+3)$$

نوٹ کیجیے

$2x+3\neq 0$ (کیوں؟)

غور کیجیے کہ $(2x+3)$ کو LHS سے خارج کر دیا جائے تب ہمارے پاس باقی بچے گا

$$x+1=\frac{3\,(2x+3)}{8}$$

اب ہمارے پاس ایک خطی مساوات ہے اور ہم جانتے ہیں کہ اس کو کس طرح حل کرنا ہے۔

دونوں طرف 8 سے ضرب کرنے پر

$$8\,(x+1)=3\,(2x+3)$$

یہ ہمیں 'ترچھی ضرب'

(Cross- multiplication) سے بھی

$\dfrac{x+1}{2x+3}\times\dfrac{3}{8}$ حاصل ہوسکتا ہے

$$\therefore\ 8x+8=6x+9$$

$$\therefore\ 8x=6x+9-8$$

$$\therefore\ 8x=6x+1$$

$$\therefore\ 8x-6x=1$$

$$\therefore\ 2x=1$$

یا $x = \frac{1}{2}$

حل $x = \frac{1}{2}$

جانچ : $\frac{3}{2} = \frac{1+2}{2} = 1 + \frac{1}{2} =$ LHS کا شمار کنندہ

$2x + 3 = 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 1 + 3 = 4 =$ LHS کا نسب نما

$\frac{3}{2} \div 4 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ = نسب نما ÷ شمار کنندہ = LHS

LHS = RHS

مثال 19 : انو اور راج کی موجودہ عمروں میں 4:5 کی نسبت ہے۔ 8 سال بعد دونوں کی عمروں میں 6 : 5 کی نسبت ہوگی۔ دونوں کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

حل : مان لیجیے انو اور راج کی موجودہ عمریں بالترتیب $4x$ اور $5x$ ہیں۔

8 سال بعد انو کی عمر = $(4x + 8)$ سال؛

8 سال بعد راج کی عمر = $(5x + 8)$ سال

اس طرح سے 8 سال بعد ان کی عمروں کی نسبت = $\frac{4x+8}{5x+8}$

اور یہ نسبت 6 : 5 دی ہوئی ہے

اس لیے $\frac{4x+8}{5x+8} = \frac{5}{6}$

ترچھی ضرب سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $6\ (4x + 8) = 5(5x + 8)$

$\therefore\ 24x + 48 = 25x + 40$

$\therefore\ 24x + 48 - 40 = 25x$

$\therefore\ 24x + 8 = 25x$

$\therefore\ 8 = 25x - 24x$

اس لیے $\therefore\ 8 = x$

انو کی موجودہ عمر $4x = 4 \times 8 = 32$ یعنی 32 سال

راج کی موجودہ عمر $5x = 5 \times 8 = 40$ یعنی 40 سال

مشق 2.6

مندرجہ ذیل مساوات کو حل کیجیے۔

1. $\frac{8x-3}{3x}=2$ 2. $\frac{9x}{7-6x}=15$ 3. $\frac{z}{z+15}=\frac{4}{9}$

4. $\frac{3y+4}{2-6y}=\frac{-2}{5}$ 5. $\frac{7y+4}{y+2}=\frac{-4}{3}$

6. ہری اور ہیری کی عمروں میں 7 : 5 کی نسبت ہے۔ چار سال بعد ان کی عمروں میں 4 : 3 کی نسبت ہو جائے گی۔ ان کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

7. ایک ناطق عدد کا نسب نما اس کے شمار کنندہ سے 8 زیادہ ہے۔ اگر شمار کنندہ میں 17 کا اضافہ کر دیا جائے اور نسب نما میں سے 1 کم کر دیا جائے تو عدد $\frac{3}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ ناطق عدد معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1. الجبری مساوات متغیروں پر مشتمل ایک برابری ہے۔ اس کے مطابق برابر کے نشان کے ایک طرف موجود عبارت کی قدر اس نشان کے دوسری طرف موجود عبارت کی قدر کے برابر ہوتی ہے۔
2. ہم چھٹی، ساتویں اور آٹھویں جماعت میں جو مساوات پڑھ چکے ہیں وہ ایک متغیر والی خطی مساوات ہیں۔ ایسی مساوات میں عبارتیں جو مساوات کی تشکیل کرتی ہیں ان میں صرف ایک متغیر ہوتا ہے۔ مزید مساوات خطی ہوتی ہیں یعنی مساوات میں ظاہر ہونے والے متغیر کی سب سے بڑی قوت 1 ہوتی ہے۔
3. ایک خطی مساوات کا حل کوئی بھی ناطق عدد ہو سکتا ہے۔
4. ایک مساوات کے دونوں طرف خطی عبارت ہو سکتی ہے، لیکن چھٹی اور ساتویں جماعت میں جو مساواتیں ہم پڑھ چکے ہیں ان میں برابر کے نشان کے ایک طرف صرف عدد ہوتا تھا۔
5. اعداد ہی کی طرح متغیروں کو بھی ایک طرف سے دوسری طرف لے جایا جا سکتا ہے۔
6. اکثر مساواتوں کو حل کرنے سے پہلے ان کو مختصر کیا جاتا ہے۔ کچھ مساوات جو شروعات میں خطی نہیں ہوتیں ان کو مناسب عبارتوں سے دونوں طرف ضرب کر کے خطی مساوات میں تحویل کیا جاتا ہے۔
7. خطی مساوات کی افادیت اس بات پر مبنی ہے کہ ان کا استعمال مختلف مواقع پر کریں جیسے اعداد، عمر، احاطے، کرنسی نوٹوں کا اختلاط وغیرہ سے متعلق سوالوں کا حل کرنا۔

نوٹ

باب
3

4817CH03

چار ضلعی کی تفہیم

3.1 تعارف

آپ جانتے ہیں کہ کاغذ ہموار سطح کے لیے ماڈل ہے۔ جب آپ پنسل کو کاغذ سے ہٹائے بغیر نقطوں کو آپس میں ملاتے ہیں (واحد نقطوں کو چھوڑ کر ڈرائنگ کے کسی بھی حصہ کو دوبارہ بنائے بغیر) تو آپ کو ایک **منحنی مستوی** حاصل ہوتی ہے۔

پچھلی جماعتوں میں آپ الگ الگ قسم کی منحنیوں کے بارے میں پڑھ چکے ہیں انھیں یاد کرنے کی کوشش کیجیے۔

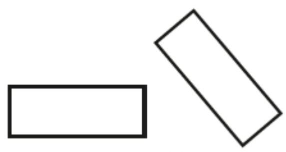
مندرجہ ذیل کو ملایئے: (احتیاط! ایک شکل کی ایک سے زیادہ قسمیں ہو سکتی ہیں۔)

شکل	قسم
(1)	(a) سادہ بند منحنی
(2)	(b) بند منحنی جو سادہ نہیں ہے
(3)	(c) سادہ منحنی جو بند نہیں ہے
(4)	(d) سادہ منحنی نہیں

اپنے میل (matchings) کا اپنے دوستوں کے میل سے موازنہ کیجیے۔ کیا وہ راضی ہیں؟

3.2 کثیر ضلعی (Polygons)

ایک بند سادہ منحنی جو صرف قطعات خط کی بنی ہوئی ہو **کثیر ضلعی (Polygons)** کہلاتی ہے۔



منحنیاں جو کثیر ضلعی ہیں

منحنیاں جو کثیر ضلعی نہیں ہیں

کثیرضلعی کی کچھ مثالیں اور غیر مثالیں دینے کی کوشش کیجیے۔

کثیرضلعی کی ایک رف شکل بنائیے اور اس کے اضلاع اور راسوں کی شناخت کیجیے۔

3.2.1 کثیرضلعی کی درجہ بندی

ہم کثیرضلعی کی درجہ بندی ان کے اضلاع کی تعداد (یا راسوں) کے مطابق کرتے ہیں۔

اضلاع یا راسوں کی تعداد	درجہ بندی	نمونہ شکل
3	مثلث (Triangle)	
4	چارضلعی (Quadrilateral)	
5	پانچ ضلعی (Pentagon)	
6	مسدس (چھ ضلعی) (Hexagon)	
7	ہفت (سات) ضلعی (Heptagon)	
8	ہشت (آٹھ) ضلعی (Octagon)	
9	نہم (نو) ضلعی (Nonagon)	
10	دہم (دس) ضلعی (Decagon)	
⋮	⋮	⋮
n	n ضلعی (n-gon)	

3.2.2 وتر

وتر (Diagonals) ایک ایسا قطع خط ہے جو کثیرضلعی کے دو متبادل راسوں کو ملاتا ہے (شکل 3.1)۔

شکل 3.1

کیا آپ درج بالا ہر ایک شکل کے وتروں کا نام بتا سکتے ہیں؟ (شکل 3.1)

کیا $\overline{PQ}$ ایک وتر ہے؟ $\overline{LN}$ کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟

آپ بند منحنی کے **اندرون** اور **بیرون** کے بارے میں پہلے پڑھ چکے ہیں (شکل 3.2)۔

اندرون　　　بیرون

شکل 3.2

اندرون کی ایک حد (boundary) ہوتی ہے۔ کیا بیرون کی کوئی حد ہوتی ہے؟ اپنے دوستوں کے ساتھ بحث کیجیے۔

3.2.3 محدب اور مقعر کثیر ضلعی (Convex and Concave Polygons)

یہاں کچھ محدب (Convex) کثیر ضلعی اور کچھ مقعر کثیر ضلعی (Concave Polygons) دیے گئے ہیں۔ (شکل 3.3)

محدب کثیر ضلعی　　　مقعر کثیر ضلعی

شکل 3.3

کیا آپ معلوم کر سکتے ہیں کہ اس قسم کے کثیر ضلعی ایک دوسرے سے کس طرح مختلف ہیں؟ کثیر ضلعی جو محدب ہیں ان کے وتروں کا کوئی بھی حصہ ان کے بیرون میں نہیں ہے اور کوئی بھی قطع خط جو دو نقاط کو ملا رہا ہے کثیر ضلعی کے اندر مکمل طور پر موجود ہوگا۔ کیا یہی بات مقعر کثیر ضلعی کے لیے بھی کہی جا سکتی ہے؟ دی ہوئی شکلوں کا مطالعہ کیجیے اور بتائیے کہ محدب اور مقعر کثیر ضلعی سے کیا مراد ہے۔ ہر ایک قسم کے دو ورف خاکے بنائیے۔ اس جماعت میں ہم محدب کثیر ضلعی کے بارے میں ہی مطالعہ کریں گے۔

3.2.4 منظّم اور غیر منظّم کثیر ضلعی (Regular and irregular Polygons)

ایک منظّم کثیر ضلعی مساوی ضلعی اور 'مساوی زاویائی' دونوں ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر مربع کے اضلاع اور اس کے زاویہ مساوی ہوتے ہیں یعنی ان کے اضلاع کی لمبائی آپس میں برابر ہوتی ہیں۔ زاویوں کی پیمائش بھی برابر ہوتی ہے۔ اس لیے یہ ایک منظّم کثیر ضلعی

(Regular Polygon) ہے۔ ایک مستطیل مساوی زاویائی ہوتا ہے لیکن مساوی ضلعی نہیں ہوتا۔ کیا مستطیل ایک منظّم کثیر ضلعی ہے؟
کیا ایک مساوی ضلعی مثلث ایک منظّم کثیر ضلعی ہے؟ کیوں؟

کثیر ضلعی جو منظّم نہیں ہیں　　　　　منظّم کثیر ضلعی

[نوٹ:　　　یا　　　کا استعمال مساوی لمبائی والے قطعات کو ظاہر کرتا ہے]

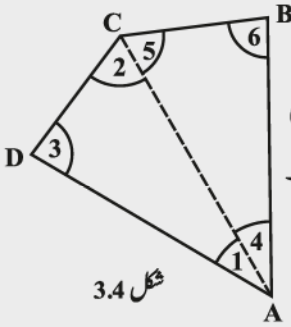
پچھلی جماعتوں میں آپ نے کسی ایسے چار ضلعی کو دیکھا ہے جو مساوی ضلعی تو ہے لیکن مساوی زاویائی نہیں؟ یاد کیجیے کہ آپ نے پچھلی جماعتوں میں ایسے کئی قسم کے چار ضلعی دیکھے ہیں جیسے مستطیل، معین اور مربع وغیرہ۔

کیا ایسا کوئی مثلث ہے جو مساوی ضلعی تو ہے لیکن مساوی زاویائی نہیں؟

3.2.5 زاویوں کی جمعی خصوصیات (Angle Sum Property)

کیا آپ کو ایک مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت یاد ہے؟ مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائش کا حاصل جمع 180° ہوتا ہے۔ ذرا اُس طریقے کو دوہرائیے جس کی مدد سے ہم اس حقیقت کو ثابت کرتے ہیں۔ اب ہم اس تصور کی توسیع چار ضلعی کے لیے کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

اسے کیجیے

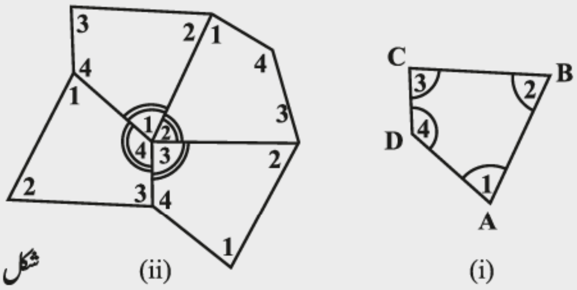


شکل 3.4

1. کوئی ایک چار ضلعی لیجیے، جیسے ABCD (شکل 3.4)۔ اس کو وتر بنا کر دو مثلثوں میں تقسیم کیجیے۔ اس طرح آپ کو چھ زاویے 1, 2, 3, 4, 5 اور 6 حاصل ہوتے ہیں۔ مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت کا استعمال کر کے بحث کیجیے کہ کس طرح سے $\angle A, \angle B, \angle C$ اور $\angle D$ کا حاصل جمع $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ کے برابر ہے۔

2. کسی چار ضلعی ABCD کے چار مماثل گتّے کی کاپیاں لیجیے جس میں اس طرح کے زاویے ہوں جیسے کہ [شکل 3.5 (i) میں] دکھائے گئے ہیں۔ ان کاپیوں کو شکل میں دکھائے گئے طریقے سے ترتیب دیجیے۔ جہاں زاویہ $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$ ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں [شکل 3.5 (ii)]۔

ایسا کرنے کے لیے آپ کو زاویوں کے ضلعوں کو باقاعدہ طور پر کھینچنا پڑے گا۔



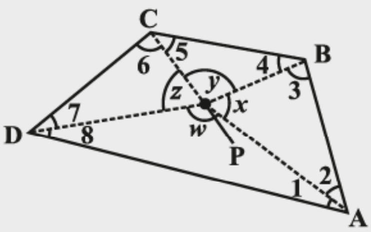
شکل 3.5

آپ $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$ اور $\angle 4$ کے مجموعے کے بارے میں کیا کہیں گے؟

[نوٹ : ہم زاویوں کو $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$ وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں اور ان کی پیمائش کو $m\angle 1$، $m\angle 2$، $m\angle 3$ وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں]

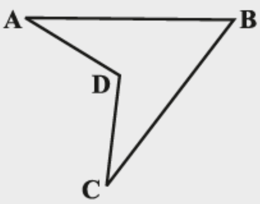
ایک چار ضلعی کے چاروں زاویوں کی پیمائش کا حاصل جمع __________ ہوتا ہے۔

آپ اس نتیجہ پر اور بہت سے طریقوں سے بھی پہنچ سکتے ہیں۔



شکل 3.6

3. چار ضلعی ABCD کے بارے میں دوبارہ غور کیجیے (شکل 3.6)۔ مان لیجیے اس کے اندرون میں ایک نقطہ P ہے۔ P کو A، B، C اور D راسوں سے ملائیے۔ شکل میں، زاویہ ΔPAB پر غور کیجیے۔ اس میں ہم دیکھتے ہیں کہ $x = 180° - m\angle 2 - m\angle 3$؛ اسی طرح ΔPBC سے، $y = 180° - m\angle 4 - m\angle 5$، ΔPCD سے $z = 180° - m\angle 6 - m\angle 7$ اور ΔPDA سے $w = 180° - m\angle 8 - m\angle 1$ ہے اس کا استعمال کر کے کل پیمائش $m\angle 1 + m\angle 2 + \ldots m\angle 8$ معلوم کیجیے، کیا یہ آپ کو نتیجہ تک پہنچنے میں مدد کرتا ہے؟ یاد رکھیے $\angle x + \angle y + \angle z + \angle w = 360°$ ہے۔



شکل 3.7

4. یہ سبھی چار ضلعی محدب تھے۔ اگر چار ضلعی محدب نہیں ہوتے تو کیا ہوتا؟ چار ضلعی ABCD پر غور کیجیے۔ اسے دو مثلثوں میں تقسیم کیجیے اور ان کے اندرونی زاویوں کا حاصل جمع معلوم کیجیے (شکل 3.7)۔

مشق 3.1

1. یہاں کچھ شکلیں دی گئی ہیں۔

(1) (2) (3) (4)

(5) (6) (7) (8)

مندرجہ ذیل کی بنیاد پر ان میں سے ہر ایک کی درجہ بندی کیجیے۔

(a) سادہ منحنی (b) سادہ بند منحنی (c) کثیر ضلعی

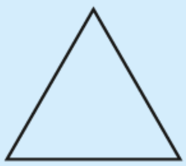
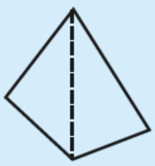
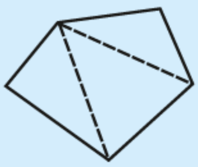
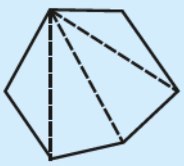
(d) محدب کثیر ضلعی (e) مقعر کثیر ضلعی

2. مندرجہ ذیل میں کتنے وتر ہیں؟

(a) محدب چار ضلعی (b) منظم مسدس (چھ ضلعی) (c) مثلث

3. محدب کثیر ضلعی کے زاویوں کی پیمائشوں کا حاصل جمع کیا ہے؟ اگر چار ضلعی محدب نہ ہو تو کیا یہ خصوصیت لاگو ہوگی؟
(ایک غیر محدب چار ضلعی بنائیے اور کوشش کیجیے!)

4. جدول کی جانچ کیجیے (ہر ایک شکل مثلثوں میں بٹی ہوئی ہے۔ اور اس سے زاویوں کا حاصل جمع معلوم کیجیے۔)

شکل				
ضلع	3	4	5	6
زاویوں کا حاصل جمع	180°	$2 \times 180^\circ = (4-2) \times 180^\circ$	$3 \times 180^\circ = (5-2) \times 180^\circ$	$4 \times 180^\circ = (6-2) \times 180^\circ$

کثیر ضلعی کے زاویوں کی حاصل جمع کے بارے میں آپ کیا کہیں گے اگر اس کے اضلاع کی تعداد مندرجہ ذیل ہے؟

(a) 7 (b) 8 (c) 10 (d) n

5. ایک منظم کثیر ضلعی کیا ہے؟

منظم کثیر ضلعی کا نام بتائیے جس میں

(i) 3 اضلاع ہوں (ii) 4 اضلاع ہوں (iii) 6 اضلاع ہوں

6. مندرجہ ذیل شکلوں میں x کی قدر (زاویوں کا ناپ) معلوم کیجیے۔

(b)

(a)

x

x x

x x

(d)

(c)

7.

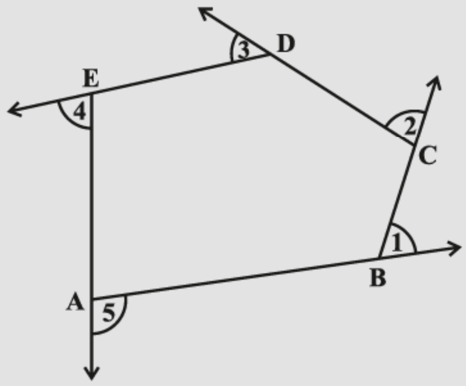
(a) $x+y+z$ معلوم کیجیے

(b) $x+y+z+w$ معلوم کیجیے

3.3 ایک کثیر ضلعی کے خارجی زاویوں کی پیمائشوں کا حاصل جمع (Sun of the Measures of the Exterior Angles of a Polygon)

بہت سی حالتوں میں خارجی زاویوں کی معلومات داخلی زاویوں اور اضلاع کی قسم پر روشنی ڈالتی ہے۔

اسے کیجیے



شکل 3.8

فرش پر چاک سے ایک کثیر ضلعی بنایئے (شکل میں ایک پانچ ضلعی ABCDE دکھایا گیا ہے) (شکل 3.8)۔

ہم زاویوں کی کل پیمائش معلوم کرنا چاہتے ہیں یعنی

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5$ کا حاصل جمع۔

A سے شروع کیجیے۔ $\overline{AB}$ کے برابر چلیے۔ B پر پہنچنے کے بعد آپ کو زاویہ $m\angle 1$ پر گھومنے کی ضرورت ہے جس سے آپ $\overline{BC}$ کے برابر چل سکیں۔ C پر پہنچنے کے بعد $\overline{CD}$ کے برابر چلنے کے لیے آپ کو زاویہ $m\angle 2$ پر گھومنے کی ضرورت ہے۔

آپ اسی طرح چلنا جاری رکھیں جب تک آپ AB پر نہیں پہنچ جاتے۔ اس طرح آپ نے ایک پورا چکر گھوم لیا ہے۔

اس لیے $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360°$ ہے۔ ایک کثیر ضلعی کے کتنے بھی اضلاع ہوں ان سب کے لیے یہ صحیح ہے۔

اس لیے کسی بھی کثیر ضلعی کے خارجی زاویوں کا حاصل جمع °360 ہوتا ہے۔

مثال 1 : شکل 3.9 میں x کی پیمائش معلوم کیجیے۔

حل : $x + 90° + 50° + 110° = 360°$ (کیوں؟)

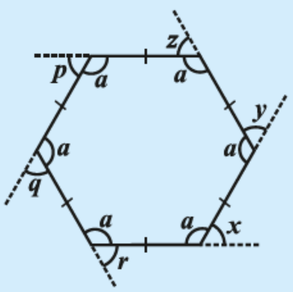
$x + 250° = 360°$

$x = 110°$

شکل 3.9

کوشش کیجیے

ایک منظّم چھ ضلعی مسدس شکل 3.10 کو لیجیے



شکل 3.10

1. اس کے خارجی زاویوں $x, y, z, p, q, r,$ کی پیمائشوں کا حاصل جمع کیا ہے؟
2. کیا $x = y = z = p = q = r$? ہے، کیوں؟
3. ہر ایک کی پیمائش کیا ہے؟
   (i) خارجی زاویہ (ii) داخلی زاویہ
4. اس عمل کو مندرجہ ذیل معاملوں میں دوہرایئے
   (i) ایک منظّم 8 ضلعی (ii) ایک منظّم 20 ضلعی

مثال 2 : ایک کثیر ضلعی کے اضلاع کی تعداد معلوم کیجیے جس کے ہر ایک خارجی زاویہ کی پیمائش 45° ہے۔

حل : تمام خارجی زاویوں کی کل پیمائش $= 360^\circ$

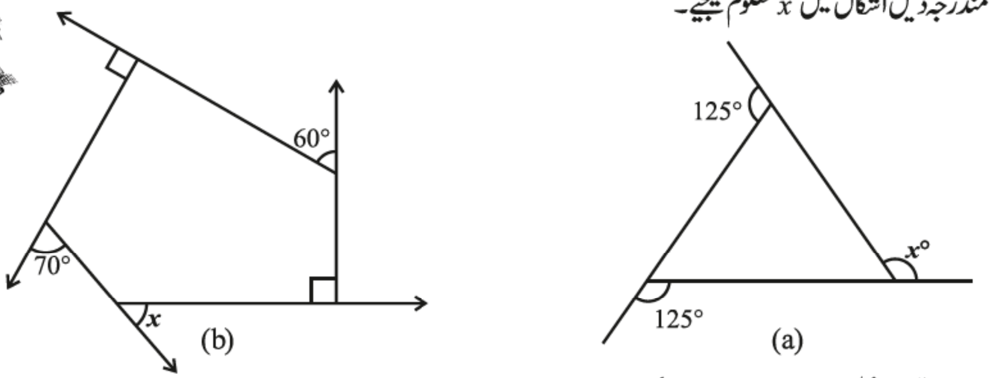
ہر ایک بیرونی زاویہ کی پیمائش $= 45^\circ$

اس لیے، بیرونی زاویوں کی تعداد $= \frac{360}{45} = 8$

کثیر ضلعی کے 8 ضلعے ہیں۔

مشق 3.2

1. مندرجہ ذیل اشکال میں x معلوم کیجیے۔



2. ایک منظّم کثیر ضلعی کے بیرونی زاویہ کی پیمائش معلوم کیجیے جس میں

(i) 9 اضلاع ہوں (ii) 15 اضلاع ہوں

3. ایک منظّم کثیر ضلعی میں کتنے اضلاع ہوں گے کہ ایک خارجی زاویہ کی پیمائش 24° ہے؟

4. ایک منظّم کثیر ضلعی میں اضلاع کی تعداد کیا ہوگی اگر اس کے ہر ایک داخلی زاویہ کی پیمائش 165° ہو؟

5. (a) کیا ایسا کثیر ضلعی ممکن ہے جس کے ہر خارجی زاویہ 22° کی پیمائش ہو؟

(b) کیا یہ ایک منظّم کثیر ضلعی کا داخلی زاویہ ہوسکتا ہے؟ کیوں؟

6. (a) ایک منظّم کثیر ضلعی میں کم سے کم کتنی پیمائش کا داخلی زاویہ ممکن ہے؟

(b) ایک منظّم کثیر ضلعی میں زیادہ سے زیادہ کتنی پیمائش کا بیرونی زاویہ ممکن ہے؟

3.4 چار ضلعی کی قسمیں (Kinds of Quadrilaters)

اضلاع یا زاویوں کی بنیاد پر چار ضلعی کو مخصوص نام دیے جاسکتے ہیں۔

3.4.1 منحرف چار ضلعی (Trapezium)

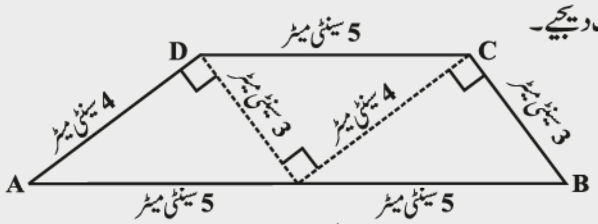
منحرف چار ضلعی (Trapezium) ایک ایسا چار ضلعی ہے جس میں اضلاع کا ایک جوڑا متوازی ہوتا ہے۔

یہ منحرف چار ضلعی ہیں   یہ منحرف چار ضلعی نہیں ہیں

درج بالا شکلوں پر غور کیجیے (مطالعہ کیجیے) اور اپنے دوستوں کے ساتھ بحث کیجیے کہ کیوں ان میں سے کچھ منحرف ہیں اور کچھ نہیں ہیں۔ (نوٹ: تیر کا نشان متوازی خطوط ظاہر کرتا ھے۔)

اسے کیجیے

1. مماثل مثلثوں کے کٹے ہوئے حصے لیجیے جن کے اضلاع 3 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر ہیں۔ انھیں (شکل 3.11) کے مطابق ترتیب دیجیے۔



شکل 3.11

آپ کو ایک منحرف چار ضلعی حاصل ہوتا ہے۔ (اس کی جانچ کیجیے!) یہاں کون سے اضلاع متوازی ہیں؟ کیا غیر مساوی اضلاع برابر پیائش کے ہونے چاہیے؟

یکساں مثلثوں کے گروپ کا استعمال کر کے آپ دو اور منحرف چار ضلعی حاصل کر سکتے ہیں۔ انھیں تلاش کیجیے اور ان کی شکلوں پر بحث کیجیے۔

2. اپنے اور اپنے دوستوں کے جیومیٹری باکسوں سے چار سیٹ اسکوائر لیجیے۔ انھیں الگ الگ تعداد میں استعمال کر کے ساتھ ساتھ رکھیے اور الگ الگ منحرف چار ضلعی حاصل کیجیے۔

اگر منحرف چار ضلعی کے غیر متوازی اضلاع لمبائی کے اعتبار سے برابر ہوں تو ہم اسے **مساوی الساقین منحرف چار ضلعی** کہتے ہیں۔ کیا آپ کو اوپر کی گئی جانچ میں کوئی مساوی الساقین منحرف چار ضلعی حاصل ہوتا ہے؟

3.4.2 پتنگ (Kite)

پتنگ ایک خاص قسم کا چار ضلعی ہے۔ شکل میں ایک جیسے نشان لگے ہوئے ضلع برابر ہیں۔ مثال کے طور پر AB=AD اور BC=CD

یہ پتنگ نما چار ضلعی ہیں   یہ پتنگ نما چار ضلعی نہیں ہیں

ان اشکال کا مطالعہ کیجیے اور بتائیے کہ پتنگ نما چار ضلعی کس طرح کا ہے۔ مشاہدہ کیجیے

(i) پتنگ کے 4 اضلاع ہیں (یہ ایک چار ضلعی ہے)۔

(ii) اس میں دو الگ الگ لگاتار اضلاع کے جوڑے ہوتے ہیں جن کی لمبائی برابر ہوتی ہے۔ اس کی جانچ کر لیجیے کہ کیا پتنگ ایک مربع ہے۔

اسے کیجیے

ایک موٹے کاغذ کی شیٹ لیجیے۔

اس کاغذ کو بیچ میں سے موڑیے۔

دو الگ الگ لمبائی والے قطعات خط کھینچیے جیسا کہ شکل 3.12 میں ظاہر کیا گیا ہے۔ ان قطعات کو خطوط کے ہمراہ کاٹیے اور کھولیے۔

آپ کو ایک پتنگ کی شکل حاصل ہوتی ہے (شکل 3.13)۔

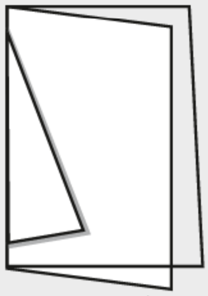
کیا پتنگ میں کوئی مشابہت کا خط ہے؟

پتنگ کے دونوں وتروں کو موڑیے۔ سیٹ اسکوائر کے استعمال سے جانچیے کہ کیا وہ ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔ کیا وتر برابر لمبائی کے ہیں؟ جانچ کیجیے کہ (کاغذ کو موڑنے یا ناپنے سے) اگر وتر ایک دوسرے کے تنصیف کرتے ہیں۔

پتنگ کے ایک زاویہ کو وتر کے ہمراہ مخالف موڑنے پر برابر پیمائش والے زاویوں کو ناپیے۔

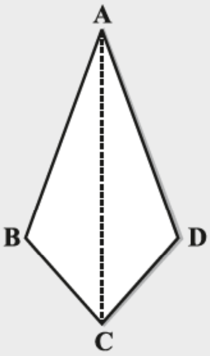
وتروں پر پڑی تہہ کا مشاہدہ کیجیے کیا وتر ایک زاویائی ناصف ہے؟

اپنے نتائج دوستوں کو بتائیے اور ان کی فہرست بنائیے۔ ان نتیجوں کا خلاصہ آپ کو اسی باب میں ہی کسی جگہ ملے گا۔



شکل 3.12

ثابت کیجیے کہ ΔABC اور ΔADC مماثل ہیں۔ ہم اسے کس طرح ثابت کر سکتے ہیں؟



شکل 3.13

3.4.3 متوازی الاضلاع چار ضلعی (Parallelogram)

متوازی الاضلاع (Parallelogram) ایک چار ضلعی ہے۔ جیسا کہ نام سے ظاہر ہے اس کا تعلق متوازی خطوط سے ہے۔

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
$\overline{BC} \parallel \overline{FE}$

$\overline{QP} \parallel \overline{SR}$
$\overline{QS} \parallel \overline{PR}$

$\overline{LM} \parallel \overline{ON}$
$\overline{LO} \parallel \overline{MN}$

یہ متوازی الاضلاع چار ضلعی ہیں

یہ متوازی الاضلاع چار ضلعی نہیں ہیں

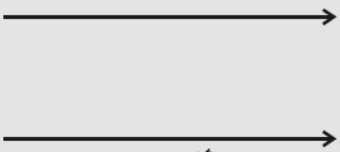
ان اشکال کا مطالعہ کیجیے اور اپنے الفاظ میں بتائیے کہ متوازی الاضلاع چار ضلعی سے ہماری کیا مراد ہے۔ اپنے مشاہدات کو اپنے دوستوں کے ساتھ بانٹیے۔ اس کی جانچ کیجیے کہ کیا مستطیل ایک متوازی الاضلاع چار ضلعی ہے۔

اسے کیجیے

دو مختلف چوڑائی والے گتے کی مستطیل نما پٹیاں لیجیے (شکل 3.14)۔

پٹی 1 شکل 3.14 پٹی 2

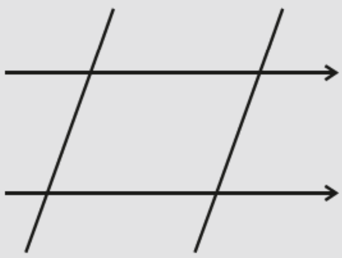
ایک گتے کی پٹی کو مستوی پر رکھیے اور ان کے کناروں کے ہمراہ خطوط کھینچیے جیسا کہ شکل میں کھینچا گیا ہے (شکل 3.15)



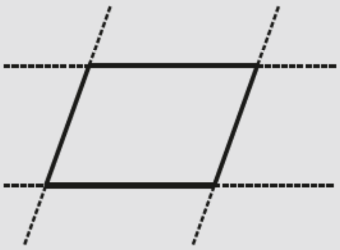
شکل 3.15

اب دوسری پٹی کو کھینچے گئے خطوط کے اوپر ترچھی حالت میں رکھیے اور اس کا استعمال کرتے ہوئے دو خطوط اور کھینچیے جیسا کہ (شکل 3.16) میں دکھایا گیا ہے۔

ان چار خطوط سے بنی بند شکل چار ضلعی ہے۔ یہ متوازی خطوط کے دو جوڑوں سے مل کر بنی ہے (شکل 3.17)۔



شکل 3.16



شکل 3.17

یہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

متوازی الاضلاع چار ضلعی ایک ایسا چار ضلعی ہے جس کے مقابل اضلاع متوازی ہوتے ہیں۔

3.4.4 متوازی الاضلاع چار ضلعی کے عناصر (Elements of a Parallelogram)

ایک متوازی الاضلاع کے چار اضلاع اور چار زاویے ہوتے ہیں۔ ان میں کچھ کی پیمائش برابر ہوتی ہے۔ آپ کو ان عناصر سے متعلق کچھ ارکان کو یاد رکھنے کی ضرورت ہے۔

ایک متوازی الاضلاع ABCD دیا گیا ہے (شکل 3.18)

شکل 3.18

$\overline{AB}$ اور $\overline{DC}$ **مقابل اضلاع ہیں۔** $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$ مقابل اضلاع کا دوسرا جوڑ بناتے ہیں۔

$\angle A$ اور $\angle C$ **مقابل زاویوں کا ایک جوڑا ہے**؛ اسی طرح $\angle B$ اور $\angle D$ اس کے مقابل زاویوں کا ایک دوسرا جوڑا ہے۔

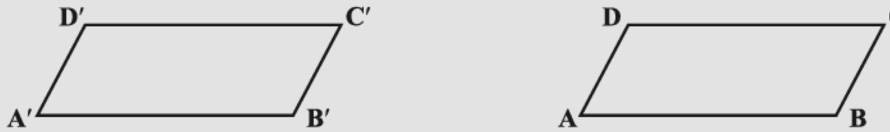
$\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ **متصل اضلاع** ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ جہاں ایک ضلع ختم ہوتا ہے وہاں سے دوسرا ضلع شروع ہوتا ہے۔

کیا $\overline{BC}$ اور $\overline{CD}$ بھی متصل اضلاع ہیں؟ دو اور متصل اضلاع تلاش کرنے کی کوشش کیجیے۔

$\angle A$ اور $\angle B$ **لگاتار زاویہ** ہیں۔ وہ اسی ضلع کے آخر میں ہیں۔ $\angle B$ اور $\angle C$ بھی نزدیکی زاویے ہیں۔ متوازی الاضلاع کے دوسرے نزدیکی زاویوں کے جوڑوں کی پہچان کیجیے۔

اسے کیجیے

دو ایک جیسے متوازی الاضلاع کے کٹے ہوئے حصے ABCD اور A′B′C′D′ لیجیے (شکل 3.19)۔



شکل 3.19

یہاں پر ضلع $\overline{AB}$ ضلع $\overline{A'B'}$ کے مساوی ہے لیکن ان کے نام الگ الگ ہیں۔ اسی طرح باقی نظیری اضلاع بھی مساوی ہیں۔

$\overline{A'B'}$ کو $\overline{DC}$ کے اوپر رکھیے۔ کیا وہ ایک دوسرے پر منطبق ہیں؟ اب $\overline{AB}$ اور $\overline{DC}$ کی لمبائی کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

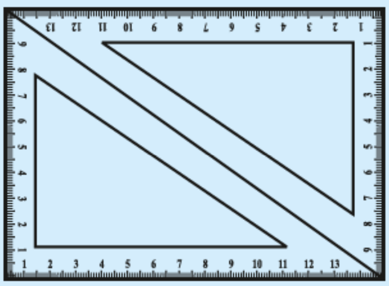
اسی طرح سے $\overline{AD}$ اور $\overline{BC}$ کی لمبائی کی بھی جانچ کیجیے۔ آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے؟

آپ اس نتیجے تک $\overline{AB}$ اور $\overline{DC}$ کی پیمائش کر کے بھی پہنچ سکتے ہیں۔

خصوصیت: متوازی الاضلاع چار ضلعی کے مقابل اضلاع کی لمبائی برابر ہوتی ہے۔

کوشش کیجیے

$30° - 60° - 90°$ زاویے والے دو ایک جیسے سیٹ اسکوائر لے کر انھیں متصل انداز میں رکھ کر ایک متوازی الاضلاع چار ضلعی بنائیے۔ کیا اس طرح سے حاصل شکل درج بالا خصوصیت کی تصدیق کرتی ہے؟ جیسا کہ شکل 3.20 میں ظاہر کیا گیا ہے۔ اس خصوصیت کو منطق دلائل سے بھی موثر بنا سکتے ہیں۔



شکل 3.20

ایک متوازی الاضلاع چار ضلعی A B C D (شکل 3.21) پر غور کیجیے۔ کوئی بھی ایک وتر کھینچیے، مان لیجیے $\overline{AC}$

شکل 3.21

زاویوں کو دیکھیے

$\angle 1 = \angle 2$ اور $\angle 3 = \angle 4$ (کیوں؟)

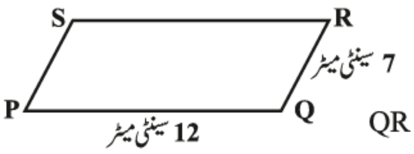
کیوں کہ مثلثوں ABC اور ADC میں $\angle 1 = \angle 2$ ، $\angle 3 = \angle 4$

اور $\overline{AC}$ مشترک ہے۔ اس لیے متماثلث ASA شرط کی رو سے

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (یہاں ASA کا استعمال کیسے ہوا؟)

اس سے حاصل ہوتا ہے $BC = AD$ اور $AB = DC$

مثال 3 : متوازی الاضلاع PQRS (شکل 3.22) کا احاطہ معلوم کیجیے۔



شکل 3.22

حل : متوازی الاضلاع میں مقابل اضلاع برابر ہوتے ہیں۔

اس لیے PQ = SR = 12 سینٹی میٹر اور QR = PS = 7 سینٹی میٹر

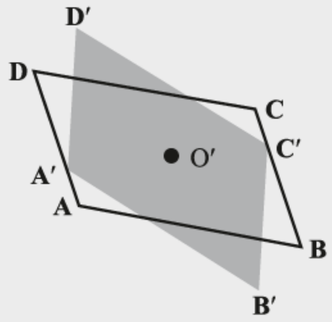
اس لیے احاطہ = PQ + QR + RS + SP

= 12 سینٹی میٹر + 7 سینٹی میٹر + 12 سینٹی میٹر + 7 سینٹی میٹر = 38 سینٹی میٹر

3.4.5 متوازی الاضلاع کے زاویے (Angles of a Parallelogram)

ہم نے متوازی الاضلاع چار ضلعی کے (مقابل) اضلاع سے متعلق خصوصیت کا مطالعہ کیا ہے۔ ہم زاویوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

اسے کیجیے



شکل 3.23

مان لیجیے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے (شکل 3.23)۔

ایک ٹریسنگ شیٹ (عکاسی کاغذ) پر اس کی نقل کیجیے۔ اس نقل کو A′ B′ C′ D′ نام دیجیے۔ A′ B′ C′ D′ کو A B C D پر رکھیے۔ دونوں چار ضلعی کو آپس میں ملا کر اس نقطہ پر پن لگایئے جہاں دونوں وتر ملتے ہیں۔ شفاف (Transparent) شیٹ کو 180° پر گھمایئے۔ دونوں متوازی الاضلاع اب بھی منطبق ہیں؛ لیکن اب آپ A′ کو پوری طرح سے C کے اوپر اور B، D کے اوپر ہوگا۔

کیا اس وجہ سے آپ کو زاویہ A اور C کی پیمائش کے بارے میں کچھ معلوم ہوتا ہے؟ اسی طریقہ سے زاویہ B اور D کی بھی جانچ کیجیے اور جو نتیجہ حاصل ہوا اُسے بیان کیجیے۔

خصوصیت: متوازی الاضلاع چار ضلعی کے مقابل زاویوں کی پیمائش برابر ہوتی ہے۔

کوشش کیجیے

دو ایک جیسے $30°–60° – 90°$ زاویوں والے سیٹ اسکوائر لیجیے اور متوازی الاضلاع چار ضلعی بنائیے جس طرح آپ پہلے بنا چکے ہیں۔ کیا اس طرح سے حاصل شکل درج بالا خصوصیت کی تصدیق کرتی ہے؟

آپ منطقی دلیل کے ذریعہ اس کی مزید تصدیق کر سکتے ہیں۔

اگر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ متوازی الاضلاع چار ضلعی کے وتر ہیں (شکل 3.24) تو آپ کو حاصل ہوتا ہے

$\angle 1 = \angle 2$ اور $\angle 3 = \angle 4$ (کیوں؟)

شکل 3.24

ΔABC اور ΔADC (شکل 3.25) کا الگ الگ مطالعہ کرنے پر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مماثلث کی A S A شرط کی رو سے

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (کس طرح؟)

شکل 3.25

اس سے پتا چلتا ہے کہ $\angle B$ اور $\angle D$ کی پیمائش ایک ہی ہے۔ اسی طرح سے آپ کو $m\angle A = m\angle C$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 4 : شکل 3.26 میں BEST ایک متوازی الاضلاع چار ضلعی ہے۔ x، y اور z کی قدریں معلوم کیجیے۔

حل : S، B کے مقابل ہے۔

اس لیے $x = 100°$ (مقابل زاویہ خصوصیت کی رو سے)

$y = 100°$ ($\angle x$ کے نظیری زاویہ کی پیمائش)

$z = 80°$ (کیوں کہ $\angle z$، $\angle y$ ایک خطی جوڑا ہے)

شکل 3.26

اب ہم اپنی توجہ متوازی الاضلاع کے متصل زاویوں کی طرف مرکوز کرتے ہیں۔

متوازی الاضلاع ABCD میں (شکل 3.27)

$\angle A$ اور $\angle D$ تکمیلی زاویے ہیں کیوں کہ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ اور قاطع $\overline{DA}$ کے مطابق یہ دونوں زاویہ مقابل داخلی زاویے پر ہیں۔

$\angle A$ اور $\angle B$ بھی تکمیلی زاویہ ہیں کیا آپ بتا سکتے ہیں، کیوں؟

شکل 3.27

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ اور $\overline{BA}$ ایک قاطع ہے، جو قاطع کے ایک ہی جانب کے اندرونی زاویے $\angle A$ اور $\angle B$ بناتے ہیں۔
دی گئی شکل میں دو اور تکمیلی زاویوں کی شناخت کیجیے۔

خصوصیت: ایک متوازی الاضلاع چار ضلعی کے متصل زاویے زاویہ تکمیلی ہیں۔

مثال 5 : متوازی الاضلاع RING میں، (شکل 3.28) اگر $m\angle R = 70°$ ہے تو باقی دوسرے زاویے معلوم کیجیے۔

حل : دیا ہوا ہے $m\angle R = 70°$،

تب $m\angle N = 70°$

کیوں کہ $\angle R$ اور $\angle N$ متوازی الاضلاع کے مقابل زاویہ ہیں۔

شکل 3.28

کیوں کہ $\angle R$ اور $\angle I$ تکمیلی ہیں

$$m\angle I = 180° - 70° = 110°$$

مزید $m\angle G = 110°$ کیوں کہ $\angle G$، $\angle I$ کے مقابل ہے

اس لیے، $m\angle R = m\angle N = 70°$ اور $m\angle I = m\angle G = 110°$

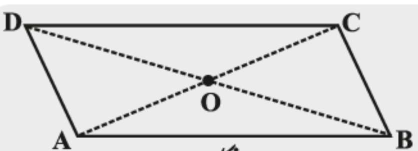
سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

$m\angle R = m\angle N = 70°$ ظاہر کرنے کے بعد کیا آپ کسی اور طریقے سے $m\angle I$ اور $m\angle G$ معلوم کر سکتے ہیں؟

3.4.6 متوازی اضلاع چار ضلعی کے وتر (Diagonals of a Parallelogram)

عمومی طور پر متوازی الاضلاع چار ضلعی کے وتروں کی لمبائی برابر نہیں ہوتی۔ (کیا آپ پچھلے مشغلہ میں اس کی جانچ کر چکے ہیں؟ تاہم متوازی الاضلاع چار ضلعی کے وتروں کی ایک دلچسپ خصوصیت ہے۔

اسے کیجیے



شکل 3.29

متوازی الاضلاع ABCD کا ایک کاٹا ہوا حصہ لیجیے،
مان لیجیے ABCD (شکل 3.29)۔ اس کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔
C کو A کے اوپر ایک تہہ (Fold) کی مدد سے رکھیے اور $\overline{AC}$ کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے۔ کیا وسطی نقطہ O ہی ہے؟
کیا اس سے پتا چلتا ہے کہ وتر DB وتر AC کی نقطہ O پر تنصیف کرتا ہے؟ اپنے دوستوں کے ساتھ بحث کیجیے۔ اس مشغلہ کو یہ جاننے کے لیے دہرائیں کہ DB کا وسطی نقطہ کہاں پر واقع ہے۔

خصوصیت: متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں (یقیناً، اپنے نقطہ تقاطع پر!)

اس خصوصیت پر بحث کرنا اور اس کی تصدیق کرنا مشکل نہیں ہے۔

شکل 3.30 سے، ASA شرط کے استعمال سے یہ دیکھنا آسان ہے کہ

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (ASA شرط یہاں کس طرح استعمال ہوئی؟)

اس سے حاصل ہوتا ہے $AO = CO$ اور $BO = DO$

شکل 3.30

مثال 6 : شکل 3.31 میں HELP ایک متوازی الاضلاع ہے۔ (لمبائی سینٹی میٹر میں ہے) دیا ہوا ہے $OE = 4$ اور HL، PE سے 5 زیادہ ہے؟ OH معلوم کیجیے۔

حل : اگر $OE = 4$ تب OP بھی 4 ہے (کیوں؟)

اس لیے $PE = 8$ (کیوں؟)

لہٰذا $HL = 8 + 5 = 13$

اس طرح $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ (سینٹی میٹر)

شکل 3.31

مشق 3.3

.1 متوازی الاضلاع چار ضلعی ABCD دیا ہوا ہے۔ ہر بیان کو تعریف یا خصوصیت کے ساتھ پُر کیجیے۔

(i) $AD = ...$ (ii) $\angle DCB = ...$

(iii) $OC = ...$ (iv) $m\angle DAB + m\angle CDA = ...$

.2 مندرجہ ذیل متوازی الاضلاع چار ضلعی پر غور کیجیے۔ x, y اور z کی قدریں معلوم کیجیے۔

(i) (ii)

(iii) (iv) (v)

.3 کیا چار ضلعی ABCD ایک متوازی الاضلاع چار ضلعی بھی ہوسکتا ہے اگر

(i) $\angle D + \angle B = 180°$؟

(ii) $AD = 4$ سینٹی میٹر، $AB = DC = 8$ سینٹی میٹر اور $BC = 4.4$ سینٹی میٹر

(iii) $\angle A = 70°$ اور $\angle C = 65°$

.4 ایک چار ضلعی کی رف (Rough) شکل بنائیے جو متوازی الاضلاع چار ضلعی نہ ہو لیکن جس کے دونوں مقابل زاویوں کی پیمائش برابر ہو۔

5. کسی متوازی الاضلاع چار ضلعی کے دو متصل زاویوں کی نسبت 3:2 ہے۔ متوازی الاضلاع کے سبھی زاویوں کی پیمائش معلوم کیجیے۔

6. کسی متوازی الاضلاع چار ضلعی کے دو متصل زاویوں کی پیمائش برابر ہے۔
اس متوازی الاضلاع چار ضلعی کے ہر زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے۔

7. متصل شکل HOPE ایک متوازی الاضلاع چار ضلعی ہے۔ زاویہ x، y اور z کی پیمائش معلوم کیجیے۔ معلوم کرنے کے لیے جو خصوصیات استعمال کی ہیں انھیں بیان کیجیے۔

8. مندرجہ ذیل شکلیں GUNS اور RUNS متوازی الاضلاع چار ضلعی ہیں۔ x اور y معلوم کیجیے (لمبائی سینٹی میٹر میں دی ہیں)۔

(i) (ii)

9.

اوپر دی گئی شکل میں دونوں RISK اور CLUE متوازی الاضلاع چار ضلعی ہیں۔ x کی قدر معلوم کیجیے۔

10. یہ شکل کس طرح سے منحرف ہے تشریح کیجیے۔ اس کے کون سے دو اضلاع متوازی ہیں؟ (شکل 3.32)

شکل 3.32

شکل 3.33

شکل 3.34

11. شکل 3.33 میں $m\angle C$ معلوم کیجیے اگر $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ہے۔

12. شکل 3.34 میں $\angle P$ اور $\angle S$ کی پیمائش معلوم کیجیے اگر $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ ہے۔
(اگر آپ $m\angle R$ معلوم کرلیں تو کیا $m\angle P$ معلوم کرنے کا کوئی دوسرا طریقہ بھی ہے؟)

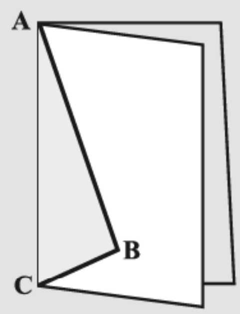
3.5 کچھ مخصوص متوازی الاضلاع چارضلعی (Some Special Parallelogram)

3.5.1 معیّن (Rhombus)

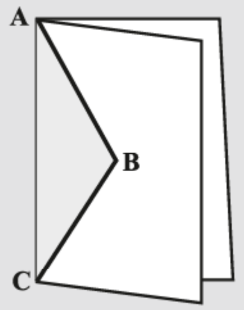
پتنگ نما چارضلعی (جوایک متوازی الاضلاع چارضلعی نہیں ہے) کوایک خاص طریقے سے رکھنے پرہمیں ایک معیّن (Rhombus)(جوایک متوازی الاضلاع ہے) حاصل ہوتا ہے

اسے کیجیے

آپ نے کاغذ کو کاٹ کر پہلے جو پتنگ بنائی تھی اُسے دوہرائیے۔



پتنگ کاٹ



معیّن کاٹ

جب آپ ABC کے ہمراہ کاٹ کرکھولتے ہیں تو آپ کوایک پتنگ حاصل ہوتی ہے۔یہاں AB اور BC کی لمبائی الگ الگ تھی۔اگرآپ AB=BC کھینچیں تو آپ کوحاصل شدہ پتنگ ایک معیّن کہلائے گی۔

نوٹ کیجیے کہ معیّن کی تمام لمبائیاں برابرہوتی ہیں،ایسا پتنگ کے ساتھ نہیں ہے۔

معیّن ایک ایسا چارضلعی ہے،جس کے چاروں اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

چونکہ معیّن کے مقابل اضلاع کی لمبائی برابرہوتی ہے،اس لیے یہ ایک متوازی الاضلاع چارضلعی بھی ہے۔اس لیےمعین میں وہ تمام خصوصیات بھی ھیں جو ایك متوازی الاضلاع چار ضلعی میں ہو تی ھیں اور پتنك کے بھی۔ ان کی ایک فہرست بنائیے۔اب آپ اپنی فہرست،کتاب میں دی گئی کسی بھی فہرست کے ساتھ ملاکر تصدیق کرسکتے ہیں۔

پتنگ معیّن

ایک معیّن کی سب سے اہم خصوصیت اس کے وتروں کی ہے۔

خصوصیت : معیّن کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ھوتے ھیں۔

اسے کیجیے

معین کی ایک نقل (Copy) لیجیے۔ کاغذ کو موڑ کر جانچ کیجیے کہ کیا نقطہ تقاطع پر ایک وتر کا وسطی نقطہ ہے۔ آپ ایک سیٹ اسکوائر کے کنارے کا استعمال کر کے جانچ کر سکتے ہیں کہ وہ ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

یہاں ایک خاکہ دیا ہوا ہے، جس کی مدد سے منطقی اقدام کا استعمال کرتے ہوئے اس خصوصیت کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔ ABCD ایک معین ہے (شکل 3.35)۔ اس لیے یہ ایک متوازی الاضلاع چار ضلعی بھی ہے۔

چوں کہ وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اس لیے $OA = OC$ اور $OB = OD$

شکل 3.35

ہمیں یہ دکھانا ہے کہ $m\angle AOD = m\angle COD = 90°$

مماثلث کی SSS شرط سے یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ

$\Delta AOD \cong \Delta COD$

کیوں کہ $AO = CO$ (کیوں؟)

$AD = CD$ (کیوں؟)

$OD = OD$

اس لیے، $m\angle AOD = m\angle COD$

کیوں کہ $\angle AOD$ اور $\angle COD$ خطی جوڑ ہیں۔

اس لیے، $m\angle AOD = m\angle COD = 90°$

مثال 7 :

RICE ایک معین ہے (شکل 3.36)۔ x, y اور z کی قدریں معلوم کیجیے اور اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

حل :

$x = OE$	$y = OR$	$z =$ معین کا ضلع
$= OI$ (وتر تنصیف کرتے ہیں)	$= OC$ (وتر تنصیف کرتے ہیں)	$= 13$ (تمام اضلاع برابر ہیں)
$= 5$	$= 12$	

شکل 3.36

3.5.2 ایک مستطیل (A Rectangle)

مستطیل (Rectangle) ایک ایسا متوازی الاضلاع چار ضلعی ہے جس کے زاویے مساوی ہوتے ہیں (شکل 3.37)۔

اس تعریف کا اصل مفہوم کیا ہے؟ اپنے دوستوں کے ساتھ بحث کیجیے۔

اگر مستطیل مساوی زاویہ ہے تو ہر زاویہ کی پیمائش کیا ہو سکتی ہے؟

مان لیجیے ہر زاویہ کی پیمائش $x°$ ہے۔

تب $4x° = 360°$ (کیوں؟)

اس لیے $x° = 90°$

شکل 3.37

لہٰذا مستطیل کا ہر زاویہ ایک زاویہ قائمہ ہے۔

اس طرح سے مستطیل ایک ایسا متوازی الاضلاع چارضلعی ہے جس کا ہر ایک زاویہ، زاویۂ قائمہ ہے۔

چوں کہ مستطیل ایک متوازی الاضلاع چارضلعی ہے اس لیے اس کے مقابل اضلاع برابر ہوتے ہیں اور اس کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

متوازی الاضلاع میں وتروں کی لمبائی مختلف ہوسکتی ہے۔(جانچ کیجیے)؛لیکن حیرت کی بات یہ ہے کہ مستطیل (ایک مخصوص شکل کے طور پر) میں وتروں کی لمبائی مساوی ہوتی ہے۔

خصوصیت: مستطیل کے وتروں کی لمبائی برابر ہوتی ہے۔

شکل 3.38 شکل 3.39 شکل 3.40

اس کی تصدیق کرنا آسان ہے۔اگر ABCD ایک مستطیل ہے (شکل 3.38)، تو مثلث ABC اور ABD کو [بالترتیب (شکل 3.39) اور (3.40)] الگ الگ دیکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\Delta ABC \cong \Delta ABD$$

یہ اس لیے ہے کہ	$AB = AB$	(مشترک)
	$BC = AD$	(کیوں؟)
	$m\angle A = m\angle B = 90°$	(کیوں؟)

یہ مماثلث کی SAS شرط کی رو سے حاصل ہوتا ہے۔

لٰہذا $AC = BD$

اور مستطیل میں وتر نہ صرف ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں بلکہ مساوی بھی ہوتے ہیں (کیوں؟)

مثال 8 : RENT ایک مستطیل ہے (شکل 3.41)۔اس کے وتر O پر ملتے ہیں۔

x کی قدر معلوم کیجیے اگر $OR = 2x + 4$ اور $OT = 3x + 1$ ہو۔

حل : $\overline{OT}$ وتر $\overline{TE}$ کا نصف ہے، $\overline{OR}$ وتر $\overline{RN}$ کا نصف ہے۔

یہاں وتر برابر ہیں (کیوں؟)

اس لیے ان کے نصف بھی برابر ہوں گے۔

اس لیے $3x + 1 = 2x + 4$

یا $x = 3$

شکل 3.41

3.5.3 مربع (Square)

مربع (Square) ایک ایسا مستطیل ہے جس کے اضلاع برابر ہوتے ہیں۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ مربع میں مستطیل کی تمام خصوصیات ہوتی ہیں اور اس کے تمام اضلاع کی لمبائی برابر ہوتی ہے۔

مستطیل ہی کی طرح مربع کے وتر بھی برابر ہوتے ہیں۔

مستطیل میں یہ ضروری نہیں کہ وتر ایک دوسرے پر عمود ہوں (جانچ کیجیے)۔

ایک مربع میں وتر

(i) ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں (کیوں کہ مربع ایک متوازی الاضلاع چار ضلعی بھی ہے)

(ii) کی لمبائی برابر ہوتی ہے (کیوں کہ مربع، مستطیل بھی ہوتا ہے) اور

(iii) ایک دوسرے پر عمود بھی ہوتے ہیں۔

BELT ایک مربع ہے، $BE = EL = LT = TB$

$\angle B$، $\angle E$، $\angle L$، $\angle T$ زاویہ قائمہ ہیں۔

$BL = ET$ اور $\overline{BL} \perp \overline{ET}$

$OB = OL$ اور $OE = OT$

اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل خصوصیت حاصل ہوتی ہے۔

خصوصیت : مربع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

اسے کیجیے

ایک مربع شیٹ لیجیے، مثال کے طور پر PQRS (شکل 3.42)۔ دونوں وتروں کے ساتھ اسے موڑیئے۔ کیا ان کے وسطی نقطے ایک ہی ہیں؟ سیٹ اسکوائر کے استعمال سے جانچ کیجیے کہ O پر زاویہ 90° کا ہے۔ اس سے مذکورہ بالا خصوصیت کی تصدیق ہوتی ہے۔

شکل 3.42

ہم اس کی تصدیق منطقی دلیل کے ذریعہ بھی کر سکتے ہیں:—

ABCD ایک مربع ہے جس کے وتر O پر ملتے ہیں (شکل 3.43)۔

$OA = OC$ (کیوں کہ مربع ایک متوازی الاضلاع چار ضلعی ہے)۔

مماثلث کی SSS شرط کے استعمال سے، ہم دیکھتے ہیں کہ

$\Delta AOD \cong \Delta COD$ (کیسے؟)

اس لیے $m\angle AOD = m\angle COD$

خطی جوڑے کی وجہ سے ہر زاویہ، زاویہ قائمہ ہے۔

شکل 3.43

مشق 3.4

.1 صحیح یا غلط ہے دکھایئے

(a) سبھی مربعے مستطیل ہوتے ہیں۔
(b) سبھی معیّن ،متوازی الاضلاع ہوتے ہیں۔
(c) تمام مربعے معین اور مستطیل ہوتے ہیں۔
(d) تمام مربعے متوازی الاضلاع نہیں ہیں۔
(e) تمام پتنگیں معین ہیں۔
(f) تمام معین، پتنگیں ہیں۔
(g) تمام متوازی الاضلاع منحرف ہیں۔
(h) تمام مربعے منحرف ہیں۔

.2 ان تمام چار ضلعی کی شناخت کیجیے جن میں

(a) چار اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔
(b) چار زاویے زاویہ قائمہ ہوتے ہیں۔

.3 واضح کیجیے کہ ذیل کس طرح سے مربع ہیں۔

(i) ایک چار ضلعی ہے
(ii) ایک متوازی الاضلاع چار ضلعی ہے
(iii) ایک معیّن ہے
(iv) ایک مستطیل ہے

.4 اس چار ضلعی کا نام بتایئے جس کے وتر

(i) ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہیں۔
(ii) ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔
(iii) برابر ہیں

.5 واضح کیجیے کہ کیوں مستطیل ایک محدب چار ضلعی ہے

.6 ABC ایک قائم زاویہ مثلث ہے اور O قائم زاویہ کے سامنے کے ضلعے کا وسطی نقطہ ہے۔ وضاحت کیجیے کہ O کیوں A، B اور C سے مساوی فاصلہ پر ہے (مدد کے لیے الگ سے نقطہ دار خطوط کھینچے گئے ہیں)۔

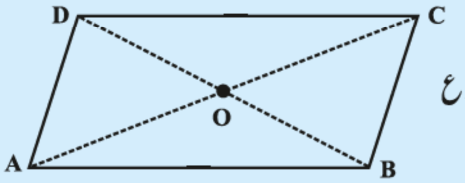
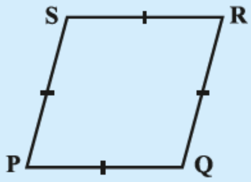
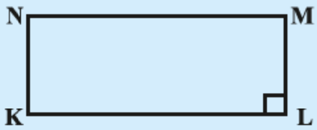
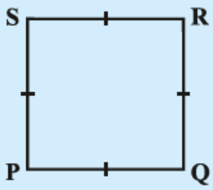
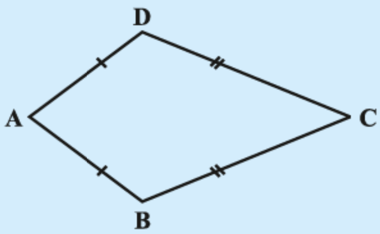
سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

.1 راج مستری ایک کنکریٹ کی سلیب بناتا ہے۔ وہ اسے مستطیل نما بنانا چاہتا ہے۔ وہ کتنے طریقوں سے یہ یقین کرے گا کہ یہ مستطیل نما ہے؟

.2 مربع کی تعریف مستطیل کی شکل میں کی گئی ہے جس کے سبھی اضلاع برابر ہوتے ہیں۔ کیا ہم اس کی تعریف معین کی شکل میں بھی کر سکتے ہیں جس کے زاویہ برابر ہوں؟ اس تصور کو واضح کیجیے۔

.3 کیا ایک منحرف کے تمام زاویہ مساوی ہو سکتے ہیں؟ کیا اس کے تمام اضلاع برابر ہو سکتے ہیں؟ بیان واضح کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

چار ضلعی	خصوصیات
متوازی الاضلاع : ایک چار ضلعی کے مقابل اضلاع برابر ہوتے ہیں۔ 	(1) مقابل اضلاع برابر ہوتے ہیں (2) مقابل زاویہ برابر ہوتے ہیں (3) وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں
معیّن : ایک متوازی الاضلاع جس کے تمام اضلاع برابر ہوں۔ 	(1) متوازی الاضلاع کی تمام خصوصیات ہوتی ہیں (2) وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہوتے ہیں
مستطیل: متوازی الاضلاع جس کا ہر زاویہ زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔ 	(1) متوازی الاضلاع کی تمام خصوصیات ہوتی ہیں (2) ہر زاویہ، زاویہ قائمہ ہوتا ہے (3) وتر برابر ہوتے ہیں
مربع : ایک مستطیل جس کے اضلاع کی لمبائی برابر ہوتی ہے۔ 	متوازی الاضلاع، مستطیل اور معین کی تمام خصوصیات
پتنگ : ایک چار ضلعی جس کے ضلعوں کے دو لگا تار جوڑے برابر ہوتے ہیں۔ 	(1) وتر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں (2) وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں (3) شکل میں $m\angle B = m\angle D$ لیکن $m\angle A \neq m\angle C$

باب

4

عملی جیومیٹری

4.1 تعارف

ساتویں جماعت میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ مثلث کس طرح بنایا جاتا ہے۔ ایک منفرد مثلث بنانے کے لیے ہمیں تین پیمائشوں (اضلاع اور زاویوں) کی ضرورت پڑتی ہے۔

چوں کہ ایک مثلث بنانے کے لیے تین پیمائشوں کا ہونا کافی ہے تب یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ایک منفرد چار اضلاع والی بند شکل (جسے چار ضلعی کہتے ہیں) بنانے کے لیے کیا چار پیمائشوں کی ضرورت پڑے گی۔

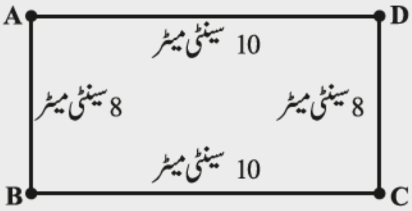
اسے کیجیے

ایک سی لمبائی (مثال کے طور پر 10 سینٹی میٹر) والی تیلیوں کا ایک جوڑا لیجیے۔ اب ایک اور ایک سی لمبائی (مثال کے طور پر 8 سینٹی میٹر) والی تیلیوں کا جوڑا لیجیے۔ انھیں آپس میں اس طرح جوڑیے جس سے 10 سینٹی میٹر لمبائی اور 8 سینٹی میٹر چوڑائی والا ایک مستطیل بن جائے۔

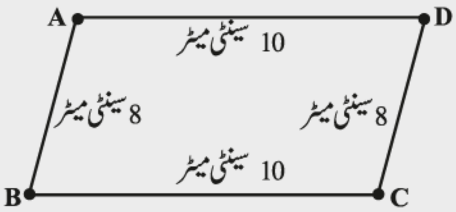
اس مستطیل کو 4 پیمائشوں کے استعمال سے بنایا گیا ہے۔

اب مستطیل کی چوڑائی پر دباؤ ڈالیے۔ کیا اس سے بنی نئی شکل بھی ایک مستطیل ہے (شکل 4.2)؟ غور کیجیے کہ مستطیل اب ایک متوازی الاضلاع بن گیا ہے۔ کیا آپ نے تیلیوں کی لمبائی کو بدلا ہے؟ نہیں! اضلاع کی پیمائش ویسی ہی رہتی ہے۔

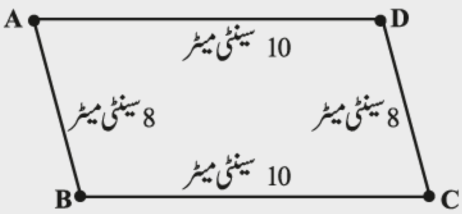
نئی حاصل شدہ شکل پر مختلف سمتوں میں دوبارہ دباؤ ڈالیے۔ آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے؟ آپ کو پھر دوبارہ ایک متوازی الاضلاع حاصل ہوتا ہے جو بالکل الگ ہے (شکل 4.3)، جب کہ چاروں پیمائشیں وہی رہتی ہیں۔



شکل 4.1



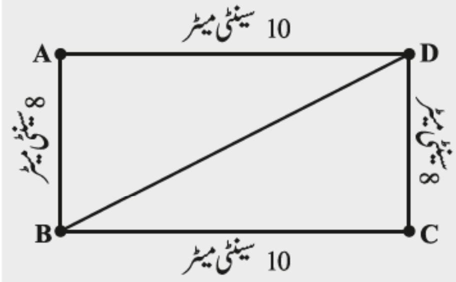
شکل 4.2



شکل 4.3

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک چار ضلعی کی چار پیمائشوں سے ایک منفرد (یکساں) چار ضلعی حاصل نہیں ہوتا۔ کیا پانچ پیمائشوں سے ایک منفرد چار ضلعی حاصل ہوسکتا ہے؟ آیئے اب اس مشغلہ کی جانب دوبارہ واپس آتے ہیں!

آپ 10 سینٹی میٹر اور 8 سینٹی میٹر لمبائی والی دو دو تیلیوں کی مدد سے ایک مستطیل بنا چکے ہیں۔ اب BD کے برابر لمبائی والی ایک اور تیلی کو BD کے ساتھ باندھیے (شکل 4.4)۔ اگر آپ چوڑائی کی سمت میں دباؤ ڈالتے ہیں تو کیا شکل میں تبدیلی آتی ہے؟ نہیں! شکل کو کھولے بغیر تبدیلی ممکن نہیں ہے۔ پانچویں تیلی کی موجودگی نے مستطیل کو منفرد طور پر مضبوط کر دیا ہے۔ یعنی کوئی دوسرا چار ضلعی (دی گئی اضلاع کی لمبائی کے برابر) اب ممکن نہیں ہے۔



شکل 4.4

اس طرح ہم نے غور کیا کہ پانچ پیمائشوں سے ہمیں ایک منفرد چار ضلعی حاصل ہوتا ہے۔ لیکن کیا ایک منفرد چار ضلعی کی تشکیل کے لیے کوئی بھی پانچ پیمائشیں (اضلاع اور زاویہ کی) کافی ہیں؟

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

ارشد کے پاس چار ضلعی ABCD کی پانچ پیمائشیں ہیں۔ وہ یہ ہیں

AB = 5 سینٹی میٹر، AC = 4 سینٹی میٹر، BD = 5 سینٹی میٹر، $\angle A = 50°$ اور AD = 6 سینٹی میٹر۔

کیا ان سے ایک منفرد چار ضلعی بنایا جاسکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بتائیے۔

4.2 ایک چار ضلعی کی تشکیل (Constructing a Quadrilateral)

اب ہم سیکھیں گے کہ دی گئی مندرجہ ذیل پیمائشوں سے ایک منفرد چار ضلعی کی تشکیل کیسے کی جاتی ہے:

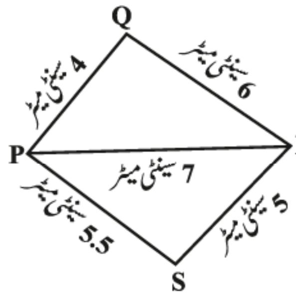
- جب چاروں اضلاع اور ایک وتر کی لمبائی دی گئی ہو۔
- جب دو وتر اور تین اضلاع دیے گئے ہوں۔
- جب دو متصل اضلاع اور تین زاویے دیے گئے ہوں۔
- جب تین اضلاع اور ان کے درمیان دو زاویے دیے گئے ہوں۔
- جب دوسری مخصوص خصوصیات معلوم ہوں۔

آیئے ان تشکیلات پر ایک ایک کر کے غور کرتے ہیں۔

4.2.1 جب چاروں اضلاع اور ایک وتر کی لمبائی دی گئی ہو

ہم اس تشکیل کو ایک مثال کی مدد سے سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

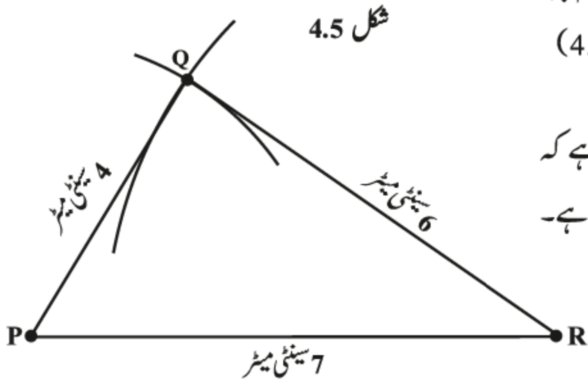
مثال 1 : ایک چار ضلعی P Q R S بنائیے جس میں
PQ = 4 سینٹی میٹر، QR = 6 سینٹی میٹر، RS = 5 سینٹی میٹر، RS = 5.5 سینٹی میٹر اور PR = 7 سینٹی میٹر ہیں۔



شکل 4.5

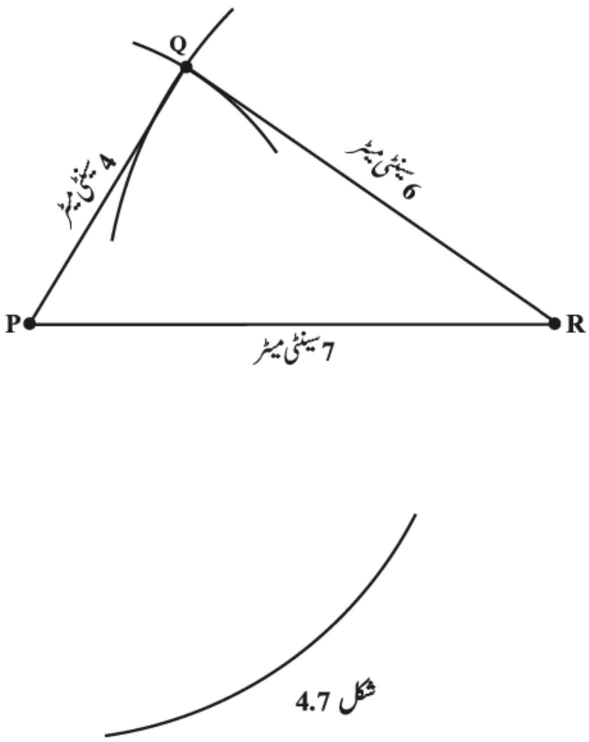
حل : [ایک رف خاکے کی مدد سے چار ضلعی کو سمجھ سکتے ہیں۔ ہم پہلے رف شکل بناتے ہیں اور پیمائشوں کی نشان دہی کرتے ہیں۔] (شکل 4.5)

قدم 1 رف شکل سے بڑی آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ SSS تشکیل شرط سے ΔPQR کی تشکیل کی جاسکتی ہے۔ ΔPQR بنائیے (شکل 4.6)۔



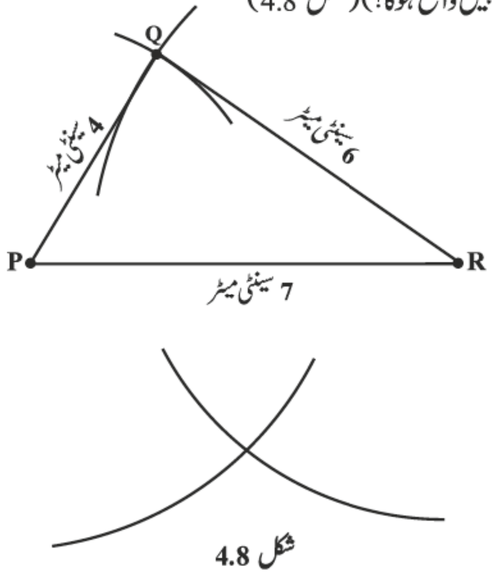
شکل 4.6

قدم 2 اب ہمیں چوتھے نقطے S کا پتہ لگانا ہے۔ یہ نقطہ 'S' ، P R کی مناسبت سے نقطہ Q کی مخالف سمت میں ہوگا۔ اس کے لیے ہمارے پاس دو پیمائش ہیں۔
نقطہ P سے نقطہ S، 5.5 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر واقع ہے۔ اس لیے P کو مرکز مان کر 5.5 سینٹی میٹر نصف قطر لے کر ایک قوس کھینچیے (نقطہ S اس قوس پر ہی کہیں واقع ہے!) (شکل 4.7)۔



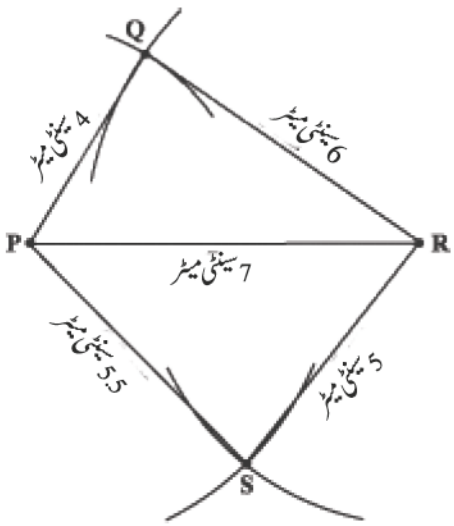
شکل 4.7

قدم 3 R سے 5 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر S ہے۔ اس لیے R کو مرکز مان کر اور 5 سینٹی میٹر نصف قطر لے کر ایک قوس کھینچیے (نقطہ S اس قوس پر کہیں واقع ہوگا!) (شکل 4.8)



شکل 4.8

قدم 4 نقطہ S کھینچے گئے دونوں قوسوں پر واقع ہونا چاہیے۔ کیوں کہ یہ ان دونوں قوسوں کا نقطہ تقاطع ہے۔ اس کی نشان دہی نقطہ S کے طور پر کیجیے اور P Q R S کو مکمل کیجیے۔ PQRS مطلوبہ چار ضلعی ہے (شکل 4.9)۔



شکل 4.9

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

(i) ہم نے دیکھا کہ ایک چار ضلعی کی پانچ پیمائشوں سے ایک منفرد چار ضلعی کی تشکیل کی جا سکتی ہے۔ کیا آپ سوچتے ہیں کہ چار ضلعی کی کوئی پانچ پیمائشیں ایسی تشکیل کر سکتی ہیں؟

(ii) کیا آپ ایک متوازی الاضلاع B A T S بنا سکتے ہیں جس میں BA = 5 سینٹی میٹر، AT = 6 سینٹی میٹر اور AS = 6.5 سینٹی میٹر ہوں؟ کیوں؟

(iii) کیا آپ ایک معین Z E A L بناسکتے ہیں جہاں ZE = 3.5 سینٹی میٹر اور وتر EL = 5 سینٹی میٹر ہوں۔

(iv) ایک طالب علم نے ایک چار ضلعی P L A Y بنانے کی کوشش کی، جس میں

PL = 3 سینٹی میٹر، LA = 4 سینٹی میٹر، AY = 4.5 سینٹی میٹر، PY = 2 سینٹی میٹر اور LY = 6 سینٹی میٹر ہے لیکن وہ اسے بنا نہیں سکا۔ اس کی وجہ کیا ہے؟

(اشارہ : ایک رف خاکے کی مدد سے اس پر بحث کیجیے)

مشق 4.1

1. مندرجہ ذیل چار ضلعی کی تشکیل کیجیے:

(i) چار ضلعی ABCD جس میں

AB = 4.5 سینٹی میٹر

BC = 5.5 سینٹی میٹر

CD = 4 سینٹی میٹر

AD = 6 سینٹی میٹر

AC = 7 سینٹی میٹر ہے۔

(ii) چار ضلعی JUMP جس میں

JU = 3.5 سینٹی میٹر

UM = 4 سینٹی میٹر

MP = 5 سینٹی میٹر

PJ = 4.5 سینٹی میٹر

PU = 6.5 سینٹی میٹر ہے۔

(iii) متوازی الاضلاع MORE جس میں

OR = 6 سینٹی میٹر

RE = 4.5 سینٹی میٹر

EO = 7.5 سینٹی میٹر ہے۔

(iv) معین BEST جس میں

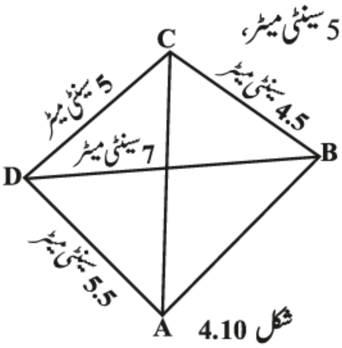
BE = 4.5 سینٹی میٹر

ET = 6 سینٹی میٹر ہے۔

4.2.2 جب دو وتر اور تین اضلاع دیے گئے ہوں

جب چار اضلاع اور ایک وتر دیے گئے تھے تو پہلے ہم نے دی گئی پیائشوں سے ایک مثلث بنایا تھا اور پھر چوتھے نقطے کو تلاش کرنے کی کوشش کی تھی۔ اسی طریقے کو ہم نے یہاں بھی استعمال کیا ہے۔

مثال 2 : ایک چار ضلعی A BCD بنائیے جس میں BC = 4.5 سینٹی میٹر، AD = 5.5 سینٹی میٹر، CD = 5 سینٹی میٹر وتر AC = 5.5 سینٹی میٹر اور وتر BD = 7 سینٹی میٹر ہے۔

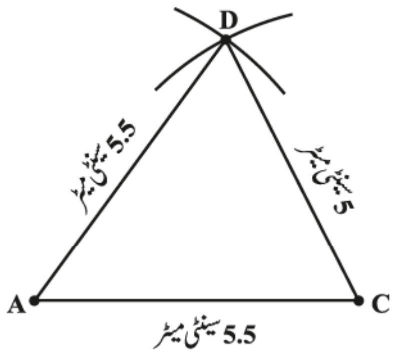


شکل 4.10

حل :

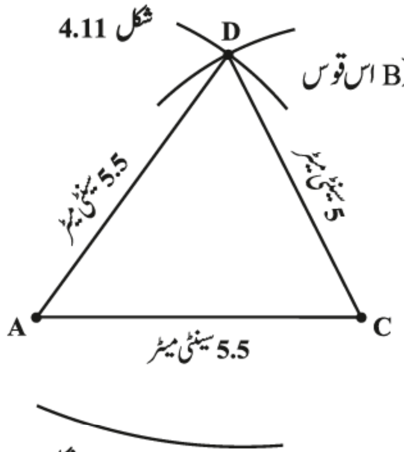
یہاں ایک چار ضلعی ABCD کا رف خاکہ دیا ہے (شکل 4.10)۔ اس خاکہ کا مطالعہ کرنے سے یہ آسانی سے معلوم ہوجاتا ہے کہ پہلے Δ ACD بنانا ممکن ہے (کیسے؟)

قدم 1 SSS شرط کے استعمال سے مثلث ACD بنائیے (شکل 4.11)۔
(اب ہمیں C سے 4.5 سینٹی میٹر فاصلہ پر اور D سے 7 سینٹی میٹر فاصلہ پر B معلوم کرنے کی ضرورت ہے)۔



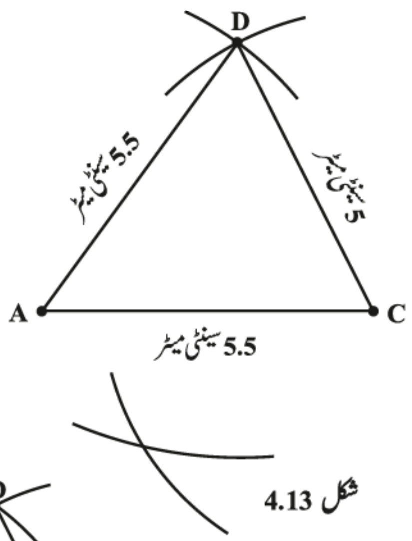
شکل 4.11

قدم 2 D کو مرکز مان کر 7 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک قوس کھینچیے (B اس قوس پر کہیں واقع ہے) (شکل 4.12)۔



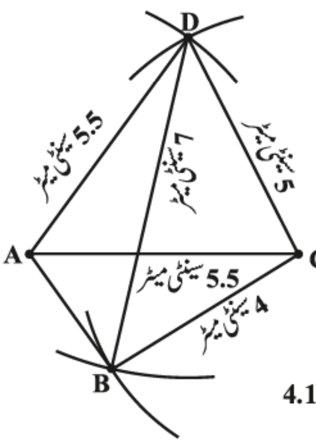
شکل 4.12

قدم 3 C کو مرکز مان کر 4.5 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک قوس کھینچیے۔
(B اس قوس پر کہیں واقع ہے)
(شکل 4.13)



شکل 4.13

قدم 4 کیوں کہ B دونوں قوسوں پر واقع ہے، اس لیے B ان دونوں قوسوں کا نقطہ تقاطع ہے۔ B پر نشان لگائیے اور ABCD کو مکمل کیجیے۔ABCD مطلوبہ چار ضلعی ہے (شکل 4.14)۔



شکل 4.14

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1. مذکورہ بالا مثال میں، کیا ہم ΔABD کو پہلے بنا کر چار ضلعی بنا سکتے ہیں اور پھر چوتھا نقطہ C معلوم کر سکتے ہیں؟
2. کیا آپ ایک چار ضلعی P Q R S بنا سکتے ہیں جس میں PQ = 3 سینٹی میٹر، RS = 3 سینٹی میٹر، PS = 7.5 سینٹی میٹر، PR = 8 سینٹی میٹر اور SQ = 9 سینٹی میٹر ہو؟ اپنے جواب کا جواز پیش کیجیے۔

مشق 4.2

1. مندرجہ ذیل چار ضلعی بنائیے۔

(i) چار ضلعی LIFT جس میں
LI = 4 سینٹی میٹر
IF = 3 سینٹی میٹر
TL = 2.5 سینٹی میٹر
LF = 4.5 سینٹی میٹر
IT = 4 سینٹی میٹر

(ii) چار ضلعی GOLD جس میں
OL = 7.5 سینٹی میٹر
GL = 6 سینٹی میٹر
GD = 6 سینٹی میٹر
LD = 5 سینٹی میٹر
OD = 10 سینٹی میٹر

(iii) معین BEND جس میں
BN = 5.6 سینٹی میٹر
DE = 6.5 سینٹی میٹر

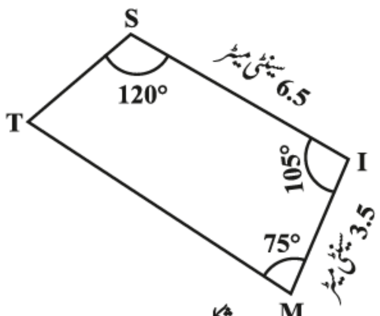
4.2.3 جب دو متصل اضلاع اور تین زاویہ دیے گئے ہوں

پہلے کی طرح ہم مثلث کی تشکیل سے شروع کرتے ہیں اور چار ضلعی مکمل کرنے کے لیے چوتھا نقطہ تلاش کرتے ہیں۔

مثال 3 : ایک چار ضلعی MIST بنائیے جہاں MI = 3.5 سینٹی میٹر، IS = 6.5 سینٹی میٹر، $\angle M = 75°$، $\angle I = 105°$ اور $\angle S = 120°$ ہے۔

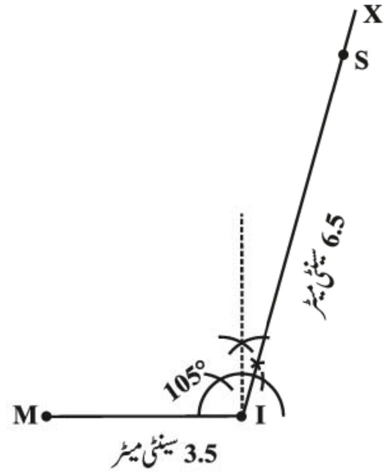
حل :

یہاں ایک رف خاکہ ہے جو ہمارے عمل کے اقدامات طے کرنے میں ہماری مدد کرے گا۔ ہم مختلف اقدامات کے صرف اشارے دے رہے ہیں (شکل 4.15)



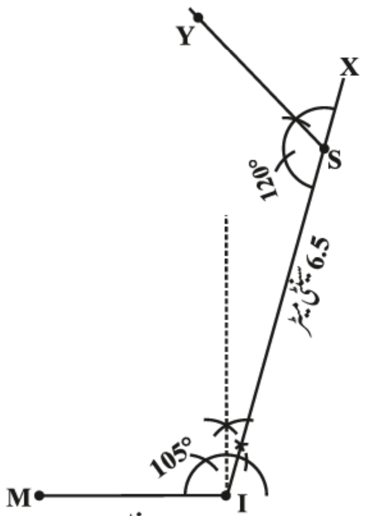
شکل 4.15

قدم 1 آپ نقطوں کی تلاش کس طرح کریں گے؟ قاعدے کے لیے آپ کس پیمائش کو منتخب کریں گے اور آپ کا پہلا قدم کیا ہوگا؟ (شکل 4.16)



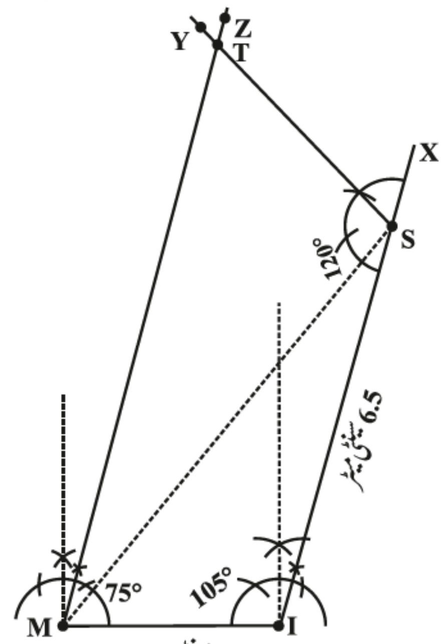
شکل 4.16

قدم 2 نقطہ S پر $\angle ISY = 120°$ بنائیے (شکل 4.17)۔



شکل 4.17

قدم 3 M پر $\angle IMZ = 75°$ بنائیے۔ (SY اور M Z کہاں پر ملیں گے؟) اس نقطے کی T سے نشاندہی کیجیے۔ ہمیں مطلوبہ چارضلعی MIST حاصل ہوتا ہے۔ (شکل 4.18)



شکل 4.18

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1. اگر M پر 75° کے بجائے 100° کا زاویہ دیا ہوتو کیا آپ مذکورہ بالا چار ضلعی MIST بنا سکتے ہیں؟
2. کیا آپ چار ضلعی PLAN بنا سکتے ہیں اگر PL = 6 سینٹی میٹر، LA = 9.5 سینٹی میٹر، $\angle P = 75^\circ$، $\angle L = 150^\circ$ اور $\angle A = 140^\circ$ ہو؟ (اشارہ: زاویہ کی جمعی خصوصیت یاد کیجیے)۔
3. ایک متوازی الاضلاع میں متصل اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہیں۔ کیا ہمیں چار ضلعی بنانے کے لیے اب بھی زاویوں کی پیمائش کی ضرورت پڑے گی جیسا کہ اوپر مثال میں ہے؟

مشق 4.3

1. مندرجہ ذیل چار ضلعی بنائیے۔

(i) چار ضلعی MORE جس میں
MO = 6 سینٹی میٹر
OR = 4.5 سینٹی میٹر
$\angle M = 60^\circ$
$\angle O = 105^\circ$
$\angle R = 105^\circ$ ہے۔

(ii) چار ضلعی PLAN جس میں
PL = 4 سینٹی میٹر
LA = 6.5 سینٹی میٹر
$\angle P = 90^\circ$
$\angle A = 110^\circ$
$\angle N = 85^\circ$ ہے۔

(iii) متوازی الاضلاع HEAR جس میں
HE = 5 سینٹی میٹر
EA = 6 سینٹی میٹر
$\angle R = 85^\circ$ ہے۔

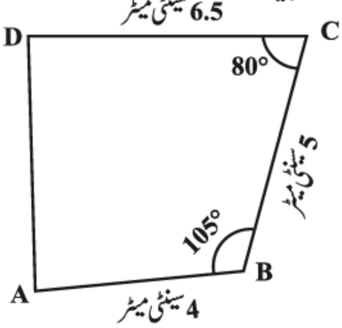
(iv) مستطیل OKAY جس میں
OK = 7 سینٹی میٹر
KA = 5 سینٹی میٹر ہے۔

4.2.4 جب تین اضلاع اور ان کے درمیان کے دو زاویے دیے گئے ہوں

اس طرح کی تشکیل کے وقت جب آپ رف خاکہ بنائیں تو درمیانی زاویوں کو احتیاط سے نوٹ کیجیے۔

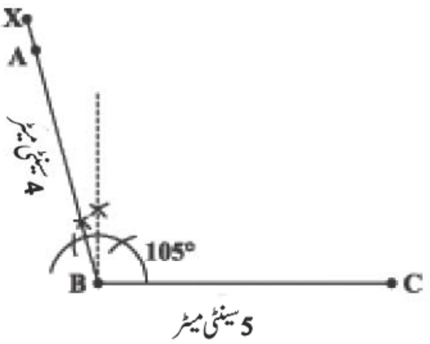
مثال 4 : ایک چار ضلعی ABCD بنائیے، جہاں
AB = 4 سینٹی میٹر، BC = 5 سینٹی میٹر، CD = 6.5 سینٹی میٹر،
$\angle B = 105^\circ$ اور $\angle C = 80^\circ$ ہے۔

حل : ہمیشہ کی طرح اس بار بھی ہم ایک رف خاکہ بنائیں گے یہ جاننے کے لیے کہ ہم کس طرح سے شروعات کریں اور تب ہی ہم چاروں نقطوں کو تلاش کرنے کا منصوبہ تیار کر سکتے ہیں (شکل 4.19)۔



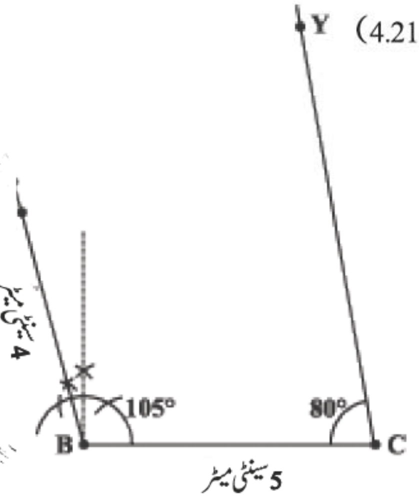
شکل 4.19

قدم 1 B پر BC=5 سینٹی میٹر دوری لے کر شروعات کیجیے۔ B X کے ہمراہ 105° کا زاویہ بنائیے۔ اس سے 4 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر A کو تلاش کیجیے۔ اب ہمارے پاس CB اور A ہیں (شکل 4.20)۔



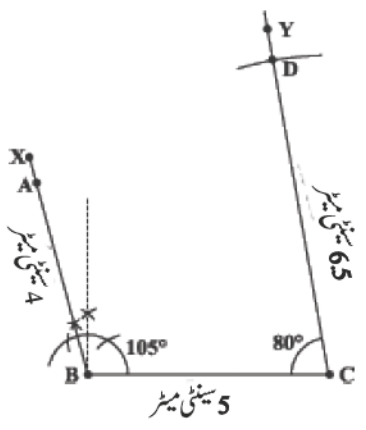
شکل 4.20

قدم 2 چوتھا نقطہ D , C Y پر ہے، جو کہ B C پر 80° کے زاویہ پر جھکا ہوا ہے، اس لیے BC کے نقطہ C پر 80° = ∠BCY بنائیے۔ (شکل 4.21)



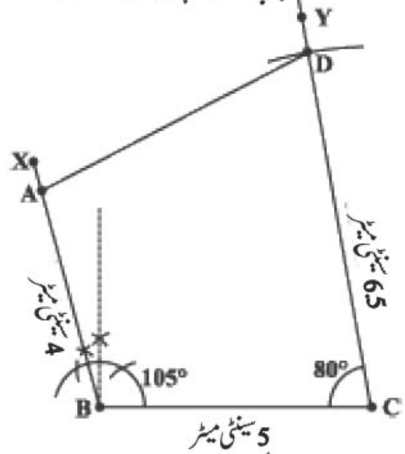
شکل 4.21

قدم 3 نقطہ D، CY پر 6.5 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر ہے۔ C کو مرکز مان کر، 6.5 سینٹی میٹر لمبائی کا ایک قوس بنائیے۔ یہ C Y کو D پر کاٹتا ہے۔ (شکل 4.22)



شکل 4.22

قدم 4 چار ضلعی ABCD کو مکمل کیجیے۔ ABCD مطلوبہ چار ضلعی ہے (شکل 4.23)۔



شکل 4.23

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1. مذکورہ بالا مثال میں ہم نے پہلے BC بنایا۔ اس کے علاوہ اور کون سے شروعاتی نقطے ہو سکتے ہیں؟
2. ابھی تک ہم نے چار ضلعی کی تشکیل میں 5 پیمائشیں استعمال کی ہیں۔ کیا ایک چار ضلعی بنانے میں پانچ پیمائشوں کے الگ الگ گروپ (اب تک جو استعمال ہوئے ہیں ان سے مختلف) ہو سکتے ہیں؟

اس سوال کا جواب دینے میں مندرجہ ذیل مسئلے آپ کی مدد کر سکتے ہیں۔

(i) چار ضلعی ABCD جس میں $AB=5$ سینٹی میٹر، $BC=5.5$ سینٹی میٹر، $CD=4$ سینٹی میٹر، $AD=6$ سینٹی میٹر اور $\angle B=80^\circ$ ہے۔

(ii) چار ضلعی PQRS جس میں $PQ=4.5$ سینٹی میٹر، $\angle P=70^\circ$، $\angle Q=100^\circ$، $\angle R=80^\circ$ اور $\angle S=110^\circ$ ہے۔

آپ خود کچھ اور مثالوں کی تشکیل کیجیے اور ایک چار ضلعی کی تشکیل کے لیے اعداد و شمار کی زیادتی یا کمی معلوم کیجیے۔

مشق 4.4

مندرجہ ذیل چار ضلعی کی تشکیل کیجیے۔

(i) چار ضلعی DEAR جس میں

$DE=4$ سینٹی میٹر

$EA=5$ سینٹی میٹر

$AR=4.5$ سینٹی میٹر

$\angle E=60^\circ$

$\angle A=90^\circ$

(ii) چار ضلعی TRUE جس میں

$TR=3.5$ سینٹی میٹر

$RU=3$ سینٹی میٹر

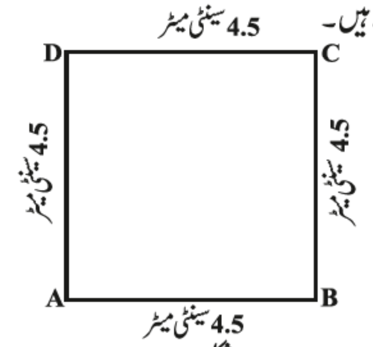
$UE=4$ سینٹی میٹر

$\angle R=75^\circ$

$\angle U=120^\circ$

4.3 کچھ مخصوص حالتیں (Some Special Cases)

چار ضلعی کی تشکیل میں ہم نے ابھی تک 5 پیمائشوں کا استعمال کیا۔ کیا کوئی ایسا بھی چار ضلعی ہو سکتا ہے جس کی تشکیل موجودہ پیمائشوں سے کم میں بھی کی جا سکتی ہے؟ ہم ایسی کچھ حالتوں کی جانچ مندرجہ ذیل مثال سے کرتے ہیں۔



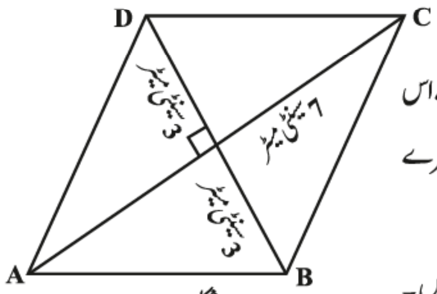
شکل 4.24

مثال 5 : 4.5 سینٹی میٹر ضلع کا ایک مربع بنائیے۔

حل : پہلی نظر میں ایسا لگتا ہے کہ یہاں صرف ایک ہی پیمائش دی گئی ہے۔ حقیقت میں ہمارے پاس اور بہت سی تفصیلات ہیں، کیوں کہ شکل ایک مخصوص چار ضلعی ہے، جس کا نام مربع ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ اس کا ہر زاویۂ، زاویہ قائمہ ہے (رف شکل دیکھیے) (شکل 4.24)۔

اس کی وجہ سے ہم ΔABC کو SAS شرط کا استعمال کر کے بنانے کے قابل ہو جاتے ہیں۔ تب D کو آسانی سے تلاش کیا جا سکتا ہے۔ اب آپ دی ہوئی پیمائش کے مطابق مربع بنانے کی کوشش کیجیے۔

مثال 6 : کیا ایک معین ABCD کی تشکیل ممکن ہے جس میں AC = 7 سینٹی میٹر، BD = 6 سینٹی میٹر؟ اپنے جواب کا جواز پیش کیجیے۔



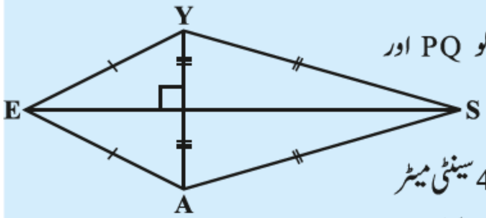
شکل 4.25

حل : معین کی صرف دو پیمائش (وتر) دی گئی ہیں کیوں کہ یہ ایک معین ہے اس لیے ہمیں اس کی خصوصیات سے کافی مدد مل سکتی ہے۔ معین کے وتر ایک دوسرے پر عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

اس لیے پہلے ہم AC = 7 سینٹی میٹر کھینچتے ہیں اور پھر اس کا عمودی ناصف کھینچتے ہیں۔ انھیں نقطہ O پر ملنے دیجیے۔ کھینچے گئے ناصف کے دونوں طرف 3 سینٹی میٹر کی لمبائی کاٹیے۔ اب آپ کو B اور D حاصل ہو گئے۔

اوپر دیے گئے طریقے کی بنا پر معین کو مکمل کیجیے (شکل 4.25)۔

کوشش کیجیے



شکل 4.26

1. آپ ایک مستطیل PQRS کو کس طرح بنائیں گے اگر آپ کو PQ اور QR کی لمبائی معلوم ہو۔
2. ایک پتنگ EASY بنائیے اگر AY = 8 سینٹی میٹر، EY = 4 سینٹی میٹر اور SY = 6 سینٹی میٹر (شکل 4.26)۔ اس عمل میں آپ نے پتنگ کی کون سی خصوصیات کا استعمال کیا؟

مشق 4.5

مندرجہ ذیل کی تشکیل کیجیے۔

1. ایک مربع READ جس میں RE = 5.1 سینٹی میٹر ہے۔
2. ایک معین جس کے وتروں کی لمبائی بالترتیب 5.2 سینٹی میٹر اور 6.4 سینٹی میٹر ہے۔
3. ایک مستطیل جس کے متصل اضلاع کی لمبائیاں 5 سینٹی میٹر اور 4 سینٹی میٹر ہیں۔
4. ایک متوازی الاضلاع OKAY جس میں OK = 5.5 سینٹی میٹر اور KA = 4.2 سینٹی میٹر ہیں۔ کیا یہ یکتا ہے؟

ہم نے کیا سیکھا؟

1. پانچ پیمائشوں سے، ایک منفرد چارضلعی کی تشکیل ہو سکتی ہے۔
2. ایک منفرد چارضلعی کی تشکیل ہو سکتی ہے اگر اس کے 4 اضلاع اور ایک وتر کی لمبائیاں دی گئی ہوں۔
3. ایک چارضلعی کی تشکیل ہو سکتی ہے اگر اس کے دو وتر اور تین اضلاع معلوم ہوں۔
4. ایک منفرد چارضلعی کی تشکیل کی جا سکتی ہے اگر اس کے دو متصل اضلاع اور تین زاویوں کی پیمائش معلوم ہو۔
5. ایک منفرد چارضلعی کی تشکیل کی جا سکتی ہے اگر اس کے تین اضلاع اور دو درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔

نوٹ

باب

5

4817CH05

اعداد وشمار کا استعمال

5.1 معلومات کی تلاش میں

روز مرہ کی زندگی سے آپ نے بہت سی معلومات حاصل کی ہوں گی، مثال کے طور پر:

(a) پچھلے 10 ٹیسٹ میچوں میں ایک بلے باز کے ذریعہ بنائے گئے کل رن۔

(b) پچھلے 10 ایک روزہ میچوں میں ایک گیند باز کے ذریعے لیے ہوئے وکٹ۔

(c) آپ کی کلاس کے طلبا کے ریاضی کے اکائی ٹیسٹ میں حاصل کیے گئے نمبر۔

(d) آپ کے ہر ایک دوست کے ذریعہ پڑھی گئی کہانیوں کی کتابوں کی تعداد وغیرہ۔

ان سبھی حالتوں میں جمع کی گئی معلومات **اعداد وشمار** (Data) کہلاتی ہے۔ عام طور پر اعداد وشمار ایسی حالت کے سلسلہ میں اکٹھا کیے جاتے ہیں جس کا ہم مطالعہ کرنا چاہتے ہیں۔ مثال کے طور پر ایک استاد کی اپنی کلاس کے طلبا کی اوسط اونچائی جاننے میں دلچسپی ہوسکتی ہے۔ اسے معلوم کرنے کے لیے وہ اپنی کلاس کے تمام طلبا کی اونچائیاں لکھے گا، ان اعداد وشمار کو ایک سلسلہ وار طریقہ سے منظّم کرے گا اور پھر ان کی اسی طریقے سے ترجمانی کرے گا۔

کبھی کبھی اعداد وشمار جس چیز کو ظاہر کرتے ہیں اس کا صحیح تصور پیش کرنے کے لیے ان میں گراف کی مدد بھی لی جاتی ہے۔ کیا آپ کو ان مختلف قسم کے گرافوں کے بارے میں یاد ہے جو ہم پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں؟

1. **تصویری گراف** (Pictograph): علامتوں کا استعمال کرتے ہوئے اعداد وشمار کا تصویری اظہار۔

 = 100 کاریں ← ایک علامت 100 کاروں کو ظاہر کرتی ہے۔

جولائی	 = 250  100 کے $\frac{1}{2}$ کو ظاہر کرتی ہے
اگست	 = 300
ستمبر	 = ؟

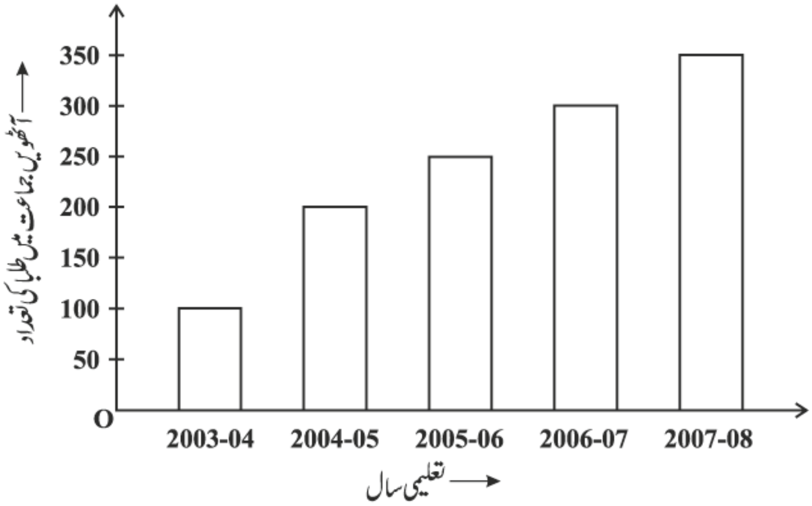
(i) جولائی کے مہینے میں کتنی کاریں بنائی گئیں؟

(ii) کس مہینے میں سب سے زیادہ کاریں بنائی گئیں؟

2. **بارگراف (Bar Graph)** : یکساں چوڑائی کے بار (Bar) کا استعمال کرتے ہوئے معلومات کو ظاہر کرنا جس میں بار(Bar) کی لمبائیاں ان کی متعلقہ قدروں کے متناسب ہوتی ہیں۔

بار کی لمبائی ہر درجہ کی مقدار ظاہر کرتی ہے۔

بار کی چوڑائیاں یکساں ہیں اور دو لگاتار بار کے درمیان یکساں فاصلہ ہے۔



(i) اس بارگراف میں کیا معلومات دی گئی ہیں؟

(ii) کس سال طلبا کی تعداد میں سب سے زیادہ اضافہ ہوا؟

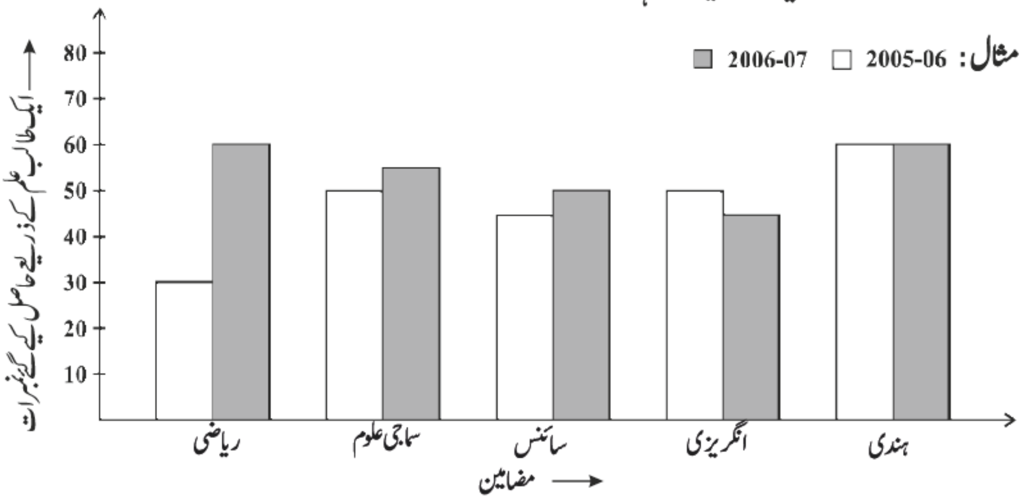
(iii) کس سال طلبا کی تعداد سب سے زیادہ تھی؟

(iv) صحیح یا غلط بتائیے :

سال ''2005-06 میں طلبا کی تعداد 04 - 2003 کی تعداد کی دوگنی ہے۔''

3. **دوہرا بارگراف (Double Bar Graph)** : اعداد و شمار کے دو گروپ کو ایک ساتھ ظاہر کرنے والا بارگراف۔ یہ اعداد و شمار کے موازنہ کے لیے بہت مفید ہوتا ہے۔

مثال:



(i) اس دوہرے بار گراف میں کیا معلومات دی گئی ہے؟

(ii) کس مضمون میں طالب علم کی کارکردگی میں بہتری ہوئی ہے؟

(iii) کس مضمون میں کارکردگی میں گراوٹ آئی ہے؟

(iv) کس مضمون میں کارکردگی ایک جیسی رہی ہے؟

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

اگر ہم بار گراف میں سے کسی ایک بار کی جگہ بدل دیں تو ظاہر کی گئی معلومات میں کیا تبدیلی ہوگی؟ کیوں؟

کوشش کیجیے

دی ہوئی معلومات کو ظاہر کرنے کے لیے ایک مناسب گراف بنائیے۔

.1

مہینہ	جولائی	اگست	ستمبر	اکتوبر	نومبر	دسمبر
فروخت کی گئی گھڑیوں کی تعداد	1000	1500	1500	2000	2500	1500

.2

بچوں کی تعداد جو پسند کرتی ہے	اسکول A	اسکول B	اسکول C
پیدل چلنا	40	55	15
سائیکل چلانا	45	25	35

.3 کرکٹ کی 8 بڑی ٹیموں کا ایک روزہ میچوں میں جیتنے کا فی صد

ٹیم	چمپین ٹرافی سے عالمی کپ 2006 تک	2007 میں پچھلے 10 ایک روزہ میچ
جنوبی افریقہ	75%	78%
آسٹریلیا	61%	40%
سری لنکا	54%	38%
نیوزی لینڈ	47%	50%
انگلینڈ	46%	50%
پاکستان	45%	44%
ویسٹ انڈیز	44%	30%
ہندوستان	43%	56%

5.2 اعداد وشمار کی تنظیم کاری (Organising Data)

عام طور پر ہمیں اعداد وشمار غیر منظّم شکل میں حاصل ہوتے ہیں جنھیں **خام اعداد وشمار** کہتے ہیں۔ ان سے بامعنی نتیجہ نکالنے کے لیے اعداد وشمار کو ایک منظّم شکل میں مرتب کرنے کی ضرورت پڑتی ہے۔ مثال کے طور پر طلبا کے ایک گروپ سے ان کے من پسند مضمون کے بارے میں پوچھا گیا۔ اس کے نتیجوں کی فہرست ذیل میں دی گئی ہے:

آرٹ، ریاضی، سائنس، انگریزی، ریاضی، آرٹ، انگریزی، ریاضی، انگریزی، آرٹ، سائنس، آرٹ، سائنس، سائنس، ریاضی، آرٹ، انگریزی، آرٹ، سائنس، ریاضی، سائنس، آرٹ۔

کس مضمون کو سب سے زیادہ اور کس مضمون کو سب سے کم پسند کیا گیا؟

اس طرح سے غیر منظّم طریقے سے لکھی گئی پسند کو دیکھ کر جواب دینا مشکل ہے۔ ہم ٹیلی مارکس کا استعمال کر کے ان اعداد وشمار کو جدول 5.1 میں مرتب کرتے ہیں۔

جدول 5.1

مضمون	ٹیلی مارکس	طلبا کی تعداد
آرٹ	𝍸 ||	7
ریاضی	𝍸	5
سائنس	𝍸 |	6
انگریزی	||||	4

ہر مضمون کے سامنے لکھے ٹیلی مارکس کی تعداد سے ہمیں اس مضمون کو پسند کرنے والے طلبا کی تعداد معلوم ہوتی ہے۔ یہ اس مضمون کی **تعدد** (Frequency) کہلاتا ہے۔

کسی اندراج کا تعدد وہ تعداد ہے جتنی بار وہ اندراج اس اعداد وشمار میں آتا ہے۔

جدول 5.1 انگریزی کو پسند کرنے والے طلبا کا تعدد 4 ہے۔

ریاضی پسند کرنے والوں کا تعدد 5 ہے۔

اس طرح کے جدول کو **تعدد بٹاؤ جدول** (Frequency Distribution) کہتے ہیں۔ کیوں کہ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک اندراج کتنی مرتبہ واقع ہوا ہے۔

کوشش کیجیے

1. طلبا کے ایک گروپ سے یہ پوچھا گیا کہ وہ سب سے زیادہ کس جانور کو گھر میں پالنا پسند کریں گے۔ نتیجے نیچے دیے گئے ہیں:

کتا، بلّی، بلّی، مچھلی، بلّی، خرگوش، کتا، بلّی، خرگوش، کتا، بلّی، کتا، کتا، کتا، بلّی، گائے، مچھلی، خرگوش، کتا، بلّی، کتا، بلّی، بلّی، کتا، خرگوش، بلّی، مچھلی، کتا۔

ان اعداد وشمار کا ایک تعدد بٹاؤ جدول بنائیے۔

5.3 اعدادوشمار کی گروپ بندی (Grouping Data)

مضمون کی پسند سے متعلق اعدادوشمار ایک اندراج (Entry) کے متعدد مرتبہ آنے کو ظاہر کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر 7 طلبا کو آرٹ پسند ہے۔ 5 طلبا کو ریاضی اور اسی طرح آگے بھی (جدول 5.1)۔ اس معلومات کو ایک تصویری گراف یا بار گراف کے ذریعے دکھایا جا سکتا ہے لیکن کبھی کبھی ہمیں کثیر تعداد کے اعدادوشمار کے ساتھ کام کرنا پڑتا ہے۔ مثال کے طور پر جماعت VIII کے 60 طلبا کے ذریعہ ریاضی میں حاصل کیے گئے نمبروں (50 میں سے) پر غور کیجیے۔

21, 10, 30, 22, 33, 5, 37, 12, 25, 42, 15, 39, 26, 32, 18, 27, 28, 19, 29, 35, 31, 24, 36, 18, 20, 38, 22, 44, 16, 24, 10, 27, 39, 28, 49, 29, 32, 23, 31, 21, 34, 22, 23, 36, 24, 36, 33, 47, 48, 50, 39, 20, 7, 16, 36, 45, 47, 30, 22, 17.

اگر ہم ہر ایک مشاہدہ کے لیے تعدد بٹاؤ جدول بناتے ہیں تو وہ فہرست بہت لمبی ہوگی۔ اس لیے ہم آسانی کے لیے مشاہدات کے کچھ گروپ بناتے ہیں جیسے 0-10، 10-20، 20-10 وغیرہ۔ ہر ایک گروپ میں آنے والے مشاہدات کی تعداد کی بنیاد پر ایک تعدد بٹاؤ جدول بناتے ہیں۔ اس طرح مذکورہ بالا اعدادوشمار کے لیے تعدد بٹاؤ جدول اس طرح ہو سکتا ہے:

جدول 5.2

گروپ	ٹیلی مارکس	تعدد
0-10	||	2
10-20	~~||||~~ ~~||||~~	10
20-30	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |	21
30-40	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||||	19
40-50	~~||||~~ ||	7
50-60	|	1
	کل	**60**

اس طرح ظاہر کیے گئے اعدادوشمار، **گروپ اعدادوشمار** (Grouped Data) کہلاتے ہیں اور حاصل بٹاؤ **گروپ تعددی بٹاؤ** (Grouped frequency distribution) کہلاتا ہے اس سے بامعنی نتیجہ نکالنے میں مدد ملتی ہے جیسے۔

(1) زیادہ تر طلبا نے 20 اور 40 کے درمیان نمبر حاصل کیے۔

(2) آٹھ طلبا نے 50 میں سے 40 سے زیادہ نمبر حاصل کیے۔

گروپ 0-10، 10-20، 20 - 30 وغیرہ سے ہر ایک **کلاس وقفہ** (Class Interval) (یا مختصراً کلاس) کہلاتا ہے۔

غور کیجیے 10 دونوں ہی کلاسوں یعنی 0-10 اور 20 - 10 میں شامل ہے۔ اسی طرح 20 بھی دونوں ہی کلاسوں یعنی (10-20 اور 30 - 20) میں شامل ہے۔ لیکن ایک مشاہدہ (جیسے 10 اور 20) ایک ساتھ دو کلاسوں میں شامل نہیں ہو سکتا۔ اس سے بچنے

کے لیے ہم یہ طریقہ اختیار کر سکتے ہیں کہ مشترک مشاہدہ بڑی کلاس میں شامل ہوگا، جیسے 10 کلاس وقفہ 10-20 (10-0 میں نہیں) میں شامل ہے۔ اسی طرح 20 کلاس وقفہ 20-30 (10-20 میں نہیں) میں شامل ہے۔ کلاس وقفہ 10-20 میں 10 **زیریں کلاس حد** (Lower class limit) کہلاتی ہے اور 20 **بالائی کلاس حد** (Upper class limit) کہلاتی ہے۔ اسی طرح کلاس وقفہ 20-30 میں 20 زیریں کلاس حد ہے اور 30 بالائی کلاس حد ہے۔ مشاہدہ کیجیے کہ ہر کلاس وقفہ 0-10، 10-20، 20-30 وغیرہ میں بالائی اور نچلی کلاس حدوں کا فرق یکساں ہے (یہاں یہ فرق 10 ہے)۔ بالائی کلاس حد اور زیریں کلاس حد کا یہ فرق کلاس وقفہ کی چوڑائی یا سائز کہلاتا ہے۔

کوشش کیجیے

1. مندرجہ ذیل تعدد بٹاؤ جدول کو غور سے پڑھیے اور ذیل میں دیے گئے سوالوں کے جواب دیجیے۔

ایک فیکٹری کے 550 ملازموں کی یومیہ آمدنی کا تعددی بٹاؤ یہ ہے

جدول 5.3

کلاس وقفہ (یومیہ آمدنی ₹ میں)	تعدد (ملازمین کی تعداد)
100-125	45
125-150	25
150-175	55
175-200	125
200-225	140
225-250	55
250-275	35
275-300	50
300-325	20
کل	**550**

(i) کلاس وقفہ کا سائز کیا ہے؟
(ii) کس کلاس کا تعدد سب سے زیادہ ہے؟
(iii) کس کلاس کا تعدد سب سے کم ہے؟
(iv) کلاس وقفہ 250-275 کی بالائی حد کیا ہے؟
(v) کن دو کلاسوں کا تعدد ایک ہی ہے؟

2. وقفوں 30-35 اور 30-40 وغیرہ کا استعمال کرتے ہوئے ایک جماعت کے 20 طلبا کے وزن (کلوگرام میں) کے مندرجہ ذیل اعداد و شمار کے لیے ایک تعددی بٹاؤ جدول بنائیے۔

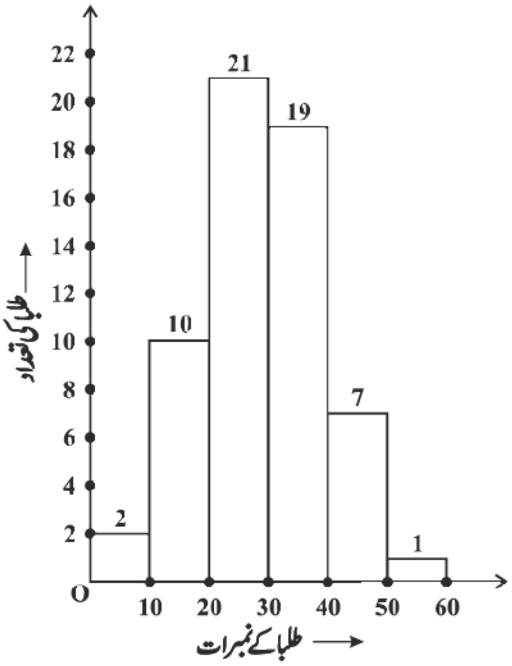
40, 38, 33, 48, 60, 53, 31, 46, 34, 36, 49, 41, 55, 49, 65, 42, 44, 47, 38, 39.

5.3.1 قدرے مختلف بار

آیئے 60 طلبا کے ریاضی کے ایک ٹیسٹ میں حاصل کیے گئے نمبروں کے گروپ تعدد بٹاؤ پر غور کریں (جدول 5.4)۔

جدول 5.4

کلاس وقفہ	تعدد
0-10	2
10-20	10
20-30	21
30-40	19
40-50	7
50-60	1
کل	**60**

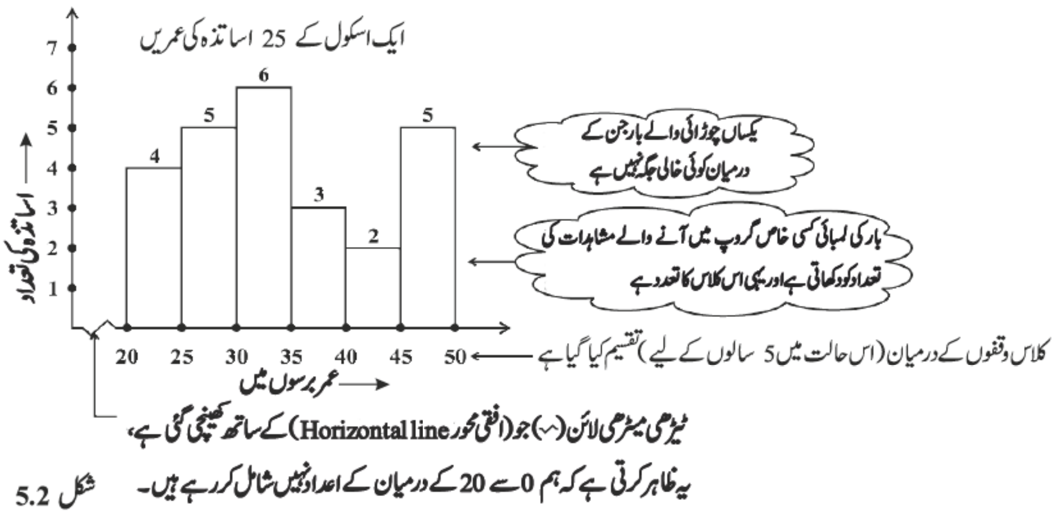


شکل 5.1

ان اعداد وشمار کو گراف کی مدد سے متصل گراف میں ظاہر کیا گیا ہے (شکل 5.1)۔

کیا یہ گراف کسی قدر ساتویں جماعت میں آپ کے بنائے گراف سے مختلف ہے؟ مشاہدہ کیجیے کہ یہاں ہم نے مشاہدات کے گروپ (یعنی کلاس وقفوں) کو افقی محور پر ظاہر کیا ہے۔ بار کی اونچائی کلاس وقفہ کے تعدد کو ظاہر کرتی ہے۔ ساتھ ہی، یہاں بار کے درمیان کوئی خالی جگہ نہیں ہے کیوں کہ کلاس وقفوں کے درمیان بھی کوئی خالی جگہ نہیں ہے۔

اعداد وشمار کے اس گرافی اظہار کو **ہسٹوگرام** (Histogram) کہتے ہیں۔ مندرجہ ذیل گراف ایک دوسرا ہسٹوگرام ہے (شکل 5.2)۔



شکل 5.2

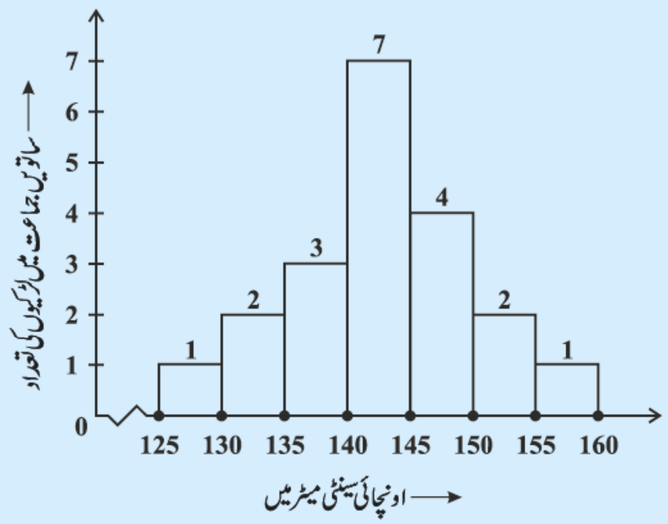
اس ہسٹوگرام کے بارے سے ہم مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دے سکتے ہیں:

(i) کتنے اساتذہ کی عمر 45 سال یا اس سے زیادہ ہے لیکن 50 سال سے کم ہے؟

(ii) کتنے اساتذہ کی عمر 35 سال سے کم ہے؟

کوشش کیجیے

1. ہسٹوگرام (شکل 5.3) کا مشاہدہ کیجیے اور ذیل میں دیے گئے سوالوں کے جواب دیجیے۔



شکل 5.3

(i) اس ہسٹوگرام سے کون سی معلومات دی گئی ہے؟

(ii) کس گروپ میں لڑکیوں کی تعداد سب سے زیادہ ہے؟

(iii) کتنی لڑکیوں کی اونچائی 145 سینٹی میٹر یا اُس سے زیادہ ہے؟

(iv) اگر ہم لڑکیوں کی تعداد کو درج ذیل تین گروپوں میں تقسیم کریں تو ہر گروپ میں لڑکیوں کی تعداد کیا ہوگی؟

150 سینٹی میٹر یا اس سے زیادہ	گروپ A ____
140 سینٹی میٹر یا اس سے زیادہ لیکن 150 سینٹی میٹر سے کم	گروپ B ____
140 سینٹی میٹر سے کم	گروپ C ____

مشق 5.1

1. مندرجہ ذیل میں سے کن اعدادوشمار کو دکھانے کے لیے آپ ہسٹوگرام کا استعمال کریں گے؟

(a) ایک ڈاکیہ کے تھیلے میں مختلف علاقوں کے خطوں کی تعداد۔

(b) کسی کھیل کود کے مقابلہ میں حصہ لینے والے کھلاڑیوں کی اونچائی۔

(c) 5 کمپنیوں کے ذریعہ تیار کی گئی کیسٹوں کی تعداد۔

(d) کسی اسٹیشن پر صبح 7 بجے سے شام 7 بجے کے دوران ٹرین میں سفر کرنے والے مسافروں کی تعداد۔

ہر ایک کے لیے وجہ بھی بتائیے۔

2. کسی ڈپارٹ مینٹل اسٹور پر خریداری کرنے آئے لوگوں کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے: مرد (M)، عورت (W)، لڑکا (B) یا لڑکی (G) سے مندرجہ ذیل فہرست ان خریداروں کی ہے جو صبح کے سب سے پہلے گھنٹے میں آئے ہیں:

W W W G B W W M G G M M W W W W G B M W B G G M W W M M W W W W M W

B W G M W W W W G W M M W W M W G W M G W M M B G G W

ٹیلی مارکس کی مدد سے ایک تعدد بٹاؤ جدول بنائیے۔ اسے ظاہر کرنے کے لیے ایک بار گراف کھینچیے۔

3. کسی فیکٹری کے 30 ملازمین کی ہفتہ واری مزدوری (₹ میں) مندرجہ ذیل ہے۔

830, 835, 890, 810, 835, 836, 869, 845, 898, 890, 820, 860, 832, 833, 855, 845, 804, 808,

812, 840, 885, 835, 835, 836, 878, 840, 868, 890, 806, 840

ٹیلی مارکس کا استعمال کرتے ہوئے وقفہ 810 - 800 اور 820 - 810 اور اسی طرح آگے ایک تعدد بٹاؤ جدول بنائیے۔

4. سوال 3 میں دیے گئے اعدادوشمار سے حاصل جدول کے لیے ایک ہسٹوگرام بنائیے اور مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے۔

(i) کس گروپ میں مزدوروں کی تعداد سب سے زیادہ ہے؟

(ii) کتنے مزدور 850 ₹ یا اس سے زیادہ مزدوری حاصل کرتے ہیں؟

(iii) کتنے مزدور 850 ₹ سے کم مزدوری حاصل کرتے ہیں؟

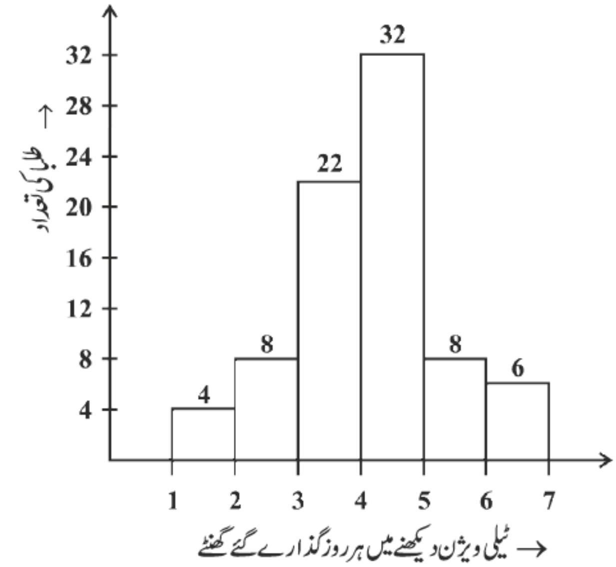
5. چھٹی کے دنوں میں ایک مخصوص کلاس کے طلبا کئی گھنٹے ٹیلیویژن دیکھنے میں گذارتے ہیں جو ایک گراف کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔

مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے۔

(i) زیادہ سے زیادہ طلبا نے کتنے گھنٹے ٹی وی دیکھا؟

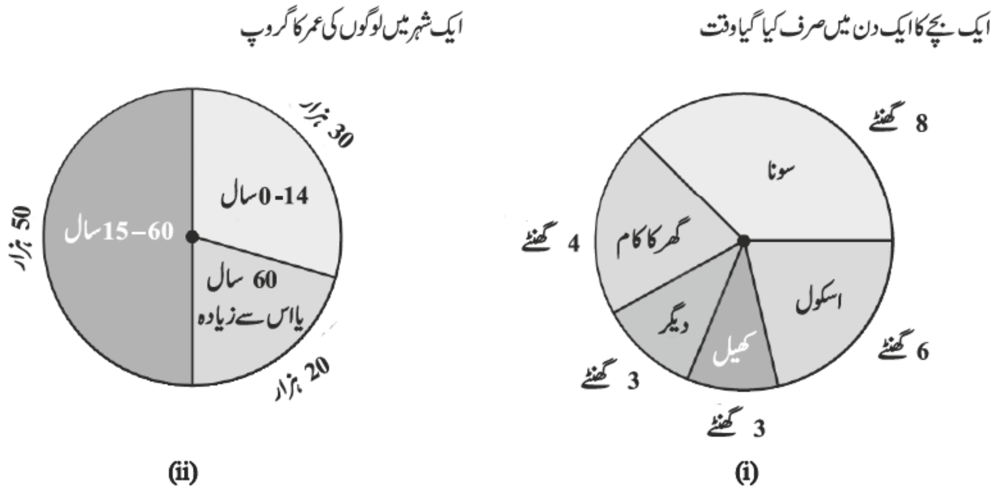
(ii) کتنے طلبا نے 4 گھنٹے سے کم وقت تک ٹی وی دیکھا؟

(iii) کتنے طلبا نے 5 گھنٹے سے زیادہ کا وقت ٹی وی دیکھنے میں صرف کیا؟



5.4 دائرہ گراف یا پائی چارٹ (Circle Graph or Pie Chart)

کیا آپ کے سامنے دائرہ کی شکل میں کبھی اعداد و شمار ظاہر کیے گئے ہیں جیسا کہ (شکل 5.4) میں ظاہر کیا گیا ہے؟



شکل 5.4

یہ **دائرہ گراف** (Circle Graphs) کہلاتے ہیں۔ ایک دائرہ گراف کسی مکمل اور اس کے حصوں میں تعلق کو دکھاتا ہے۔ یہاں مکمل دائرہ کو سیکٹر میں بانٹ دیا جاتا ہے۔ ہر سیکٹر کا سائز اس مشغلہ یا معلومات کے متناسب ہے جس کو یہ ظاہر کرتا ہے۔

مثال کے طور پر مذکورہ بالا گراف میں سونے کے عمل میں خرچ کیے گئے گھنٹوں میں سیکٹر کا متناسب حصہ

$$= \frac{\text{سونے کے گھنٹوں کی تعداد}}{\text{مکمل دن}} = \frac{8 \text{ گھنٹے}}{24 \text{ گھنٹے}} = \frac{1}{3}$$

اس لیے، اس سیکٹر کو مکمل دائرہ کے $\frac{1}{3}$ حصہ میں ظاہر کیا گیا ہے۔ اسی طرح اسکول میں خرچ کیے گئے گھنٹوں کے سیکٹر کا متناسب حصہ

$$= \frac{\text{اسکول کے گھنٹوں کی تعداد}}{\text{مکمل دن}} = \frac{6 \text{ گھنٹے}}{24 \text{ گھنٹے}} = \frac{1}{4}$$

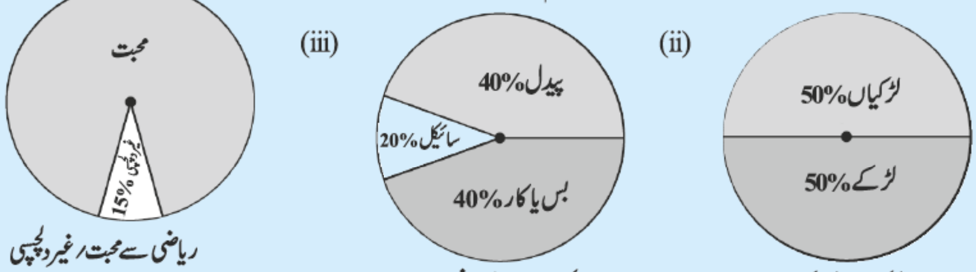
اس لیے اس سیکٹر کو دائرہ کے $\frac{1}{4}$ حصہ کی شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔ اسی طرح دوسرے سیکٹر کے سائز معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

تمام مشغلوں کے کسور کو جمع کیجیے۔ کیا آپ کو حاصل جمع 'ایک' حاصل ہوتا ہے؟

ایک دائرہ گراف **پائی چارٹ** (Pie Chart) بھی کہلاتا ہے۔

کوشش کیجیے

1. مندرجہ ذیل ہر ایک پائی چارٹ (شکل 5.5) آپ کی کلاس کے بارے میں مختلف معلومات فراہم کرتا ہے ان میں سے ہر ایک معلومات کو ظاہر کرنے والا دائرہ کا حصہ معلوم کیجیے۔



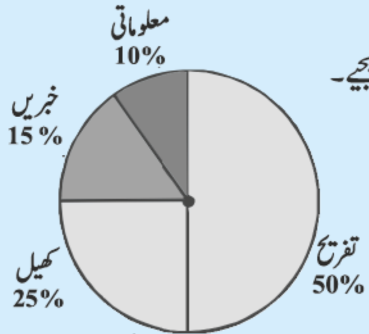
(i) لڑکیاں یا لڑکے (ii) اسکول کے لیے ٹرانسپورٹ (iii) ریاضی سے محبت / غیر دلچسپی

شکل 5.5

2. دیے گئے پائی چارٹ (شکل 5.6) کی مدد سے مندرجہ ذیل سوالات کے جواب دیجیے۔

(i) کس قسم کے پروگرام سب سے زیادہ دیکھے جاتے ہیں؟

(ii) کن دو طرح کے پروگراموں کو دیکھنے والوں کی کل تعداد کھیلوں کے پروگرام دیکھنے والوں کی تعداد کے برابر ہے۔



ٹیلی ویژن کے مختلف چینلوں کو دیکھنے والے ناظرین

شکل 5.6

5.4.1 پائی چارٹ بنانا

کسی اسکول کے طلبا کے ذریعہ پسند کی جانے والی آئس کریم کے ذائقوں (Flavours) کا فی صد نیچے دیا گیا ہے۔

ذائقہ	ذائقہ پسند کرنے والے طلبا کا فی صد
چاکلیٹ	50%
ونیلا	25%
دوسری قسم	25%

آیئے ان اعداد و شمار کو ایک پائی چارٹ کی مدد سے ظاہر کرتے ہیں۔

ایک دائرہ کے مرکز پر پورا زاویہ 360° ہے۔ سیکٹروں کے مرکزی زاویہ 360° کے حصے یا کوئی کسر ہوں گے۔ ہم سیکٹر کے مرکزی زاویوں کو معلوم کرنے کے لیے ایک جدول بناتے ہیں (جدول 5.5)۔

جدول 5.5

ذائقہ	ذائقہ کو پسند کرنے والے طلبا کا فی صد	کسر کا حصہ	360° کی کسر
چاکلیٹ	50%	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	360° کا $\frac{1}{2} = 180^\circ$
ونیلا	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	360° کا $\frac{1}{4} = 90^\circ$
دوسری قسم	25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	360° کا $\frac{1}{4} = 90^\circ$

1. کسی مناسب نصف قطر کا ایک دائرہ کھینچیے۔
اس کے مرکز (O) سے اور ایک نصف قطر (OA) کی نشاندہی کیجیے۔

2. چاکلیٹ کے لیے سیکٹر کا زاویہ 180° ہے۔
چاندے کا استعمال کرکے $\angle AOB = 180^\circ$ کھینچیے۔

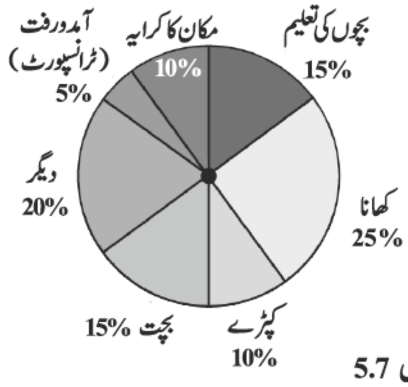
3. بچے ہوئے سیکٹروں کی اسی طرح نشاندہی کیجیے۔

مثال 1 : متصل پائی چارٹ (شکل 5.7) ایک مہینے میں ایک خاندان کا مختلف چیزوں میں خرچ (فیصد میں) اور اس کی بچت کو ظاہر کرتا ہے۔

(i) کس چیز میں سب سے زیادہ خرچ کیا گیا؟

(ii) کس چیز میں ہوا خرچ کنبہ کی کل بچت کے برابر ہے؟

(iii) اگر کنبہ کی ماہانہ بچت ₹ 3000 ہے تو کپڑوں پر ہونے والا ماہانہ خرچ کتنا ہے؟



شکل 5.7

حل :

(i) سب سے زیادہ کھانے پر خرچ ہے۔

(ii) بچوں کی تعلیم پر ہونے والا خرچ (15%) خاندان کی کل بچت کے برابر ہے۔

(iii) 15% ظاہر کرتا ہے ₹ 3000 کو

اس لیے 10% ظاہر کرتا ہے $10 \times \frac{3000}{15}$ ₹ = 2000 ₹

مثال 2 : ذیل میں کسی مخصوص دن ایک بیکری کی دوکان میں ہوئی مختلف چیزوں کی فروخت (روپیوں میں) دی گئی ہے۔

عام ڈبل روٹی	:	320
فروٹ بریڈ	:	80
کیک اور پیسٹری	:	160
بسکٹ	:	120
دیگر	:	40
میزان	:	**720**

اس ڈاٹا کے لیے ایک پائی چارٹ کھینچیے

حل : ہم ہر سیکٹر کا مرکزی زاویہ معلوم کرتے ہیں۔ یہاں کل فروخت = 720 روپے ہے۔ اس سے ہمیں مندرجہ ذیل جدول حاصل ہوتی ہے۔

اشیا	بکری (روپیوں میں)	کسر کا حصہ	مرکزی زاویہ
عام ڈبل روٹی	320	$\frac{320}{720}=\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}\times 360° = 160°$
بسکٹ	120	$\frac{120}{720}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times 360° = 60°$
کیک اور پیسٹری	160	$\frac{160}{720}=\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}\times 360° = 80°$
فروٹ بریڈ	80	$\frac{80}{720}=\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}\times 360° = 40°$
دیگر	40	$\frac{40}{720}=\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}\times 360° = 20°$

مذکورہ بالا کا استعمال کرکے ہم ایک پائی چارٹ بناتے ہیں (شکل 5.8):

شکل 5.8

کوشش کیجیے

ذیل میں دیے گئے اعداد و شمار کی مدد سے پائی چارٹ بنائیے۔

ایک بچّے نے ایک دن میں اس طرح اپنا وقت صرف کیا۔

سونا — 8 گھنٹے

اسکول — 6 گھنٹے

گھر کا کام — 4 گھنٹے

کھیل — 4 گھنٹے

دیگر — 2 گھنٹے

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

مندرجہ ذیل اعداد و شمار کو ظاہر کرنے کے لیے کس قسم کا گراف مناسب ہوگا۔

1. کسی صوبہ میں گیہوں کی پیداوار

سال	2001	2002	2003	2004	2005	2006
پیداوار (لاکھ ٹن میں)	60	50	70	55	80	85

2. لوگوں کے ایک گروپ کے کھانے کی پسند

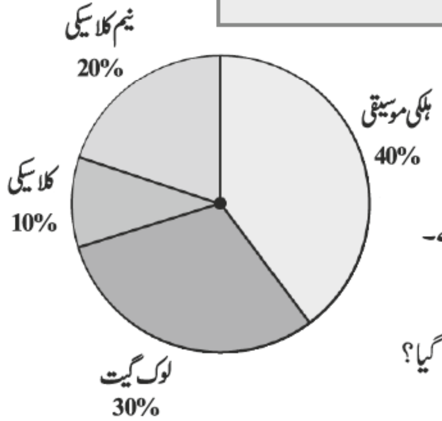
پسندیدہ کھانا	لوگوں کی تعداد
شمالی ہندوستانی	30
دکنی ہندوستانی	40
گجراتی	25
دیگر	25
کل	**120**

3. فیکٹری کے مزدوروں کے ایک گروپ کی یومیہ آمدنی

یومیہ آمدنی (روپیوں میں)	مزدوروں کی تعداد (ایک فیکٹری میں)
75-100	45
100-125	35

125-150	55
150-175	30
175-200	50
200-225	125
225-250	140
میزان	**480**

مشق 5.2



.1 ایک شہر کے نوجوانوں کے ایک گروپ سے یہ معلوم کرنے کے لیے کہ انھیں کس قسم کی موسیقی پسند ہے، سروے کیا گیا۔ ان سے حاصل اعداد وشمار کو متصل پائی چارٹ میں ظاہر کیا گیا ہے۔

اس پائی چارٹ کی مدد سے مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

(i) اگر 20 لوگ کلاسیکی موسیقی پسند کرتے ہیں تو کل کتنے نوجوان لوگوں کو سروے میں شامل کیا گیا؟

(ii) کس قسم کی موسیقی کو سب سے زیادہ لوگ پسند کرتے ہیں؟

(iii) اگر ایک کیسٹ کمپنی 1000 سی ڈی تیار کرے تو وہ ہر قسم کی کتنی سی ڈی تیار کرے گی؟

موسم	ووٹوں کی تعداد
گرمی	90
برسات	120
سردی	150

.2 360 لوگوں کے ایک گروپ سے تین موسموں یعنی برسات، سردی اور گرمی میں سے اپنے پسندیدہ موسم کو ووٹ دینے کے لیے کہا گیا۔ ان سے موصول اعداد وشمار کو متصل تصویر میں دکھایا گیا ہے۔

(i) کس موسم کو سب سے زیادہ ووٹ ملے؟

(ii) ہر سیکٹر کا مرکزی زاویہ معلوم کیجیے۔

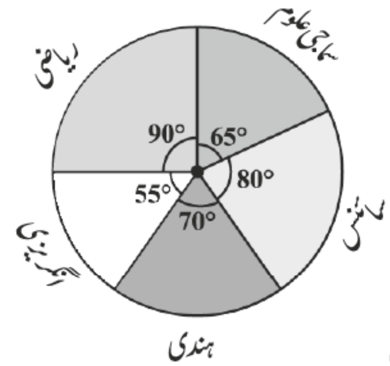
(iii) اس معلومات کو دکھانے کے لیے ایک پائی چارٹ بنائیے۔

.3 مندرجہ ذیل معلومات کو ظاہر کرنے کے لیے ایک پائی چارٹ بنائیے۔ یہ جدول لوگوں کے ایک گروپ کے ذریعہ پسند کیے جانے والے رنگوں کو ظاہر کرتا ہے۔

رنگ	لوگوں کی تعداد
نیلا	18
ہرا	9
لال	6
پیلا	3
کل	**36**

ہر سیکٹر کا تناسب معلوم کیجیے۔ مثال کے طور پر، نیلا $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$ ہے، ہرا $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ وغیرہ۔
اس کا استعمال کرتے ہوئے نظیری زاویے معلوم کیجیے۔

4. متصل پائی چارٹ ایک طالب علم کے ذریعہ امتحان میں ہندی، انگریزی، حساب، سماجی علوم اور سائنس میں حاصل کیے گئے نمبروں کو ظاہر کرتا ہے۔ اگر اس طالب علم کے ذریعہ حاصل کیے گئے کل نمبر 540 تھے تو مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے۔



(i) کس مضمون میں طالب علم نے 105 نمبر حاصل کیے؟
(اشارہ: 540 نمبروں کے لیے مرکزی زاویہ 360° ہے، اس لیے 105 نمبروں کے لیے مرکزی زاویہ کیا ہوگا؟)

(ii) طالب علم نے ریاضی میں ہندی سے کتنے زیادہ نمبر حاصل کیے؟

(iii) جانچ کیجیے کہ کیا سماجی علوم اور ریاضی میں حاصل کیے گئے نمبروں کا حاصل جمع سائنس اور ہندی میں حاصل کیے گئے نمبروں کے حاصل جمع سے زیادہ ہے۔ (اشارہ: مرکزی زاویوں پر غور کیجیے۔)

5. ایک ہاسٹل میں مختلف زبانیں بولنے والے طلبا کی تعداد نیچے دی گئی ہے۔ ان اعداد و شمار کو ایک پائی چارٹ کے ذریعہ دکھایئے۔

زبان	گجراتی	انگریزی	اردو	ہندی	سندھی	کل
طلبا کی تعداد	40	12	9	7	4	72

5.5 امکان اور احتمال (Chance and Probability)

کبھی کبھی ایسا ہوتا ہے کہ برسات کے موسم میں ہم روز برساتی لے کر باہر نکلتے ہیں اور کئی دنوں تک بارش نہیں ہوتی۔ اتفاق سے ایک دن آپ برساتی لے جانا بھول جاتے ہیں اور اس دن تیز بارش ہو جاتی ہے۔

کبھی کبھی ایسا بھی ہوتا ہے کہ ایک طالب علم ایک ٹیسٹ کے لیے 5 میں سے 4 باب اچھی طرح سے تیار کرتا ہے لیکن ایک اہم سوال اس باب میں سے پوچھ لیا جاتا ہے جس کو اس نے اچھی طرح تیار نہیں کیا تھا۔

ہر شخص جانتا ہے کہ کوئی خاص ٹرین ہمیشہ صحیح وقت پر چلتی ہے لیکن جس دن آپ صحیح وقت پر پہنچتے ہیں اس دن وہ دیر سے آتی ہے!

آپ کو مندرجہ بالا ایسی بہت سی حالتوں کا سامنا کرنا پڑتا ہے جہاں آپ امکان (Chance) کا سہارا لے کر کام کرنا چاہتے ہیں لیکن وہ اس طرح نہیں ہوتا جیسا آپ چاہتے ہیں۔ کیا آپ ایسی کچھ اور مثالیں دے سکتے ہیں؟ یہ ایسی مثالیں ہیں جہاں کسی بات کے ہونے یا نہ ہونے کے امکانات برابر نہیں ہیں۔ ایک ٹرین کے وقت پر آنے یا نہ آنے کا امکان برابر نہیں ہے۔ جب آپ کوئی ٹکٹ

خریدتے ہیں اور وہ انتظار کی حالت میں (Wait listed) ہے تو آپ امکان کا سہارا لیتے ہیں۔ آپ یہ امید کرتے ہیں کہ جب آپ سفر کریں گے تب ممکن ہے کہ اس ٹکٹ پر آپ کی سیٹ محفوظ (Reserve) ہو جائے گی۔

یہاں ہم ایسے کچھ تجربوں پر غور کریں گے جن میں نتیجوں کے واقع ہونے کا امکان برابر ہو۔

5.5.1 کوئی نتیجہ حاصل کرنا (Getting a Result)

آپ نے اکثر دیکھا ہوگا کہ کرکٹ کا میچ شروع ہونے سے پہلے دونوں ٹیموں کے کپتان میدان میں جا کر یہ طے کرنے کے لیے سکّہ اچھالتے ہیں کہ کون سی ٹیم پہلے بلے بازی کرے گی۔

جب ایک سکّہ اچھالا جاتا ہے تو آپ کو کیا ممکن نتیجہ حاصل ہوتا ہے؟ یقیناً، ہیڈ (Head) یا ٹیل (Tail)۔

تصور کیجیے کہ آپ ٹیم کے کپتان ہیں اور آپ کا دوست دوسری ٹیم کا کپتان ہے۔ آپ ایک سکّہ اچھالتے ہیں اور اپنے دوست سے ہیڈ یا ٹیل کہنے کے لیے کہتے ہیں۔ کیا آپ اس نتیجہ پر کوئی اختیار رکھ سکتے ہیں؟ اگر آپ چاہیں تو کیا آپ کو ہیڈ حاصل ہو سکتا ہے؟ یا اگر آپ چاہیں تو آپ کو ٹیل حاصل ہو سکتا ہے؟ نہیں، ایسا ممکن نہیں ہے۔ اس طرح کا تجربہ ایک **بلا منصوبہ تجربہ** (Random Experiment) کہلاتا ہے۔ ہیڈ یا ٹیل اس تجربہ کے دو **نتیجے** (Outcomes) ہیں۔

کوشش کیجیے

1. اگر آپ ایک اسکوٹر چلانا شروع کریں (Start) تو ممکن نتائج کیا ہو سکتے ہیں؟
2. جب ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے تو چھ ممکن نتائج کیا ہو سکتے ہیں؟
3. جب آپ پہیے کو گھمائیں گے تو ممکنہ نتائج کیا ہوں گے (شکل 5.9)؟

   ان کی فہرست بنائیے۔

   (یہاں نتیجہ کے معنی ہیں وہ سیکٹر جہاں سوئی گھمانے کے بعد ٹھہر جائے گی)

شکل 5.9

شکل 5.10

4. آپ کے پاس ایک گھڑا ہے جس میں مختلف رنگوں کی پانچ ایک جیسی گیندیں ہیں۔ آپ بنا دیکھے اس میں سے ایک گیند باہر نکال لیتے ہیں۔ حاصل ہونے والے نتیجوں کو لکھیے (شکل 5.10)۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

ایک پانسہ کو پھینکنے پر:

- کیا پہلے کھلاڑی کے چھ حاصل کرنے کا امکان زیادہ ہے؟
- کیا اس کے بعد کھیلنے والے کھلاڑی کے چھ حاصل کرنے کا امکان کم ہے؟
- مان لیجیے کہ دوسرا کھلاڑی چھ حاصل کر لیتا ہے۔ کیا اس کے معنی یہ ہیں کہ تیسرے کھلاڑی کے چھ حاصل کرنے کا کوئی امکان نہیں ہے؟

5.5.2 مساوی امکانی نتیجہ

ایک سکہ کئی مرتبہ اچھالا جاتا ہے اور جتنی بار ہیڈ یا ٹیل آتا ہے انھیں لکھ لیا جاتا ہے۔ آیئے اپنے نتائج کی شیٹ کو دیکھیں جہاں ہم اُچھالوں کی تعداد میں اضافہ کرتے جارہے ہیں:

اچھالوں کی تعداد	ٹیلی مارکس (H)	ہیڈ کی تعداد	ٹیلی مارکس (T)	ٹیل کی تعداد
50	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert\vert\vert$ $\vert\vert$	27	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert\vert$	23
60	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert\vert$	28	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\cancel{\vert\vert\vert\vert}$ $\vert\vert$	32
70	...	33	...	37
80	...	38	...	42
90	...	44	...	46
100	...	48	...	52

غور کیجیے کہ جب آپ اچھالوں کی تعداد بڑھاتے جاتے ہیں تو ہیڈ اور ٹیل کی تعداد ایک دوسرے کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔

ایسا ایک پانسے کے ساتھ بھی ہوسکتا ہے، جب اسے ایک بڑی تعداد میں پھینکا جاتا ہے۔ چھ نتیجوں میں سے ہر ایک کی تعداد تقریباً برابر ہو جاتی ہے۔

ایسی حالتوں میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ تجربہ کے مختلف نتائج مساوی امکانی ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ سبھی میں سے ہر ایک نتیجہ کے آنے کا امکان ایک ہی ہے۔

5.5.3 امکانات کو احتمال سے منسلک (جوڑنا) کرنا

سکے کو ایک بار اچھالنے کے تجربہ پر غور کیجیے۔ کیا نتیجہ نکلا؟ یہاں صرف دو نتیجے ہیں— ہیڈ (Head) یا ٹیل (Tail)۔ دونوں ہی نتیجے مساوی امکانی ہیں۔ ایک ہیڈ حاصل کرنے کے امکان دو نتیجوں میں سے ایک ہے یعنی $\frac{1}{2}$ ہے۔ دوسرے لفظوں میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ہیڈ حاصل کرنے کا احتمال = $\frac{1}{2}$ ہے۔ ایک ٹیل حاصل کرنے کا احتمال کیا ہے؟

اب پانسہ پھینکنے کی مثال پر غور کیجیے جس کے رُخوں (Face) پر 1، 2، 3، 4، 5، 6 (ایک رُخ پر ایک عدد) لکھا ہے۔ اگر آپ اسے ایک بار پھینکیں تو کیا نتائج حاصل ہوں گے؟ ان کے کیا نتائج ہوں گے؟ 1، 2، 3، 4، 5، 6۔ اس طرح یہاں چھ مساوی امکانات ہیں۔

نتیجہ '2' حاصل کرنے کا احتمال کیا ہے؟

یہ احتمال ہے: $\frac{1}{6}$ ← 2 دینے والے نتیجوں کی تعداد
← مساوی امکانی نتیجوں کی تعداد

عدد 5 حاصل کرنے کا احتمال کیا ہے؟ عدد 7 حاصل کرنے کا احتمال کیا ہے؟ 1 سے 6 تک کے عدد حاصل کرنے کا احتمال کیا ہے؟

5.5.4 وقوعوں کی شکل میں نتائج

ایک تجربہ کے ہر نتیجہ یا نتیجوں کے مجموعہ سے ایک وقوعہ بنتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک سکہ کو اچھالنے کے تجربہ میں ہیڈ حاصل کرنا ایک وقوعہ ہے اور ٹیل حاصل کرنا بھی ایک وقوعہ ہے۔ ایک پانسے کو پھینکنے کی شکل میں نتائج 1، 2، 3، 4، 5 اور 6 میں سے ہر ایک نتیجہ حاصل کرنا ایک وقوعہ ہے۔ کیا ایک جفت عدد حاصل کرنا ایک وقوعہ ہے؟ کیوں کہ ایک جفت عدد 2، 4 اور 6 ہوسکتا ہے۔ اس لیے ایک جفت عدد حاصل کرنا بھی ایک وقوعہ ہے۔ ایک جفت عدد حاصل کرنے کا احتمال کیا ہوگا؟

یہ احتمال ہے $\frac{3}{6}$ ← ان نتائج کی تعداد جو وقوعہ بناتے ہیں
← تجربہ کے نتائج کی کل تعداد۔

مثال 3 : ایک تھیلے میں 4 لال گیندیں اور 2 پیلی گیندیں ہیں (گیندیں رنگ کے علاوہ کئی طرح سے ایک جیسی یعنی مشابہ ہیں)۔ تھیلے کے اندر سے بنا دیکھے ایک گیند نکالی جاتی ہے۔ ایک لال گیند کے نکالے جانے کا احتمال کیا ہے؟ کیا یہ ایک پیلی گیند کے نکالے جانے کے احتمال سے زیادہ ہے یا کم؟

حل : یہاں وقوعہ کے کل نتیجہ $6 = (2 + 4)$ ہیں۔ لال گیند حاصل کرنے کے 4 نتیجے ہیں۔ (کیوں؟)

اس لیے، لال گیند حاصل کرنے کا احتمال $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ہے۔ اسی طرح پیلی گیند حاصل کرنے کا احتمال $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ہے۔ (کیوں؟)

لہٰذا لال گیند حاصل کرنے کا احتمال پیلی گیند کے حاصل کرنے کے احتمال سے زیادہ ہے۔

کوشش کیجیے

مان لیجیے کہ آپ پہیے کو گھماتے ہیں

1. (i) اس پہیے پر ہر اسکٹر حاصل کرنے کے نتیجوں کی تعداد اور ہر اسکٹر حاصل نہ ہونے کے نتیجوں کی تعداد لکھیے (شکل 5.11)

(ii) ہر اسکٹر حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

(iii) ہر اسکٹر حاصل نہ ہونے کا احتمال معلوم کیجیے۔

شکل 5.11

5.5.5 حقیقی زندگی سے متعلق امکان اور احتمال

ہم نے اس امکان کی بات کی تھی کہ جس میں صرف اسی دن بارش ہوئی جب ہم برساتی کو ساتھ لے کر نہیں چلے تھے۔

آپ احتمال کی شکل میں امکان کے بارے میں کیا کہہ سکتے تھے؟ کیا بارش برسات کے موسم میں 10 دن میں سے 1 دن ہو سکتی ہے؟ تب بارش ہونے کا احتمال $\frac{1}{10}$ ہے۔ بارش نہ ہونے کا احتمال $= \frac{9}{10}$ ہے۔ (یہ تصور کرتے ہوئے کہ کسی دن بارش ہونا یا نہ ہونا مساوی امکانی ہے)۔

اصل زندگی کی مختلف حالتوں میں احتمال کا استعمال کیا جاتا ہے۔

1. ایک بڑے گروپ کی خصوصیات کو اس گروپ کے ایک چھوٹے حصہ کا استعمال کرتے ہوئے معلوم کرنا۔

مثال کے طور پر، انتخابات کے دوران ایگزٹ پول کیا جاتا ہے۔ جس میں پورے شہر کے کسی بھی ایک انتخابی مرکز پر ووٹ دے کر آنے والوں سے ووٹ ڈالنے کے لیے کہا جاتا ہے۔ اس سے کسی امیدوار کی جیت کا اندازہ لگایا جاتا ہے اور اس بنیاد پر پیشین گوئی بھی کی جاتی ہے۔

2. محکمہ موسمیات کے ذریعہ گذشتہ کئی سالوں کے اعداد و شمار کے رجحانات کو دیکھ کر موسم کے بارے میں پیشین گوئی کی جاتی ہے۔

مشق 5.3

1. ان تجربات میں آپ جو نتیجے دیکھ سکتے ہیں انھیں لکھیے؟

(a) پہیہ کو گھمانا

(b) دو سکّوں کو ایک ساتھ اچھالنا

2. جب پانسہ پھینکا جاتا ہے تب مندرجہ ذیل ہر وقوعہ سے حاصل ہونے والے نتیجوں کی فہرست بنائیے؟

(i) (a) ایک مفرد عدد (b) ایک غیر مفرد عدد

(ii) (a) 5 سے بڑا عدد (b) ایسا عدد جو 5 سے بڑا نہیں ہے

3. معلوم کیجیے۔

(a) پوائنٹر (سوئی) کا D پر رکنے کا احتمال [سوال 1 - (a)] میں؟

(b) اچھی طرح پھینٹے گئے تاش کے 52 پتوں میں سے اِکّا حاصل کرنے کا احتمال؟

(c) ایک لال سیب حاصل کرنے کا احتمال (نیچے دی گئی شکل کو دیکھیے)

4. 10 مختلف پرچیوں پر 1 سے 10 تک کے اعداد لکھے ہیں (ایک پرچی پر ایک عدد)۔ انھیں ایک ڈبّے میں رکھ کر اچھی طرح ملا دیا گیا ہے۔ ڈبّے کے اندر سے بنا دیکھے ایک پرچی نکالی گئی۔ مندرجہ ذیل کا احتمال معلوم کیجیے۔

(i) عدد 6 حاصل ہونا؟

(ii) 6 سے چھوٹا عدد حاصل ہونا؟

(iii) 6 سے بڑا ایک عدد حاصل ہونا؟

(iv) 1 ہندسے والا ایک عدد حاصل ہونا؟

5. اگر آپ کے پاس ایک گھومنے والا پہیہ ہے جس پر 3 ہرے سیکٹر، 1 نیلا سیکٹر اور 1 لال سیکٹر ہیں۔ تو ہرا سیکٹر حاصل کرنے کا احتمال کیا ہے؟ ایسا سیکٹر حاصل کرنے کا احتمال کیا ہے جو نیلا نہ ہو؟

6. سوال نمبر 2 میں دیے ہوئے وقوعوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1. ہمارے پاس زیادہ تر موجود اعداد وشمار جو غیر مرتب شکل میں ہوتے ہیں انھیں **خام اعداد وشمار** کہتے ہیں۔

2. کسی بھی اعداد وشمار سے معنی خیز نتیجہ نکالنے کے لیے ہمیں انھیں منظّم طریقہ سے ترتیب دینے کی ضرورت پڑتی ہے۔

3. **احتمال** اس عدد کو ظاہر کرتا ہے جس کا جتنی مرتبہ کوئی خاص اندراج واقع ہوتا ہے۔

4. خام اعداد و شمار کے گروپ بنائے جا سکتے ہیں اور انھیں ایک منظّم طریقے سے گروپ تعدد بٹاؤ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

5. مرتب اعداد و شمار کو **ہسٹو گرام** کی مدد سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ہسٹو گرام ایک قسم کا بار گراف ہے جس میں افقی محور پر کلاس وقفوں کو دکھایا جاتا ہے اور باروں کی لمبائیاں کلاس وقفوں کا تعداد ظاہر کرتی ہیں۔ بار کے درمیان کوئی خالی جگہ نہیں ہوتی ہے کیوں کہ کلاس وقفوں میں کوئی خالی جگہ نہیں ہوتی ہے۔

6. اعداد و شمار کو **دائرہ گراف یا پائی چارٹ** کی مدد سے بھی پیش کیا جا سکتا ہے۔ ایک دائرہ گراف ایک مکمل اور اس کے حصوں کے درمیان تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔

7. کچھ ایسے تجربے ہوتے ہیں جن میں نتیجوں کے آنے کا امکان برابر ہوتا ہے۔

8. ایک بلا منصوبہ **تجربہ** وہ تجربہ ہوتا ہے جس میں نتیجوں کی بالکل صحیح پیشین گوئی نہیں کی جا سکتی ہے۔

9. کسی تجربہ کے نتیجے **مساوی امکانی** ہوتے ہیں اگر ان کے آنے کا امکان برابر ہو۔

10. **ایک وقوعہ کا احتمال** $= \dfrac{\text{وقوعہ کو بنانے والے نتیجوں کی تعداد}}{\text{تجربہ کے نتیجوں کی کل تعداد}}$ ، اگرچہ نتیجے مساوی امکانی ہوتے ہیں۔

11. کسی تجربہ کے ایک یا اس سے زائد نتیجوں سے ایک **وقوعہ** بنتا ہے۔

12. امکانات اور احتمال کا اصل زندگی سے تعلق ہوتا ہے۔

باب
6

4817CH06

مربع اور جذر المربع

6.1 تعارف

آپ جانتے ہیں کہ مربع کا رقبہ = ضلع × ضلع (یہاں ضلع کا مطلب ضلع کی لمبائی ہے)۔ مندرجہ ذیل جدول کا مطالعہ کیجیے۔

مربع کا ضلع (سینٹی میٹر میں)	مربع کا رقبہ (مربع سینٹی میٹر میں)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 5^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$

اعداد 4، 9، 25، 64 اور اسی طرح کے دوسرے اعداد میں کیا خاصیت ہے؟

چوں کہ 4 کو $2 \times 2 = 2^2$ اور 9 کو $3 \times 3 = 3^2$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے اس قسم کے سبھی اعداد کو یکساں اعداد کی حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں۔

اس قسم کے اعداد جیسے 1، 4، 9، 16، 25...... کو **مربع اعداد** کہتے ہیں۔

عام طور پر، اگر ایک فطری (طبعی) عدد m کو n^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں n بھی ایک طبعی عدد ہے تب m ایک **مربع عدد** ہے۔ کیا 32 ایک مربع عدد ہے؟

ہم جانتے ہیں کہ $5^2 = 25$ اور $6^2 = 36$ ہوتا ہے۔ اگر 32 ایک مربع عدد ہے تو یہ ایک طبعی عدد کا مربع ہونا چاہیے جو 5 اور 6 کے درمیان ہو۔ لیکن 5 اور 6 کے درمیان کوئی طبعی عدد نہیں ہے۔

اس لیے 32 ایک مربع عدد نہیں ہے۔

مندرجہ ذیل اعداد اور ان کے مربعوں کے بارے میں غور کیجیے۔

مربع	اعداد
1 × 1 = 1	1
2 × 2 = 4	2
3 × 3 = 9	3
4 × 4 = 16	4
5 × 5 = 25	5
-----------	6
-----------	7
-----------	8
-----------	9
-----------	10

کیا آپ اسے مکمل کر سکتے ہیں؟

کیا ہم درج بالا جدول سے 1 سے 100 تک کے درمیان کے مربع اعداد لکھ سکتے ہیں؟ کیا 100 تک کوئی طبعی مربع عدد چھوٹ گیا ہے؟

آپ دیکھیں گے کہ باقی سبھی اعداد مربع اعداد نہیں ہیں۔

اعداد 1، 4، 9، 16 مربع اعداد ہیں۔ یہ اعداد **کامل مربع اعداد** کہلاتے ہیں۔

کوشش کیجیے

1. دیے گئے اعداد کے درمیان کامل مربع اعداد معلوم کیجیے۔ (i) 30 اور 40 (ii) 50 اور 60

6.2 مربع اعداد کی خصوصیات

مندرجہ ذیل جدول میں 1 سے 20 تک کے مربع اعداد کو ظاہر کیا گیا ہے۔

مربع	عدد	مربع	عدد
121	11	1	1
144	12	4	2
169	13	9	3
196	14	16	4
225	15	25	5
256	16	36	6
289	17	49	7
324	18	64	8
361	19	81	9
400	20	100	10

درج بالا جدول میں مربع اعداد کا مطالعہ کیجیے۔ مربع اعداد کا آخری ہندسہ (یعنی اکائی کا ہندسہ) کون سا ہے؟ یہ سبھی اعداد اکائی کی جگہ پر 0، 1، 4، 5، 6 یا 9 پر ختم ہوتے ہیں۔ اس میں سے کوئی بھی عدد 2، 3، 7 یا 8 پر ختم نہیں ہوتا ہے۔

کیا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ اگر ایک عدد 0، 1، 4، 5، 6 یا 9 پر ختم ہوتا ہے تو وہ ایک مربع عدد ہوگا؟ اس کے بارے میں غور کیجیے۔

کوشش کیجیے

1. کیا ہم مندرجہ ذیل اعداد کو کامل مربع اعداد کہہ سکتے ہیں؟ ہمیں یہ کس طرح معلوم ہوگا؟

(i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928

(iv) 222222 (v) 1069 (vi) 2061

پانچ ایسے اعداد لکھیے جن کے اکائی کے ہندسہ کو دیکھ کر آپ بتا سکیں کہ یہ اعداد کامل مربع اعداد نہیں ہیں۔

2. پانچ ایسے اعداد لکھیے جن کے اکائی کے ہندسہ کو دیکھ کر آپ یہ نہ بتا سکیں کہ یہ اعداد کامل مربع ہیں یا نہیں۔

- مندرجہ ذیل جدول میں دیے گئے اعداد اور ان کے مربعوں پر غور کیجیے اور دونوں میں اکائی کی جگہ کی جانچ کیجیے۔

جدول 1

عدد	مربع	عدد	مربع	عدد	مربع
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

مندرجہ ذیل مربع اعداد ہندسہ 1 پر ختم ہوتے ہیں۔

مربع	عدد
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

کوشش کیجیے

123^2، 77^2، 82^2، 161^2، 109^2 میں سے کون سے اعداد ہندسہ 1 پر ختم ہوتے ہیں؟

ان کے علاوہ اگلے دو مربع اعداد لکھیے جو 1 پر ختم ہوتے ہیں اور ان کے نظیری اعداد بھی لکھیے۔

آپ دیکھیں گے کہ اگر کسی عدد کے اکائی کی جگہ پر 1 یا 9 ہو تب اس کے مربع عدد کے آخر میں 1 آتا ہے۔

- آیئے 6 پر ختم ہونے والے اعداد پر غور کریں:

مربع	عدد
16	4
36	6
196	14
256	16

کوشش کیجیے

درج ذیل میں سے کون سے اعداد میں اکائی کی جگہ پر ہندسہ 6 آئے گا۔

(i) 19^2 (ii) 24^2 (iii) 26^2

(iv) 36^2 (v) 34^2

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ جب کوئی مربع عدد 6 پر ختم ہوتا ہے تو وہ جس عدد کا مربع ہے اس کے اکائی کا ہندسہ 4 یا 6 ہو گا۔

کیا آپ جدول (جدول 1) میں دیے گئے اعداد اور ان کے مربعوں کے مشاہدے کی مدد سے کچھ اور اصول معلوم کر سکتے ہیں؟

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل اعداد کے مربعوں میں ان کے ''ایک اکائی'' کی جگہ پر کیا ہوگا؟

(i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698 (iv) 99880

(v) 21222 (vi) 9106

- مندرجہ ذیل اعداد اور ان کے مربعوں پر غور کیجیے۔

ہمارے پاس ایک صفر ہے

$$10^2 = 100$$
$$20^2 = 400$$
$$80^2 = 6400$$

لیکن ہمارے پاس دو صفر ہیں

ہمارے پاس دو صفر ہیں

$$100^2 = 10000$$
$$200^2 = 40000$$
$$700^2 = 490000$$
$$900^2 = 810000$$

لیکن ہمارے پاس چار صفر ہیں

اگر ایک عدد کے آخر میں 3 صفر ہیں تو اس کے مربع کے آخر میں کتنے صفر ہوں گے؟

کیا آپ نے عدد کے آخر میں صفر کی تعداد اور اس کے مربع کے آخر میں صفر کی تعداد پر غور کیا ہے؟

کیا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ مربع اعداد کے آخر میں صفر کی تعداد جفت عدد ہی ہو سکتی ہے؟

- اعداد اور ان کے مربعوں کے لیے جدول 1 دیکھیے۔

جفت اعداد کے مربعوں اور طاق اعداد کے مربعوں کے بارے میں آپ کی کیا رائے ہے؟

کوشش کیجیے

1. مندرجہ ذیل میں سے کن اعداد کے مربع میں طاق عدد یا جفت عدد ہوگا؟ کیوں؟

(i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980

2. مندرجہ ذیل اعداد کے مربعوں میں صفر کی تعداد کیا ہوگی؟

(i) 60 (ii) 400

6.3 کچھ اور دلچسپ نمونے

1. مثلثی اعداد کی جمع

کیا آپ کو مثلثی اعداد یاد ہیں (وہ اعداد جن کے نقطوں کے نمونوں کو مثلث کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے)؟

```
*
* *
* * *
* * * *
* * * * *
   15
```

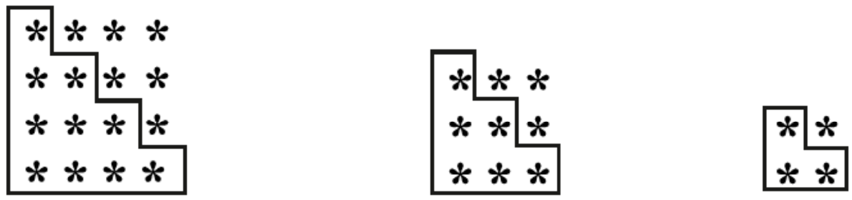
```
*
* *
* * *
* * * *
   10
```

```
*
* *
* * *
  6
```

```
*
* *
 3
```

```
*
1
```

اگر ہم دو لگا تار مثلثی اعداد کو آپس میں جمع کریں تو ہمیں ایک مربع عدد حاصل ہوتا ہے جیسے



$1+3=4$
$=2^2$

$3+6=9$
$=3^2$

$6+10=16$
$=4^2$

2. مربع اعداد کے درمیان اعداد

آیئے اب ہم دیکھیں کہ کیا دو لگا تار مربع اعداد کے درمیان کچھ دلچسپ نمونے تلاش کیے جاسکتے ہیں۔

$1\ (=1^2)$

$\underline{2, 3,}\ 4\ (=2^2)$

دو مربع اعداد $(1^2=)\ 1$ اور $(2^2=)\ 4$ کے درمیان دو غیر مربع اعداد ہیں۔

$\underline{5, 6, 7, 8,}\ 9\ (=3^2)$

دو مربع اعداد $(2^2=)\ 4$ اور $(3^2=)\ 9$ کے درمیان 4 غیر مربع اعداد ہیں۔

$\underline{10, 11, 12, 13, 14, 15,}\ 16\ (=4^2)$

دو مربع اعداد $(3^2=)\ 9$ اور $(4^2=)\ 16$ کے درمیان 6 غیر مربع اعداد ہیں۔

$\underline{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24,}\ 25\ (=5^2)$

دو مربع اعداد $(4^2=)\ 16$ اور $25\ (=5^2)$ کے درمیان 8 غیر مربع اعداد ہیں۔

$(=1)\ 1^2$ اور $(=4)\ 2^2$ کے درمیان میں دو (یعنی 1×2) اعداد 2، 3 ہیں جو مربع اعداد نہیں ہیں۔

$(=4)\ 2^2$ اور $(=9)\ 3^2$ کے درمیان میں چار (یعنی 2×2) اعداد 5، 6، 7، 8 ہیں جو مربع اعداد نہیں ہیں۔

اب $3^2=9$ ، $4^2=16$

اس لیے، $4^2-3^2=16-9=7$

یہاں $(3^2=)\ 9$ اور $(4^2=)\ 16$ کے درمیان 6 اعداد 10، 11، 12، 13، 14، 15 ہیں جو مربع اعداد نہیں ہیں، یہ دونوں مربعوں کے فرق سے 1 کم ہے۔

ہمارے پاس $4^2=16$ اور $5^2=25$ ہے۔

اس لیے، $5^2-4^2=9$

یہاں $(4^2=)\ 16$ اور $(5^2=)\ 25$ کے درمیان 17، 18، 19، ... ، 24 آٹھ غیر مربع اعداد ہیں، یہ دو مربعوں کے فرق سے 1 کم ہے۔

6^2 اور 7^2 پر غور کیجیے۔ کیا آپ 6^2 اور 7^2 کے درمیان اعداد کی تعداد بتا سکتے ہیں؟

اگر ہم کوئی طبعی عدد n اور $(n+1)$ لیتے ہیں تو

$$(n+1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$$

ہم n^2 اور $(n+1)^2$ کے درمیان $2n$ اعداد پاتے ہیں جو دو مربع اعداد کے فرق سے 1 کم ہے

لہٰذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دو مربع اعداد n اور $(n+1)$ کے درمیان $2n$ اعداد ہوتے ہیں جو مربع اعداد نہیں ہیں۔

جانچ کے لیے $n = 5$، n = 6 لیجیے اور تصدیق کیجیے۔

کوشش کیجیے

1. 9^2 اور 10^2 کے درمیان کتنے طبعی اعداد ہیں؟ 11^2 اور 12^2 کے درمیان کتنے طبعی اعداد ہیں؟
2. مندرجہ ذیل اعداد کے جوڑوں کے درمیان کتنے اعداد ایسے ہیں جو مربع اعداد نہیں ہیں۔

(i) 100^2 اور 101^2 (ii) 90^2 اور 91^2 (iii) 1000^2 اور 1001^2

3. طاق اعداد کا حاصل جمع

مندرجہ ذیل پر غور کیجیے

1 [ایک طاق عدد] $= 1 = 1^2$

$1 + 3$ [پہلے دو طاق اعداد کا حاصل جمع] $= 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5$ [پہلے تین طاق اعداد کا حاصل جمع] $= 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7$ [....] $= 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9$ [....] $= 25 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ [....] $= 36 = 6^2$

اس لیے، ہم کہہ سکتے ہیں کہ پہلے n طاق طبعی اعداد کا حاصل جمع n^2 ہے۔

اسے الگ ڈھنگ سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر ایک عدد مربع عدد ہے تو وہ لازمی طور پر 1 سے شروع ہونے والے لگا تار طاق اعداد کا حاصل جمع ہے۔

اب ان اعداد پر غور کیجیے جو کامل مربع نہیں ہیں جیسے 2، 3، 5، 6.....۔ کیا آپ ان اعداد کو تمام طاق طبعی اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں 1 سے شروع کر کے لکھ سکتے ہیں؟ آپ پائیں گے کہ ان اعداد کو اس طرح نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

عدد 25 کو لیجیے۔ اس میں سے 1، 3، 5، 7، 9 .... کو سلسلے وار گھٹائیے

(i) $25 - 1 = 24$ (ii) $24 - 3 = 21$ (iii) $21 - 5 = 16$ (iv) $16 - 7 = 9$

(v) $9 - 9 = 0$

یعنی $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ ہے لہٰذا 25 کامل مربع عدد ہے۔

اب ایک دوسرے عدد 38 کو لیجیے اور دوبارہ اوپر جیسا ہی عمل کیجیے۔

(i) $38 - 1 = 37$ (ii) $37 - 3 = 34$ (iii) $34 - 5 = 29$ (iv) $29 - 7 = 22$

(v) $22 - 9 = 13$ (vi) $13 - 11 = 2$ (vii) $2 - 13 = -11$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ہم 38 کو ایک سے شروع ہونے والا لگاتار طاق اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں نہیں لکھ سکتے ہیں اور 38 کامل مربع عدد بھی نہیں ہے۔

اس لیے ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ **اگر کوئی طبعی عدد 1 سے شروع ہونے والے لگاتار طاق اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر نہیں ہو سکتا تو وہ عدد مربع عدد نہیں ہے۔**

کوئی عدد کامل مربع ہے یا نہیں یہ جاننے کے لیے اس نتیجے کا استعمال کر سکتے ہیں۔

کوشش کیجیے

معلوم کیجیے کہ مندرجہ ذیل ہر عدد کامل مربع ہے یا نہیں؟

(i) 121 (ii) 55 (iii) 81

(iv) 49 (v) 69

4. لگاتار طبعی اعداد کا حاصل جمع

مندرجہ ذیل پر غور کیجیے

پہلا عدد $= \dfrac{3^2 - 1}{2}$

دوسرا عدد $= \dfrac{3^2 + 1}{2}$

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

$9^2 = 81 = 40 + 41$

$11^2 = 121 = 60 + 61$

$15^2 = 225 = 112 + 113$

واہ! ہم کسی بھی طاق عدد کے مربع کو دو لگاتار مثبت صحیح اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

کوشش کیجیے

1. مندرجہ ذیل اعداد کو دو لگاتار صحیح اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں لکھیے۔

(i) 21^2 (ii) 13^2 (iii) 11^2 (iv) 19^2

2. کیا آپ سوچتے ہیں کہ اس کا برعکس بھی صحیح ہوگا یعنی کیا دو لگاتار مثبت صحیح اعداد کا حاصل جمع ایک کامل مربع ہوتا ہے؟ اپنے جواب کے حق میں ایک مثال دیجیے۔

.5 دو لگاتار طاق یا جفت طبعی اعداد کا حاصل ضرب

$11 \times 13 = 143 = 12^2 - 1$

اسی طرح $11 \times 13 = (12-1) \times (12+1)$

اس لیے $11 \times 13 = (12-1) \times (12+1) = 12^2 - 1$

اسی طرح $13 \times 15 = (14-1) \times (14+1) = 14^2 - 1$

$29 \times 31 = (30-1) \times (30+1) = 30^2 - 1$

$44 \times 46 = (45-1) \times (45+1) = 45^2 - 1$

اس لیے عمومی طور پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ $(a+1) \times (a-1) = a^2 - 1$

.6 مربع اعداد کے کچھ اور نمونے

اعداد کے مربعوں کا مشاہدہ کیجیے؛ 1، 11، 111... وغیرہ۔ یہ ایک خوبصورت نمونہ بناتے ہیں:

$1^2 =$ 1

$11^2 =$ 1 2 1

$111^2 =$ 1 2 3 2 1

$1111^2 =$ 1 2 3 4 3 2 1

$11111^2 =$ 1 2 3 4 5 4 3 2 1

$11111111^2 =$ 1 2 3 4 5 6 7 8 7 6 5 4 3 2 1

ایک دوسرا دلچسپ نمونہ دیکھیے

$7^2 = 49$

$67^2 = 4489$

$667^2 = 444889$

$6667^2 = 44448889$

$66667^2 = 4444488889$

$666667^2 = 444444888889$

ایسا کیوں ہوتا ہے یہ جاننا پرلطف ہوسکتا ہے۔ اس طرح کے سوالوں کے بارے میں چھان بین کرنا اور سوچنا آپ کے لیے دلچسپ ہوگا بھلے ہی ایسے جواب کچھ برسوں بعد ملیں۔

کوشش کیجیے

مذکورہ بالا نمونے کی مدد سے مربع اعداد لکھیے

(i) 111111^2 (ii) 1111111^2

کوشش کیجیے

کیا آپ مندرجہ بالا نمونے کا استعمال کرتے ہوئے ان اعداد کا مربع معلوم کرسکتے ہیں؟

(i) 6666667^2 (ii) 66666667^2

مشق 6.1

1. مندرجہ ذیل اعداد کے مربعوں کے اکائی کے ہندسے کیا ہوں گے؟

(i) 81   (ii) 272   (iii) 799   (iv) 3853   (v) 1234

(vi) 26387   (vii) 52698   (viii) 99880   (ix) 12796   (x) 55555

2. مندرجہ ذیل اعداد یقینی طور پر کامل مربع اعداد نہیں ہیں۔ اس کی وجہ بتائیے۔

(i) 1057   (ii) 23453   (iii) 7928   (iv) 222222

(v) 64000   (vi) 89722   (vii) 222000   (viii) 505050

3. مندرجہ ذیل اعداد میں سے کس عدد کا مربع طاق عدد ہوگا؟

(i) 431   (ii) 2826   (iii) 7779   (iv) 82004

4. مندرجہ ذیل کا مشاہدہ کیجیے اور خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

$11^2 = 121$

$101^2 = 10201$

$1001^2 = 1002001$

$100001^2 =$ 1 .... 2 1

$10000001^2 =$ ....

5. مندرجہ ذیل نمونوں کا مشاہدہ کیجیے اور خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

$11^2 =$ 1 2 1

$101^2 =$ 1 0 2 0 1

$10101^2 = 102030201$

$1010101^2 =$ ....

............^{2} = 10203040504030201

6. دیے گئے نمونوں کا استعمال کرتے ہوئے خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + \_^2 = 21^2$

$5^2 + \_^2 + 30^2 = 31^2$

$6^2 + 7^2 + \_^2 = \_^2$

> **نمونہ معلوم کیجیے**
>
> تیسرا عدد پہلے اور دوسرے سے متعلق ہے۔ کس طرح؟
>
> چوتھا عدد تیسرے عدد سے متعلق ہے۔ کس طرح؟

.7 جمع کا عمل کیے بغیر حاصل جمع معلوم کیجیے۔

(i) $1+3+5+7+9$

(ii) $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

(iii) $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23$

.8 (i) 49 کو 7 طاق اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں لکھیے۔

(ii) 121 کو 11 طاق اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں لکھیے۔

.9 مندرجہ ذیل اعداد کے مربعوں کے درمیان کتنے اعداد ہیں؟

(i) 12 اور 13 (ii) 25 اور 26 (iii) 99 اور 100

6.4 کسی عدد کا مربع معلوم کرنا

چھوٹے اعداد جیسے 3، 4، 5، 6، 7.....وغیرہ کا مربع معلوم کرنا آسان ہے۔ کیا ہم 23 کا مربع آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں؟

اس کا جواب اتنا آسان نہیں ہے۔ ہمیں 23 کو 23 سے ضرب کرنے کی ضرورت ہے۔

اسے حاصل کرنے کا ایک اور طریقہ ہے جو 23×23 ضرب کے بغیر ہی حاصل ہوتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $23 = 20 + 3$

اس لیے $23^2 = (20+3)^2 = 20\,(20+3) + 3\,(20+3)$

$= 20^2 + 20 \times 3 + 3 \times 20 + 3^2$

$= 400 + 60 + 60 + 9 = 529$

مثال 1 : مندرجہ ذیل اعداد کا مربع بغیر ضرب کیے معلوم کیجیے۔

(i) 39 (ii) 42

حل (i) $39^2 = (30+9)^2 = 30\,(30+9) + 9\,(30+9)$

$= 30^2 + 30 \times 9 + 9 \times 30 + 9^2$

$= 900 + 270 + 270 + 81 = 1521$

(ii) $42^2 = (40+2)^2 = 40\,(40+2) + 2\,(40+2)$

$= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2$

$= 1600 + 80 + 80 + 4 = 1764$

6.4.1 مربع کے دوسرے نمونے

مندرجہ ذیل نمونے کو دیکھیے :

$25^2 = 625 = (2 \times 3)$ سیکڑے $+25$

$35^2 = 1225 = (3 \times 4)$ سیکڑے $+25$

$75^2 = 5625 = (7 \times 8)$ سیکڑے $+25$

$125^2 = 15625 = (12 \times 13)$ سیکڑے $+25$

اب کیا آپ 95 کا مربع حاصل کر سکتے ہیں؟

ایک ایسا عدد لیجیے جس کا اکائی کا ہندسہ 5 ہو، مثلاً $a5$

$$(a5)^2 = (10a+5)^2$$
$$= 10a\,(10a+5) + 5\,(10a+5)$$
$$= 100a^2 + 50a + 50a + 25$$
$$= 100a\,(a+1) + 25$$
$$= a\,(a+1) \text{ سیکڑہ } + 25$$

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل اعداد کے مربعے معلوم کیجیے جن کا اکائی کا ہندسہ 5 ہو۔

(i) 15 (ii) 95 (iii) 105 (iv) 205

6.4.2 فیثا غورثی ثلاثہ

مندرجہ ذیل پر غور کیجیے

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

اعداد 3، 4 اور 5 کے گروپ کو **فیثا غورثی ثلاثہ** کہتے ہیں۔ 6، 8، 10 بھی فیثا غورثی ثلاثہ ہیں، اسی طرح

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

ایک مرتبہ پھر مشاہدہ کیجیے کہ

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ ہے۔ اعداد 5، 12، 13 ایسے ہی دوسرے ثلاثے قائم کرتے ہیں۔

کیا آپ اسی طرح کے کچھ اور ثلاثہ حاصل کر سکتے ہیں؟

کسی طبعی عدد $m > 1$ کے لیے، ہم پاتے ہیں $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$

اس لیے $2m$، $m^2 - 1$ اور $m^2 + 1$ فیثا غورثی ثلاثہ ہوتے ہیں۔

اس طریقے کا استعمال کرتے ہوئے مزید فیثا غورثی ثلاثہ حاصل کیجیے۔

مثال 2 : ایک فیثا غورثی ثلاثہ لکھیے جس کا سب سے چھوٹا عدد 8 ہے۔

حل : عام شکل $2m$، $m^2 - 1$، $m^2 + 1$ سے ہم فیثا غورث ثلاثہ حاصل کر سکتے ہیں۔

ہم پہلے لیتے ہیں $m^2 - 1 = 8$

اس لیے $m^2 = 8 + 1 = 9$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $m = 3$

اس لیے $2m = 6$ اور $m^2 + 1 = 10$

اس لیے 6، 8، 10 ایک ثلاثہ ہے لیکن 8 سب سے چھوٹا عدد نہیں ہے۔

اس لیے، ہم لیتے ہیں $2m = 8$

تب $m = 4$

ہم پاتے ہیں $m^2 - 1 = 16 - 1 = 15$

اور $m^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

اس لیے 8، 15، 17 ایک ایسا ثلاثہ ہے جہاں 8 سب سے چھوٹا عدد ہے۔

مثال 3 : ایک فیثا غورثی ثلاثہ معلوم کیجیے جس کا ایک عدد 12 ہو۔

حل : اگر ہم لیتے ہیں $m^2 - 1 = 12$

تب $m^2 = 12 + 1 = 13$

یہاں m کی قیمت صحیح عدد نہیں ہے۔

اس لیے ہم $m^2 + 1 = 12$ لے کر کوشش کرتے ہیں۔ یہاں $m^2 = 11$ ہے، اس سے بھی m کی قیمت صحیح عدد حاصل نہیں ہوتی۔

اس لیے ہم لیتے ہیں $2m = 12$

تب $m = 6$

اس طرح $m^2 - 1 = 36 - 1 = 35$ اور $m^2 + 1 = 36 + 1 = 37$

اس لیے مطلوبہ ثلاثہ 12، 35، 37 ہے۔

نوٹ: اس ضابطے کا استعمال کرتے ہوئے سبھی فیثا غورثی ثلاثہ حاصل نہیں کیے جاسکتے۔ مثال کے طور پر دوسرے ثلاثہ 5، 12، 13 میں بھی 12 ایک رکن ہے۔

مشق 6.2

.1 مندرجہ ذیل اعداد کا مربع معلوم کیجیے۔

(i) 32 (ii) 35 (iii) 86 (iv) 93

(v) 71 (vi) 46

.2 فیثا غورثی ثلاثہ لکھیے جس کا ایک رکن ہو

(i) 6 (ii) 14 (iii) 16 (iv) 18

6.5 جذرالمربع

مندرجہ ذیل صورتِ حال کا مطالعہ کیجیے۔

(a) مربع کا رقبہ 144 مربع سینٹی میٹر ہے۔ مربع کا ضلع کیا ہوگا؟

ہم جانتے ہیں کہ ایک مربع کا رقبہ = مربع ضلع ہے۔

اگر ہم ضلع کی لمبائی کی قیمت 'a' مان لیں تب $144 = a^2$

ضلع کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے ضروری ہے کہ ایک ایسا عدد معلوم کیا جائے جس کا مربع 144 ہو۔

(b) ایک مربع کا ضلع 8 سینٹی میٹر ہے۔ اس کے وتر کی لمبائی کیا ہوگی (شکل 6.1)؟

کیا ہم فیثا غورث کا مسئلہ استعمال کر کے اسے حل کر سکتے ہیں؟

ہمارے پاس ہے $AB^2 + BC^2 = AC^2$

یعنی $8^2 + 8^2 = AC^2$

شکل 6.1

یا $64 + 64 = AC^2$

یا $128 = AC^2$

اس طرح AC حاصل کرنے کے لیے ہمیں ایک ایسا عدد منتخب کرنا ہوگا جس کا مربع 128 ہو۔

(c) ایک قائم زاوئی مثلث میں وتر اور ایک ضلع کی لمبائی بالترتیب 5 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر ہے (شکل 6.2)۔

کیا آپ تیسرا ضلع معلوم کر سکتے ہیں؟

مان لیجیے کہ تیسرے ضلع کی لمبائی x سینٹی میٹر ہے۔

فیثا غورث کے مسئلہ کے استعمال سے $5^2 = x^2 + 3^2$

$25 - 9 = x^2$

$16 = x^2$

5 سینٹی میٹر

3 سینٹی میٹر

x سینٹی میٹر

شکل 6.2

x کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہمیں ایسے عدد کی ضرورت ہے جس کا مربع 16 ہے۔

مندرجہ بالا کسی حالت میں ہمیں ایک عدد دریافت کرنے کی ضرورت ہے جس کا مربع معلوم ہو۔ اس عدد کے دریافت کرنے کو جذرالمربع معلوم کرنا کہتے ہیں۔

6.5.1 جذرالمربع معلوم کرنا

جمع کا معکوس عمل تفریق ہے اور ضرب کا معکوس عمل تقسیم ہے۔ اسی طرح جذرالمربع معلوم کرنا بھی مربع بنانے کا معکوس عمل ہے۔

ہمارے پاس ہے، $1 = 1^2$ اس لیے 1 کا جذر المربع 1 ہے۔

$4 = 2^2$، اس لیے 4 کا جذر المربع 2 ہے۔

$9 = 3^2$، اس لیے 9 کا جذر المربع 3 ہے۔

> چوں کہ $9^2 = 81$
> اور $(-9)^2 = 81$
> ہم کہہ سکتے ہیں کہ 81 کا جذر المربع 9 اور -9 ہے

کوشش کیجیے

(i) $11^2 = 121$ ہے تو 121 کا جذر المربع کیا ہے؟

(ii) $14^2 = 196$ ہے تو 196 کا جذر المربع کیا ہے؟

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

$(-1)^2 = 1$ ہے۔ کیا 1 کا جذر المربع -1 ہے؟ $(-2)^2 = 4$ ہے۔ کیا 4 کا جذر المربع -2 ہے؟

$(-9)^2 = 81$ ہے۔ کیا 81 کا جذر المربع -9 ہے؟

درج بالا کے مطابق آپ کہہ سکتے ہیں کہ کسی کامل مربع عدد کے دو صحیح جذر المربع ہوتے ہیں۔ اس باب میں ہم طبعی عدد کے صرف مثبت جذر المربع پر بحث کریں گے۔ مثبت جذر المربع عدد کو علامت $\sqrt{\ }$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر : $\sqrt{4} = 2$ (نہیں -2)؛ $\sqrt{9} = 3$ (نہیں -3) وغیرہ۔

بیان	نتیجہ
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$

بیان	نتیجہ
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

6.5.2 مسلسل تفریق کے عمل سے جذر المربع معلوم کرنا

کیا آپ کو یاد ہے کہ پہلے n طاق اعداد کا حاصل جمع n^2 ہوتا ہے؟ اس لیے ہر ایک مربع عدد کو 1 سے شروع کرنے سے لگاتار طاق طبعی اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$\sqrt{81}$ پر غور کیجیے۔ تب،

(i) $81 - 1 = 80$ (ii) $80 - 3 = 77$ (iii) $77 - 5 = 72$ (iv) $72 - 7 = 65$

(v) $65 - 9 = 56$ (vi) $56 - 11 = 45$ (vii) $45 - 13 = 32$ (viii) $32 - 15 = 17$

(ix) $17 - 17 = 0$

عدد 1 سے شروع کر کے لگا تار طاق اعداد کو 81 سے گھٹانے پر 9واں رکن صفر حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے $\sqrt{81} = 9$

کیا آپ اس طریقے کا استعمال کرتے ہوئے 729 کا جذر المربع معلوم کر سکتے ہیں؟ ہاں، لیکن اس میں کافی وقت لگے گا۔ آیئے ہم ایک آسان طریقے سے جذر المربع حاصل کرنے کی کوشش کریں۔

کوشش کیجیے

1 سے شروع کر کے لگا تار طاق اعداد کو بار بار گھٹانے کے طریقہ سے معلوم کیجیے کہ مندرجہ ذیل اعداد کامل مربع ہیں یا نہیں؟ اگر یہ اعداد کامل مربع ہیں تو ان کے جذر المربع معلوم کیجیے۔

(i) 121 (ii) 55 (iii) 36 (iv) 49 (v) 90

6.5.3 مفرد اجزائے ضربی کے ذریعہ جذر المربع معلوم کرنا

مندرجہ ذیل اعداد اور ان کے مربعوں کو مفرد اجزائے ضربی کی شکل میں لکھیے۔

ایک عدد کے مفرد اجزائے ضربی	اس مربع کے اجزائے ضربی
$6 = 2 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$15 = 3 \times 5$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
	3

6 کے مفرد اجزائے ضربی میں 2 کتنی مرتبہ آتا ہے؟ ایک مرتبہ۔ 36 کے مفرد اجزائے ضربی میں 2 کتنی مرتبہ آتا ہے؟ دو مرتبہ۔ اسی طرح غور کیجیے کہ 6 اور 36 میں 3 کتنی مرتبہ آتا ہے اور 8 اور 64 وغیرہ میں 2 کتنی مرتبہ آتا ہے۔

آپ دیکھیں گے کہ کسی عدد کے مربع میں مفرد اجزائے ضربی کی تعداد اس عدد کے مفرد جز ضربی کی تعداد کی دوگنا ہوتی ہے۔

آیئے ہم اس اصول کا استعمال کر کے 324 کا جذر المربع معلوم کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ 324 کا جذر المربع

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

مفرد اجزائے ضربی کے جوڑے بنانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} = 2^2 \times 3^2 \times 3^2 = (2 \times 3 \times 3)^2$$

اس لیے $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 256 \\ \hline 2 & 128 \\ \hline 2 & 64 \\ \hline 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

اسی طرح، کیا آپ 256 کا جذر المربع معلوم کر سکتے ہیں؟ 256 کے مفرد اجزائے ضربی حسب ذیل ہیں

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

مفرد اجزائے ضربی کے جوڑے بنانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$$256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} = (2 \times 2 \times 2 \times 2)^2$$

اس لیے $\sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

کیا 48 ایک کامل مربع عدد ہے؟

ہم جانتے ہیں کہ $48 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3$

یہاں سارے مفرد اجزائے ضربی جوڑوں کی شکل میں نہیں ہیں اس لیے 48 ایک کامل مربع نہیں ہے؟

فرض کیجیے کہ آپ 48 کا سب سے چھوٹا ضعف معلوم کرنا چاہتے ہیں جو ایک کامل مربع ہے۔ اسے کیسے معلوم کریں گے؟ 48 کے مفرد اجزائے ضربی کے جوڑے بنانے پر ہم دیکھتے ہیں کہ صرف 3 ایسا عدد ہے جو جوڑوں میں نہیں ہے۔ اس لیے ہمیں جوڑوں کو پورا کرنے کے لیے 3 سے ضرب کرنا پڑے گا۔

اس لیے $48 \times 3 = 144$ ایک کامل مربع ہے۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ 48 کو کس عدد سے تقسیم کریں کہ کامل مربع عدد حاصل ہو جائے؟

جزو ضربی 3 جوڑے میں نہیں ہے اس لیے ہم 48 کو اگر 3 سے تقسیم کریں تو ہمیں $48 \div 3 = 16 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$ حاصل ہوگا اور یہ عدد 16 ہے جو کامل مربع ہے۔

$$\begin{array}{r|l} 2 & 6400 \\ \hline 2 & 3200 \\ \hline 2 & 1600 \\ \hline 2 & 800 \\ \hline 2 & 400 \\ \hline 2 & 200 \\ \hline 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

مثال 4 : 6400 کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

حل : لکھیے $6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$

اس لیے $\sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

مثال 5 : کیا 90 ایک کامل مربع ہے؟

حل : ہم دیکھتے ہیں کہ $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

مفرد اجزائے ضربی میں 2 اور 5 جوڑوں کی شکل میں نہیں ہیں۔ اس لیے 90 ایک کامل مربع نہیں ہے۔ حقیقت میں ہم اس کو اس طرح بھی دیکھ سکتے ہیں کہ 90 میں صرف '1' (ایک) صفر ہے اس لیے یہ کامل مربع ہو ہی نہیں سکتا۔

مثال 6 : کیا 2352 ایک کامل مربع ہے؟ اگر نہیں تو 2352 کا سب سے چھوٹا ضعف معلوم کیجیے جو ایک کامل مربع عدد ہے۔ نئے عدد کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
	7

حل : ہم جانتے ہیں کہ $2352 = \underline{2\times 2}\times\underline{2\times 2}\times 3\times\underline{7\times 7}$ مفرد اجزائے ضربی کے مطابق 3 کا جوڑا نہیں ہے۔ 2352 ایک مکمل مربع نہیں ہے۔

اگر ہم 3 کا ایک جوڑا بناتے ہیں تب عدد کامل مربع ہو جائے گا۔ اس لیے 2352 کو 3 سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔

$$2352\times 3=\underline{2\times 2}\times\underline{2\times 2}\times\underline{3\times 3}\times\underline{7\times 7}$$

اب ہر ایک مفرد اجزائے ضربی جوڑوں کی شکل میں ہے۔ اس لیے $2352\times 3=7056$ ایک کامل مربع ہے۔ لہٰذا 2352 کا سب سے چھوٹا ضعف 7056 ہے جو ایک کامل مربع ہے۔

اور، $\sqrt{7056}=2\times 2\times 3\times 7=84$

مثال 7 : سب سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جس سے 9408 کو تقسیم کرنے پر خارج قسمت ایک کامل مربع عدد ہو جائے۔ اس خارج قسمت کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

حل : ہم جانتے ہیں $9408=\underline{2\times 2}\times\underline{2\times 2}\times\underline{2\times 2}\times 3\times\underline{7\times 7}$

اگر ہم 9408 کو جزو ضربی 3 سے تقسیم کریں تو $9408\div 3=3136=\underline{2\times 2}\times\underline{2\times 2}\times\underline{2\times 2}\times\underline{7\times 7}$ ہوگا جو ایک کامل مربع عدد ہے (کیوں؟)۔ اس لیے مطلوبہ سب سے چھوٹا عدد 3 ہے۔

اور، $\sqrt{3136}=2\times 2\times 2\times 7=56$

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

مثال 8 : سب سے چھوٹا مربع عدد حاصل کیجیے جو ہر ایک عدد 6، 9 اور 15 سے تقسیم ہو جائے۔

حل : اسے ہم دو اقدام میں حل کر سکتے ہیں۔ سب سے پہلے چھوٹا مشترک ضعف معلوم کیجیے اور پھر اس کے بعد مطلوبہ مربع عدد معلوم کیجیے۔ وہ سب سے چھوٹا عدد جو 6، 9 اور 15 سے تقسیم ہوتا ہے ان کا ذو ضعاف قل مشترک (LCM) ہے۔ 6، 9 اور 15 کا ذو ضعاف قل مشترک $90 = 5 \times 3 \times 3 \times 2$ ہے۔

90 کے مفرد اجزائے ضربی ہیں $90=2\times\underline{3\times 3}\times 5$

ہم دیکھتے ہیں کہ 2 اور 5 کے جوڑے نہیں ہیں اس لیے 90 ایک کامل مربع عدد نہیں ہے۔

کامل مربع عدد حاصل کرنے کے لیے 90 کو اجزائے ضربی جوڑوں کی شکل میں ہونا چاہیے اس لیے ہمیں 2 اور 5 کا جوڑا بنانے کی ضرورت پڑے گی۔ اس لیے 90 کو 2×5 یعنی 10 سے ضرب کرنے کی ضرورت ہے۔ لہٰذا، $90\times 10 = 900$ مطلوبہ مربع عدد ہے۔

مشق 6.3

1. مندرجہ ذیل ہر عدد کے جذر المربع میں 'اکائی' کا ممکنہ ہندسہ کیا ہو سکتا ہے؟

(i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025

2. تحسیب کیے بغیر ایسے اعداد معلوم کیجیے جو یقینی طور پر کامل مربع نہیں ہیں۔

(i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441

3. مسلسل تفریق کے طریقے سے 100 اور 169 کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

4. مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے مندرجہ ذیل اعداد کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

(i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096

(v) 7744 (vi) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216

(ix) 529 (x) 8100

5. مندرجہ ذیل ہر عدد کے لیے وہ سب سے چھوٹا مکمل عدد معلوم کیجیے جس سے اس عدد کو ضرب کرنے پر وہ ایک کامل مربع عدد بن جائے۔ اس کامل مربع عدد کا جذر المربع بھی معلوم کیجیے۔

(i) 252 (ii) 180 (iii) 1008 (iv) 2028

(v) 1458 (vi) 768

6. مندرجہ ذیل اعداد میں ہر ایک کے لیے وہ سب سے چھوٹا مکمل عدد معلوم کیجیے جس سے اس عدد کو تقسیم کرنے پر وہ ایک کامل مربع عدد بن جائے۔ حاصل شدہ مربع عدد کا جذر المربع بھی معلوم کیجیے۔

(i) 252 (ii) 2925 (iii) 396 (iv) 2645

(v) 2800 (vi) 1620

7. ایک اسکول میں آٹھویں جماعت کے طلبا نے وزیر اعظم کے امدادی فنڈ میں کل 2401 ₹ کا عطیہ دیا۔ ہر طالب علم نے اتنے ہی روپیے عطیہ کے طور پر دیے جتنے اس کلاس میں طلبا تھے۔ کلاس میں طلبا کی تعداد معلوم کیجیے۔

8. ایک باغ میں 2025 پودے اس طرح لگائے جائیں کہ ہر قطار میں اتنے ہی پودے ہوں جتنی قطاروں کی تعداد ہے۔ قطاروں کی تعداد اور ہر قطار میں پودوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

9. وہ سب سے چھوٹا مربع عدد معلوم کیجیے جو 4، 9 اور 10 میں ہر ایک سے تقسیم پذیر ہو۔

10. وہ سب سے چھوٹا مربع عدد معلوم کیجیے جو 8، 15 اور 20 سے تقسیم پذیر ہو۔

6.5.4 تقسیم کے طریقہ سے جذر المربع معلوم کرنا

جب اعداد بڑے ہوں تو مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے جذر المربع نکالنا مشکل اور طویل عمل ہوتا ہے۔ اس لیے، ہم لمبی تقسیم کا طریقہ (Long Division Method) استعمال کرتے ہیں۔

اس کے لیے ہمیں جذر المربع میں ہندسوں کی تعداد معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

مندرجہ ذیل جدول کو دیکھیے:

عدد	مربع	
10	100	جو 3 ہندسوں کا سب سے چھوٹا مربع عدد ہے
31	961	جو 3 ہندسوں کا سب سے بڑا مربع عدد ہے
32	1024	جو 4 ہندسوں کا سب سے چھوٹا مربع عدد ہے
99	9801	جو 4 ہندسوں کا سب سے بڑا مربع عدد ہے

اس طرح، ایک کامل مربع عدد 3 ہندسوں یا 4 ہندسوں کا ہو تو جذر المربع میں ہندسوں کی تعداد کے بارے میں ہم کیا کہیں گے؟

ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب ایک کامل مربع عدد 3 ہندسوں یا 4 ہندسوں کا ہو تو اس کے جذر المربع میں 2 ہی ہندسہ ہوں گے۔

کیا آپ 5 یا 6 ہندسوں والے عدد کے جذر المربع میں ہندسوں کی تعداد بتا سکتے ہیں؟

سب سے چھوٹا 3 ہندسوں کا کامل مربع 100 ہے جو 10 کا مربع ہے اور 3 ہندسوں کا سب سے بڑا کامل مربع عدد 961 ہے جو 31 کا مربع ہے۔ 4 ہندسوں کا سب سے چھوٹا کامل مربع عدد 1024 ہے جو 32 کا مربع ہے اور سب سے بڑا 4 ہندسوں کا کامل مربع عدد 9801 ہے جو 99 کا مربع ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر ایک کامل مربع عدد میں n ہندسے ہوں تو اس کے جذر المربع عدد میں $\frac{n}{2}$ ہندسے ہوں گے اگر n جفت ہے یا $\frac{(n+1)}{2}$ ہوں گے اگر n طاق ہے؟

مندرجہ ذیل طریقہ کسی عدد کے مربع میں ہندسوں کی تعداد معلوم کرنے میں مددگار رہوگا۔

- 529 کا مربع عدد معلوم کرنے کے لیے ہم درج ذیل اقدامات پر غور کرتے ہیں۔ کیا آپ اس عدد کے مربع میں ہندسوں کی تعداد کا اندازہ لگا سکتے ہیں؟

قدم 1 اکائی کے مقام سے شروع کرتے ہوئے ہر ایک جوڑے پر بار لگائیے۔ اگر ہندسوں کی تعداد طاق ہو تو بائیں طرف کے ایک ہی ہندسے پر بار لگائیے۔ اس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\overline{5}\;\overline{29}$ ۔

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & \overline{5}\ \overline{29} \\ & -4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

قدم 2 وہ سب سے بڑا عدد معلوم کیجیے جس کا مربع بائیں طرف کے بار کے نیچے کے عدد کے برابر یا اس سے چھوٹا ہو $(2^2 < 5 < 3^2)$۔ اور اس عدد سے سب سے بائیں بار کے نیچے کے عدد مقسوم علیہ (یہاں 5 ہے) کو تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے (اس مثال میں 1 ہے)۔

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & \overline{5}\ \overline{29} \\ & -4 \\ \hline & 129 \end{array}$$

قدم 3 اگلے بار کے نیچے کا جوڑا باقی کے دائیں طرف لکھیے (جیسے اس مثال میں 29 ہے)۔ اس طرح سے اگلا مقسوم علیہ 129 ہوگا۔

قدم 4 خارج قسمت کا دوگنا کیجیے اور اس کو اس طرح لکھیے کہ اس کے دائیں طرف ایک ہندسے کی جگہ خالی رہے۔

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & \overline{5}\ \overline{29} \\ & -4 \\ \hline 4\_ & 129 \end{array}$$

قدم 5 خالی جگہ کو بھرنے کے لیے سب سے بڑے ممکنہ ہندسے کا اندازہ لگائیے جو خارج قسمت میں نیا ہندسہ بنے گا اور نئے قاسم کو نئے حاصل تقسیم سے ضرب کریں گے تو حاصل ضرب مقسوم علیہ سے کم یا برابر ہوگا۔ اس مثال میں $42 \times 2 = 84$ ہے۔
چوں کہ $43 \times 3 = 129$ ہے اس لیے نیا ہندسہ 3 منتخب کرتے ہیں اور باقی معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & 23 \\ 2 & \overline{5}\ \overline{29} \\ & -4 \\ \hline 43 & 129 \\ & -129 \\ \hline & 0 \end{array}$$

قدم 6 چوں کہ 0 باقی ہے اور دیے گئے عدد میں کوئی ہندسے باقی نہیں ہیں۔ اس لیے،

$\sqrt{529} = 23$

- اب $\sqrt{4096}$ کو حل کیجیے۔

قدم 1 اکائی کی جگہ سے شروع کرتے ہوئے ہر جوڑے پر بار لگائیے۔ $(\overline{40}\ \overline{96})$۔

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ 6 & \overline{40}\ \overline{96} \\ & -36 \\ \hline & 4 \end{array}$$

قدم 2 سب سے بڑا عدد معلوم کیجیے جس کا مربع سب سے بائیں طرف کے بار کے لکھے عدد سے کم یا برابر ہو $(6^2 < 40 < 7^2)$۔
اس عدد کو قاسم اور سب سے بائیں طرف بار کے نیچے عدد کو مقسوم علیہ کی شکل میں لیجیے اور تقسیم کیجیے اور باقی (اس حالت میں 4) معلوم کیجیے۔

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ 6 & \overline{40}\ \overline{96} \\ & -36 \\ \hline & 496 \end{array}$$

قدم 3 اگلے بار کے نیچے دیے گئے عدد (یعنی 96) کو باقی کے دائیں طرف لکھیے۔ نیا مقسوم علیہ 496 ہوگا۔

قدم 4 خارج قسمت کا دُوگنا کیجیے اور دائیں طرف خالی جگہ چھوڑ کر لکھیے۔

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ 6 & \overline{40}\ \overline{96} \\ & -36 \\ \hline 12\_ & 496 \end{array}$$

قدم 5 خالی جگہ کو بھرنے کے لیے سب سے بڑے ممکنہ ہندسے کا اندازہ لگائیے جو ہندسہ خارج قسمت میں نیا ہوگا۔ اس طرح جب نیا ہندسہ خارج قسمت سے ضرب ہوتا ہے تب حاصل ضرب مقسوم علیہ سے چھوٹا یا برابر ہوگا۔ اس حالت میں ہم دیکھتے ہیں کہ $124 \times 4 = 496$ ہے
اس لیے حاصل تقسیم میں نیا ہندسہ 4 ہے۔ باقی معلوم کیجیے۔

$$\begin{array}{r|l} & 64 \\ 6 & \overline{40}\ \overline{96} \\ & -36 \\ \hline 12\underline{4} & 496 \\ & 496 \\ \hline & 0 \end{array}$$

قدم 6 کیوں کہ باقی صفر ہے اور کوئی بار نہیں ہے، اس لیے، $\sqrt{4096} = 64$ ہے۔

عدد کا اندازہ

کامل مربع عدد کے جذر المربع میں ہندسوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے ہم بار کا استعمال کرتے ہیں۔

$$\sqrt{\overline{40}\,\overline{96}} = 64 \quad \text{اور} \quad \sqrt{\overline{5}\,\overline{29}} = 23$$

ان دونوں اعداد 529 اور 4096 میں بار کی تعداد 2 ہے اور ان کے جذر المربع میں ہندسوں کی تعداد بھی 2 ہے۔ کیا آپ 14400 کے جذر المربع میں ہندسوں کی تعداد بتا سکتے ہیں؟

بار لگانے پر ہم کو $\overline{1}\,\overline{44}\,\overline{00}$ حاصل ہوتا ہے۔ یہاں بار کی تعداد 3 ہے۔ اس لیے جذر المربع 3 ہندسوں کا ہوگا۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل اعداد کے جذر المربع میں ہندسوں کی تعداد بغیر تحسیب کے معلوم کیجیے۔

(i) 25600 (ii) 100000000 (iii) 36864

مثال 9 : جذر المربع معلوم کیجیے: (i) 729 (ii) 1296

حل :

(i)

$$\begin{array}{r|l} & 27 \\ \hline 2 & \overline{7}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 47 & 329 \\ & 329 \\ \hline & 0 \end{array}$$

اس لیے $\sqrt{729} = 27$

(ii)

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 3 & \overline{12}\,\overline{96} \\ & -9 \\ \hline 66 & 396 \\ & 396 \\ \hline & 0 \end{array}$$

اس لیے $\sqrt{1296} = 36$

مثال 10 : وہ سب سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جسے 5607 میں سے گھٹائیں تو کامل مربع حاصل ہو۔ اس کامل مربع عدد کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

$$\begin{array}{r|l} & 74 \\ \hline 7 & \overline{56}\,\overline{07} \\ & -49 \\ \hline 14\underline{4} & 707 \\ & -576 \\ \hline & 131 \end{array}$$

حل : آئیے ہم تقسیم کے طریقے سے $\sqrt{5607}$ معلوم کرنے کی کوشش کریں۔ ہمیں 131 باقی حاصل ہوتا ہے۔ پس ظاہر ہے کہ 74^2، 5607 سے 131 کم ہے۔

یعنی اگر ہم کسی عدد سے باقی گھٹا دیں تو ہمیں ایک کامل مربع عدد حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے وہ مطلوبہ کامل مربع عدد ہے

$5607 - 131 = 5476$ اور $\sqrt{5476} = 74$

مثال 11 : سب سے بڑا چار ہندسی عدد معلوم کیجیے جو کامل مربع ہو۔

$$\begin{array}{r|l} & 99 \\ \hline 9 & \overline{99}\,\overline{99} \\ & -81 \\ \hline 18\underline{9} & 1899 \\ & -1701 \\ \hline & 198 \end{array}$$

حل : سب سے بڑا چار ہندسی عدد 9999 ہے۔ ہم لمبی تقسیم کے ذریعہ $\sqrt{9999}$ معلوم کرتے ہیں باقی 198 آتا ہے، اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ 99^2، 9999 سے 198 کم ہے۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر ہم کسی عدد میں سے باقی گھٹائیں تو ایک کامل مربع عدد حاصل ہوتا ہے اس لیے مطلوبہ کامل مربع عدد ہے

$9999 - 198 = 9801$

اور، $\sqrt{9801} = 99$

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 3 & \overline{13}\,\overline{00} \\ & -9 \\ \hline 66 & 400 \\ & -396 \\ \hline & 4 \end{array}$$

مثال 12 : وہ سب سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جسے 1300 میں جمع کرنے پر ایک کامل مربع عدد حاصل ہو۔ اس کامل مربع عدد کا جذر المربع بھی معلوم کیجیے۔

حل : لمبی تقسیم کے طریقہ سے $\sqrt{1300}$ معلوم کرتے ہیں یہاں پر باقی 4 ہے۔

اس سے پتہ چلتا ہے کہ $36^2 < 1300$

اگلا کامل مربع عدد $37^2 = 1369$

اس لیے مطلوبہ عدد ہے $37^2 - 1300 = 1369 - 1300 = 69$

6.6 اعشاریوں کا جذر المربع

عدد $\sqrt{17.64}$ پر غور کیجیے

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline & 1 \end{array}$$

قدم 1 عشری عدد کا جذر المربع معلوم کرنے کے لیے ہم صحیح عددی جز (یعنی 17) معمول کے مطابق پر بار لگاتے ہیں۔ عشری جز (یعنی 64) پر بھی پہلے اعشاریہ کے مقام سے شروع کر کے بار لگاتے ہیں اور معمول کے مطابق آگے بڑھتے ہیں۔ ہمیں $\overline{17}.\overline{64}$ حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline 8\_ & 164 \end{array}$$

قدم 2 اب اسی طریقے سے آگے بڑھتے ہیں۔ سب سے بائیں طرف بار 17 پر ہے اور $4^2 < 17 < 5^2$ اس عدد کو قاسم کے طور پر لیجیے اور سب سے بائیں طرف کے بار کے نیچے کا عدد (یعنی 17) مقسوم کے طور پر لیجیے۔ اب تقسیم کیجیے اور باقی عدد معلوم کیجیے۔

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & 17.64 \\ & -16 \\ \hline 82 & 164 \end{array}$$

قدم 3 باقی 1 ہے۔ اگلے بار کے نیچے کا عدد 64 باقی کے دائیں طرف لکھیے اب 164 حاصل ہوگا۔

قدم 4 قاسم کو دوگنا کیجیے اور اس طرح لکھیے کہ دائیں طرف ایک ہندسے کی جگہ خالی رہے چوں کہ 64 عشری جز میں تھا اس لیے خارج قسمت میں عشری علامت لگائیے۔

$$\begin{array}{r|l} & 4.2 \\ \hline 4 & 17.64 \\ & -16 \\ \hline 82 & 164 \\ & -164 \\ \hline & 0 \end{array}$$

قدم 5 ہم جانتے ہیں کہ $82 \times 2 = 164$ ہے۔ اس لیے نیا ہندسہ 2 ہے۔ تقسیم کیجیے اور باقی عدد معلوم کیجیے۔

قدم 6 چوں کہ باقی صفر ہے اور اب کوئی بار بھی باقی نہیں ہے اس لیے $\sqrt{17.64} = 4.2$

مثال 13 : 12.25 کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

حل :

$$\begin{array}{r|l} & \;\;3.5 \\ \hline 3 & \overline{12}.\overline{25} \\ & -9 \\ \hline 65 & 325 \\ & 325 \\ \hline & \;\;0 \end{array}$$

اس لیے $\sqrt{12.25} = 3.5$

کس طرح بڑھیں

عدد 176.341 پر غور کیجیے۔ صحیح عددی جز اور عشری عددی جز دونوں پر بار لگائیے۔ عشری جز میں بار لگانے کے طریقے میں کیا طریقہ ہے جو صحیح عددی جز سے مختلف ہے؟ 176 پر غور کیجیے۔ ہم عشری علامت کے پاس کے اکائی کے مقام سے شروع کر کے بائیں طرف بڑھتے ہیں، پہلا بار 76 کے اوپر اور دوسرا بار 1 کے اوپر ہے۔ 341 کے لیے ہم عشری علامت سے شروع کر کے دائیں طرف بڑھتے ہیں۔ پہلا بار 34 کے اوپر اور دوسرا بار لگانے کے لیے ہم 1 کے بعد 0 لگاتے ہیں۔ اور اس طرح 3410 حاصل ہوتا ہے۔

مثال 14 : ایک مربع نما پلاٹ کا رقبہ 2304 مربع میٹر ہے۔ اس مربع نما پلاٹ کا ضلع معلوم کیجیے۔

حل : مربع نما پلاٹ کا رقبہ = 2304 مربع میٹر

$$\begin{array}{r|l} & \;\;48 \\ \hline 4 & \overline{23}\,\overline{04} \\ & -16 \\ \hline 88 & 704 \\ & 704 \\ \hline & \;\;0 \end{array}$$

اس لیے مربع نما پلاٹ کا ضلع = $\sqrt{2304}$ میٹر

ہمیں حاصل ہوتا ہے $\sqrt{2304} = 48$

اس طرح مربع نما پلاٹ کا ضلع 48 میٹر ہے۔

مثال 15 : ایک اسکول میں 2401 طلبا ہیں۔ پی ٹی کا استاد اُنھیں قطاروں اور کالموں میں اس طرح کھڑا کرنا چاہتا ہے کہ قطاروں کی تعداد کالم کی تعداد کے برابر ہو۔ قطاروں کی تعداد معلوم کیجیے۔

حل : فرض کیجیے قطاروں کی تعداد x ہے۔

اس لیے کالموں کی تعداد $= x$

اس لیے طلبا کی تعداد $x \times x = x^2$

اس طرح $x^2 = 2401$ یعنی $x = \sqrt{2401} = 49$

$$\begin{array}{r|l} & \;\;49 \\ \hline 4 & \overline{24}.\overline{01} \\ & -16 \\ \hline 89 & 801 \\ & 801 \\ \hline & \;\;0 \end{array}$$

قطاروں کی تعداد 49 ہے۔

6.7 جذر المربع کا اندازہ لگانا

مندرجہ ذیل حالتوں پر غور کیجیے:

1. دیویشی کے پاس کپڑے کا ایک مربع نما ٹکڑا ہے جس کا رقبہ 125 مربع سینٹی میٹر ہے۔ وہ جاننا چاہتی ہے کہ کیا وہ اس سے 15 سینٹی میٹر ضلع کا رومال بنا سکتی ہے۔ اگر یہ ممکن ہے تو وہ جاننا چاہتی ہے کہ اس ٹکڑے سے زیادہ سے زیادہ کتنی لمبائی کا رومال بنایا جاسکتا ہے۔
2. مینا اور شوبھا نے ایک کھیل کھیلا۔ پہلی لڑکی ایک عدد کہتی ہے اور دوسری اس کا جذر المربع بتاتی ہے۔ مینا نے پہلے شروع کیا۔ اس نے 25 کہا اور شوبھا نے فوراً ہی جواب دیا 5۔ تب شوبھا نے کہا 81 اور مینا نے جواب دیا 9، یہ کھیل اس وقت تک جاری رہا جب مینا کا عدد 250 تک پہنچ گیا۔ اور شوبھا جواب نہیں دے سکی۔ تب مینا نے کہا شوبھا تم کم سے کم ایک ایسا عدد بتاؤ جس کا مربع 250 کے نزدیک ہو۔

ان سبھی حالتوں میں جذر المربع کا اندازہ لگانے کی ضرورت ہوتی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $100 < 250 < 400$ اور $\sqrt{100} = 10$ اور $\sqrt{400} = 20$

اس لیے $10 < \sqrt{250} < 20$

لیکن اب بھی ہم مربع عدد کے قریب نہیں ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $15^2 = 225$ اور $16^2 = 256$

اس لیے $15 < \sqrt{250} < 16$ اور 256، 225 کے بہ نسبت 250 سے زیادہ قریب ہے۔

اس لیے $\sqrt{250}$ کا لگ بھگ 16 ہے۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل اعداد کی قیمت کا قریب ترین مکمل عدد میں اندازہ لگائیے۔

(i) $\sqrt{80}$ (ii) $\sqrt{1000}$ (iii) $\sqrt{350}$ (iv) $\sqrt{500}$

مشق 6.4

1. تقسیم کے طریقہ سے مندرجہ ذیل اعداد کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

(i) 2304	(ii) 4489	(iii) 3481	(iv) 529
(v) 3249	(vi) 1369	(vii) 5776	(viii) 7921
(ix) 576	(x) 1024	(xi) 3136	(xii) 900

2. مندرجہ ذیل ہر عدد کے جذر المربع میں ہندسوں کی تعداد (تحسیب کیے بغیر) معلوم کیجیے۔

(i) 64 (ii) 144 (iii) 4489 (iv) 27225
(v) 390625

3. مندرجہ ذیل اعشاریہ اعداد کے جذر المربع معلوم کیجیے۔

(i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25 (v) 31.36

4. وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جسے مندرجہ ذیل اعداد سے گھٹانے پر ایک کامل مربع بن جائے۔ اس طرح سے حاصل کامل مربع عدد کا جذر المربع بھی معلوم کیجیے۔

(i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250 (iv) 825
(v) 4000

5. وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جسے مندرجہ ذیل اعداد میں جمع کرنے پر ایک کامل مربع بن جائے۔ اس طرح سے حاصل کامل مربع عدد کا جذر المربع بھی معلوم کیجیے۔

(i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825
(v) 6412

6. ایک مربع کا رقبہ 441 مربع میٹر ہے۔ اس کے ضلع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

7. ایک قائمہ زاویہ مثلث ABC میں $\angle B = 90°$ ہے

(a) اگر AB = 6 سینٹی میٹر، BC = 8 سینٹی میٹر ہو تو AC معلوم کیجیے۔

(b) اگر AC = 13 سینٹی میٹر، BC = 5 سینٹی میٹر ہو تو AB معلوم کیجیے۔

8. ایک مالی کے پاس 1000 پودے ہیں۔ وہ ان کو اس طرح لگانا چاہتا ہے کہ قطاروں کی تعداد کالموں کی تعداد کے برابر ہو۔ اسے کم سے کم کتنے پودے اور درکار ہوں گے؟

9. ایک اسکول میں 500 طلبا ہیں۔ پی ٹی ڈرِل کے لیے ان کو اس طرح کھڑا ہونا ہے کہ قطاروں کی تعداد کالموں کی تعداد کے برابر ہو۔ کتنے طلبا باقی بچیں گے جو اس ترتیب میں نہیں آئیں گے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1. اگر کسی طبعی عدد m کو n^2 کی شکل میں ظاہر کریں جہاں n بھی ایک طبعی عدد ہو، تب m **ایک مربع عدد** ہے۔

2. تمام مربع اعداد کے آخر میں اکائی کی جگہ پر 0، 1، 4، 5، 6 یا 9 ہوتا ہے۔

3. مربع اعداد کے آخر میں صفروں کی تعداد جفت ہوتی ہے۔

4. **جذر المربع**، مربع کا معکوس عمل ہے۔

5. ایک کامل مربع عدد کے دو جذر المربع ہوتے ہیں۔ عدد کے مثبت جذر المربع کو علامت $\sqrt{\ }$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر، $9 = 3^2$ ہے جو $\sqrt{9} = 3$ دیتا ہے۔

باب

7

مکعب اور جذر المکعب

4817CH07

7.1 تعارف

یہ کہانی ایس۔ رامانوجن کی ہے جن کا شمار ہندوستان کے عظیم ریاضی دانوں میں کیا جاتا ہے۔ ایک مرتبہ ریاضی کے مشہور پروفیسر جی۔ ایچ۔ ہارڈی رامانوجن سے ملنے آئے اور وہ جس ٹیکسی سے آئے اس کا نمبر 1729 تھا۔ رامانوجن سے بات کرتے وقت ہارڈی نے اس عدد کو ایک ''بے کار'' (dull) عدد بتایا۔ رامانوجن نے فوراً جواب دیا کہ 1729 ایک دلچسپ عدد ہے۔ یہ ایسا سب سے چھوٹا عدد ہے جسے دو مکعب (Cubes) کے حاصل جمع کی شکل میں دو مختلف طریقوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

> **ہارڈی – رامانوجن عدد**
>
> 1729 سب سے چھوٹا ہارڈی–رامانوجن عدد ہے۔ ایسے بہت سے اعداد ہیں۔ بعض مذکور ہیں۔ 4104 (2,16; 9,15)، 13832 (18,20; 2,24) ہیں قوسین میں دیے گئے ان اعداد کو لے کر اس کی جانچ کیجیے۔

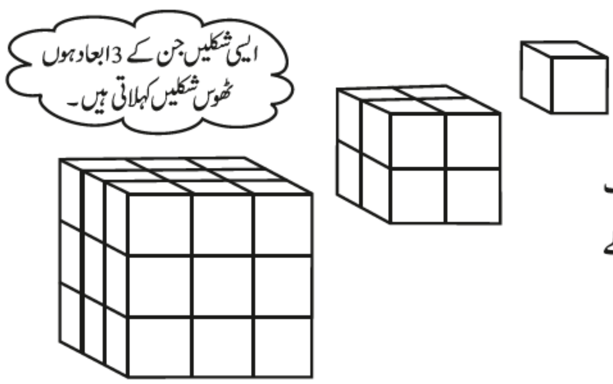
$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

اس وقت سے عدد 1729 کو ہارڈی – راما نوجن عدد کہتے ہیں، حالاں کہ 1729 کی یہ خصوصیت رامانوجن سے 300 سال پہلے بھی معلوم تھی۔

رامانوجن کو اس کا علم کیسے تھا؟ ٹھیک ہے، وہ اعداد سے پیار کرتے تھے۔ پوری زندگی وہ اعداد کے ساتھ تجربے کرتے رہے۔ ممکن ہے انھوں نے وہ اعداد معلوم کیے ہوں جنھیں دو مربعوں کا حاصل جمع اور ساتھ ہی دو مکعب کے مکعبوں کا حاصل جمع کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا تھا۔

مکعب کے بہت سے دلچسپ نمونے ہیں۔ آیئے ہم مکعب، جذر المکعب اور ان سے متعلق بہت سے دلچسپ حقائق کے بارے میں معلوم کریں۔



7.2 مکعب

آپ جانتے ہیں کہ لفظ 'مکعب' کا استعمال جیومیٹری میں کیا جاتا ہے۔ مکعب ایک ایسی ٹھوس شکل ہے جس کے سبھی اضلاع برابر ہوتے ہیں۔ 1 سینٹی میٹر ضلع والے کتنے مکعبوں سے 2 سینٹی میٹر ضلع والا ایک مکعب بنے گا؟

1 سینٹی میٹر والے کتنے مکعبوں سے 3 سینٹی میٹر والا ایک مکعب بنے گا؟

اعداد 1، 8، 27،.... پر غور کیجیے۔

یہ کامل مکعب (Perfect Cubes) **یا مکعب اعداد** (Cube Number) کہلاتے ہیں۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ انھیں یہ نام کیوں دیے گئے ہیں؟ ان میں سے ہر ایک عدد اس وقت حاصل ہوتا ہے جب ایک ہی عدد کو لے کر عدد خود اسی عدد سے تین مرتبہ ضرب کیا جاتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ $1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$; $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$; $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$ ہے۔

کیوں کہ $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ ہے، اس لیے 125 ایک مکعب عدد ہے۔

کیا 9 ایک مکعب عدد ہے؟ نہیں، کیوں کہ $9 = 3 \times 3$ ہے اور ایسا کوئی طبعی عدد نہیں ہے جسے لے کر 3 بار ضرب کرنے پر 9 حاصل ہوتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $8 = 2 \times 2 \times 2$ اور $27 = 3 \times 3 \times 3$ ہے اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ 9 ایک کامل مکعب نہیں ہے۔

نیچے 1 سے 10 تک اعداد کے مکعب دیے گئے ہیں۔

جدول 1

عدد	مکعب
1	$1^3 = 1$
2	$2^3 = 8$
3	$3^3 = 27$
4	$4^3 = 64$
5	$5^3 =$ _____
6	$6^3 =$ _____
7	$7^3 =$ _____
8	$8^3 =$ _____
9	$9^3 =$ _____
10	$10^3 =$ _____

اسے مکمل کیجیے

اعداد 729، 1000، 1728 بھی کامل مکعب ہیں۔

1 سے 1000 تک صرف دس کامل مکعب ہیں۔ (اس کی جانچ کیجیے)۔ 1 سے 100 تک کتنے کامل مکعب ہیں؟

جفت اعداد کے مکعبوں پر غور کیجیے کہ کیا یہ سبھی جفت ہیں؟ آپ طاق اعداد کے مکعبوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

11 سے 20 تک اعداد کے مکعب نیچے دیے گئے ہیں۔

جدول 2

عدد	مکعب
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

ہم جفت ہیں اس لیے ہمارے مکعب بھی جفت ہیں

ہم طاق ہیں اس لیے ہمارے مکعب بھی طاق ہیں

ایسے کچھ اعداد پر غور کیجیے جن کی اکائی کا ہندسہ '1' ہے دیگر اکائیاں۔ ان میں سے ہر ایک عدد کا مکعب معلوم کیجیے۔ اس عدد کے مکعب کے اکائی ہندسے کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں جس کی اکائی کا ہندسہ 1 ہو؟

اسی طرح ان اعداد کے مکعبوں کی اکائی کے ہندسوں کے بارے میں معلوم کیجیے جن کے اکائی کے ہندسے 2، 3، 4....وغیرہ ہوں۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل اعداد میں سے ہر مکعب کے اکائی کا ہندسہ معلوم کیجیے۔

(i) 3331 (ii) 8888 (iii) 149 (iv) 1005

(v) 1024 (vi) 77 (vii) 5022 (viii) 53

7.2.1 کچھ دلچسپ نمونے

1. مسلسل طاق اعداد کو جمع کرنا

طاق اعداد کے حاصل جمع کے مندرجہ ذیل نمونوں کو دیکھیے۔

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

کیا یہ دلچسپ نہیں ہے؟ حاصل جمع 10^3 حاصل کرنے کے لیے کتنے مسلسل طاق اعداد کی ضرورت پڑے گی۔

کوشش کیجیے

درج بالا نمونے کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل اعداد کو طاق اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(a) 6^3 (b) 8^3 (c) 7^3

مندرجہ ذیل نمونے کو دیکھیے ۔

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

درج بالا نمونے کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $7^3 - 6^3$ (ii) $12^3 - 11^3$ (iii) $20^3 - 19^3$ (iv) $51^3 - 50^3$

2. مکعب اور ان کے مفرد اجزائے ضربی

کچھ اعداد اور ان کے مکعبوں کے مندرجہ ذیل مفرد اجزائے ضربی پر غور کیجیے۔

خود کے معکب میں ہر ایک مفرد جز ضربی تین مرتبہ آتا ہے۔

اعداد کے مفرد عدد اجزائے ضربی	اس کے مکعبوں کے مفرد اجزائے ضربی
$4 = 2 \times 2$	$4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$
$6 = 2 \times 3$	$6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$
$15 = 3 \times 5$	$15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ $= 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

مشاہدہ کیجیے کہ ایک عدد کا ہر ایک مفرد جز ضربی اس کے مکعب میں 3 مرتبہ ظاہر ہوتا ہے۔

کیا آپ کو یاد ہے کہ $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ ہوتا ہے؟

کسی عدد کے مفرد اجزائے ضربی میں اگر ہر جز ضربی تین مرتبہ آتا ہے تب کیا یہ عدد کامل مکعب عدد ہے؟ اس کے بارے میں سوچیے! کیا 216 ایک کامل مکعب ہے؟

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

مفرد اجزائے ضربی کے مطابق $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

ہر ایک جز ضربی 3 مرتبہ آتا ہے $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$

جو ایک کامل مکعب ہے۔

کیا 729 ایک کامل مکعب ہے؟ $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

اجزائے ضربی کو ثلاثہ کی شکل میں رکھ سکتے ہیں۔

ہاں، 729 ایک کامل مکعب ہے۔

آیئے اب 500 کے لیے اس کی جانچ کریں۔

500 کے مفرد اجزائے ضربی ہیں $2 \times 2 \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

یہاں حاصل ضرب میں 5 تین مرتبہ ہے لیکن 2 صرف دو مرتبہ ہے۔

اس لیے 500 ایک کامل مکعب نہیں ہے۔

مثال 1 : کیا 243 ایک کامل مکعب ہے؟

حل : $243 = \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

اوپر دیے گئے اجزائے ضربی کو فیثا غورثی ثلاثہ کی شکل میں رکھنے کے بعد 3×3 باقی بچتا ہے۔اس لیے 243 ایک کامل مکعب نہیں ہے۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل میں کون سے اعداد کامل مکعب ہیں؟

1. 400	2. 3375	3. 8000	4. 15625
5. 9000	6. 6859	7. 2025	8. 10648

7.2.2 سب سے چھوٹا ضعف جو ایک کامل مکعب ہے

راج نے ایک لوچ دار مادے سے مکعب نما (Cuboid) بنایا۔مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 15 سینٹی میٹر، 30 سینٹی میٹر اور 15 سینٹی میٹر ہے۔

انو نے پوچھا کہ ایک کامل مکعب بنانے کے لیے اُسے ایسے کتنے مکعب نما درکار ہوں گے؟ کیا آپ بتا سکتے ہیں؟

راج نے جواب دیا،کعب نما کا حجم ہے $15 \times 30 \times 15 = 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5$

$$= 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$$

چوں کہ مفرد اجزائے ضربی میں 2 صرف ایک مرتبہ ہے۔اس لیے ہمیں اسے کامل مکعب بنانے کے لیے $2 \times 2 = 4$ کی ضرورت پڑے گی۔ لہٰذا ہمیں کامل مکعب بنانے کے لیے ایسے 4 مکعب نماؤں کی ضرورت پڑے گی۔

مثال 2 : کیا 392 ایک کامل مکعب ہے؟ اگر نہیں، تو وہ چھوٹے سے چھوٹا طبعی عدد معلوم کیجیے جس سے 392 کو ضرب کرنے پر حاصل ضرب ایک کامل مکعب بن جائے۔

حل : $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

جز ضربی گروپ میں 7 تین مرتبہ نہیں آتا اس لیے 392 ایک کامل مکعب نہیں ہے۔اس کو مکعب بنانے کے لیے ہمیں ایک اور 7 عدد کی ضرورت ہے، ایسی صورت میں

$392 \times 7 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2744$ جو ایک کامل مکعب ہے۔

لہٰذا وہ سب سے چھوٹا طبعی عدد 7 ہے جس سے 392 کو ضرب کرنے پر ایک کامل مکعب حاصل ہوتا ہے۔

مثال 3 : کیا 53240 ایک کامل مکعب ہے؟ اگر نہیں، تو کس چھوٹے سے چھوٹے طبعی عدد سے 53240 کو تقسیم کیا جائے کہ حاصل تقسیم ایک کامل مکعب بن جائے؟

حل : $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11} \times 5$

مفرد اجزائے ضربی میں 5 صرف ایک مرتبہ آتا ہے اس لیے 53240 ایک کامل مکعب نہیں ہے۔ اگر ہم دیے ہوئے عدد کو 5 سے تقسیم کریں تب خارج قسمت کے مفرد اجزائے ضربی میں 5 نہیں آئے گا۔

اس طرح $53240 \div 5 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

لہذا وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد 5 ہے جس سے 53240 کو تقسیم کرنے پر ایک کامل مکعب بن جاتا ہے۔

اس حالت میں کامل مکعب ہے $= 10648$

مثال 4 : کیا 1188 کامل مکعب ہے؟ اگر نہیں تو کس چھوٹے سے چھوٹے عدد سے اس کو تقسیم کیا جائے کہ وہ ایک کامل مکعب بن جائے۔

حل : $1188 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 11$

مفرد اعداد 2 اور 11 گروپ میں تین تین مرتبہ نہیں آئے ہیں، اس لیے 1188 کامل مکعب نہیں ہے۔ مفرد اجزائے ضربی میں 2 دو مرتبہ اور 11 ایک مرتبہ آیا ہے۔ اس لیے اگر ہم 1188 کو $2 \times 2 \times 11 = 44$ سے تقسیم کریں تو مفرد اجزائے ضربی میں 2 اور 11 نہیں آئیں گے۔

لہٰذا اس طرح سے وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد 44 ہے جس سے تقسیم کرنے پر 1188 ایک کامل مکعب بن جائے گا اور اس طرح سے حاصل کامل مکعب ہے $1188 \div 44 = 27\ (=3^3)$

مثال 5 : کیا 68600 ایک کامل مکعب ہے؟ اگر نہیں تو وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جس سے 68600 کو ضرب کرنے پر یہ ایک کامل مکعب بن جائے۔

حل : ہمارے پاس $68600 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ ہے۔ ان مفرد اجزائے ضربی میں ہم دیکھتے ہیں کہ 5 ثلاثہ کی شکل میں نہیں ہے۔

اس لیے 68600 ایک کامل مکعب نہیں ہے۔ کامل مکعب بنانے کے لیے ہم اس کو 5 سے ضرب کرتے ہیں۔

اس طرح $68600 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 343000$ جو ایک کامل مکعب ہے۔

غور کیجیے کہ 343 ایک کامل مکعب ہے۔ مثال 5 سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ 343000 بھی ایک کامل مکعب ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

جانچ کیجیے کہ مندرجہ ذیل میں سے کون کامل مکعب ہیں۔ (i) 2700 (ii) 16000 (iii) 64000 (iv) 900
(v) 125000 (vi) 36000 (vii) 21600 (viii) 10000 (ix) 27000000 (x) 1000

ان کامل مکعب میں آپ کس نمونے کا مشاہدہ کرتے ہیں؟

مشق 7.1

1. مندرجہ ذیل میں کون سے اعداد کامل مکعب نہیں ہیں؟

(i) 216 (ii) 128 (iii) 1000 (iv) 100

(v) 46656

2. وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جس سے مندرجہ ذیل اعداد کو ضرب کرنے پر ایک کامل مکعب حاصل ہوگا۔

(i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675

(v) 100

3. وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کیجیے جس سے مندرجہ ذیل اعداد کو تقسیم کرنے پر ایک کامل مکعب حاصل ہو۔

(i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192

(v) 704

4. پریکشت نے ایک لوچ دار مادے سے مکعب نما بنایا ہے جس کے اضلاع 5 سینٹی میٹر، 2 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر ہیں۔ ایک مکعب بنانے کے لیے اسے ایسے کتنے مکعب نما کی ضرورت پڑے گی؟

7.3 جذر المکعب

اگر ایک مکعب کا حجم 125 مکعب سینٹی میٹر ہے تو اس کے ضلع کی لمبائی کیا ہوگی؟ مکعب کے ضلع کی لمبائی حاصل کرنے کے لیے ہمیں اس عدد کی ضرورت ہے جس کا مکعب 125 ہے۔

جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ جذر المربع ، مربع کا معکوس عمل ہے اسی طرح سے جذر المکعب ، مکعب کے عمل کا معکوس ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ $2^3 = 8$ ہے؛ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ 8 کا جذر المکعب 2 ہے۔

ہم لکھتے ہیں $\sqrt[3]{8} = 2$ ۔ علامت $\sqrt[3]{\ }$ 'جذر المکعب' کو ظاہر کرتی ہے۔

مندرجہ ذیل پر غور کیجیے :

بیان	نتیجہ
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$

بیان	نتیجہ
$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$
$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

7.3.1 مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے جذرالمکعب معلوم کرنا

3375 پر غور کیجیے۔ ہم اس کا جذرالمکعب مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کرتے ہیں:

$$3375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3$$

اس لیے 3375 کا جذرالمکعب $= \sqrt[3]{3375} = 3 \times 5 = 15$

اسی طرح سے $\sqrt[3]{74088}$ حاصل کرنے کے لیے ہمارے پاس ہے

$$74088 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3$$

اس لیے $\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

مثال 6 : 8000 کا جذرالمکعب معلوم کیجیے۔

حل : 8000 کے مفرد اجزائے ضربی ہیں $\underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

اس لیے $\sqrt[3]{8000} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

مثال 7 : 13824 کا مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے جذرالمکعب معلوم کیجیے۔

حل :

$$13824 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^3$$

اس لیے $\sqrt[3]{13824} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

بتائیے یہ صحیح ہے یا غلط: کسی بھی صحیح عدد m کے لیے $m^2 < m^3$ ہے۔ کیوں؟

7.3.2 ایک مکعب عدد کا جذرالمکعب

اگر آپ جانتے ہیں کہ دیا گیا عدد مکعب عدد ہے تو اس کا جذرالمکعب معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

قدم 1 کوئی بھی ایک مکعب عدد جیسے 857375 لیجیے اور عدد کے سب سے دائیں طرف کے ہندسے سے شروع کرتے ہوئے تین ہندسوں کے گروپ بنائیے۔

دوسرا گروپ	پہلا گروپ
857	375

ہم سلسلے وار دیے ہوئے مکعب عدد کے جذرالمکعب کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔

ہمارے پاس 3 ہندسوں کے دو گروپ 375 اور 857 ہیں۔

قدم 2 پہلا گروپ یعنی 375 ہمیں مطلوبہ جذر المکعب کا اکائی کا ہندسہ دے گا۔

عدد 375، 5 پر ختم ہوتا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ 5 کسی عدد کے اکائی کے مقام پر تب آتا ہے جب اس کے جذر المکعب میں اکائی کا ہندسہ 5 ہے۔

اس طرح ہمیں جذر المکعب کے اکائی کا ہندسہ 5 حاصل ہوتا ہے۔

قدم 3 اب دوسرا گروپ یعنی 857 لیجیے

ہم جانتے ہیں کہ $9^3 = 729$ اور $10^3 = 1000$ ہے۔مزید $729 < 857 < 1000$

ہم چھوٹے عدد 729 کے اکائی کے ہندسے کو مطلوبہ جذر المکعب کے دہائی کے طور پر لیتے ہیں۔اس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\sqrt[3]{857375} = 95$

مثال 8 : تخمینہ کی مدد سے 17576 کا جذر المکعب معلوم کیجیے۔

حل : دیا گیا عدد 17576 ہے۔

قدم 1 17576 کے سب سے دائیں طرف کے ہندسے سے شروع کرتے ہوئے تین ہندسوں کے گروپ بنائیے۔یہ گروپ <u>576</u> <u>17</u> ہیں۔اس صورت میں ایک گروپ یعنی 576 میں 3 ہندسے ہیں جب کہ 17 میں صرف دو ہندسے ہیں۔

قدم 2 576 لیجیے۔

اس میں اکائی کا ہندسہ 6 ہے۔

ہم مطلوبہ جذر المکعب کی اکائی کی جگہ 6 لیتے ہیں۔

قدم 3 دوسرے گروپ یعنی 17 کو لیتے ہیں۔

2 کا مکعب 8 ہے اور 3 کا مکعب 27 ہے۔17، 8 اور 27 کے درمیان میں کہیں ہے۔

2 اور 3 میں چھوٹا عدد 2 ہے۔

2 میں اکائی کے ہندسہ کی جگہ 2 ہی ہے۔اب 2 کو 17576 کے جذر المکعب کے دہائی کے ہندسے کی جگہ لیجیے۔

اس طرح سے $\sqrt[3]{17576} = 26$ (اس کی جانچ کیجیے!)

مشق 7.2

.1 مندرجہ ذیل ہر ایک عدد کا جذر المکعب مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

(i) 64 (ii) 512 (iii) 10648 (iv) 27000

(v) 15625 (vi) 13824 (vii) 110592 (viii) 46656

(ix) 175616 (x) 91125

.2 بتائیے کہ مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط۔

(i) کسی بھی طاق عدد کا مکعب، جفت ہوتا ہے۔

(ii) کامل مکعب دو صفر پر ختم نہیں ہوتا۔

(iii) اگر کسی عدد کا مربع 5 پر ختم ہوتا ہے تو اس کا مکعب 25 پر ختم ہوگا۔

(iv) کوئی ایسا کامل مکعب نہیں ہے جو 8 پر ختم ہوتا ہو۔

(v) دو ہندسوں کے عدد کا مکعب ایک تین ہندسی عدد ہو سکتا ہے۔

(vi) دو ہندسوں کے عدد کے مکعب میں سات یا اس سے زیادہ ہندسے ہو سکتے ہیں۔

(vii) ایک ہندسی کے عدد کا مکعب بھی ایک ہندسی عدد ہو سکتا ہے۔

.3 آپ کو معلوم ہے کہ 1331 ایک کامل مربع ہے۔ کیا آپ اس کے اجزائے ضربی کیے بغیر اس کے جذرالمکعب کا اندازہ لگا سکتے ہیں؟ اسی طرح 12167 ، 4913 اور 32768 کے جذرالمکعب کا اندازہ لگائیے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

.1 اعداد جیسے 1729، 4104، 13832 ہارڈی – رامانوجن اعداد کہلاتے ہیں۔ ہم ان کو دو مختلف طریقوں سے دو مکعب کے حاصل جمع کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔

.2 کسی عدد کو خود سے تین مرتبہ ضرب کرنے پر حاصل ہونے والے اعداد **مکعب اعداد** کہلاتے ہیں۔ مثال کے طور پر 1، 8، 27، .... وغیرہ۔

.3 اگر کسی عدد کے مفرد اجزائے ضربی میں ہر جز ضربی تین مرتبہ ظاہر ہوتا ہے تو وہ عدد ایک کامل مکعب ہوتا ہے۔

.4 علامت $\sqrt[3]{\ }$ جذرالمکعب کو ظاہر کرتی ہے۔ مثال کے طور پر $\sqrt[3]{27} = 3$ ۔

باب

8

4817CH08

مقدار کا موازنہ

8.1 نسبت اور فی صدی کا اعادہ

ہم جانتے ہیں کہ نسبت کا مطلب ہے دو مقداروں کا موازنہ۔

ایک ٹوکری میں دو قسم کے پھل ہیں مان لیجیے 20 سیب اور 5 سنترے ہیں۔ سنترے اور سیب کی تعداد میں نسبت = 5 : 20 ہے

اس موازنہ کو ہم کسر کے ذریعے بھی دکھا سکتے ہیں، $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

یعنی سنتروں کی تعداد سیب کی تعداد کا $\frac{1}{4}$ ہے۔ نسبت کی شکل میں یہ 1:4 ہے اور اسے ''1 کی 4 سے نسبت'' پڑھا جاتا ہے۔

یا

سیب اور سنتروں کی تعداد میں نسبت $\frac{4}{1} = \frac{20}{5}$ ہے۔ جس کا مطلب یہ ہے کہ سیب سنتروں کی تعداد کا 4 گنا ہیں۔ یہ موازنہ ہم فی صد کے استعمال سے بھی کر سکتے ہیں۔

25 پھلوں میں 5 سنترے ہیں۔ اس لیے سنتروں کا فی صد ہے

$$\frac{5}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{100} = 20\%$$

[نسب نما 100 کیا گیا]

یا

اکائی کے قاعدہ سے:

25 پھلوں میں سنتروں کی تعداد 5 ہے۔ اس لیے 100 پھلوں میں سنتروں کی تعداد ہوگی:

$$\frac{5}{25} \times 100 = 20$$

چوں کہ میں صرف سیب اور سنترے ہیں۔

اس لیے سیبوں کا فی صد + سنتروں کا فی صد = 100

یا سیبوں کا فی صد + 20 = 100

یا سیبوں کا فی صد = 80 = 20 − 100

اس طرح ٹوکری میں 20% سنترے اور 80% سیب ہیں۔

مثال 1 : ایک اسکول میں ساتویں جماعت کے لیے پکنک کا ایک پروگرام بنایا گیا۔ لڑکیوں کی تعداد 18 ہے جو طلبا کی کل تعداد کا 60% ہیں۔

پکنک کا مقام اسکول سے 55 کلومیٹر کے فاصلہ پر ہے اور ٹرانسپورٹ کمپنی ₹ 12 فی کلومیٹر کی شرح سے کرایہ وصول کرتی ہے۔
کھانے پینے کا کل خرچ ₹4280 ہے۔
کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ

1. کلاس میں لڑکیوں اور لڑکوں کی تعداد میں نسبت کیا ہے؟
2. اگر دو اساتذہ بھی جماعت کے ساتھ پکنک پر جا رہے ہیں تو فی شخص خرچ کتنا آئے گا؟
3. اگر ان کا پہلا ٹھہراؤ اسکول سے 22 کلومیٹر کے فاصلے پر ہے تو یہ کل 55 کلومیٹر کے فاصلہ کا کتنا فی صد ہے؟ فاصلہ کا کتنا فی صد طے کرنا باقی ہے؟

حل :

1. لڑکیوں اور لڑکوں کی تعداد میں نسبت معلوم کرنے کے لیے۔

آشیما اور جان نے مندرجہ ذیل جوابات حاصل کیے۔
انھیں لڑکوں کی تعداد معلوم کرنے کی ضرورت تھی اور کل طلبا کی تعداد بھی۔

آشیما نے مندرجہ ذیل طریقے سے حل کیا

مان لیجیے طلبا کی کل تعداد x ہے
جس میں 60% لڑکیاں ہیں۔
اس لیے x کا 60% = 18

$$\frac{60}{100} \times x = 18$$

یا $x = \dfrac{18 \times 100}{60} = 30$

طلبا کی کل تعداد 30 ہے۔

یا

جان نے اکائی کا قاعدہ استعمال کیا

100 طلبا میں لڑکیوں کی تعداد 60 ہے۔
$\frac{100}{60}$ طلبا میں ایک لڑکی ہے۔
اس لیے کتنے طلبا میں 18 لڑکیاں ہوں گی؟

طلبا کی کل تعداد $= \dfrac{100}{60} \times 18$

$= 30$

اس لیے لڑکوں کی کل تعداد ہے $= 30 - 18 = 12$

لہٰذا لڑکیوں اور لڑکوں کی تعداد میں نسبت $18 : 12$ یا $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

جسے $3 : 2$ لکھتے ہیں اور 3 کی 2 سے نسبت پڑھتے ہیں۔

2. فی شخص خرچ معلوم کرنے کے لیے:

ٹرانسپورٹ کا خرچ = دونوں طرف کا فاصلہ × شرح

$= ₹\ (55 \times 2) \times 12$

$= ₹\ 110 \times 12 = ₹1320$

کل خرچ = کھانے پینے کا خرچ + نقل و حمل کا خرچ

$= ₹4280 + ₹1320$

$= ₹5600$

اشخاص کی کل تعداد = 18 لڑکیاں + 12 لڑکے + 2 استاد

= 32 لوگ

فی شخص خرچ معلوم کرنے کے لیے آشیما اور جان نے اکائی کے قاعدہ کا استعمال کیا

32 لوگوں کے لیے خرچ کی گئی رقم = ₹5600

ایک شخص پر خرچ کی گئی رقم = $\frac{5600}{32} = ₹175$

.3 اس مقام کا فاصلہ جہاں پر پہلا ٹھہراؤ تھا = 22 کلومیٹر

فاصلہ کا فی صد معلوم کرنے کے لیے:

آشیما نے یہ طریقہ استعمال کیا :

$$\frac{22}{55} = \frac{22}{55} \times \frac{100}{100} = \frac{40}{100} = 40\%$$

[وہ نسبت کو $\frac{100}{100} = 1$ سے ضرب کر رہی ہے اور فی صد میں بدل رہی ہے۔]

یا

جان نے اکائی کا طریقہ استعمال کیا :

55 کلومیٹر میں سے 22 کلومیٹر کی دوری طے کی جا چکی ہے۔

1 کلومیٹر میں سے $\frac{22}{55}$ کلومیٹر سفر طے ہوا۔

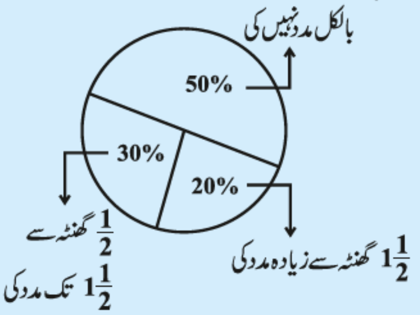
100 کلومیٹر میں سے $\frac{22}{55} \times 100$ کلومیٹر کی دوری طے کی گئی۔

یعنی کل فاصلہ کا 40% دوری طے کی گئی۔

دونوں کے جواب ایک ہی تھے۔ وہ مقام جہاں اسکول کے بعد پہلا ٹھہراؤ کیا گیا کل فاصلہ جو ان کو طے کرنا تھا اس کا 40% تھا۔ اس طرح فاصلہ طے کرنے کے لیے باقی ماندہ فاصلہ $100\% - 40\% = 60\%$

کوشش کیجیے

ایک پرائمری اسکول میں والدین سے پوچھا گیا کہ وہ اپنے بچوں کے ہوم ورک میں مدد کرنے میں کتنے گھنٹے صرف کرتے ہیں۔ 90 والدین ایسے تھے جو $\frac{1}{2}$ گھنٹہ سے لے کر $1\frac{1}{2}$ گھنٹہ تک بچوں کے کام میں مدد کرتے تھے۔ والدین نے اپنے بچوں کی مدد کے لیے جو وقت بتایا اسے مقابل کی شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔ 20% نے روزانہ $1\frac{1}{2}$ گھنٹے سے زیادہ مدد کی، 30% نے $\frac{1}{2}$ گھنٹہ سے $1\frac{1}{2}$ گھنٹہ تک مدد کی اور 50% نے بالکل ہی مدد نہیں کی۔



اس بنیاد پر مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

(i) کتنے والدین سے یہ سوال پوچھا گیا؟

(ii) کتنے والدین نے کہا کہ انھوں نے مدد نہیں کی؟

(iii) کتنے والدین نے کہا کہ انھوں نے $1\frac{1}{2}$ گھنٹے سے زیادہ مدد کی؟

مشق 8.1

1. مندرجہ ذیل کی نسبت معلوم کیجیے۔

(a) سائیکل کی رفتار 15 کلومیٹر فی گھنٹہ کی اسکوٹر کی رفتار 30 کلومیٹر فی گھنٹہ سے۔

(b) 5 میٹر کی 10 کلومیٹر سے　　(c) 50 پیسے کی 5 روپے سے

2. مندرجہ ذیل نسبتوں کو فی صد میں بدلیے۔

(a) 3 : 4　　(b) 2 : 3

3. 25 طلبا میں سے 72% طلبا ریاضی میں دلچسپی لیتے ہیں۔ کتنے طلبا ریاضی میں دلچسپی نہیں رکھتے؟

4. ایک فٹ بال کی ٹیم نے کُل کھیلے گئے میچوں میں سے 10 میں جیت حاصل کی۔ اگر ان کی جیت کا فی صد 40 تھا تو ٹیم نے کل کتنے میچ کھیلے؟

5. اگر چمیلی کے پاس اپنی رقم کا 75% خرچ کرنے کے بعد 600 ₹ باقی بچے تو معلوم کیجیے اس کے پاس کل کتنے روپے تھے؟

6. اگر کسی شہر میں 60% لوگ کرکٹ پسند کرتے ہیں، 30% فٹ بال پسند کرتے ہیں اور باقی لوگ دوسرے کھیل پسند کرتے ہیں تو معلوم کیجیے کہ کتنے فی صد لوگ دوسرے کھیل پسند کرتے ہیں؟ اگر کل تعداد 50 لاکھ ہے تو ہر ایک کھیل کو پسند کرنے والے لوگوں کی صحیح تعداد معلوم کیجیے۔

8.2 فی صد میں اضافہ یا کمی معلوم کرنا

ہمیں اکثر و بیشتر اپنی روزمرہ کی زندگی میں مندرجہ ذیل قسم کی اطلاعات ملتی ہیں۔

(i) چھپی ہوئی قیمت پر 25% کی رعایت　　(ii) پٹرول کی قیمتوں میں 10% کا اضافہ

ایسی کچھ مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 2 : گذشتہ سال اسکوٹر کی قیمت 34,000 ₹ تھی۔ اس سال اس میں 20% کا اضافہ ہوگیا۔ اس کی موجودہ قیمت کیا ہے؟

حل:

امیتا نے کہا کہ وہ پہلے قیمت میں اضافہ معلوم کرے گی جو 34000 ₹ کا 20% ہے اور پھر اسکوٹر کی نئی قیمت معلوم کرے گی۔

34000 کا 20% = $\frac{20}{100} \times 34000$ ₹

سنیتا نے اکائی کا قاعدہ استعمال کیا۔ 20% اضافہ کا مطلب ہے کہ

100 ₹ بڑھ کر 120 ₹ ہو گئے۔　یا

اس لیے، 34000 بڑھ کر کتنے ہو جائیں گے؟

$= ₹\ 6800$

نئی قیمت = پرانی قیمت + اضافہ

$= ₹\ 34000 + ₹\ 6800$

$= ₹\ 40,800$

بڑھی ہوئی قیمت $= \frac{120}{100} \times 34000$ ₹

$= ₹\ 40,800$

اسی طرح، قیمت میں فی صد کمی کا مطلب ہے اصل کمی معلوم کرنا اور اسے پہلی قیمت سے گھٹانا۔

مان لیجیے فروخت بڑھانے کے لیے اسکوٹر کی قیمت میں 5% کی کمی کر دی گئی تو بتایئے اسکوٹر کی قیمت کیا ہوگی؟

اسکوٹر کی قیمت $= ₹\ 34,000$

قیمت میں کمی = ₹ 34,000 کا 5%

$34000 \times \frac{5}{100}\ ₹ = ₹\ 1700$

نئی قیمت = پرانی قیمت − قیمت میں کمی

$₹\ 1700 - ₹\ 34000 = ₹\ 32300$

یوں اسکوٹر کی نئی قیمت ₹ 32,300 ہوگی۔

8.3 رعایت (Discounts) معلوم کرنا

کسی شے کی چھپی ہوئی قیمت پر دی جانے والی چھوٹ کو رعایت کہتے ہیں۔ عام طور پر یہ رعایت گاہکوں کو خریداری کے لیے لبھانے کے لیے اور سامان کی فروخت میں اضافہ کرنے کے لیے دی جاتی ہے۔ آپ چھپی ہوئی قیمت سے فروخت قیمت گھٹانے پر رعایت معلوم کر سکتے ہیں۔

اس لیے، رعایت = چھپی ہوئی قیمت − قیمت فروخت

مثال 3 : کسی شے کی چھپی ہوئی قیمت ₹ 840 ہے اور وہ ₹ 714 میں فروخت کی گئی۔ رعایت اور رعایت فی صد معلوم کیجیے۔

حل : رعایت = چھپی ہوئی قیمت − قیمت فروخت

$= ₹ 840 - ₹ 714$

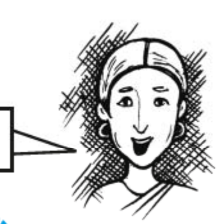
$= ₹ 126$

چوں کہ رعایت چھپی ہوئی قیمت (M.P.) پر دی جاتی ہے، اس لیے ہم چھپی ہوئی قیمت کو بنیاد بنا کر استعمال کریں گے۔

چھپی ہوئی قیمت 840 روپے پر 126 روپے کی رعایت ہے

اگر چھپی ہوئی قیمت ₹ 100 ہو تو کتنی رعایت ہوگی؟

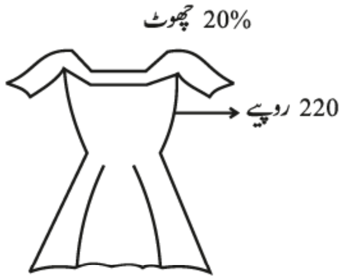
$$\text{رعایت} = \frac{126}{840} \times 100\% = 15\%$$



مثال 4 : ایک فراک کی فہرست میں درج قیمت ₹ 220 ہے۔

فروخت میں %20 کی رعایت کا اعلان کیا گیا ہے۔ اس فراک کی رعایت رقم اور قیمت فروخت بتایئے۔

حل : چھپی ہوئی قیمت اور فہرست میں درج قیمت یکساں ہوتی ہے۔



%20 رعایت کا مطلب ہے چھپی ہوئی قیمت ₹ 100 پر ₹ 20 کی رعایت۔

اکائی کے قاعدے سے ₹ 1 پر ₹ $\frac{20}{100}$ کی رعایت ہے۔

$$\text{₹ 220 پر رعایت} = \frac{20}{100} \times 220 = ₹\,44$$

$$\text{قیمت فروخت} = (₹\,220 - ₹\,44) \text{ یا } ₹\,176$$

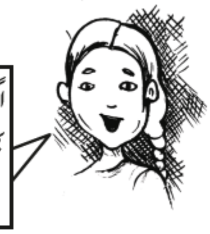
ریحانہ نے قیمت فروخت اس طرح معلوم کی۔

%20 رعایت کا مطلب چھپی ہوئی قیمت ₹ 100 پر ₹ 20 کی رعایت۔ اس لیے فروخت قیمت ₹ 80 ہوئی۔ اکائی کے قاعدہ کی مدد سے جب چھپی ہوئی قیمت ₹ 100 ہے تو قیمت فروخت ₹ 80 ہوئی

جب چھپی ہوئی قیمت ₹ 1 ہے تو قیمت فروخت = ₹ $\frac{80}{100}$

اس لیے، جب چھپی ہوئی قیمت ₹ 220 ہے تو قیمت فروخت = $\frac{80}{100} \times 220$ ₹

= ₹ 176



کوشش کیجیے

1. ایک دُکان میں چیزوں پر %20 رعایت دی جاتی ہے۔ مندرجہ ذیل میں ہر ایک کی قیمت فروخت کیا ہوگی؟
   (a) ایک پوشاک جس کی چھپی ہوئی قیمت ₹ 120 ہے۔
   (b) ایک جوڑی جوتے جس کی چھپی ہوئی قیمت ₹ 750 ہے۔
   (c) ایک بستہ جس کی چھپی ہوئی قیمت ₹ 250 ہے۔
2. ایک میز جس کی چھپی ہوئی قیمت ₹ 15000 ہے ₹ 14,400 میں مل رہی ہے۔ دی گئی رعایت اور رعایت فی صد معلوم کیجیے۔
3. ایک الماری %5 رعایت دینے پر ₹ 5225 میں فروخت کی جاتی ہے۔ الماری کی چھپی ہوئی قیمت معلوم کیجیے۔

8.3.1 تخمینہ فی صد میں

ایک دُکان پر آپ کا بل 577.80 ₹ ہے اور دوکاندار آپ کو %15 رعایت دیتا ہے۔ آپ ادا کی جانے والی رقم کا تخمینہ کیسے کریں گے؟

(i) بل کو 577.80 کے قریب تر دہائی میں تبدیل کیجیے یعنی 580 ₹

(ii) اس کا %10 معلوم کیجیے، یعنی $₹58 = ₹\ \frac{10}{100} \times 580$

(iii) اس کا نصف لیجیے یعنی $₹\ 29 = \frac{1}{2} \times 58$

(iv) (ii) اور (iii) کی رقموں کو جمع کیجیے۔ جمع کرنے پر 87 ₹ حاصل ہوتے ہیں۔

اس لیے آپ بل کی رقم کو 87 ₹ یا 85 ₹ کم کر سکتے ہیں اس طرح سے بل کی رقم تقریباً 495 ₹ ہو گی۔

1. بل کی اسی رقم کے %20 کا تخمینہ کیجیے۔ 2. 375 ₹ کا %15 معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔

8.4 خرید اور فروخت سے متعلق قیمتیں (نفع اور نقصان)

میں اسکول کے میلے میں 'خوش قسمت کو پن (Luckydips)' کا ایک اسٹال لگانے جا رہی ہوں۔ میں ایک 'خوش قسمت کو پن' کے لیے 10 ₹ وصول کروں گی لیکن میں دینے کے لیے ایسی چیزیں خریدوں گی جن کی قیمت 5 ₹ ہو۔

اس طرح آپ %100 منافع کما رہی ہیں۔

نہیں، میں اس تحفہ کو لپیٹنے اور باندھنے کے لیے کاغذ اور ٹیپ پر 3 ₹ خرچ کروں گی۔ اس طرح میرا خرچ 8 ₹ ہے۔

اس سے مجھے دو روپے کا نفع حاصل ہوتا ہے جو $\frac{2}{8} \times 100\% = 25\%$ ہے۔

کبھی کبھی جب کوئی چیز خریدی جاتی ہے تو خریدتے وقت یا بیچنے سے پہلے کچھ مزید رقم خرچ کی جاتی ہے۔ یہ خرچ قیمت خرید میں جمع کیا جاتا ہے۔

یہ خرچ کبھی کبھی زائد یا اوپری خرچ کہلاتے ہیں۔ ان میں ایسے خرچ شامل کیے جاتے ہیں جیسے مرمت، مزدوری اور نقل و حمل کے اخراجات وغیرہ۔

8.4.1 قیمت خرید / قیمت فروخت، % نفع / % نقصان معلوم کرنا

مثال 5 : سوہن نے ایک پرانا فریج 2500 ₹ میں خریدا۔ اس نے 500 ₹ اس کی مرمت پر خرچ کیے اور

3300 ₹ میں فروخت کر دیا۔اس کا نفع یا نقصان فی صد معلوم کیجیے۔

حل : قیمت خرید (CP) = 2500 ₹ + 500 ₹ (قیمت خرید معلوم کرنے کے لیے اوپری خرچ جمع کیا جاتا ہے)

= 3000 ₹

قیمت فروخت (SP) = 3300 ₹

چوں کہ قیمت فروخت، قیمت خرید سے زیادہ ہے، اس لیے اسے فائدہ ہوا

₹ 3300 = ₹ 3000 – ₹ 300 =

اس طرح 3000 ₹ پر 300 ₹ کا نفع ہوا۔ 100 ₹ پر اسے کتنا نفع ہوگا؟

100 ₹ پر نفع = $\frac{300}{3000} \times 100\% = \frac{30}{3}\% = 10\%$

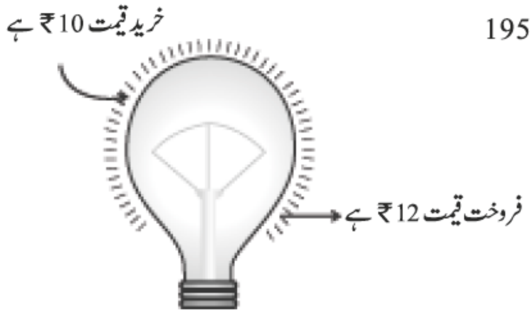
$$\boxed{\% \text{ نفع} = \frac{\text{نفع}}{CP} \times 100}$$

کوشش کیجیے

1. اگر نفع کی شرح 5% ہے تو مندرجہ ذیل کی قیمت فروخت معلوم کیجیے۔
   (a) 700 ₹ کی ایک سائیکل جس پر مزید خرچ 50 ₹ ہے۔
   (b) 1150 ₹ میں خریدا گیا ایک گھاس کاٹنے والا اوزار جس کے نقل و حمل پر 50 ₹ خرچ ہوئے۔
   (c) 560 ₹ میں خریدا گیا ایک پنکھا جس کی مرمت پر 40 ₹ خرچ کیے گئے۔

مثال 6 : ایک دوکاندار نے 10 ₹ فی بلب کے حساب سے 200 بلب خریدے۔ان میں 5 بلب خراب تھے۔باقی بلبوں کو 12₹ فی بلب کی شرح سے فروخت کیا گیا۔نفع یا نقصان فی صد میں معلوم کیجیے۔

حل : 200 بلبوں کی خرید قیمت = 10 × 200 ₹ = 2000 ₹



5 بلب خراب تھے۔اس لیے باقی بلبوں کی تعداد = 5 – 200 = 195

ان کو 12 روپے فی بلب کی شرح سے فروخت کیا گیا۔

195 بلبوں کی قیمت فروخت = 12 × 195₹ = 2340₹

بلاشبہ اسے نفع حاصل ہوا (کیوں کہ SP > CP)۔

نفع = 2000₹ – 2340 ₹ = 340 ₹

2000 ₹ پر 340 ₹ کا فائدہ ہوا تو 100 ₹ پر کتنے ₹ کا فائدہ ہوگا؟

نفع فی صد = $\frac{340}{2000} \times 100\% = 17\%$

مثال 7 : مینو نے دو پنکھے 1200 ₹ فی پنکھے کی شرح سے خریدے۔ اس نے ایک پنکھے کو 5% نقصان سے اور دوسرے پنکھے کو 10% نفع سے فروخت کر دیا۔ ہر ایک پنکھے کی فروخت قیمت معلوم کیجیے۔ کل نفع یا نقصان بھی معلوم کیجیے۔

حل : ایک پنکھے کی قیمت خرید 1200 ₹ ہے۔ ایک پنکھا 5% نقصان سے فروخت کیا جاتا ہے۔ اس کے معنی یہ ہیں کہ اگر قیمت خرید 100 ₹ ہو تو قیمت فروخت 95 ₹ ہوگی اس لیے جب قیمت خرید 1200 ₹ ہے

تب قیمت فروخت $= \text{₹}\,1200 \times \text{₹}\,\frac{95}{100} = \text{₹}\,1140$

دوسرا پنکھا 10% نفع پر فروخت کیا گیا ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر قیمت خرید 100 ₹ ہو تو قیمت فروخت 110 ₹ ہوگی۔ اس لیے جب قیمت خرید 1200 ₹ ہے تو

قیمت فروخت $= \text{₹}\,1200 \times \text{₹}\,\frac{110}{100} = \text{₹}\,1320$

کل قیمت خرید $= \text{₹}\,1200 + \text{₹}\,1200 = \text{₹}\,2400$

کل قیمت فروخت $= \text{₹}1140 + \text{₹}1320 = \text{₹}\,2460$

چوں کہ کل قیمت خرید < کل قیمت فروخت، اس لیے (2460−2400) ₹ یعنی 60 ₹ نفع ہوا۔

کوشش کیجیے

1. ایک دُکاندار نے دو ٹی وی (T.V) سیٹ ₹10,000 فی سیٹ کی شرح سے خریدے۔ اس نے ایک کو 10% نقصان پر اور دوسرے کو 10 نفع پر فروخت کر دیا۔ معلوم کیجیے کہ اسے اس سودے میں کل ملا کر نفع ہوا یا نقصان ہوا۔

8.5 سیلز ٹیکس (ST)/ ویٹ (Value Added Tax)/ اشیاء اور خدمات ٹیکس (GST)

ایک استاد نے کلاس میں ایک بل دکھایا جس میں مندرجہ ذیل مدیں درج تھیں۔

بل نمبر		تاریخ		
فہرست				
نمبر شمار	اشیا	مقدار	شرح	رقم
		بل کی رقم + (5%) GST		
	کل			

حکومت کسی چیز کی فروخت پر سیلز ٹیکس (ST-Salse Tax) وصول کرتی ہے۔
یہ ٹیکس دوکاندار گاہکوں سے وصول کرتا ہے اور حکومت کو ادا کرتا ہے۔
اس لیے یہ ہمیشہ چیزوں کی فروخت قیمت پر لگتا ہے اور بل کی رقم میں جوڑ دیا جاتا ہے۔ ایک دوسری طرح کا بھی (VAT-VAlue Added Tax) ہے جو قیمت میں شامل ہوتا ہے۔

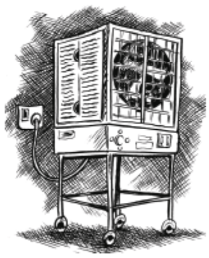
1 / جولائی 2017 سے حکومت ہند نے ..ST, VAT, وغیرہ کے بجائے جی ایس ٹی لاگو کیا ہے جس کا مطلب ہے اشیاء اور خدمات ٹیکس جو کسی اشیاء کی اسد یا خدمات یا دونوں پر لگایا جاتا ہے۔

مثال 8 : کسی دوکان پر ایک جوڑی رولر اسکیٹس (پہیوں پر گھومنے والے جوتوں) کی قیمت ₹450 ہے۔ اس پر GST 5% لگایا گیا۔ بل کی رقم معلوم کیجیے۔

حل : ₹100 پر دیا گیا GST ₹5 ہے۔

₹450 پر دیا گیا ٹیکس = $₹\frac{5}{100}\times 450 = ₹22.50$

بل کی رقم = اشیا کی قیمت خرید + GST = ₹450 + ₹22.50 = ₹472.50



مثال 9 : وحیدہ نے ایک کولر 12% GST سمیت ₹2240 میں خریدا۔ ویٹ کو جوڑنے سے پہلے کولر کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : قیمت میں GST بھی شامل ہے۔ 12% GST کا مطلب ہے کہ اگر ویٹ کے علاوہ قیمت ₹100 ہے تو ویٹ سمیت قیمت ₹112 ہوگی۔

اب اگر و GST سمیت قیمت ₹112 ہو تو اصل قیمت ₹100 ہوگی

جب GST سمیت قیمت ₹2240 ہو تو اصل قیمت $₹2000 = ₹\frac{100}{112}\times\frac{2240}{1} =$

مثال 10 : سلیم نے ایک اشیاء ₹784 میں خریدی جس میں GST شامل ہے۔ اشیاء کی قیمت GST شامل ہونے سے پہلے کی بتائیے جبکہ GST =12% ہے۔

حل : مان لیجیے اشیاء کی اصل قیمت = ₹100 GST=12%

GST شامل کرنے کے بعد اشیاء کی قیمت (100+12) ₹ =112 ₹

جب قیمت فروخت ₹112 ہے تو اصل قیمت = ₹100 جب فروخت ₹784 تو اصل قیمت۔

$$₹\frac{100}{12}\times 784$$

$= ₹700$

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1. کسی عدد کو دوگنا کرنے پر اس عدد میں 100% اضافہ ہوتا ہے۔ اگر ہم اس عدد کو آدھا کردیں تو کتنے فی صد کمی ہوگی۔
2. 2400 روپے کے مقابلہ میں 2000 روپے کتنے فی صد کم ہیں؟ کیا یہ فی صد اتنا ہی ہے جتنا 2000 روپے کے مقابلہ میں 2400 روپے زیادہ ہیں؟

مشق 8.2

1. ایک شخص کی تنخواہ میں 10% کا اضافہ ہوتا ہے۔ اگر اس کی نئی تنخواہ ₹ 1,54,000 ہو تو اس کی اصل تنخواہ معلوم کیجیے۔

2. اتوار کے دن 845 لوگ چڑیا گھر گئے۔ پیر کو صرف 169 لوگ گئے۔ چڑیا گھر کی سیر کرنے والوں کی تعداد میں پیر کے روز کتنے فی صد کمی آئی؟

3. ایک دُکاندار ₹ 2400 میں 80 چیزیں خریدتا ہے اور انھیں 16% منافع پر فروخت کردیتا ہے۔ اس چیز کی قیمت فروخت معلوم کیجیے۔

4. ایک چیز کی قیمت ₹ 15,500 تھی۔ ₹ 450 اس کی مرمت پر خرچ کیے گئے تھے۔ اگر اسے 15% نفع پر فروخت کیا جائے۔ تو اس کی قیمت فروخت معلوم کیجیے۔

5. ایک وی سی آر (VCR) اور ٹیلی ویژن (T.V) کو ₹ 8000 میں خریدا گیا۔ دوکاندار کو وی سی آر پر 40% نقصان اور ٹی وی پر 8% نفع ہوا۔ اس پورے لین دین میں نفع یا نقصان کا فی صد معلوم کیجیے۔

6. رعایتی فروخت کے دوران ایک دوکان سبھی چیزوں کی چھپی ہوئی قیمت پر 10% کی رعایت دیتی ہے۔ ₹ 1450 چھپی ہوئی قیمت والی ایک پتلون اور ₹ 850 چھپی ہوئی قیمت والی دو عدد قمیصوں کے خریدنے پر کسی گاہک کو کتنی رقم ادا کرنی پڑے گی؟

7. ایک گوالے نے دو بھینسوں کو ₹ 20,000 فی بھینس کی شرح سے فروخت کیا۔ ایک بھینس پر اسے 5% نفع ہوا اور دوسری پر 10% نقصان ہوا۔ اس سودے میں اس کا کل فائدہ یا نقصان معلوم کیجیے (اشارہ: پہلے ہر ایک کی خرید قیمت معلوم کیجیے)۔

8. ایک ٹی وی کی قیمت ₹ 13000 ہے۔ اس پر 12% کی شرح سے سیلز ٹیکس وصول کیا جاتا ہے۔ اگر ونود اس ٹی وی کو خریدتا ہے تو اسے کتنی رقم دینی پڑے گی؟

9. ارون کسی رعایتی فروخت سے ایک جوڑی اسکیٹس (پہیہ دار جوتے) خرید کر لایا تھا جس پر دی گئی رعایت کی شرح 20% تھی۔ اگر ادا کی گئی رقم ₹ 1600 ہو تو چھپی ہوئی قیمت معلوم کیجیے۔

10. میں نے ایک بال سکھانے والا آلہ (hair dryer) ₹ 5400 میں خریدا، اس میں 8% GST شامل تھا۔ GST کو جوڑنے سے پہلے کی قیمت معلوم کیجیے۔

11. ایک اشیاء کو ₹ 1239 میں خریدا گیا جس میں 18% GST بھی شامل ہے۔ اشیاء کی GST شامل ہونے سے پہلے کی قیمت معلوم کیجیے۔

8.6 مرکب سود

شاید آپ نے اس قسم کے بیانات پڑھے ہوں گے کہ ''بینک میں میعادی امانت (Fixed Deposit) پر سود کی شرح 9% سالانہ'' یا ''بچت کھاتے پر سود کی شرح 5% سالانہ''۔

بینک یا ڈاک گھر جیسے اداروں کے پاس جمع کی گئی رقم پر وہ ادارے جو زائد رقم دیتے ہیں اسے سود کہتے ہیں۔ جب لوگ رقم اُدھار لیتے ہیں تو ان سے بھی سود لیا جاتا ہے۔ ہم مفرد سود کی تحسیب کرنا پہلے ہی سے جانتے ہیں۔

مثال 10 : ₹10,000 کی رقم 5% سالانہ سود کی شرح پر دو سال کے لیے ادھار لی جاتی ہے۔ اس رقم پر مفرد سود اور 2 سال کے آخر میں ادا کی جانے والی کل رقم معلوم کیجیے۔

حل : ₹100 پر 1 سال کا سود ₹15 ہے

اس لیے ₹10,000 پر 1 سال کا سود $= \frac{15}{100} \times 10000$ ₹1500

2 سال کا سود $=$ ₹1500 $\times 2 =$ ₹3000

2 سال کے آخر میں ادا کی جانے والی رقم $=$ اصل زر $+$ سود

$=$ ₹10000 $+$ ₹3000 $=$ ₹13000

کوشش کیجیے

₹15000 پر دو سال کے آخر میں 5% سالانہ کی شرح سے سود اور ادا کی جانے والی رقم معلوم کیجیے۔

میرے والد نے ایک رقم 3 سال کے لیے ڈاک گھر میں جمع کی۔ ہر سال رقم پچھلے سال کے مقابلہ میں زیادہ ہو جاتی ہے۔

بینک میں ہم نے کچھ رقم جمع کی ہے۔ ہر سال اس رقم میں کچھ سود جمع ہو جاتا ہے جسے پاس بک میں دکھایا جاتا ہے۔ جمع ہونے والا یہ سود ہر سال برابر نہیں ہوتا بلکہ ہر سال اس میں اضافہ ہوتا ہے۔

عام طور پر لیا جانے والا یا دیا جانے والا سود کبھی بھی مفرد سود نہیں ہوتا۔ سود کی تحسیب گزشتہ سال کی رقم پر کی جاتی ہے اسے مرکب سود کہتے ہیں۔

آیئے ہم ایک مثال پر غور کرتے ہیں اور ہر سال کا الگ الگ سود معلوم کرتے ہیں۔ ہر سال ہماری رقم یا اصل زر میں تبدیلی آتی ہے۔

مرکب سود کی تحسیب

حنا نے 8% کی سالانہ شرح سود سے 2 سال کے لیے ₹20,000 قرض لیے۔ 2 سال کے آخر میں مرکب سود (C.I.) اور ادا کی جانے والی رقم معلوم کیجیے۔

اسلم نے استاد سے پوچھا کہ کیا اسے ہر سال کا سود الگ الگ معلوم کرنا چاہیے۔ استاد نے جواب دیا 'ہاں' اور مندرجہ ذیل اقدام استعمال کرنا چاہیے۔

1. ایک سال کا سود مفرد (S.I.) معلوم کیجیے۔

مان لیجیے پہلے سال کا اصل زر P_1 ہے۔ یہاں، $P_1 = ₹\,20000$

$SI_1 = SI$ سالانہ شرح سے پہلے سال کا سود مفرد 8% $= ₹\,\dfrac{20000 \times 8}{100} = 1600$

2. اس کے بعد لی یا دی جانے والی رقم کو معلوم کیجیے۔ یہ اگلے سال کا اصل زر بن جاتی ہے۔

پہلے سال کے آخر میں رقم $= P_1 + SI = ₹\,1600 + ₹\,20000$

$= ₹\,21600 = P_2$ (دوسرے سال کا اصل زر)

3. اس رقم پر دوسرے سال کا سود معلوم کیجیے۔

$SI_2 = S.I.$ سالانہ کی شرح سے دوسرے سال کا سود مفرد 8% $= ₹\,\dfrac{21600 \times 8}{100} = ₹\,1728$

4. دوسرے سال کے آخر میں دی یا لی جانے والی رقم معلوم کیجیے۔

دوسرے سال کے آخر میں رقم = دوسرے سال کے لیے اصل زر (P_2) + دوسرے سال کا مفرد سود (SI_2)

$= ₹\,21600 + ₹\,1728$

$= ₹\,23328$

کل ادا کردہ سود $= ₹\,1728 + ₹\,1600$

$= ₹\,3328$

ریتا نے پوچھا کہ کیا سود کی یہ رقم مفرد سود سے مختلف ہوگی۔ استاد نے اسے 2 سال کا مفرد سود نکالنے اور خود فرق دیکھنے کا مشورہ دیا۔

2 سال کا سود مفرد $= ₹\,\dfrac{20000 \times 8 \times 2}{100} = ₹\,3200$

ریتا نے کہا کہ مرکب سود کی وجہ سے حنا کو 128 روپے زیادہ ادا کرنے پڑیں گے۔

آیئے مفرد سود اور مرکب سود میں فرق دیکھیں۔ ہم 100 روپیے سے شروع کرتے ہیں۔ چارٹ کو مکمل کرنے کی کوشش کیجیے۔

		سود مفرد	سود مرکب
پہلا سال	اصل زر 10% کی شرح سے سود سال کے آخر میں رقم	₹100.00 ₹10.00 ₹110.00	₹100.00 ₹10.00 ₹110.00

دوسرا سال	اصل زر	₹100.00	₹110.00
	10% کی شرح سے سود	₹10.00	₹11.00
	سال کے آخر میں رقم	₹120 = (110 + 10)	₹121.00
تیسرا سال	اصل زر	₹100.00	₹121.00
	10% کی شرح سے سود	₹10.00	₹12.10
	سال کے آخر میں رقم	₹130=(120+10)	₹133.10

اس کا مطلب یہ ہے کہ آپ اس وقت تک جمع سود پر سود دیتے ہیں!

غور کیجیے کہ 3 سا میں

سود مفرد سے حاصل شدہ سود = ₹ (130 – 100) = ₹ 30 ، جب کہ

سود مرکب سے حاصل شدہ سود = (133.10 – 100) = ₹ 33.10

یہ بھی نوٹ رکھیے کہ سود مفرد کے دوران اصل زر یکساں رہتا ہے، جب کہ سود مرکب یہ ہر سال بدلتا رہتا ہے۔

8.7 سود مرکب کے لیے ضابطہ معلوم کرنا

زبیدہ نے اپنے استاد سے پوچھا ''سود مرکب معلوم کرنے کا آسان طریقہ کون سا ہے؟'' استاد نے جواب دیا ''سود مرکب معلوم کرنے کا ایک مختصر طریقہ ہے۔ آیئے اسے معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔''

مان لیجیے P_1 وہ رقم ہے جس پر R% سالانہ سود کی شرح سے سود کی تحسیب سالانہ ہوتی ہے۔

اگر $P_1 = 5000$ روپے اور R = 5% سال۔ تب مذکورہ بالا اقدام کی مدد سے

1. سود مفرد یعنی $SI_1 = ₹\ \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ یا $SI_1 = ₹\ \frac{P_1 \times R \times 1}{100}$

اس لیے $A = ₹\ 5000 + \frac{5000 \times 5 \times 1}{100}$ یا $A = P_1 + SI_1$

$P_2 = ₹\ 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ $\qquad = P_1 = \frac{PR}{100}$

$P_1 = \left(1 + \frac{R}{100}\right) = P_2$

2. $SI_2 = ₹\ 5000 + \left(1 + \frac{5}{100}\right) \times \frac{5 \times 1}{100}$ یا $SI_2 = \frac{P_2 \times R \times 1}{100}$

$= ₹\ \frac{5000 \times 5}{100}\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ $\qquad P_1 = \frac{R}{1100} \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)$

$= \left(1 + \frac{R}{100}\right)\frac{P_1 R}{100}$

$A_2 = 5000\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ یا $A_2 = P_2 + SI_2$

$$\left(1+\frac{R}{100}\right) + \frac{P_1 R}{100}\left(1+\frac{R}{100}\right) = P_1 \qquad + \frac{5000 \times 5}{100}\left(1 + \frac{5}{100}\right)$$

$$\left(1+\frac{R}{100}\right) \cdot \left[1+\frac{R}{100}\right] = P_1 \qquad = ₹\ 5000\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)$$

$$P_3 = \left(1+\frac{R}{100}\right) = P_1 \qquad = ₹\ 5000\left(\frac{1+5}{100}\right)^2 = P_3$$

اسی طرح آگے بڑھتے ہوئے 'n' سال کے آخر میں حاصل ہونے والی رقم

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

یا یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

زبیدہ نے کہا لیکن اس کا استعمال کرتے ہوئے ہم صرف n سالوں کے آخر میں دی گئی کل رقم کا ضابطہ حاصل کرتے ہیں، نہ کہ مرکب سود کا ضابطہ۔

اروناں نے فوراً جواب دیا کہ ہم جانتے ہیں سود مرکب = اصل زر – کل زر (یعنی $CI = A - P$) اس لیے ہم سود مرکب بھی آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 11 : 12600 روپے کا 2 سال کا 10% سالانہ شرح سے سود مرکب معلوم کیجیے جب کہ سود کی تحسیب سالانہ ہوتی ہے۔

حل : ہمیں معلوم ہے $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$، یہاں اصل زر $(P) = ₹12600$ اور شرح سود $(R) = 10$، سال کی تعداد $(n) = 2$ ہے۔

$$= ₹12600\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 = ₹12600\left(\frac{11}{10}\right)^2$$

$$₹15246 = ₹12600 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} =$$

سود مرکب = کل زر – اصل زر = ₹15246 – ₹12600 = ₹2646

کوشش کیجیے

1. 5% سالانہ کی شرح سے 8000 روپے کا 2 سال کا سود مرکب معلوم کیجیے جب کہ سود کی تحسیب سالانہ کی جاتی ہے۔

8.8 شرح سود کی سالانہ یا ششماہی تحسیب

کیا آپ جاننا چاہیں گے کہ 'شرح' کے بعد 'سالانہ تحسیب' کیوں لکھا ہوا تھا۔ کیا اس کی کوئی وجہ ہے؟

یقیناً اس کی وجہ ہے کہ ہم سود کی تحسیب ششماہی اور سہ ماہی بھی کر سکتے ہیں۔ آیئے ہم دیکھتے ہیں کہ سود کی تحسیب اگر سالانہ یا ششماہی کی جائے تو

جب سود کی تحسیب سالانہ نہ ہو تو مدت اور شرح

وہ مدت جس کے بعد ہر مرتبہ نئے اصل زر کے لیے سود کو جوڑا جاتا ہے اسے تبادلہ مدت کہتے ہیں۔ جب سود کی تحسیب ششماہی ہو تو ہر چھ مہینوں کے بعد سال میں دو مرتبہ تبادلہ مدت ہوں گے۔ ایسی صورتوں میں ششماہی شرح بھی سالانہ شرح کی نصف ہوگی۔ کیا ہوگا اگر سود کی تحسیب کی شرح سہ ماہی ہو؟ ایسی صورت میں ایک سال میں چار تبادلہ مدت ہوں گے اور سہ ماہی شرح بھی سالانہ شرح کا ایک چوتھائی ہوگی۔

₹100 کے سود میں کتنا فرق ہوگا؟

P = ₹100 اور سالانہ شرح 10%	P = ₹100 اور سالانہ شرح 10%
سود کی تحسیب سالانہ مدت 1 سال	سود کی تحسیب ششماہی مدت 6 مہینہ یا $\frac{1}{2}$ سال
$I = \text{₹}\,\frac{100\times10\times1}{100} = \text{₹}\,10$	$I = \text{₹}\,\frac{100\times\boxed{10\times\frac{1}{2}}}{100} = \text{₹}\,5$
A = ₹100 + ₹10 = ₹110	A = ₹100 + ₹5 = ₹105 اب اگلے چھ مہینہ کے لیے P = ₹105
	اس طرح، $I = \text{₹}\,\frac{105\times10\times\frac{1}{2}}{100} = \text{₹}\,5.25$ اور A = ₹105 + ₹5.25 = ₹110.25

شرح آدھی ہوجاتی ہے

کیا آپ نے غور کیا کہ اگر سود کی تحسیب ششماہی ہوتی ہے تو ہم سود کی تحسیب دو بار کرتے ہیں۔ اس لیے وقت کی مدت دوگنی ہوجاتی ہے اور شرح آدھی کردی جاتی ہے۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل کی مدت اور شرح معلوم کیجیے۔

1. $1\frac{1}{2}$ سال کے لیے 8% شرح سالانہ پر لی گئی ایک رقم پر سود کی تحسیب ششماہی کی جاتی ہے۔
2. 2 سال کے لیے 4% شرح سالانہ پر لی گئی ایک رقم پر سود کی تحسیب ششماہی کی جاتی ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

ایک رقم 16% سالانہ کی شرح سے ادھار لی جاتی ہے۔ اگر سود کی تحسیب ہر تین مہینہ کے بعد کی جاتی ہو تو ایک سال میں کتنی مرتبہ سود دینا ہوگا۔

مثال 12 : اگر سود کی تحسیب ششماہی ہوتی ہو تو $1\frac{1}{2}$ سال کے لیے 10% سالانہ کی شرح پر لیے گئے ₹12000 کے قرض کی ادائیگی کے لیے کتنی رقم ادا کرنی پڑے گی۔

حل:

پہلے 6 مہینوں کے لیے اصل زر = 12000 روپے	پہلے 6 مہینوں کے لیے اصل زر = 12000 روپے
$1\frac{1}{2}$ سال میں 3 ششماہی ہوتی ہیں۔ اس لیے سود کی تحسیب 3 بار ہوتی ہے۔ سود کی شرح = 10% کا آدھا = 5% ششماہی $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ $= ₹12000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$ $= ₹12000\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$ = ₹13,891.50	مدت = 6 مہینہ = $\frac{6}{12}$ سال = $\frac{1}{2}$ سال شرح = 10% $I = \frac{12000\times10\times\frac{1}{2}}{100}$ ₹ 600 $A = P + I = ₹12000 + ₹600$ = (یہ اگلے 6 مہینہ کے لیے اصل زر) ₹12,600 $I = ₹630 = ₹\frac{12600\times10\times\frac{1}{2}}{100}$ تیسری مدت کا اصل زر = ₹12600 + ₹630 = ₹13,230 $I = \frac{13230\times10\times\frac{1}{2}}{100} = ₹661.50$ $A = P + I = ₹13230 + ₹661.50$ = ₹13,891.50

کوشش کیجیے

ادا کی گئی رقم معلوم کیجیے۔

1. 2 سال کے آخر میں ₹ 2400 پر 5% سالانہ کی شرح سے سالانہ سود کی تحسیب کرتے ہوئے۔
2. 1 سال کے آخر میں ₹1800 پر 8% سالانہ شرح سے سہ ماہی سود کی تحسیب کرتے ہوئے۔

مثال 13 : ₹10,000 کی رقم کا ایک سال اور 3 مہینہ کے لیے $8\frac{1}{2}\%$ سالانہ شرح سے سرمایہ کاری کرنے پر سود مرکب معلوم کیجیے جب سود کی تحسیب سالانہ کی جاتی ہے۔

حل : میوری نے سب سے پہلے مدت کو سالوں میں تبدیل کیا

1 سال 3 مہینہ $= 1\frac{3}{12}$ سال $= 1\frac{1}{4}$ سال

میوری نے قدروں کو دیے گئے ضابطے میں رکھنے کی کوشش کی:

$$A = ₹\ 10000\left(1+\frac{17}{200}\right)^{1\frac{1}{4}}$$

اب وہ پریشان ہوگئی۔ اس نے اپنے استاد سے پوچھا کہ وہ اس قوت کو کیسے معلوم کرے جو کسر میں ہے؟ استاد نے اس کو ایک مشورہ دیا۔

پہلے مکمل (پورے) حصہ کا یعنی 1 سال کا کل زر معلوم کیجیے اور پھر اس کو اصل زر کے طور پر استعمال کر کے $\frac{1}{4}$ سال کا سود مفرد معلوم کیجیے۔ اس طرح

$$A = ₹\ 10000\left(1+\frac{17}{200}\right)$$

$$= ₹\ 10000 \times \frac{217}{200} = ₹\ 10{,}850$$

اب یہ اگلے $\frac{1}{4}$ سال کے لیے اصل زر کا کام کرے گا۔ ہم ₹ 10,850 پر $\frac{1}{4}$ سال کا سود مفرد (SI) معلوم کریں گے۔

$$SI = ₹\ \frac{10850 \times \frac{1}{4} \times 17}{100 \times 2}$$

$$= ₹\ \frac{10850 \times 1 \times 17}{800} = ₹\ 230.56$$

پہلے سال کا سود $= ₹\ 10850 - ₹\ 10000 = ₹\ 850$

اور، اگلے $\frac{1}{4}$ سال کا سود $= ₹\ 230.56$

کل سود مرکب $= 850 + 230.56 = ₹\ 1080.56$

8.9 مرکب سود کے ضابطے کا استعمال

کچھ ایسی صورتیں ہیں جہاں ہم سود مرکب کی کل رقم معلوم کرنے کے لیے ضابطے کا استعمال کر سکتے ہیں۔ ان میں سے بعض مندرجہ ذیل ہیں:

(i) آبادی میں اضافہ (یا کمی)

(ii) اگر بیکٹیریا کے بڑھنے کی شرح معلوم ہو تو ان کا کل اضافہ معلوم کرنا۔

(iii) کسی چیز کی قدر معلوم کرنا جب کہ درمیانی سالوں میں اس کی قیمت میں اضافہ یا کمی ہوتی ہے۔

مثال 14 : سال 1997 کے آخر میں کسی شہر کی آبادی 20,000 تھی۔ اس میں 5% سالانہ کی شرح سے اضافہ ہوا ہے۔ سال 2000 کے آخر میں اس شہر کی آبادی معلوم کیجیے۔

حل : ہر سال آبادی میں 5% کا اضافہ ہوتا ہے اس لیے ہر نئے سال میں نئی آبادی ہوتی ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ منظم طریقے سے بڑھ رہی ہے۔

1998 کے شروع میں آبادی = 20,000 (اسے ہم پہلے سال کے لیے اصل زر مانتے ہیں)

5% کی شرح سے اضافہ = $20000 \times \frac{5}{100} = 1000$

(دوسرے سال کے لیے اصل زر)

سال 1999 کی آبادی = $20000 + 1000 = 21000$

5% کی شرح سے اضافہ = $21000 \times \frac{5}{100} = 1050$

سال 2000 میں آبادی = $21000 + 1050 = 22050$

5% سالانہ کی شرح سے اضافہ = $22050 \times \frac{5}{100} = 1102.5$

(تیسرے سال کے لیے اصل زر)

سال 2000 کے آخر میں آبادی = $22050 + 1102.5 = 23152.5$

یا

فارمولہ کی مدد سے سال 2000 کے آخر میں آبادی = $20000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$

$$= 20000 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$$

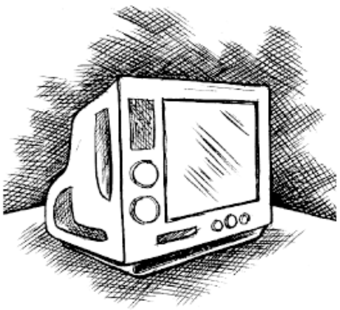
$$= 23152.5$$

اس لیے تقریباً آبادی = 23153

ارونا نے پوچھا اگر آبادی میں کمی ہوتی ہے تو کیا کرنا چاہیے۔ تب استاد نے مندرجہ ذیل مثال کو سامنے رکھا۔

مثال 15 : ایک ٹی وی ₹21,000 میں خریدا گیا۔ ایک سال بعد ٹی وی کی قیمت میں 5% کی کمی ہوگئی (کمی ہونے کا مطلب ہے استعمال اور عمر کی وجہ سے اس کی قیمت میں کمی ہونا)۔ ایک سال کے بعد ٹی وی کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل : اصل زر = ₹ 21,000



کمی = ہر سال 21000 روپے کا 5%

$= ₹\ \frac{21000 \times 5 \times 1}{100} = ₹\ 1050$

ایک سال کے آخر میں ٹی وی کی قیمت = $21000 - 1050 = ₹\ 19950$

متبادل : ہم اسے مندرجہ ذیل ضابطے سے آسانی سے حل کر سکتے ہیں:

ایک سال کے آخر میں قیمت = $21,000\left(1-\frac{5}{100}\right)$

$$= ₹21000 \times \frac{19}{20} = ₹19,950$$

کوشش کیجیے

1. 10,500 روپے قیمت کی ایک مشین کی 5% کی شرح سے مشین کی قیمت میں کمی ہو رہی ہے۔ ایک سال کے بعد اس کی قیمت معلوم کیجیے۔
2. ایک شہر کی موجودہ آبادی 12 لاکھ ہے اگر اضافہ کی شرح 4% ہے تو دو سال بعد شہر کی آبادی معلوم کیجیے۔

مشق 8.3

.1 مندرجہ ذیل کا کل زر اور سود مرکب معلوم کیجیے

(a) ₹10,800 پر 3 سال کے لیے $12\frac{1}{2}\%$ سالانہ کی شرح در سے تحسیب سالانہ کرنے پر۔

(b) ₹ 18000 پر $2\frac{1}{2}$ سال کے لیے 10% سالانہ شرح سے تحسیب سالانہ کرنے پر۔

(c) ₹62,500 پر $1\frac{1}{2}$ سال کے لیے 8% سالانہ کی شرح در سے تحسیب ششماہی کرنے پر۔

(d) ₹ 8000 پر ایک سال کے لیے 9% سالانہ شرح کی در سے تحسیب ششماہی کرنے پر۔

(آپ تصدیق کرنے کے لیے سود مفرد کے ضابطے کا استعمال کرتے ہوئے سال در سال کی تحسیب کر سکتے ہیں)

(e) ₹10,000 پر ایک سال کے لیے 8% سالانہ شرح کی در سے تحسیب ششماہی کرنے پر۔

.2 کملا نے اسکوٹر خریدنے کے لیے بینک سے ₹ 26400 15% سالانہ شرح کی در سے قرض لیے۔ جب کہ سود کی تحسیب سالانہ ہوتی ہے۔ 2 سال 4 مہینہ کے آخر میں قرض ادا کرنے کے لیے اسے کتنی رقم ادا کرنی پڑے گی۔

(**اشارہ :** سود کی تحسیب سالانہ کرتے ہوئے پہلے دو سال کے لیے A معلوم کیجیے اور دوسرے سال کے کل زر پر $\frac{4}{12}$ سال کا سود مفرد معلوم کیجیے)

.3 کملا نے 3 سال کے لیے ₹12,500 12% سالانہ شرح سے مفرد سود پر ادھار لیے اور رادھا نے اُتنی ہی رقم اتنے ہی وقت کے لیے 10% سالانہ کی شرح سے سود مرکب پر ادھار لی، جب کہ سود کی تحسیب سالانہ ہوتی ہے۔ ان میں سے کس کو زیادہ سود ادا کرنا پڑے گا؟

.4 میں نے جمشید سے ₹ 12000 2 سال کے لیے 6% سالانہ کی شرح سے مفرد سود پر ادھار لیے۔ اگر میں نے یہ رقم 6% سالانہ کی شرح سے سود مرکب پر ادھار لی ہوتی تو مجھے کتنی زیادہ رقم ادا کرنی پڑتی؟

5. واسودیون نے 12% سالانہ کی شرح سے ₹ 60,000 کی سرمایہ کاری کی۔ اگر سود کی تحسیب ششماہی ہوتی ہوتو معلوم کیجیے کہ وہ کل کتنی رقم حاصل کرے گا؟

(i) 6 مہینے کے آخر میں

(ii) ایک سال کے آخر میں

6. عارف نے ایک بینک سے ₹ 80,000 کا قرض لیا۔ اگر سود کی شرح 10% سالانہ ہوتو $1\frac{1}{2}$ سال بعد اس کی دی ہوئی رقموں میں فرق معلوم کیجیے جب کہ سود کی تحسیب

(i) سالانہ ہوتی ہو۔

(ii) ششماہی ہوتی ہو۔

7. ماریہ نے تجارت میں ₹ 8000 کی سرمایہ کاری کی۔ اسے 5% سالانہ کی شرح سے سود مرکب حاصل ہوگا۔ اگر سود کی تحسیب سالانہ ہوتی ہوتو۔

(i) دو سال کے آخر میں اس کے نام سے جمع کی گئی رقم معلوم کیجیے۔

(ii) تیسرے سال کا سود معلوم کیجیے۔

8. ₹ 10,000 پر $1\frac{1}{2}$ سال کے لیے 10% سالانہ شرح سے سود مرکب اور کل زر معلوم کیجیے۔ جب کہ سود کی تحسیب ششماہی ہوتی ہے۔ کیا یہ سود اس سود سے زیادہ ہوگا جو اسے سالانہ تحسیب کرنے پر حاصل ہوتا؟

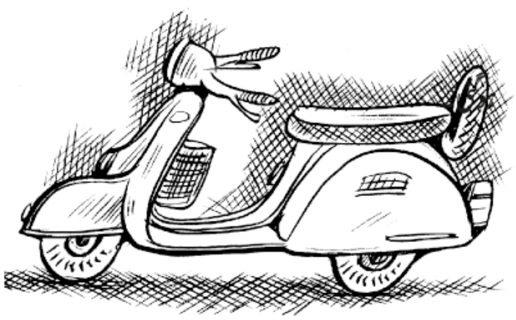
9. اگر رام ₹ 4096 18 مہینہ کے لیے $12\frac{1}{2}\%$ کی سالانہ شرح پر ادھار دیتا ہے اور سود کی تحسیب ششماہی ہوتی ہے تو معلوم کیجیے کہ رام کل کتنی رقم حاصل کرے گا۔

10. 5% سالانہ شرح سے ایک جگہ کی بڑھتی ہوئی آبادی سال 2003 کے آخر میں 54000 ہوگئی تو

(i) سال 2001 میں آبادی معلوم کیجیے۔

(ii) سال 2005 میں آبادی کتنی ہوگی؟

11. ایک تجربہ گاہ میں کسی تجربہ میں بیکٹیریا کی تعداد 2.5% فی گھنٹہ کے حساب سے بڑھ رہی ہے اگر تجربہ کے شروع میں بیکٹیریا کی تعداد 5,06,000 تھی تو دو گھنٹے کے آخر میں بیکٹیریا کی تعداد معلوم کیجیے۔



12. ایک اسکوٹر ₹ 42000 میں خریدا گیا۔ 8% سالانہ شرح سے اس کی قیمت میں کمی 1 سال کے بعد اسکوٹر کی قیمت معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

.1 چھپی ہوئی قیمت پر دی گئی چھوٹ رعایت کہلاتی ہے۔

رعایت = چھپی ہوئی قیمت – قیمت فروخت

.2 اگر رعایت فی صدی دی گئی ہو تو رعایت معلوم کی جاسکتی ہے۔

رعایت = چھپی ہوئی قیمت کا رعایت فی صد

.3 کسی چیز کو خریدنے کے بعد اس پر کیے گئے اضافی خرچ کو قیمت خرید میں شامل کرلیا جاتا ہے۔ اور یہ اوپری خرچ کہلاتا ہے۔

قیمت خرید + اوپری خرچ = قیمت خرید

.4 کسی چیز کی فروخت پر حکومت کے ذریعہ سیلز ٹیکس لیا جاتا ہے اور اسے بل کی رقم میں جوڑ دیا جاتا ہے۔ سیلز ٹیکس (ST) = بل کی رقم کا ٹیکس

.5 GST کا مطلب ہے اشیاء پر لگنے والا سروس ٹیکس اور یہ اشیاء، سروس یا دونوں پر لگتا ہے۔

.6 پچھلے سال کی کل رقم $(A = P + I)$ پر تحسیب کیا گیا سود، سود مرکب کہلاتا ہے۔

.7 (i) جب سود کی تحسیب سالانہ ہوتی ہے

$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ ؛ P اصل زر، R = شرح سود اور n = مدت ہے

(ii) کل زر جب سود کی تحسیب ششماہی ہوتی ہے تو

کل زر $= P\left(1+\frac{R}{200}\right)^{2n}$ جہاں، جب کہ سود کی ششماہی شرح $= \frac{R}{2}$ ، ششماہی کی تعداد $= 2n$

باب

9

الجبری عبارتیں اور تماثلات

4817CH09

9.1 عبارتیں کیا ہیں؟

پچھلی جماعتوں میں ہم الجبری عبارتوں (یا صرف عبارتوں) سے واقف ہو چکے ہیں۔ عبارتوں کی کچھ مثالیں یہ ہیں۔

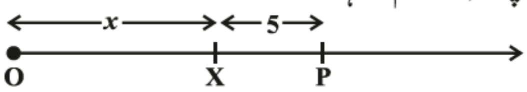
$$x + 3,\ 2y - 5,\ 3x^2,\ 4xy + 7$$

آپ اور بہت سی عبارتیں بنا سکتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ ان کی تشکیل متغیر اور مستقلوں سے ہوتی ہے۔ عبارت $2y - 5$ متغیر y اور مستقلہ 2 اور 5 سے مل کر بنی ہے۔ عبارت $4xy + 7$ کو متغیر x اور y اور مستقلہ 4 اور 7 سے تشکیل دیا گیا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ عبارت $2y - 5$ میں y کی قدر کچھ بھی ہو سکتی ہے یہ حقیقت میں y کی لامحدود قدریں ہو سکتی ہیں۔ عبارت کے متغیر کی قدر بدلنے پر عبارت کی قدر بدل جاتی ہے۔ اس طرح y کی مختلف قدر ہونے سے $2y - 5$ کی قدر بدل جاتی ہے۔ جب، $y = 0$ ، $2y - 5 = 2 \times 0 - 5 = -5$ اور جب $y = 2$، $2y - 5 = 2(2) - 5 = -1$ وغیرہ۔ y کی کچھ اور قدروں کے لیے عبارت $2y - 5$ کی قدر معلوم کیجیے۔

عددی خط اور عبارت :

عبارت $x + 5$ پر غور کیجیے۔ مان لیجیے کہ عددی خط پر متغیر x کا مقام X ہے۔



X عددی خط پر کہیں بھی ہو سکتا ہے، لیکن یہ ضروری ہے کہ $x + 5$ کی قدر X کے دائیں طرف 5 اکائی کے فاصلہ پر نقطہ P سے ظاہر ہوتی ہے۔ اسی طرح $x - 4$ کی قدر X کے بائیں طرف 4 اکائی کے فاصلہ پر ہوگی۔

$4x$ اور $4x + 5$ کے مقام کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

$4x$ کا مقام نقطہ C پر ہوگا۔ مبدا سے C کا فاصلہ X کے فاصلہ کا چار گنا ہوگا۔ $4x + 5$ کا مقام C, D کے دائیں طرف 5 اکائی کے فاصلہ پر ہوگا۔ مندرجہ بالا دونوں شکلوں میں متغیر کی مثبت قیمت دی گئی ہے یعنی کہ $x > 0$ ہم $x < 0$ یعنی کہ منفی قیمت کے لیے بھی غور کر سکتے ہیں۔

کوشش کیجیے

1. ایک متغیر اور دو متغیر والی عبارتوں کی پانچ پانچ مثالیں دیجیے۔
2. دو متغیر والی مختلف عبارتوں کی پانچ مثالیں دیجیے۔
3. $x, x-4, 2x+1, 3x-2$ کو عددی خط پر دکھائیے۔

9.2 ارکان، اجزائے ضربی اور ضریب

عبارت $4x+5$ کو لیجیے۔ یہ عبارت دو ارکان $4x$ اور 5 سے مل کر بنی ہے۔ **ارکان کو جمع کر کے عبارت بنائی جاتی ہے۔ رکن خود بھی اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں بنائے جا سکتے ہیں۔** رکن $4x$ اپنے اجزائے ضربی 4 اور x کا حاصل ضرب ہے۔ رکن 5 صرف ایک جز ضربی 5 سے بنا ہے۔

عبارت $7xy-5x$ کے دو رکن ہیں $7xy$ اور $-5x$۔ رکن $7xy$ اجزائے ضربی 7، x اور y کا حاصل ضرب ہے۔ کسی رکن کا عددی جز و ضربی اس کا **عددی ضریب** کہلاتا ہے۔

جیسے رکن $7xy$– کا عددی ضریب 7– اور $5x$– کا عددی ضریب 5– ہے۔

کوشش کیجیے

عبارت $x^2y^2-10x^2y+5xy^2-20$ کے ہر رکن کے ضریب کی شناخت کیجیے۔

9.3 یک رکنی، دو رکنی اور کثیر رکنی

جس عبارت میں صرف ایک رکن ہوتا ہے اسے **یک رکنی** (monomial) کہتے ہیں۔ دو رکنوں والی عبارت کو **دو رکنی** (bionomial) کہا جاتا ہے۔ تین رکن والی عبارت کو سہ رکنی اور اسی طرح اور بھی سبھی۔ مجموعی طور پر ایک عبارت جس میں ایک یا ایک سے زیادہ ارکان ہوں اور جن کے ضریب غیر صفر ہوں (اور متغیروں کے صحیح منفی قوت نما نہ ہوں) **کثیر رکنی** (trinomial) کہلاتی ہے۔ ایک کثیر رکنی میں ارکان کی کوئی بھی تعداد ایک یا ایک سے زیادہ ہو سکتی ہے۔

یک رکنی کی مثالیں $4x^2, 3xy, -7z, 5xy^2, 10y, -9, 82mnp,$ وغیرہ۔

دو رکنی کی مثالیں $a+b, 4l+5m, a+4, 5-3xy, z^2-4y^2,$ وغیرہ۔

سہ رکنی کی مثالیں $a+b+c, 2x+3y-5, x^2y-xy^2+y^2,$ وغیرہ۔

کثیر رکنی کی مثالیں $a+b+c+d, 3xy, 7xyz-10, 2x+3y+7z,$ وغیرہ۔

کوشش کیجیے

1. مندرجہ ذیل کثیر رکنی کی یک رکنی، دو رکنی اور سہ رکنی کے طور پر درجہ بندی کیجیے۔

$$-z+5, x+y+z, y+z+100, ab-ac, 17$$

2. بنائیے
   (a) 3 دو رکنی جس میں متغیر صرف x ہو۔
   (b) 3 دو رکنی جس میں x اور y متغیر ہوں۔

(c) 3 یک رکنی جس میں x اور y متغیر ہوں۔

(d) 2 کثیر رکنی جس میں 4 یا اس سے زیادہ ارکان ہوں۔

9.4 یکساں اور غیر یکساں ارکان

مندرجہ ذیل عبارتوں کو دیکھیے :

$7x, 14x, -13x, 5x^2, 7y, 7xy, -9y^2, -9x^2, -5yx$

ان میں یکساں ارکان ہیں:

(i) $7x, 14x, -13x$ یکساں ارکان ہیں۔

(ii) $5x^2$ اور $-9x^2$ یکساں ارکان ہیں۔

(iii) $7xy$ اور $-5yx$ یکساں ارکان ہیں۔

سوچیے

$7x$ اور $7y$ یکساں کیوں نہیں ہیں؟

$7x$ اور $7xy$ یکساں کیوں نہیں ہیں؟

$7x$ اور $5x^2$ یکساں کیوں نہیں ہیں؟

کوشش کیجیے

دو ایسے ارکان لکھیے جو مندرجہ ذیل کے یکساں ہوں

(i) $7xy$ (ii) $4mn^2$ (iii) $2l$

9.5 الجبری عبارتوں کی جمع اور تفریق

پچھلی جماعتوں میں ہم سیکھ چکے ہیں کہ الجبری عبارتوں کی جمع اور تفریق کیسے کی جاتی ہے۔

مثال کے طور پر $7x^2-4x+5$ اور $9x-10$ کو جوڑنے کے لیے ہم اس طرح کرتے ہیں

$$\begin{array}{r} 7x^2 - 4x + 5 \\ + \quad\quad 9x - 10 \\ \hline 7x^2 + 5x - 5 \end{array}$$

مشاہدہ کیجیے کہ ہم کیسے جمع کرتے ہیں۔ ہم جمع ہونے والی ہر عبارت کو علاحدہ قطار میں رکھتے ہیں۔ ایسا کرنے میں ہم یکساں ارکان کے نیچے یکساں ارکان ہی رکھتے ہیں اور ان کو جمع کر دیتے ہیں جیسا کہ ظاہر کیا گیا ہے۔ اس لیے $5 + (-10) = 5 - 10 = -5$

اسی طرح $-4x + 9x = (-4+9)x = 5x$ آیئے کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 1 : $7xy + 5yz - 3zx,\ 4yz + 9zx - 4y\ ,\ -3xz + 5x - 2xy$ کو جمع کیجیے۔

حل : تینوں عبارتوں کو مختلف قطاروں میں رکھیے جس میں یکساں ارکان کے نیچے یکساں ارکان ہی ہوں۔

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7xy & + 5yz & - 3zx & & \\ + & & 4yz & + 9zx & & -4y \\ + & -2xy & & - 3zx & + 5x & \\ \hline & 5xy & + 9yz & + 3zx & + 5x & - 4y \end{array}$$

(نوٹ کیجیے xz ایسا ہی ہے جیسا zx)

لہٰذا عبارتوں کا حاصل جمع $5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$ ہے۔نوٹ کیجیے کہ کس طرح دوسری اور تیسری عبارت کے ارکان $-4y$ اور $5x$ کو جواب میں ویسے ہی لکھ دیا گیا ہے۔ کیوں کہ دوسری عبارتوں میں ان کے یکساں ارکان نہیں تھے۔

مثال 2 : $5x^2 - 4y^2 + 6y - 3$ کو $7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y$ سے گھٹائیے۔

حل :

$$\begin{array}{rrrrrr} 7x^2 & - 4xy & + 8y^2 & + 5x & - 3y & \\ 5x^2 & & - 4y^2 & & + 6y & - 3 \\ (-) & & (+) & & (-) & (+) \\ \hline 2x^2 & - 4xy & + 12y^2 & + 5x & - 9y & + 3 \end{array}$$

> نوٹ کیجیے کہ کسی عدد کو گھٹانا ایسا ہی ہے جیسے اس کے جمعی معکوس کو جمع کرنا۔ اس لیے -3 کو گھٹانا ایسا ہی ہے جیسے $+3$ کو جمع کرنا– اسی طرح $6y$ کو گھٹانا ایسا ہی ہے جیسے $-6y$ کو جمع کرنا؛ $-4y^2$ کو گھٹانا ایسا ہی ہے جیسے $4y^2$ کو جمع کرنا اور ایسے ہی آگے تک– دوسری قطار کے ہر ایک رکن کے نیچے لکھی گئی تیسری قطار میں لکھی علامتوں سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ ہمیں کون سا عمل کرنا ہے۔

مشق 9.1

.1 مندرجہ ذیل عبارتوں کے ارکان اور ان کے ضریبوں کی شناخت کیجیے۔

(i) $5xyz^2 - 3zy$ (ii) $1 + x + x^2$ (iii) $4x^2y^2 - 4x^2y^2z^2 + z^2$

(iv) $3 - pq + qr - rp$ (v) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - xy$ (vi) $0.3a - 0.6ab + 0.5b$

.2 مندرجہ ذیل کثیر رکنیوں کی درجہ بندی، یک رکنی، دو رکنی اور، سہ رکنی کے طور پر کیجیے۔ کون سی کثیر رکنی ان میں سے کسی بھی درجہ میں نہیں آتی؟

$x + y,\ 1000,\ x + x^2 + x^3 + x^4,\ 7 + y + 5x,\ 2y - 3y^2,\ 2y - 3y^2 + 4y^3,\ 5x - 4y + 3xy,$
$4z - 15z^2,\ ab + bc + cd + da,\ pqr,\ p^2q + pq^2,\ 2p + 2q$

.3 مندرجہ ذیل کو جمع کیجیے۔

(i) $ab - bc,\ bc - ca,\ ca - ab$ (ii) $a - b + ab,\ b - c + bc,\ c - a + ac$

(iii) $2p^2q^2 - 3pq + 4,\ 5 + 7pq - 3p^2q^2$ (iv) $l^2 + m^2,\ m^2 + n^2,\ n^2 + l^2,\ 2lm + 2mn + 2nl$

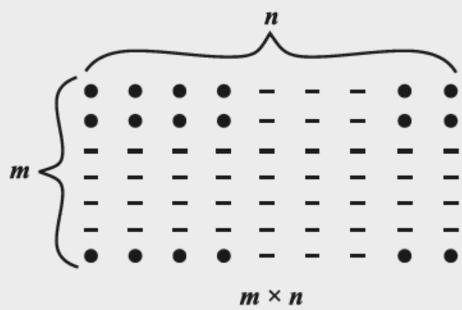
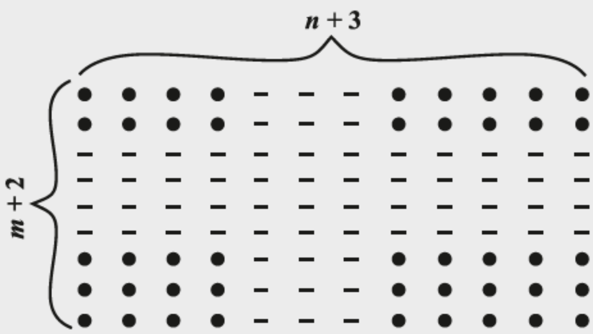
4. (a) $4a - 7ab + 3b + 12$ کو $12a - 9ab + 5b - 3$ میں سے گھٹائیے۔

(b) $3xy + 5yz - 7zx$ کو $5xy - 2yz - 2zx + 10xyz$ میں سے گھٹائیے۔

(c) $4p^2q - 3pq + 5pq^2 - 8p + 7q - 10$ کو $18 - 3p - 11q + 5pq - 2pq^2 + 5p^2q$ میں سے گھٹائیے۔

9.6 الجبری عبارتوں کا حاصل ضرب: تعارف

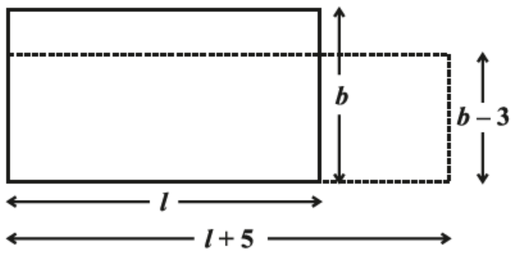
(i) مندرجہ ذیل نقطوں کے نمونوں کو دیکھیے۔

نقطوں کے نمونے	نقطوں کی کل تعداد
	4×9
	5×7
	$m \times n$
	$(m + 2) \times (n + 3)$

نقطوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے ہمیں قطاروں کی تعداد کو عبارتوں کے کالموں کی تعداد کی عبارتوں سے ضرب کرنا ہے۔

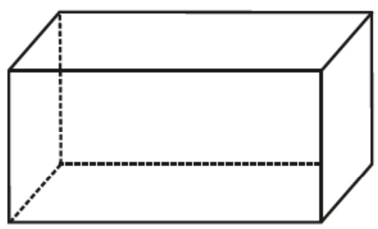
یہاں قطاروں کی تعداد 2 بڑھائی گئی ہے یعنی $m + 2$ اور کالموں کی تعداد 3 بڑھائی گئی ہے یعنی $n + 3$

(ii) کیا آپ ایسی صورت حال کے بارے میں جانتے ہیں جن میں دو الجبری عبارتوں کو ضرب کرنا پڑتا ہو؟ امینہ کہتی ہے ''ہم مستطیل کے رقبہ کے بارے میں سوچتے ہیں''، مستطیل کا رقبہ $l \times b$ ہے جہاں l لمبائی ہے اور b چوڑائی ۔ اگر مستطیل کی لمبائی 5 اکائی بڑھا دی جائے یعنی $(l + 5)$ اکائی اور چوڑائی 3 اکائی کم کر دی جائے یعنی $(b - 3)$ اکائی تو مستطیل کا رقبہ $(l + 5) \times (b - 3)$ ہوگا۔



مستطیل کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں الجبری عبارتوں کو ضرب کرنا پڑتا ہے جیسے $(l + 5) \times (b - 3)$ یا $l \times b$

(iii) کیا آپ حجم کے بارے میں جانتے ہیں؟ (ایک مستطیل نما صندوق کا حجم اس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی کے حاصل ضرب سے حاصل ہوتا ہے)



(iv) سریتا کہتی ہے کہ جب ہم چیزیں خریدتے ہیں تو ہمیں ضرب کرنا پڑتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر

ایک درجن کیلے کی قیمت = p ₹ ہے

اور اسکول کی پکنک کے لیے کیلوں کی ضرورت = z درجن

تو ہمیں ادا کرنے پڑیں گے = $(p \times z)$ ₹

مان لیجیے ایک درجن کیلے کی قیمت 2 ₹ کم ہوتی اور پکنک کے لیے 4 درجن کیلوں کی ضرورت کم ہوتی

تو ہر ایک درجن کیلے کی قیمت = $(p - 2)$ ₹

اور کیلے کی ضرورت = $(z - 4)$ درجن

اس لیے ہمیں ادا کرنے پڑتے = $(p - 2) \times (z - 4)$ ₹

کوشش کیجیے

کیا آپ ایسی دو اور صورتیں بتا سکتے ہیں جہاں الجبری عبارتوں کو ضرب کرنا پڑ سکتا ہے؟

[اشارہ : • رفتار اور وقت پر غور کیجیے؛

• سود مفرد، اصل زر اور سود مفرد کی شرح پر غور کیجیے، وغیرہ]

مذکورہ بالا سبھی مثالوں میں ہم نے دو یا دو سے زیادہ رقموں کو ضرب کیا ہے۔ اگر رقمیں الجبری عبارتوں کی شکل میں دی گئی ہوں اور ہمیں ان کا حاصل ضرب معلوم کرنا ہو تو ہمیں یہ جاننا چاہیے کہ یہ حاصل ضرب کیسے حاصل کیا جائے گا۔ آیئے اسے منظم طریقے سے کرتے ہیں شروع کرنے کے لیے ہم دو یک رکنی کو ضرب کرتے ہیں۔

9.7 یک رکنی کو یک رکنی سے ضرب کرنا

9.7.1 دو یک رکنی ضرب کرنا

ہم درج ذیل طریقے سے شروع کرتے ہیں

$4 \times x = x + x + x + x = 4x$ جسے ہم پہلے پڑھ چکے ہیں

اسی طرح $4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

اب مندرجہ ذیل حاصل ضرب کا مشاہدہ کیجیے۔

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

غور کیجیے کہ یک رکنی کے تینوں حاصل ضرب $3xy$، $15xy$، $(-15xy)$ یک رکنی ہی ہیں۔

کچھ اور مثالیں دیکھیے

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

$= 20 \times x^3 = 20x^3$

غور کیجیے کہ $5 \times 4 = 20$
یعنی پہلی یک رکنی کا ضریب × دوسری یک رکنی کا ضریب = حاصل ضرب کا ضریب
اور $x \times x^2 = x^3$
دوسری یک رکنی کا الجبری جز ضربی × پہلی یک رکنی کا الجبری جز ضربی = حاصل ضرب کا الجبری جز ضربی

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

غور کیجیے کہ دونوں یک رکنی کے الجبری حصوں کے مختلف متغیروں کی قوتوں کو ہم کس طرح اکٹھا کرتے ہیں۔ ہم نے یہاں قوت نما کا طریقہ استعمال کیا ہے۔

9.7.2 تین یا تین سے زیادہ یک رکنی کثیر کو ضرب کرنا

مندرجہ ذیل مثالوں کا مشاہدہ کیجیے۔

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z = 10xy \times 7z = 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3 = 20x^3y^3 \times 6x^3y^3 = 120x^3y^3 \times x^3y^3$

$= 120\,(x^3 \times x^3) \times (y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6$

یہ ظاہر ہے کہ پہلے ہم دو یک رکنی کو ضرب کرتے ہیں اور پھر نتیجہ میں حاصل ایک یک رکنی کو تیسری یک رکنی سے ضرب کرتے ہیں۔ اس طریقہ کی توسیع ہم بہت سی یک رکنیوں کے حاصل ضرب کے لیے کر سکتے ہیں۔

کوشش کیجیے

$4x \times 5y \times 7z$ معلوم کیجیے۔

پہلے $4x \times 5y$ معلوم کیجیے اور پھر اس کو $7z$ سے ضرب کیجیے

یا پہلے $5y \times 7z$ معلوم کیجیے اور اس کو $4x$ سے ضرب کیجیے۔

کیا نتیجہ ایک ہی ہے؟ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

کیا ضرب کرتے وقت ترتیب کی اہمیت ہے؟

ہم حاصل ضرب کو دوسرے طریقے سے بھی معلوم کرسکتے ہیں۔

$4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4 \times 5 \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3) = 120x^6y^6$

مثال 3 : ایک مستطیل جس کی لمبائی اور چوڑائی دی ہوئی ہے، کے رقبہ کے جدول کو پورا کیجیے۔

حل :

لمبائی	چوڑائی	رقبہ
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	....
$4ab$	$5bc$	....
$2l^2m$	$3lm^2$	....

مثال 4 : مندرجہ ذیل جدول میں تین مستطیل نما صندوقوں کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی دی ہوئی ہے۔ ہر ایک کا حجم معلوم کیجیے۔

	لمبائی	چوڑائی	اونچائی
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$
(ii)	m^2n	n^2p	p^2m
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$

حل : حجم = لمبائی × چوڑائی × اونچائی

اس طرح (i) کے لیے

حجم $= (5cz) \times (3by) \times (2ax)$

$= (cz) \times (by) \times (ax) \times 5 \times 3 \times 2$

$= 30abcxyz$

(ii) کے لیے

حجم $= p^2m \times n^2p \times m^2n$

$= (p \times p^2) \times (n \times n^2) \times (m^2 \times m)$

$= m^3n^3p^3$

(iii) کے لیے

حجم $= 8q^3 \times 4q^2 \times 2q$

$= 8 \times 4 \times 2 \times q^3 \times q^2 \times q$

$= 64q^6$

مشق 9.2

.1 مندرجہ ذیل یک رکنی جوڑوں کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $4, 7p$ (ii) $-4p, 7p$ (iii) $-4p, 7pq$ (iv) $4p^3, -3p$

(v) $4p, 0$

.2 مستطیلوں کے رقبے معلوم کیجیے جن کی لمبائیاں اور چوڑائیاں یک رکنی کی شکل میں دی گئی ہیں۔

$(p, q); (10m, 5n); (20x^2, 5y^2); (4x, 3x^2); (3mn, 4np)$

.3 حاصل ضرب کے جدول کو مکمل کیجیے۔

پہلی یک رکنی ← / دوسری یک رکنی ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	...	...	...	...	...
$-5y$	...	...	$-15x^2y$	...	...	...
$3x^2$	...	...	...	...	...	...
$-4xy$	...	...	...	...	...	...
$7x^2y$	...	...	...	...	...	...
$-9x^2y^2$	...	...	...	...	...	...

.4 مستطیل نما صندوقوں کا حجم معلوم کیجیے جن کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب ذیل میں دی گئی ہے۔

(i) $5a, 3a^2, 7a^4$ (ii) $2p, 4q, 8r$ (iii) $xy, 2x^2y, 2xy^2$ (iv) $a, 2b, 3c$

.5 حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) xy, yz, zx (ii) $a, -a^2, a^3$ (iii) $2, 4y, 8y^2, 16y^3$

(iv) $a, 2b, 3c, 6abc$ (v) $m, -mn, mnp$

9.8 ایک یک رکنی کو کثیر رکنی سے ضرب کرنا

9.8.1 ایک یک رکنی کو دو رکنی سے ضرب کرنا

آیئے یک رکنی $3x$ کو دو رکنی $5y + 2$ سے ضرب کریں یعنی $3x \times (5y + 2) = ?$ معلوم کیجیے۔

یاد کیجیے $3x$ اور $(5y + 2)$ اعداد کو ظاہر کرتے ہیں اس لیے تقسیمی اصول کا استعمال کرنے سے

$$3x \times (5y + 2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2) = 15xy + 6x$$

ہم عام طور سے تحسیب میں تقسیمی اصول کا استعمال کرتے ہیں۔ مثلاً:

$7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$

$= 7 \times 100 + 7 \times 6$ (یہاں ہم نے تقسیمی اصول استعمال کیا)

$= 700 + 42 = 742$

$7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$

$= 7 \times 40 - 7 \times 2$ (یہاں ہم نے تقسیمی اصول استعمال کیا)

$= 280 - 14 = 266$

اسی طرح سے $\quad (-3x) \times (-5y + 2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2) = 15xy - 6x$

اور $\quad 5xy \times (y^2 + 3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3) = 5xy^3 + 15xy$

ایک یک رکنی × دو رکنی کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟

مثال کے طور پر $\quad (5y + 2) \times 3x = ?$

ہم تقلیبی اصول کا استعمال کر سکتے ہیں جیسے : $7 \times 3 = 3 \times 7$ یا عام طور پر $a \times b = b \times a$

اسی طرح سے $(5y + 2) \times 3x = 3x \times (5y + 2) = 15xy + 6x$

کوشش کیجیے

حاصل ضرب معلوم کیجیے $\quad$ (i) $2x(3x + 5xy)$ $\quad$ (ii) $a^2(2ab - 5c)$

9.8.2 ایک یک رکنی کو سہ رکنی سے ضرب کرنا

$3p \times (4p^2 + 5p + 7)$ پر غور کیجیے۔ جس طرح ہم پہلے کر چکے ہیں یہاں بھی تقسیمی اصول کا استعمال کریں گے۔

$3p \times (4p^2 + 5p + 7) = (3p \times 4p^2) + (3p \times 5p) + (3p \times 7)$

$= 12p^3 + 15p^2 + 21p$

سہ رکنی کے ہر رکن کو یک رکنی سے ضرب کیجیے اور حاصل ضرب کو جمع کیجیے۔

غور کیجیے کہ تقسیمی اصول کو استعمال کرنے سے ہم رکن بہ رکن ضرب کرتے ہیں۔

کوشش کیجیے

حاصل ضرب معلوم کیجیے:

$(4p^2 + 5p + 7) \times 3p$

مثال 5: عبارت کو مختصر کیجیے اور ہدایت کے مطابق قدر معلوم کیجیے:

(i) $x(x - 3) + 2$ کے لیے $x = 1$ $\quad$ (ii) $3y(2y - 7) - 3(y - 4) - 63$ کے لیے $y = -2$

حل :

(i) $x(x-3)+2 = x^2-3x+2$

$x=1$ کے لیے، $x^2-3x+2 = (1)^2-3(1)+2$

$= 1-3+2 = 3-3 = 0$

(ii) $3y(2y-7)-3(y-4)-63 = 6y^2-21y-3y+12-63$

$= 6y^2-24y-51$

$y=-2$ کے لیے، $6y^2-24y-51 = 6(-2)^2-24(-2)-51$

$= 6\times 4+24\times 2-51$

$= 24+48-51 = 72-51 = 21$

مثال 6 : جمع کیجیے:

(i) $5m(3-m)$ اور $6m^2-13m$ (ii) $4y(3y^2+5y-7)$ اور $2(y^3-4y^2+5)$

حل :

(i) پہلی عبارت $5m(3-m) = (5m\times 3)-(5m\times m) = 15m-5m^2$

اب دوسری عبارت کو اس میں جوڑنے پر $15m-5m^2+6m^2-13m = m^2+2m$

(ii) پہلی عبارت $4y(3y^2+5y-7) = (4y\times 3y^2)+(4y\times 5y)+(4y\times(-7))$

$= 12y^3+20y^2-28y$

دوسری عبارت $2(y^3-4y^2+5) = 2y^3+2\times(-4y^2)+2\times 5$

$= 2y^3-8y^2+10$

ان دونوں عبارتوں کو جوڑنے پر

$$\begin{array}{rcrr} 12y^3 & + & 20y^2-28y & \\ +\ 2y^3 & - & 8y^2 & +10 \\ \hline 14y^3 & + & 12y^2-28y & +10 \end{array}$$

مثال 7 : $3pq(p-q)$ کو $2pq(p+q)$ میں سے گھٹائیے۔

حل : ہمارے پاس ہے $3pq(p-q) = 3p^2q-3pq^2$

اور $2pq\,(p+q) = 2p^2q + 2pq^2$

گھٹانے پر

$$\begin{array}{rcr} 2p^2q & + & 2pq^2 \\ 3p^2q & - & 3pq^2 \\ - & & + \\ \hline -p^2q & + & 5pq^2 \end{array}$$

مشق 9.3

1. مندرجہ ذیل میں ہر عبارت کے جوڑے کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $4p,\ q+r$ (ii) $ab,\ a-b$ (iii) $a+b,\ 7a^2b^2$ (iv) $a^2-9,\ 4a$

(v) $pq+qr+rp,\ 0$

2. جدول کو مکمل کیجیے۔

	پہلی عبارت	دوسری عبارت	حاصل ضرب
(i)	a	$b+c+d$	. . .
(ii)	$x+y-5$	$5xy$	. . .
(iii)	p	$6p^2-7p+5$	. . .
(iv)	$4p^2q^2$	p^2-q^2	. . .
(v)	$a+b+c$	abc	. . .

3. حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(a^2)\times(2a^{22})\times(4a^{26})$ (ii) $\left(\frac{2}{3}xy\right)\times\left(\frac{-9}{10}x^2y^2\right)$

(iii) $\left(-\frac{10}{3}pq^3\right)\times\left(\frac{6}{5}p^3q\right)$ (iv) $x\times x^2\times x^3\times x^4$

4. (a) آسان کیجیے : $3x(4x-5)+3$ کو اور (i) $x=3$ (ii) $x=\frac{1}{2}$ کے لیے اس کی قدر معلوم کیجیے۔

(b) آسان کیجیے : $a(a^2+a+1)+5$ کو اور (i) $a=0$ (ii) $a=1$ (iii) $a=(-1)$ کے لیے اس کی قدر معلوم کیجیے۔

5. (a) جمع کیجیے : $p\,(p-q)$ ، $q\,(q-r)$ اور $r\,(r-p)$

(b) جمع کیجیے : $2x\,(z-x-y)$ اور $2y\,(z-y-x)$

(c) گھٹائیے : $3l\,(l-4\,m+5\,n)$ کو $4l\,(10\,n-3\,m+2\,l)$ میں سے

(d) گھٹائیے : $3a\,(a+b+c)-2\,b\,(a-b+c)$ کو $4c\,(-a+b+c)$ میں سے

9.9 ایک کثیر رکنی کو کثیر رکنی سے ضرب کرنا

9.9.1 دو رکنی کو دو رکنی سے ضرب کرنا

آیئے ایک دو رکنی $(3a+4b)$ کو دوسری دو رکنی $(2a+3b)$ سے ضرب کرتے ہیں۔ ہم اس کو قدم بہ قدم کرتے ہیں جیسا کہ ہم پہلے بھی کر چکے ہیں۔ اس میں بھی ہم ضرب کا تقسیمی اصول استعمال کریں گے۔

$$(3a+4b)\times(2a+3b)=3a\times(2a+3b)+4b\times(2a+3b)$$

$$=(3a\times 2a)+(3a\times 3b)+(4b\times 2a)+(4b\times 3b)$$

$$=6a^2+9ab+8ba+12b^2$$

$$=6a^2+17ab+12b^2 \quad (\text{کیوں کہ } ba=ab)$$

غور کیجیے کہ ایک دو رکنی کا ہر رکن دوسری دو رکنی کے ہر رکن سے ضرب کیا جاتا ہے۔

جب ہم ایک رکن کو دوسرے رکن سے ضرب کرتے ہیں تو ہم امید کرتے ہیں کہ $2\times 2=4$ رکن موجود ہونا چاہیے لیکن ان میں دو رکن یکساں ہیں جن کو ایک ساتھ ملا دیا گیا ہے، اور اس طرح ہمیں 3 رکن حاصل ہوتے ہیں۔ کثیر رکنی کی کثیر رکنی سے ضرب کرتے وقت ہمیں یکساں ارکانوں کو تلاش کرنا چاہیے اور انھیں ملانا چاہیے۔

مثال 8 : ضرب کیجیے

(i) $(x-4)$ اور $(2x+3)$ (ii) $(x-y)$ اور $(3x+5y)$

حل :

(i)
$$(x-4)\times(2x+3)=x\times(2x+3)-4\times(2x+3)$$

$$=(x\times 2x)+(x\times 3)-(4\times 2x)-(4\times 3)=2x^2+3x-8x-12$$

$$=2x^2-5x-12 \quad (\text{یکساں ارکان جمع کرنے پر})$$

(ii)
$$(x-y)\times(3x+5y)=x\times(3x+5y)-y\times(3x+5y)$$

$$=(x\times 3x)+(x\times 5y)-(y\times 3x)-(y\times 5y)$$

$$=3x^2+5xy-3yx-5y^2=3x^2+2xy-5y^2 \quad (\text{یکساں ارکان جمع کرنے پر})$$

مثال 9 : ضرب کیجیے

(i) $(a+7)$ اور $(b-5)$ (ii) (a^2+2b^2) اور $(5a-3b)$

حل :

(i) $(a+7)\times(b-5) = a\times(b-5)+7\times(b-5)$

$$= ab-5a+7b-35$$

نوٹ کیجیے کہ اس ضرب میں یکساں ارکان موجود نہیں ہیں۔

(ii) $(a^2+2b^2)\times(5a-3b) = a^2(5a-3b)+2b^2\times(5a-3b)$

$$= 5a^3-3a^2b+10ab^2-6b^3$$

9.9.2 دو رکنی کی سہ رکنی سے ضرب

اس ضرب میں، ہم سہ رکنی کے تینوں ارکان میں سے ہر رکن کی دو رکنی کے ہر ایک رکن سے ضرب کرتے ہیں۔ اس طرح ہمیں $2\times 3 = 6$ ارکان حاصل ہوں گے جو گھٹ کے 5 یا اس سے بھی کم ہو سکتے ہیں، اگر ہر رکن کو ایک رکن سے ضرب کرنے پر یکساں ارکان بنتے ہیں۔ تو غور کیجیے:

$$\underbrace{(a+7)}_{\text{دو رکنی}}\times\underbrace{(a^2+3a+5)}_{\text{سہ رکنی}} = a\times(a^2+3a+5)+7\times(a^2+3a+5)$$

[تقسیمی اصول کا استعمال کرتے ہوئے]

$$= a^3+3a^2+5a+7a^2+21a+35$$

$$= a^3+(3a^2+7a^2)+(5a+21a)+35$$

$$= a^3+10a^2+26a+35$$ (آخر میں صرف 4 ہی رکن کیوں ہیں؟)

مثال 10 : مختصر کیجیے $(a+b)(2a-3b+c)-(2a-3b)c$

حل : ہمارے پاس ہے

$$(a+b)(2a-3b+c) = a(2a-3b+c)+b(2a-3b+c)$$

$$= 2a^2-3ab+ac+2ab-3b^2+bc$$

$$= 2a^2-ab-3b^2+bc+ac$$ (نوٹ: $-3ab$ اور $2ab$ یکساں ارکان ہیں)

اور $(2a-3b)c = 2ac-3bc$

اس لیے

$$(a+b)(2a-3b+c)-(2a-3b)c = 2a^2-ab-3b^2+bc+ac-(2ac-3bc)$$

$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + bc + ac - 2ac + 3bc$$

$$= 2a^2 - ab - 3b^2 + (bc + 3bc) + (ac - 2ac)$$

$$= 2a^2 - 3b^2 - ab + 4bc - ac$$

مشق 9.4

.1 دورکنی کی ضرب کیجیے۔

(i) $(4x-3)$ اور $(2x+5)$ (ii) $(3y-4)$ اور $(y-8)$

(iii) $(2.5l-0.5m)$ اور $(2.5l+0.5m)$ (iv) $(a+3b)$ اور $(x+5)$

(v) $(2pq+3q^2)$ اور $(3pq-2q^2)$

(vi) $\left(\frac{3}{4}a^2+3b^2\right)$ اور $4\left(a^2-\frac{2}{3}b^2\right)$

.2 حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $(5-2x)(3+x)$ (ii) $(x+7y)(7x-y)$

(iii) $(a^2+b)(a+b^2)$ (iv) $(p^2-q^2)(2p+q)$

.3 آسان کیجیے۔

(i) $(x^2-5)(x+5)+25$ (ii) $(a^2+5)(b^3+3)+5$

(iii) $(t+s^2)(t^2-s)$

(iv) $(a+b)(c-d)+(a-b)(c+d)+2(ac+bd)$

(v) $(x+y)(2x+y)+(x+2y)(x-y)$ (vi) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(vii) $(1.5x-4y)(1.5x+4y+3)-4.5x+12y$

(viii) $(a+b+c)(a+b-c)$

9.10 تماثل کیا ہے؟

برابری پر غور کیجیے $(a+1)(a+2) = a^2+3a+2$

a کی کسی قدر $a = 10$ کے لیے، ہم اس مساوات کے طرفین کی قدر معلوم کریں گے۔

$a = 10$ کے لیے، $\text{LHS} = (a+1)(a+2) = (10+1)(10+2) = 11 \times 12 = 132$

$\text{RHS} = a^2 + 3a + 2 = 10^2 + 3 \times 10 + 2 = 100 + 30 + 2 = 132$

لہٰذا $a = 10$ کے لیے برابری کے دونوں طرف کی قدریں مساوی ہیں۔

آیئے، اب $a = -5$ کو لیں

$$\text{LHS} = (a+1)(a+2) = (-5+1)(-5+2) = (-4) \times (-3) = 12$$

$$\text{RHS} = a^2 + 3a + 2 = (-5)^2 + 3(-5) + 2$$

$$= 25 - 15 + 2 = 10 + 2 = 12$$

لہٰذا $a = -5$ کے لیے بھی $\text{LHS} = \text{RHS}$

ہم دیکھتے ہیں کہ a کی کسی بھی قدر کے لیے $\text{LHS} = \text{RHS}$ ہے۔ ایسی برابری جو متغیر کی ہر قدر کے لیے درست ہو تماثل کہلاتی ہے۔ اس طرح،

$(a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2$ ایک تماثل ہے۔

ایک مساوات اس میں موجود متغیر کی صرف ایک قدر کے لیے ہی درست ہوتی ہے۔ یہ متغیر کی تمام قدروں کے لیے صحیح نہیں ہوتی۔ مثال کے طور پر مساوات

$a^2 + 3a + 2 = 132$ پر غور کیجیے

یہ صرف $a = 10$ کے لیے صحیح ہے جیسا کہ اوپر دکھایا گیا ہے۔ لیکن یہ $a = -5$ یا $a = 0$ وغیرہ کے لیے درست نہیں ہے۔

کوشش کیجیے : دکھایئے کہ $a^2 + 3a + 2 = 132$ ، $a = -5$ اور $a = 0$ کے لیے درست نہیں ہے۔

9.11 معیاری تماثلات

اب ہم تین ایسی تماثلات کا مطالعہ کریں گے جو ہمارے لیے بہت مفید ہیں۔ یہ تماثلات ایک دورکنی کو دوسری دورکنی سے ضرب کرنے پر حاصل ہوتی ہیں۔

آیئے پہلے حاصل ضرب $(a+b)(a+b)$ یا $(a+b)^2$ پر غور کریں۔

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$= a(a+b) + b(a+b)$$

$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 \qquad (ab = ba \text{ کیوں کہ})$$

اس طرح $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ (I)

ظاہر ہے کہ یہ ایک تماثل ہے کیوں کہ RHS میں موجود عبارت کو اصل ضرب کے عمل سے LHS سے حاصل کیا گیا ہے۔ آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ a اور b کی کسی بھی قدر کے لیے تماثل کے دونوں طرف کی قدریں یکساں ہیں۔

- اس کے بعد ہم حاصل ضرب $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b)$ پر غور کرتے ہیں۔

ہمارے پاس $= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

یا $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ (II)

- آخر میں ہم $(a+b)(a-b)$ پر غور کریں گے۔ ہمارے پاس ہے $(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$

$= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ (کیوں کہ $ab = ba$)

یا $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$ (III)

تماثلات (I)، (II) اور (III) **معیاری تماثلات** کہلاتی ہیں۔

کوشش کیجیے

1. تماثل (I) میں b کی جگہ پر $-b$ رکھیے۔ کیا آپ کو تماثل (II) حاصل ہوتا ہے؟

- اب ہم ایک اور اہم تماثل پر غور کرتے ہیں۔

$$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$$
$$= x^2 + bx + ax + ab$$
$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

یا $\boxed{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$ (IV)

کوشش کیجیے

1. $a=2$، $b=3$، $x=5$ کے لیے تماثل (IV) کی تصدیق کیجیے۔
2. تماثل (IV) میں $a=b$ لینے پر آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے؟ کیا یہ تماثل (I) سے متعلق ہے؟
3. تماثل (IV) میں $a=-c$ اور $b=-c$ لینے پر آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے کیا یہ تماثل (II) سے متعلق ہے؟
4. تماثل (IV) میں $b=-a$ لیجیے۔ آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے؟ کیا یہ تماثل (III) سے متعلق ہے؟

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ تماثل (IV) باقی تینوں تماثلات کی عام شکل ہے؟

9.12 تماثلات کا استعمال

اب ہم دیکھیں گے کہ کس طرح تماثلات کا استعمال دو رکنی کے ضرب اور اعداد کے ضرب کے بہت سے مسائل کو حل کرنے کے لیے بھی آسان متبادل طریقہ فراہم کرتا ہے۔

مثال 11 : تماثل(I) کا استعمال کرتے ہوئے، معلوم کیجیے (i) $(2x+3y)^2$ (ii) 103^2

حل :

(i) $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$ [تماثل (I) کے استعمال سے]

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

ہم $(2x+3y)^2$ کی قدر سیدھے طور پر معلوم کر سکتے ہیں۔

$$(2x+3y)^2 = (2x+3y)(2x+3y)$$

$$= (2x)(2x) + (2x)(3y) + (3y)(2x) + (3y)(3y)$$

$$= 4x^2 + 6xy + 6\,yx + 9y^2 \qquad (\text{کیوں کہ } xy = yx)$$

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

تماثل (I) کے استعمال سے ہمیں $(2x+3y)$ کا مربع معلوم کرنے کا ایک متبادل طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ کیا آپ نے غور کیا ہے کہ مذکورہ بالا سیدھے طریقے کے مقابلے تماثل کے طریقے میں کم اقدام ہوتے ہیں؟ آپ اس طریقے کی اہمیت اور زیادہ سمجھیں گے جب آپ $(2x+3y)$ کے مقابلے میں بہت پیچیدہ دو رکنی عبارتوں کا مربع معلوم کرنے کی کوشش کریں گے۔

(ii) $(103)^2 = (100+3)^2$

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2$

$= 10000 + 600 + 9 = 10609$

ہم 103 کو سیدھے 103 سے ضرب کر کے بھی درج بالا جواب حاصل کر سکتے ہیں۔ کیا آپ نے غور کیا ہے کہ سیدھے طریقہ سے 103 کا مربع معلوم کرنے کے مقابلے تماثل (I) کا طریقہ آسان ہے؟ 1013 کا مربع معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔ آپ اس حالت میں بھی سیدھے ضرب کے طریقہ کے مقابلے تماثلوں کے استعمال کے طریقے کو زیادہ آسان پائیں گے۔

مثال 12 : تماثل (II) کے استعمال سے معلوم کیجیے۔ (i) $(4p-3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$

حل:

(i) $(4p-3q)^2 = (4p)^2 - 2(4p)(3q) + (3q)^2$ (تماثل II کے استعمال سے)

$$=16p^2-24pq+9q^2$$

کیا آپ اس بات سے متفق ہیں کہ $(4p-3q)^2$ کا مربع معلوم کرنے کے لیے سیدھے ضرب کے مقابلے تماثلات کا استعمال زیادہ آسان ہے؟

(ii) $(4.9)^2=(5.0-0.1)^2=(5.0)^2-2\,(5.0)\,(0.1)+(0.1)^2$

$$=25.00-1.00+0.01=24.01$$

کیا 4.9 کا مربع سیدھے ضرب کے مقابلے میں تماثل (II) کی مدد سے زیادہ آسان نہیں ہے؟

مثال 13 : تماثل (III) کا استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے

(i) $\left(\frac{3}{2}m+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m-\frac{2}{3}n\right)$ (ii) 983^2-17^2 (iii) 194×206

حل :

(i) $\left(\frac{3}{2}m+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m-\frac{2}{3}n\right)=\left(\frac{3}{2}m\right)^2-\left(\frac{2}{3}n\right)^2$

$$=\frac{9}{4}m^2-\frac{4}{9}n^2$$

اسے سیدھے طریقے سے حل کرنے کی کوشش کیجیے۔ آپ دیکھیں گے کہ تماثل (III) کے استعمال سے اس کو حل کرنا نسبتاً زیادہ آسان ہے۔

(ii) $983^2-17^2=(983+17)\,(983-17)$

[یہاں $a=983,\ b=17,\ a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$]

اس لیے $983^2-17^2=1000\times966=966000$

(iii) $194\times206=(200-6)\times(200+6)=200^2-6^2$

$$=40000-36=39964$$

مثال 14 : مندرجہ ذیل کے حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے تماثل $(x+a)\,(x+b)=x^2+(a+b)\,x+ab$ کا استعمال کیجیے۔

(i) 501×502 (ii) 95×103

حل :

(i) $501\times502=(500+1)\times(500+2)=500^2+(1+2)\times500+1\times2$

$$=250000+1500+2=251502$$

(ii) $95\times103=(100-5)\times(100+3)=100^2+(-5+3)\times100+(-5)\times3$

$$=10000-200-15=9785$$

مشق نمبر 9.5

1. مندرجہ ذیل حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے مناسب تماثل کا استعمال کیجیے۔

(i) $(x+3)(x+3)$ (ii) $(2y+5)(2y+5)$ (iii) $(2a-7)(2a-7)$

(iv) $(3a-\frac{1}{2})(3a-\frac{1}{2})$ (v) $(1.1m-0.4)(1.1m+0.4)$

(vi) $(a^2+b^2)(-a^2+b^2)$ (vii) $(6x-7)(6x+7)$

(viii) $(-a+c)(-a+c)$ (ix) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{3y}{4}\right)$

(x) $(7a-9b)(7a-9b)$

2. مندرجہ ذیل حاصل ضرب کو معلوم کرنے کے لیے تماثل $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ کا استعمال کیجیے۔

(i) $(x+3)(x+7)$ (ii) $(4x+5)(4x+1)$

(iii) $(4x-5)(4x-1)$ (iv) $(4x+5)(4x-1)$

(v) $(2x+5y)(2x+3y)$ (vi) $(2a^2+9)(2a^2+5)$

(vii) $(xyz-4)(xyz-2)$

3. تماثل کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل مربعوں کو معلوم کیجیے۔

(i) $(b-7)^2$ (ii) $(xy+3z)^2$ (iii) $(6x^2-5y)^2$

(iv) $\left(\frac{2}{3}m+\frac{3}{2}n\right)^2$ (v) $(0.4p-0.5q)^2$ (vi) $(2xy+5y)^2$

4. آسان کیجیے۔

(i) $(a^2-b^2)^2$ (ii) $(2x+5)^2-(2x-5)^2$

(iii) $(7m-8n)^2+(7m+8n)^2$ (iv) $(4m+5n)^2+(5m+4n)^2$

(v) $(2.5p-1.5q)^2-(1.5p-2.5q)^2$

(vi) $(ab+bc)^2-2ab^2c$ (vii) $(m^2-n^2m)^2+2m^3n^2$

5. ظاہر کیجیے کہ

(i) $(3x+7)^2-84x=(3x-7)^2$ (ii) $(9p-5q)^2+180pq=(9p+5q)^2$

(iii) $\left(\frac{4}{3}m-\frac{3}{4}n\right)^2+2mn=\frac{16}{9}m^2+\frac{9}{16}n^2$

(iv) $(4pq+3q)^2-(4pq-3q)^2=48pq^2$

(v) $(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)+(c-a)(c+a)=0$

.6 تماثل کا استعمال کرتے ہوئے قدر معلوم کیجیے۔

(i) 71^2 (ii) 99^2 (iii) 102^2 (iv) 998^2

(v) 5.2^2 (vi) 297×303 (vii) 78×82 (viii) 8.9^2

(ix) 10.5×9.5

.7 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ کا استعمال کرتے ہوئے ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) 51^2-49^2 (ii) $(1.02)^2-(0.98)^2$ (iii) 153^2-147^2

(iv) $12.1^2-7.9^2$

.8 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$ کا استعمال کرتے ہوئے ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

ہم نے کیا سیکھا؟

.1 متغیر اور مستقلوں سے عبارت بنتی ہے۔

.2 عبارت بنانے کے لیے ارکان کو جمع کیا جاتا ہے خود ارکان کی تشکیل اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں ہوتی ہے۔

.3 عبارت جس میں ایک، دو اور تین ارکان ہوتے ہیں بالترتیب یک رکنی، دو رکنی اور سہ رکنی کہلاتی ہے۔ عام طور پر ایک یا اس سے زیادہ ارکان والی عبارت جس میں غیر صفر صحیح اعداد ضریب ہوں (اور متغیر کی قوت غیر منفی ہو) کثیر رکنی کہلاتی ہے۔

.4 یکساں متغیروں سے یکساں ارکان بنتے ہیں اور ان متغیروں کی قوت بھی یکساں ہوتی ہے۔ یکساں ارکان کے ضریب مساوی ہوں یہ ضروری نہیں ہے۔

.5 کثیر رکنی کو جمع کرنے (یا گھٹانے) کے لیے سب سے پہلے یکساں ارکان تلاش کیجیے اور انھیں جمع (یا گھٹا) کیجیے۔ اس کے بعد غیر یکساں ارکان کا استعمال کیجیے۔

.6 بہت سی حالتوں میں ہمیں الجبری عبارتوں کو ضرب کرنے کی ضرورت پڑتی ہے۔ مثال کے طور پر مستطیل کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے، جس کے اضلاع الجبری عبارتوں کی شکل میں دیے گئے ہوں۔

.7 یک رکنی کو یک رکنی سے ضرب کرنے پر ہمیشہ ایک یک رکنی ہی حاصل ہوتی ہے۔

.8 ایک کثیر رکنی کو ایک یک رکنی سے ضرب کرنے کے لیے ہم کثیر رکنی کے ہر رکن کو یک رکنی سے ضرب کرتے ہیں۔

.9 کثیر رکنی کو دو رکنی (یا سہ رکنی) سے ضرب کرنے کے لیے، ہم رکن کو رکن سے ضرب کرتے ہیں، یعنی کثیر رکنی کا ہر رکن دو رکنی (یا سہ رکنی) کے ہر رکن سے ضرب کیا جاتا ہے۔ غور کیجیے کہ اس طرح سے ضرب میں حاصل ضرب کے یکساں ارکان حاصل ہو سکتے ہیں اور انھیں ایک جگہ کرنا پڑتا ہے۔

.10 **تماثل** ایک ایسی برابری ہے جو متغیر کی سبھی قدروں کے لیے درست ہوتی ہے جب کہ مساوات متغیر کی کچھ مخصوص قدروں کے لیے درست ہوتی ہے۔ مساوات تماثل نہیں ہے۔

.11 مندرجہ ذیل معیاری تماثلات ہیں:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (II)

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (III)

.12 دوسرا اہم تماثل ہے $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ (IV)

.13 مذکورہ بالا چار تماثلات الجبری عبارتوں کا حاصل ضرب معلوم کرنے اور مربع معلوم کرنے میں مددگار رہتی ہیں۔ یہ تماثلات ہمیں اعداد کا حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے ایک آسان متبادل طریقے سے روشناس کراتی ہیں۔

باب

10

4817CH10

ٹھوس اشکال کا اظہار

10.1 تعارف

ساتویں جماعت میں آپ مستوی شکلوں اور ٹھوس شکلوں کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ مستوی شکلوں کی لمبائی اور چوڑائی جیسی دو پیمائشیں ہوتی ہیں اس لیے انھیں دوابعادی شکلیں کہتے ہیں، جب کہ ٹھوس شکلوں کی لمبائی، چوڑائی، اونچائی یا گہرائی جیسی تین پیمائشیں ہوتی ہیں۔ اس لیے ان شکلوں کو سہ ابعادی شکلیں کہتے ہیں۔ ساتھ ہی ٹھوس شے کچھ جگہ گھیرتی ہے۔ دوابعادی اور سہ ابعادی شکلوں کو مختصراً 2-D اور 3-D شکلیں بھی کہا جاسکتا ہے۔ آپ کو یاد ہوگا کہ مثلث، مستطیل، دائرہ وغیرہ؛ 2-D شکلیں ہیں، جب کہ مکعب، اسطوانہ، مخروط، کرّہ وغیرہ تین ابعادی شکلیں ہیں۔

اسے کیجیے

مندرجہ ذیل کا میلان کیجیے: (آپ کے لیے پہلا میلان کیا ہوا ہے)

شکل	شکل کی قسم	شکل کا نام
	سہ ابعادی	کرّہ (Sphere)
	دوابعادی	اسطوانہ (Cylinder)
	سہ ابعادی	مربع (Square)
	دوابعادی	دائرہ (Circle)

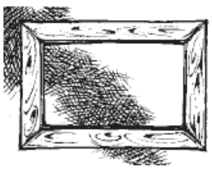
	سہ ابعادی	کعب نما (Cuboid)
	سہ ابعادی	مکعب (Cube)
	دو ابعادی	مخروط (Cone)
	سہ ابعادی	مثلث (Triangle)

غور کیجیے کہ درج بالا سبھی شکلیں واحد ہیں۔ جب کہ ہماری عملی زندگی میں کئی بار ہمارے سامنے مختلف شکلوں کا اختلاط ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر مندرجہ ذیل **اشیا** پر غور کیجیے۔


خیمہ
اسطوانہ پر ایک مخروط


ڈبہ
ایک خول اسطوانہ


آئس کریم
مخروط کے اوپر نصف کرّہ


فوٹو فریم
ایک مستطیل نما راستہ


پیالہ
ایک نصف کرّہ خول


ستون پر گنبد
اسطوانہ پر نصف کرّہ

اسے کیجیے

مندرجہ ذیل تصویروں (اشیا) کا میلان ان کی شکلوں سے کیجیے:

تصویر (شے)

(i) ایک کھیتی کا میدان

شکل

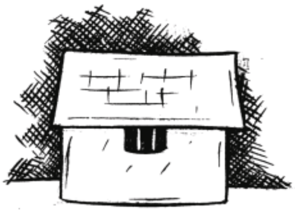
ایک مستطیل نما پارک کے اندر دو مستطیل نما راستے۔

(ii) ایک گہرا گڑھا یا نالا		ایک دائرہ نما میدان کے ہمراہ دائرہ نما راستہ	
(iii) ایک لٹو		ایک مربع کھیت سے متصل مثلثی کھیت	
(iv) ایک دائرہ نما پارک		ایک اسطوانہ میں سے ایک مخروط نکالنا۔	
(v) ایک دوسرے پر سے گزرنے والے راستے		ایک مخروط پر موجود نصف کرّہ۔	

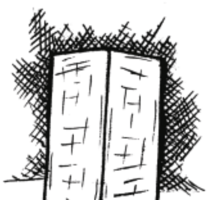
10.2 3-D شکلوں کے منظر

آپ پڑھ چکے ہیں کہ 3-D اشیا مختلف مقاموں سے الگ الگ شکل کی دکھائی دے سکتی ہیں اس لیے ان کو مختلف نظریہ سے بنایا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور، پر ایک دی ہوئی جھونپڑی کے مندرجہ ذیل منظر ہو سکتے ہیں۔

سامنے کا نظارہ



ایک جانب سے نظارہ

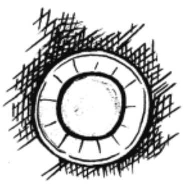


اوپر سے نظارہ

اسی طرح سے ایک گلاس کے مختلف نظارے ہو سکتے ہیں۔

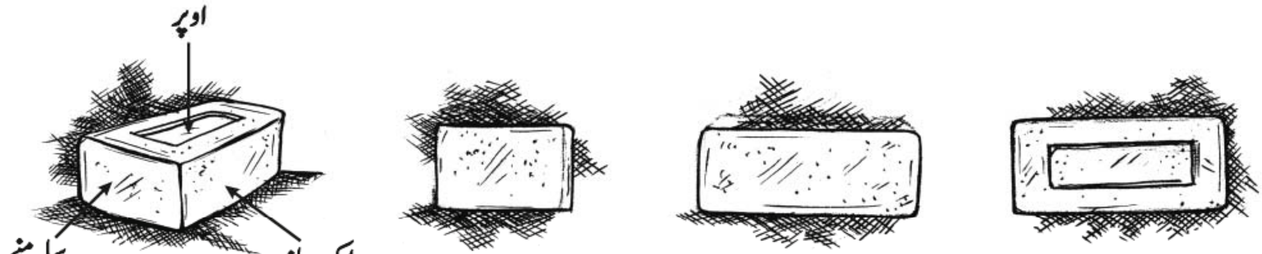
گلاس

ایک جانب سے نظارہ



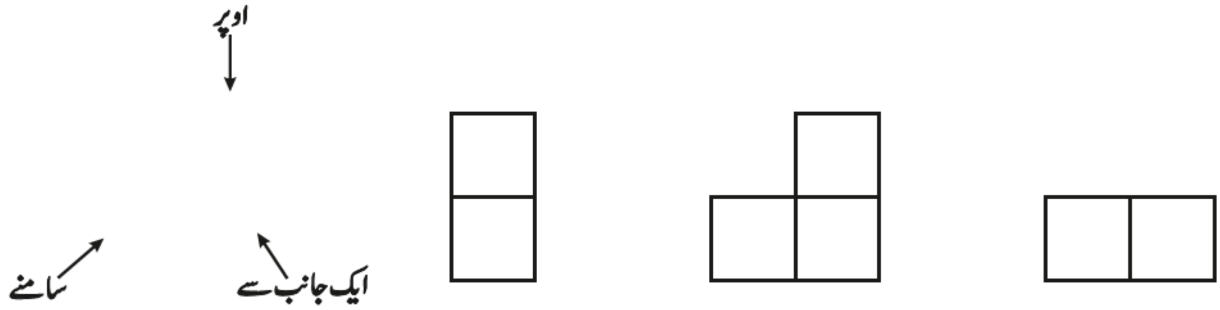
اوپر سے نظارہ

ایک گلاس کا اوپر سے نظارہ ہم مرکزی (Concentric) دائروں کا جوڑا کیوں لگتا ہے؟ اگر اسے مختلف سمت سے دیکھا جائے تو کیا ایک جانب سے نظارہ علیحدہ دکھائی دے گا؟ اس کے بارے میں سوچیے! گلاس کا سامنے کا نظارہ (Front View)، پیچھے کا نظارہ (Back View) بائیں جانب سے دکھائی دینے والا نظارہ (Left View) دائیں جانب سے دکھائی دینے والا نظارہ (Right View) یکساں دکھائی دیتا ہے۔ اسی طرح ہر ایک چیز کا بازو پر سے نظارہ (Side View) اور سامنے کا نظارہ (Front View) یکساں ہوگا؟ اب ایک اینٹ کے مختلف نظاروں کو دیکھیے۔

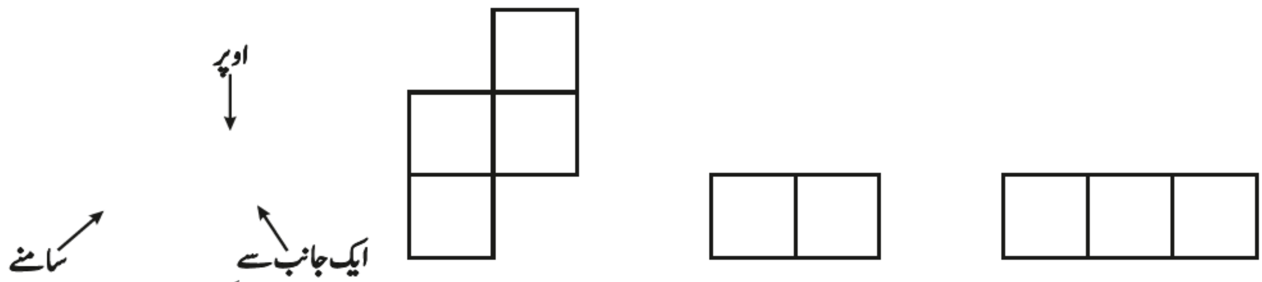


اوپر سے نظارہ　　ایک طرف سے نظارہ　　سامنے کا نظارہ　　اینٹ

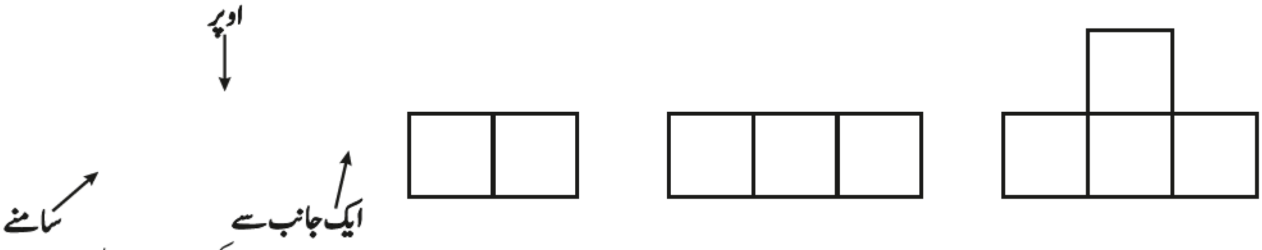
ہم مکعبوں کو جوڑ کر بنائی گئی شکلوں کے بھی مختلف نظارے دیکھ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر



اوپر سے نظارہ　　سامنے کا نظارہ　　ایک طرف سے نظارہ　　تین مکعبوں سے بنا ٹھوس



ایک طرف سے نظارہ　　سامنے کا نظارہ　　اوپر سے نظارہ　　چار مکعبوں سے بنا ٹھوس



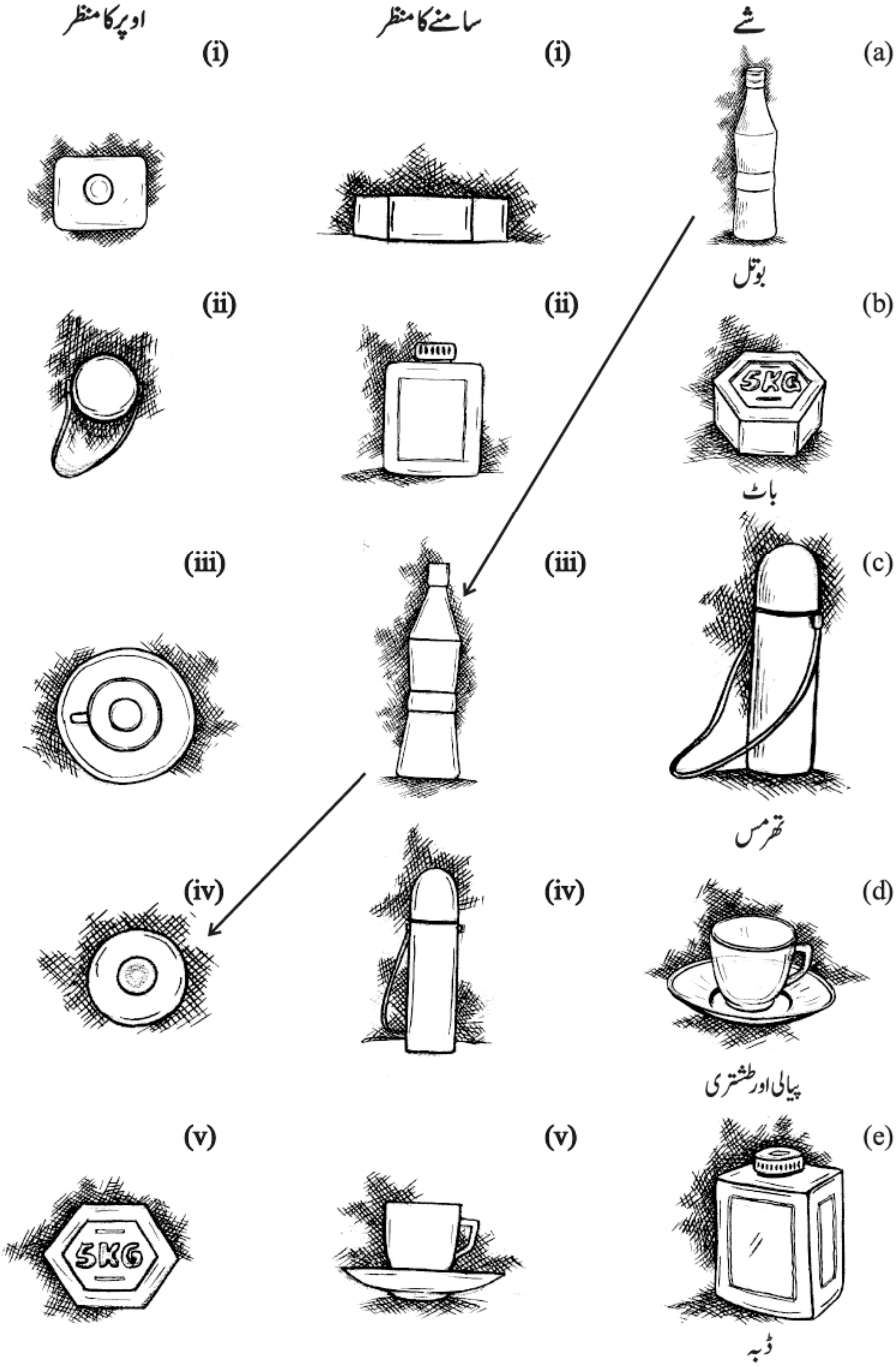
اوپر سے نظارہ　　سامنے کا نظارہ　　ایک طرف سے نظارہ　　چار مکعبوں سے بنا ٹھوس

اسے کیجیے

اپنے اردگرد کی مختلف چیزوں کا مختلف مقامات سے مشاہدہ کیجیے اور مختلف نظاروں پر اپنے دوستوں سے بات چیت کیجیے۔

مشق 10.1

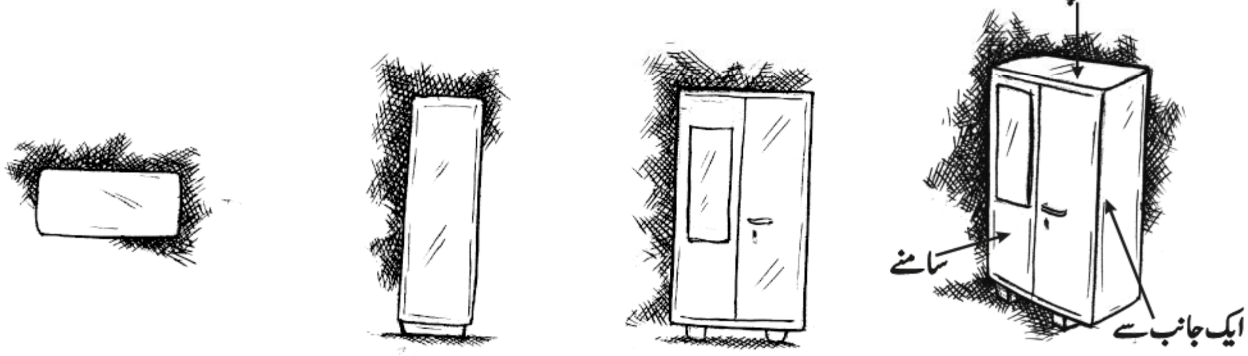
1. دیے گئے ہر ایک ٹھوس کے لیے دو منظر دیے گئے ہیں۔ ہر ایک ٹھوس کے لیے متعلقہ اوپر کے منظر اور سامنے کے منظر کا میلان کیجیے۔ ان میں سے پہلا حل آپ کے لیے کیا گیا ہے۔



2. دیے ہوئے ہر ایک ٹھوس کے لیے تین منظر دیے گئے ہیں۔ ان کے نظیری، اوپر کا منظر، سامنے کا منظر اور ایک طرف کے منظر کی پہچان کیجیے۔

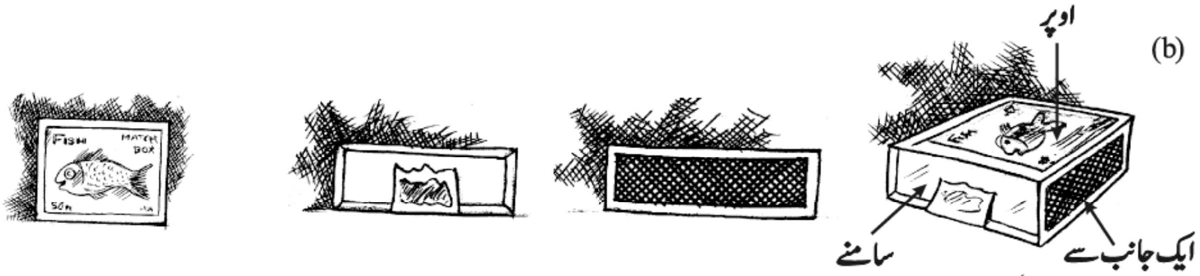
(iii)	(ii)	(i)	شے	

(a)



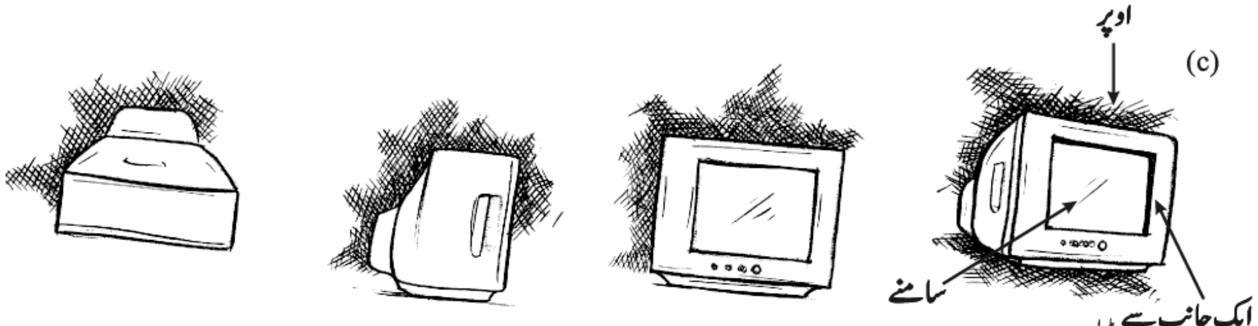
الماری

(b)



ماچس کی ڈبیہ

(c)



ٹیلی ویژن

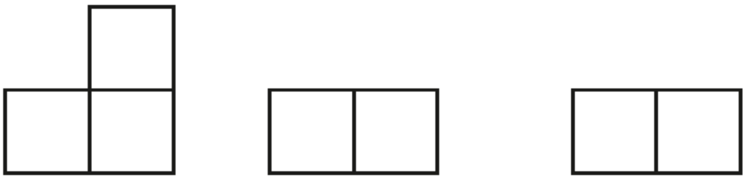
(d)

کار

3. دیے ہوئے ہر ایک ٹھوس میں اوپر کا منظر، سامنے کا منظر اور ایک جانب کے منظر کی پہچان کیجیے۔

(a) شے اوپر

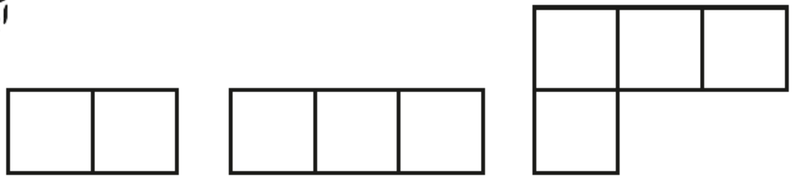
ایک جانب سے



(i) (ii) (iii)

(b) اوپر سامنے

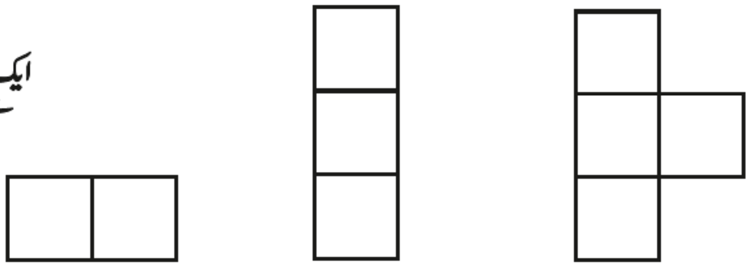
ایک جانب سے



(i) (ii) (iii)

(c) سامنے اوپر

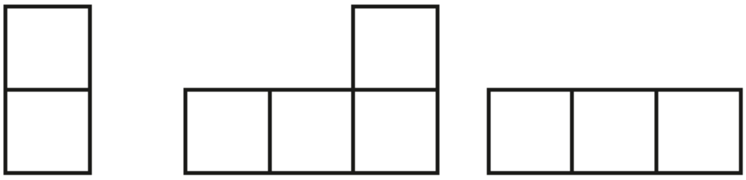
ایک جانب سے



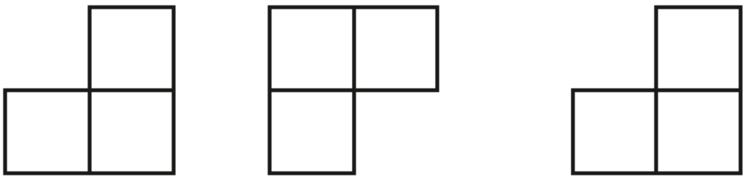
سامنے

(d) اوپر (i) (ii) (iii)

ایک جانب سے



(e) سامنے اوپر (i) (ii) (iii)

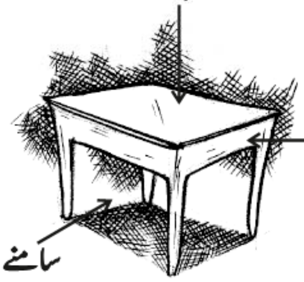


سامنے ایک جانب سے (i) (ii) (iii)

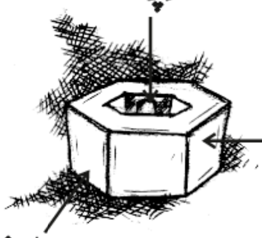
4. دی ہوئی اشیا کے سامنے کا منظر، ایک جانب کا منظر اور اوپر کا منظر کھینچیے۔

(a) فوجی تمبو

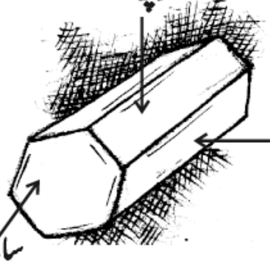
(b) میز



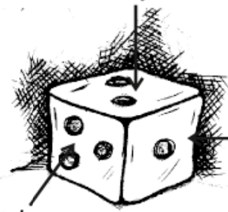
(c) نٹ



(d) مسدسی بلاک



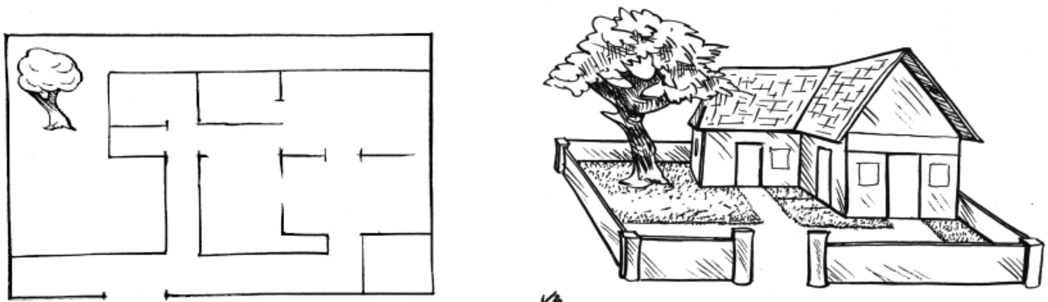
(e) پانسہ



(f) ٹھوس

10.3 ہمارے اطراف کی نقشہ سازی

آپ ابتدائی جماعتوں سے ہی نقشوں (Maps) کی مدد سے سیکھتے آئے ہیں۔ جغرافیہ میں آپ سے نقشہ پر ایک مخصوص صوبہ، ایک خاص ندی، پہاڑ وغیرہ کے مقام کو تلاش کرنے کے لیے کہا گیا تھا۔ تاریخ میں، آپ سے بہت پہلے ہوئے وقوع کے مقام کو بتانے کو یقیناً کہا گیا ہوگا۔ آپ نے ندیوں کے راستوں، سڑکوں، ریل کی پٹریوں، کاروباری جگہوں اور بہت سی دوسری چیزوں کی تصویر بنائی ہوگی۔

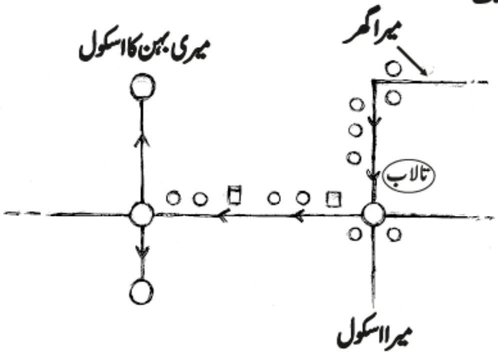


شکل 10.1

ہم نقشوں کو کس طرح پڑھتے ہیں؟ ایک نقشہ پڑھتے وقت ہم کیا نتیجہ نکال سکتے ہیں اور اس سے کیا سمجھ سکتے ہیں؟ ایک نقشہ میں کون سی اطلاعات ہوتی ہیں اور کون سی اطلاعات نہیں ہوتی ہیں؟ کیا یہ ایک تصویر سے کسی معنی میں مختلف ہے؟ اس حصے میں ہم ان سوالوں میں سے کچھ کے جوابات معلوم کرنے کی کوشش کریں گے۔ کسی گھر کے نقشے کو دیکھیے جس کی شکل تصویر کے ساتھ ہی دی گئی ہے (شکل 10.1)۔

مندرجہ بالا مثال سے ہم کیا نتیجہ نکال سکتے ہیں؟ جب ہم کوئی تصویر بناتے ہیں تو ہم اس کی صاف طور پر دکھائی دینے والی معلومات کی سچائی کو ظاہر کرنے کی کوشش کرتے ہیں، جب کہ ایک نقشہ کسی ایک شے کا دوسری مختلف اشیا کے تعلق میں صرف مقام بتاتا ہے۔ دوسری بات یہ ہے کہ مختلف لوگ تصویروں کی ایک دوسرے سے بالکل مختلف تشریح کرتے ہیں اور وہ اس بات پر منحصر کرتا ہے کہ وہ گھر کو کس مقام سے دیکھ رہے ہیں۔ لیکن یہ ایک نقشہ کے معاملہ میں صحیح نہیں ہے۔ دیکھنے والے کا مقام کہیں بھی ہو مگر گھر کا نقشہ وہی رہتا ہے۔ **دوسرے لفظوں میں ایک تصویر کھینچنے کے لیے نظریہ کی کافی اہمیت ہے لیکن یہ ایک نقشہ کے لیے موزوں نہیں ہے۔**

اب نقشہ کو دیکھیے (شکل 10.2)، جو کہ سات سال کے بچے راگھو نے اپنے گھر سے اسکول تک کے راستے کے لیے کھینچا ہے:



شکل 10.2

اس نقشہ کی مدد سے کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ—

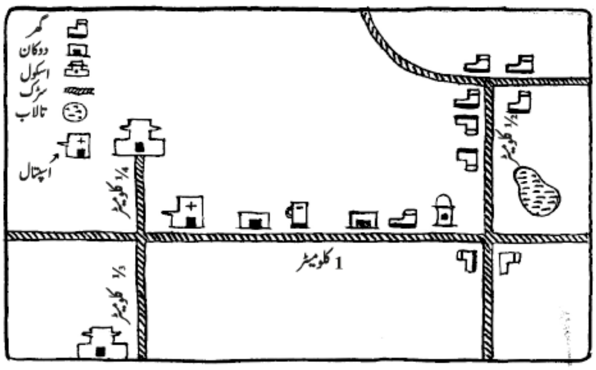
(i) راگھو کا اسکول اس کے گھر سے کتنی دوری پر ہے؟

(ii) نقشہ میں ہر ایک دائرہ کیا ایک گول چکر کو ظاہر کرے گا؟

(iii) کس کا اسکول گھر سے زیادہ قریب ہے، راگھو کا یا اس کی بہن کا؟

دیے ہوئے نقشہ کو دیکھ کر درج بالا سوالوں کے جواب دینا بہت مشکل ہے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کیوں؟

اس کی وجہ یہ ہے کہ ہم نہیں جانتے کہ اس میں فاصلہ صحیح طریقہ سے کھینچے گئے ہیں یا کھینچے گئے دائرے گول چکر ہی ہیں یا کسی اور چیز کو ظاہر کرتے ہیں۔



شکل 10.3

اب ایک دوسرے نقشہ کو دیکھیے جو اس کی 10 سالہ بہن مینا نے اپنے گھر سے اپنے اسکول کا راستہ دکھانے کے لیے کھینچا ہے (شکل 10.3)

یہ نقشہ پچھلے نقشوں سے مختلف ہے۔ یہاں مینا نے الگ الگ (Landmark) کے لیے مختلف علامتوں کا استعمال کیا ہے۔ دوسری بات یہ ہے کہ بڑی دوریوں کے لیے لمبے قطعات خط کھینچے گئے ہیں اور چھوٹی دوریوں کے لیے چھوٹے قطعات خط کھینچے گئے ہیں۔ یعنی اس نے اس نقشہ کو ایک پیمانہ کے مطابق کھینچا ہے۔

اب آپ مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دے سکتے ہیں:

- راگھو کا اسکول اس کے گھر سے کتنے فاصلہ پر ہے؟
- کس کا اسکول اس کے گھر سے زیادہ قریب ہے، راگھو کا یا مینا کا؟
- راستے میں کون کون سے مخصوص نشانات (Landmark) ہیں؟

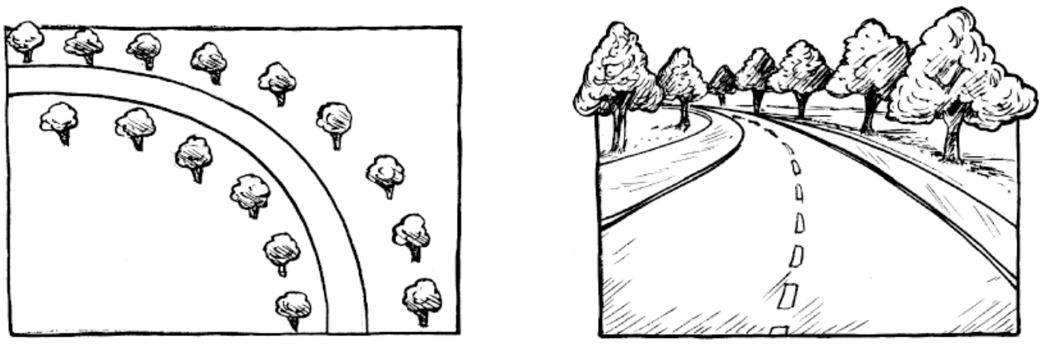
اس طرح ہم یہ اندازہ کرتے ہیں کہ کچھ اشاروں (علامتوں) کا استعمال کرنے اور دوریوں کا تجزیہ کرنے سے ہمیں نقشہ کو پڑھنے میں مدد ملتی ہے۔ غور کیجیے کہ نقشہ پر دکھائی گئی دوریاں زمین کی اصل دوریوں سے متناسب ہیں۔ یہ ایک مناسب پیمانہ مان کر کیا گیا ہے۔ ایک نقشہ کو کھینچتے (یا پڑھتے) وقت یہ دھیان رکھنا چاہیے کہ اسے کس پیمانہ سے کھینچا گیا ہے۔ (یا وہ کس پیمانہ سے کھینچا گیا ہے) یعنی کتنی اصل دوری کو نقشہ پر 1 ملی میٹر یا 1 سینٹی میٹر دوری سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ اگر کوئی شخص ایک نقشہ کھینچتا ہے تو اسے طے کرنا پڑتا ہے کہ اس نقشہ میں 1 سینٹی میٹر مقام ایک معین دوری جیسے 1 کلومیٹر یا 10 کو ظاہر کرتا ہے۔ یہ پیمانہ ایک نقشہ سے دوسرے نقشہ میں بدل سکتا ہے لیکن ایک ہی نقشہ میں نہیں بدلتا ہے۔ مثال کے طور پر ہندوستان کے نقشہ کو دہلی کے نقشہ کے ساتھ رکھ کر دیکھیے۔

آپ دیکھیں گے کہ جب یکساں سائز کے نقشوں کو مختلف پیمانوں کے مطابق کھینچا جاتا ہے تو دو نقشوں میں دوریاں بدل جاتی ہیں۔ یعنی دہلی کے نقشہ میں 1 سینٹی میٹر کی جگہ ہندوستان کے نقشہ کی دوریوں کے مقابلہ میں چھوٹی دوریوں کو ظاہر کرتی ہے۔

جگہ جتنی بڑی ہوگی اور کھینچے گئے نقشہ کا سائز جتنا چھوٹا ہوگا اتنی ہی زیادہ دوری 1 سینٹی میٹر کے ذریعہ ظاہر ہوگی۔

اس طرح مختصر طور پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ:

1. ایک نقشہ ایک خاص شے / جگہ کی دوسری شے / جگہ کے تعلق سے مقام (Location) دکھاتا ہے۔
2. مختلف اشیا / جگہ کو دکھانے کے لیے علامتوں کا استعمال کیا جاتا ہے۔
3. ایک نقشہ میں کوئی حوالہ یا نظریہ نہیں ہوتا یعنی؛ مشاہد کے قریب والی اشیا اسی سائز میں دکھائی جاتی ہیں جتنی دور والی۔ مثال کے طور پر مندرجہ ذیل مثالوں کو دیکھیے (شکل 10.4)۔

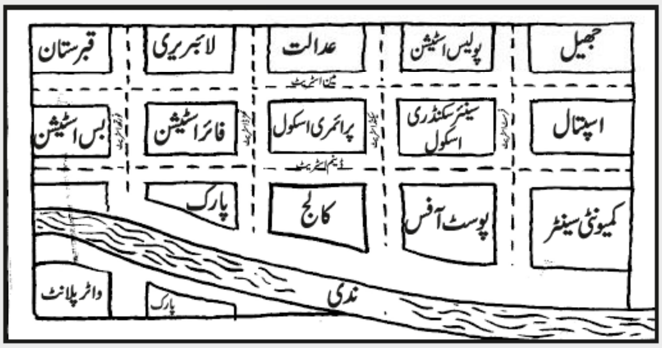


شکل 10.4

4. نقشے میں ایک پیمانہ معین ہوتا ہے۔ جو ایک مخصوص نقشہ کے لیے مخصوص ہوتا ہے۔ یہ اصل دوریوں کو کاغذ پر متناسب طور پر کم کر دیتا ہے۔

اسے کیجیے

1. ایک شہر کے مندرجہ ذیل نقشے کو دیکھیے (شکل 10.5)۔



شکل 10.5

(a) نقشے میں اس طرح رنگ بھریے: نیلا–پانی، لال–فائر اسٹیشن، **نارنگی–لائبریری**، پیلا–اسکول، ہرا–پارک، گلابی کمیونٹی سینٹر، **بیگنی–ہسپتال**، بھورا–قبرستان۔

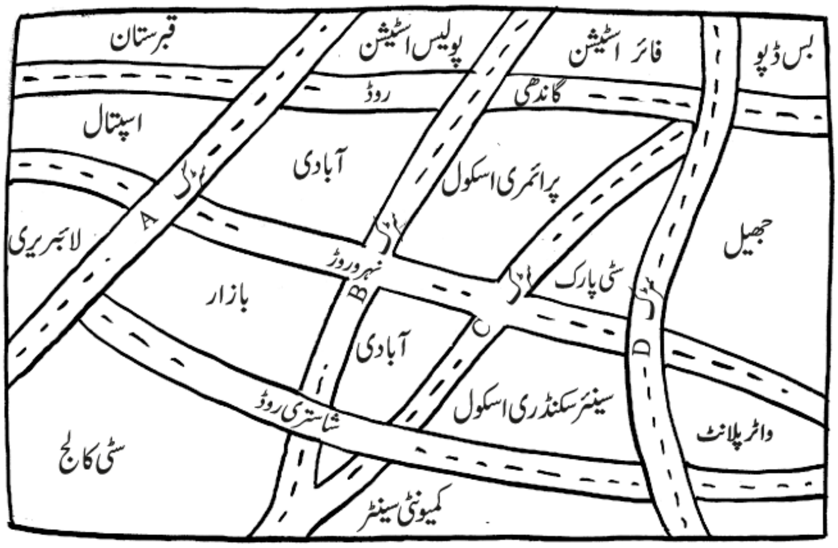
(b) دوسری سڑک اور ایک مخصوص سڑک کے تقاطع پر ایک ہرا 'X' نشان لگائیے۔ جہاں ندی تیسری سڑک سے ملتی ہے وہاں ایک کالا 'Y' اور اصلی سڑک اور پہلی سڑک کے تقاطع پر ایک لال 'Z' نشان لگائیے۔

(c) کالج سے جھیل تک کے لیے ایک چھوٹا گلی کا راستہ گہرے گلابی رنگ میں کھینچیے۔

2. اپنے گھر سے اپنے اسکول تک کے راستہ پر آنے والے مخصوص مقامات کو دکھاتے ہوئے ایک نقشہ کھینچیے۔

مشق 10.2

1۔ ایک شہر کے دیے ہوئے نقشہ کو دیکھیے۔



مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے۔

(a) اس نقشہ میں اس طرح رنگ بھرئے: نیلا—پانی، لال—فائر اسٹیشن، نارنگی—لائبریری، پیلا—اسکول، ہرا—پارک، گلابی—کالج، بیگنی—اسپتال، بھورا—قبرستان—

(b) سڑک C اور نہر اور روڈ کے تقاطع پر ایک ہرا 'X' اور گاندھی روڈ اور سڑک 'A' کے تقاطع پر ایک ہرا 'Y' نشان لگائیے۔

(c) لائبریری سے بس ڈپو تک ایک چھوٹا گلی کا راستہ لال رنگ سے بنائیے۔

(d) شہر کے مشرق سے کون زیادہ دور ہے پارک یا بازار؟

(e) کون زیادہ جنوب میں ہے، پرائمری اسکول یا سینئر سکنڈری اسکول؟

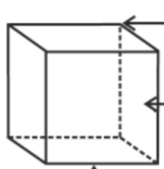
2. مختلف اشیا کے لیے مناسب پیمانہ اور علامتوں کا استعمال کرتے ہوئے اپنی کلاس کے کمرے کا ایک نقشہ بنائیے۔

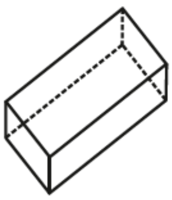
3. مناسب پیمانہ اور علامتوں کا استعمال کرتے ہوئے مختلف جگہوں سے کھیل کا میدان، اصل بلڈنگ، باغیچہ وغیرہ کے لیے اپنے اسکول کے کمپاؤنڈ کا ایک نقشہ بنائیے۔

4. اپنے دوست کو ہدایات دینے کے لیے کہ وہ آپ کے گھر بغیر کسی پریشانی کے کیسے پہنچے، ایک نقشہ بنائیے۔

10.4 رخ، کنارے اور راس

مندرجہ ذیل کثیر سطحی شکلوں کو دیکھیے!

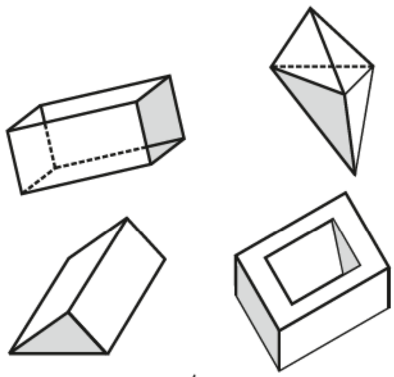




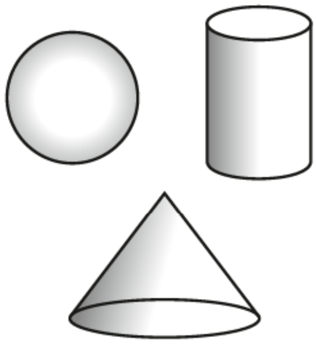
پہیلی

میرا کوئی راس نہیں ہے میرا کوئی چپٹا رخ نہیں ہے۔ میں کون ہوں؟

مذکورہ بالا میں ہر ایک ٹھوس کثیر ضلعی خطّوں سے بنا ہے جو اس کے رُخ (Face) کہلاتے ہیں؛ یوں مندرجہ بالا تمام شکلیں مختلف رخ (Faces) سے بنی ہوئی ہیں۔ یہ رخ جہاں ملتے ہیں اُسے کنار یا دھار (Edge) کہتے ہیں اور یہ رُخ کناروں پر ملتے ہیں جو قطعات خط ہیں؛ اور کنارے راسوں پر ملتے ہیں جو نقطے ہیں۔ ایسے ٹھوسوں (Polyhedrons) کو **کثیر سطحی شکل** کہتے ہیں۔

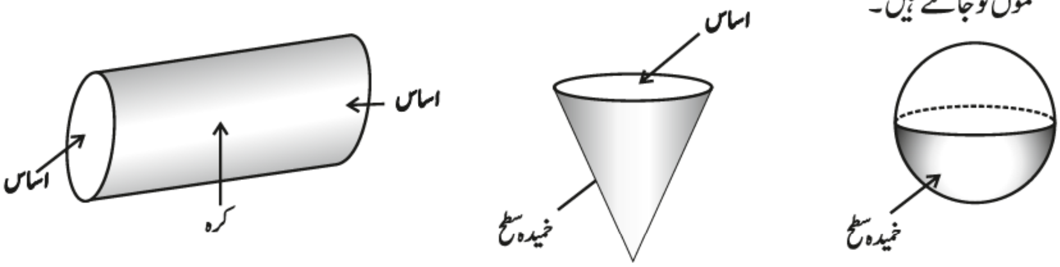


یہ محدب کثیر سطحی شکل ہیں



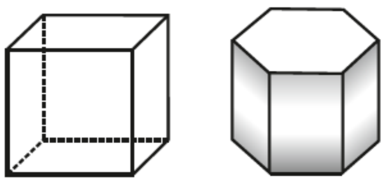
یہ محدب کثیر سطحی شکل نہیں ہیں

کثیر سطحی شکل، غیر کثیر سطحی شکل سے کس طرح مختلف ہیں؟ اشکال کا مطالعہ غور سے کیجیے۔ آپ دوسرے عام ٹھوسوں کی تین مختلف قسموں کو جانتے ہیں۔

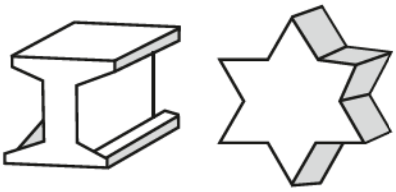


کرہ　　　مخروط　　　اسطوانہ

محدب کثیر سطحی شکلیں (پولی ہیڈرون): محدب کثیر ضلعی شکلوں کے تصور کو دوہرائیے، محدب کثیر سطحی شکلوں کا تصوّر ایسا ہی ہے۔



یہ کثیر سطحی شکل (Polyhedrons) ہیں



یہ کثیر سطحی شکل (Polyhedrons) نہیں ہیں

منظّم کثیر سطحی شکل: ایک کرہ کثیر سطحی شکل منظّم کہلاتا ہے جب اس کے رُخ منظّم کثیر ضلعی کے بنے ہوئے ہوں اور ہر ایک راس پر ملنے والے رخوں کی تعداد یکساں ہے۔

یہ ایک منظّم کثیر سطحی (Polyhedron) ہے۔ اس کے سبھی رُخ متماثل اور منظّم کثیر ضلعی ہیں اس کے راس رُخوں کی یکساں تعداد سے بنتے ہیں۔

یہ ایک منظّم کثیر سطحی نہیں ہے۔ سبھی رخ متماثل نہیں ہیں لیکن اس کے راس رخوں کی یکساں تعداد سے نہیں بنتے۔ A پر 3 رخ ملتے ہیں لیکن B پر 4 رخ ملتے ہیں۔

ہمارے آس پاس کثیر رخی خاندان کے دو اہم ممبر پرزم اور اہرام (Pyramids) ہیں۔

یہ پرزم ہیں

یہ اہرام ہیں

ہم کہتے ہیں کہ ایک **پرزم** کثیر رُخی ہوتا ہے۔ جس کا قاعدہ اور اوپری سرا (Top) متماثل کثیر رخی ہوں اور جس کے دوسرے رُخ، یعنی؛ خمیدہ رُخ (Lateral faces) شکل میں متوازی الاضلاع ہیں۔

دوسری طرف ایک **پرامڈ** (Pyramid) وہ کثیر رخی ہوتا ہے جس کا قاعدہ ایک کثیر ضلعی ہوتا ہے (کتنے بھی اضلاع والا) اور جس کے خمیدہ رخ ایک مشترک راس والے مثلث ہوتے ہیں۔ (اگر آپ ایک کثیر ضلعی کے سبھی کونوں یا راسوں کو ایک ایسے نقطہ سے ملا دیں جو اس کی مستوی میں نہ ہو تو آپ کو ایک پرامڈ (Pyramid) کا ماڈل حاصل ہوتا ہے۔

ایک پرزم یا پرامڈ کو اس کے قاعدہ کے مطابق نام دیا جاتا ہے۔ اس طرح ایک مسدسی پرزم (Hexagonal) کا قاعدہ ایک مسدس ہوتا ہے؛ اور ایک مثلثی پرامڈ کا قاعدہ مثلث ہوتا ہے۔ پھر ایک مستطیل نما پرزم کیا ہے؟ ایک مربع پرامڈ کیا ہے؟ صاف ظاہر ہے کہ ان کے قاعدہ بالترتیب مستطیل اور مربع ہیں۔

اسے کیجیے

مندرجہ ذیل کثیر سطحوں (رخوں) کے لیے، کناروں اور راسوں کی تعداد کو جدول کی شکل میں لکھیے: (یہاں 'V'، راسوں کی تعداد، 'F' رُخوں کی تعداد اور 'E' کناروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے)۔

ٹھوس	F	V	E	F + V	E + 2
کعب نما					
مثلثی پرامڈ					
مثلثی پرزم					
پرامڈ جس کا قاعدہ مربع ہے					
پرزم جس کا قاعدہ مربع ہے					

آپ آخری دو کالموں سے کیا نتیجہ نکالتے ہیں؟ ہر حالت میں آپ کیا پاتے ہیں $F + V = E + 2$ یعنی $F + V - E = 2$؟

اس رشتہ کو اویلر کا فارمولہ **(Euler's formula)** کہتے ہیں۔ حقیقت میں یہ فارمولہ کسی بھی کثیر سطحی کے لیے صحیح ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

اگر ہم کسی ٹھوس کے کچھ حصوں کو کاٹ کر نکال دیں تو F، V اور E پر کیا اثر پڑے گا؟ (آپ شروعات میں لوچ دار مادے کا بنا (Plasticine) مکعب لے سکتے ہیں اس کے ایک کونے کو کاٹیے اور چھان بین کیجیے۔)

مشق 10.3

.1 کیا کوئی کثیر سطحی اپنے رُخوں کے لیے مندرجہ ذیل رُخ رکھ سکتی ہے

(i) 3 مثلث؟ (ii) 4 مثلث؟

(iii) ایک مربع اور چار مثلث؟

.2 کیا ایسا کثیر سطحی ممکن ہے جس کے رُخوں کی تعداد کوئی بھی عدد ہو؟ (اشارہ: ایک اہرام (Pyramid) کے بارے میں سوچیے۔)

.3 مندرجہ ذیل میں کون سے پرزم ہیں؟

(i) کیل

(ii) بغیر چھلی ہوئی پنسل

(iii) پیپر ویٹ

(iv) ڈبہ

.4 (i) پرزم اور اسطوانہ کس طرح سے ایک جیسے ہیں؟

(ii) اہرام اور مخروط کس طرح سے ایک جیسے ہیں؟

.5 کیا مربع پرزم اور مکعب ایک جیسے ہوتے ہیں؟ تشریح کیجیے۔

.6 مندرجہ ذیل ٹھوسوں کے لیے ایولر فارمولہ کی تصدیق کیجیے۔

(i) (ii)

.7 ایولر (Euler's) فارمولہ کا استعمال کرتے ہوئے نامعلوم کو معلوم کیجیے۔

رُخ	؟	5	20
راس	6	؟	12
کنارے	12	9	؟

.8 کیا کسی کثیر سطحی (Polyhedron) کے 10 رخ، 20 کنارے اور 15 راس ہو سکتے ہیں؟

ہم نے کیا سیکھا؟

1. 2-Dاور3-D اشیا کو پہچاننا۔
2. مخلوط اشیا میں مختلف شکلوں کو پہچاننا۔
3. 3-Dاشیا کے مختلف مقاموں سے مختلف مناظر ہوتے ہیں۔
4. نقشہ تصویر سے مختلف ہوتا ہے۔
5. ایک نقشہ ایک خاص شے / جگہ کو دوسری شے / جگہ کے تعلق میں صحیح صحیح مقام دکھاتا ہے۔
6. مختلف اشیا/ جگہوں کو دکھانے کے لیے علامتوں استعمال کیا جاتا ہے۔
7. ایک نقشہ میں کوئی حوالہ / نظریہ نہیں ہوتا۔
8. نقشہ میں ایک پیمانہ معین ہوتا ہے جو ایک مخصوص نقشہ کے لیے ایک ہی رہتا ہے۔
9. کسی بھی کثیر رُخی کے لیے فارمولہ،

$F + V - E = 2$ ہے

جہاں 'F' رُخوں کی تعداد 'V' راسوں کی تعداد اور 'E' کناروں کی تعداد کو دکھاتا ہے۔ یہ رشتہ **ایولر کا فارمولہ** کہلاتا ہے۔

باب

11

مساحت

11.1 تعارف

ہم معلوم کر چکے ہیں کہ کسی بھی بند مستوی شکل کی حدود کے چاروں طرف کی دوری اس کا احاطہ کہلاتا ہے اور اس کے ذریعے گھرے ہوئے حصّے کو اس کا رقبہ کہتے ہیں۔ ہم مثلث، مستطیل، دائرہ وغیرہ مختلف مستوی شکلوں کا احاطہ اور رقبہ معلوم کر چکے ہیں۔ ہم مستطیل نما شکلوں کے کناروں یا پگڈنڈیوں (Pathways) کا رقبہ معلوم کرنا بھی سیکھ چکے ہیں۔

اس باب میں ہم چار ضلعی جیسی دوسری بند شکلوں کے رقبہ اور احاطوں سے متعلق مسئلوں کو حل کرنے کی کوشش کریں گے۔

ہم مکعب، کعب نما اور اسطوانہ جیسے ٹھوس کے سطحی رقبہ اور حجم کے بارے میں بھی معلوم کرنے کی کوشش کریں گے۔

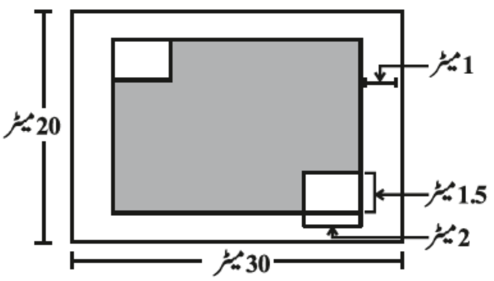
11.2 آیئے اعادہ کریں

ہم اپنی سابقہ معلومات کو دوہرانے کے لیے ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

یہ ایک مستطیل نما باغیچے کی شکل ہے (شکل 11.1) جس کی لمبائی 30 میٹر اور چوڑائی 20 میٹر ہے۔

(i) اس باغیچے کو چاروں طرف سے گھیرنے والی باڑ کی لمبائی کیا ہے؟ باڑ کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے ہمیں اس باغیچے کا احاطہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے جو 100 میٹر ہے۔ (جانچ کیجیے)

(ii) باغیچے نے کتنی زمین گھیری ہوئی ہے؟ اس باغیچے کے ذریعہ گھیری گئی زمین معلوم کرنے کے لیے ہمیں باغیچے کا رقبہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے جو 600 مربع میٹر ہے (مربع میٹر) (کیسے؟)



شکل 11.1

(iii) باغیچے کے احاطہ کے ساتھ ساتھ اندر کی طرف ایک میٹر چوڑا راستہ بھی ہے۔ جس پر فرش بنوانا ہے۔ اگر 4 مربع میٹر رقبہ پر فرش بنوانے کے لیے ایک بوری سیمنٹ کی ضرورت ہوتی ہے تو اس پورے راستے پر فرش بنوانے کے لیے سیمنٹ کی کل کتنی بوریوں کی ضرورت ہوگی؟

ہم کہہ سکتے ہیں کہ استعمال کی گئی سیمنٹ کی بوریوں کی تعداد = $\dfrac{\text{راستے کا رقبہ}}{\text{ایک بوری سیمنٹ سے بنائے گئے فرش کا رقبہ}}$

سیمنٹ سے بننے والے راستے کا رقبہ = باغیچے کا رقبہ — باغیچے کا وہ رقبہ جس پر سیمنٹ نہیں ہوا ہے۔

راستے کی چوڑائی 1 میٹر ہے، اس لیے وہ مستطیل نما رقبہ جس پر فرش نہیں کرایا گیا ہے $(30-2)\times(20-2)$ مربع میٹر۔

وہ 28×18 مربع میٹر ہے۔

اس لیے، استعمال کی گئی سیمنٹ کی بوریوں کی تعداد= ----------------

(iv) جیسا خاکے (شکل 11.1) میں دکھایا گیا ہے کہ اس باغیچے میں پھولوں کی دو مستطیل نما کیاریاں ہیں۔ ان میں سے ہر ایک کی پیمائش 2 میٹر×1.5 میٹر ہے اور باقی باغیچے کے اوپر گھاس ہے۔ گھاس سے گھرا ہوا رقبہ معلوم کیجیے۔

مستطیل نما کیاریوں کا رقبہ = ----------------

راستہ پر فرش کرانے کے بعد باغیچے کا بچا ہوا رقبہ= ----------------

اگر ہمیں ضروری پیمائش دی ہوئی ہے تو ہم مستطیلوں کے علاوہ کچھ اور جیومیٹریائی شکلوں یا سائز کا بھی رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔

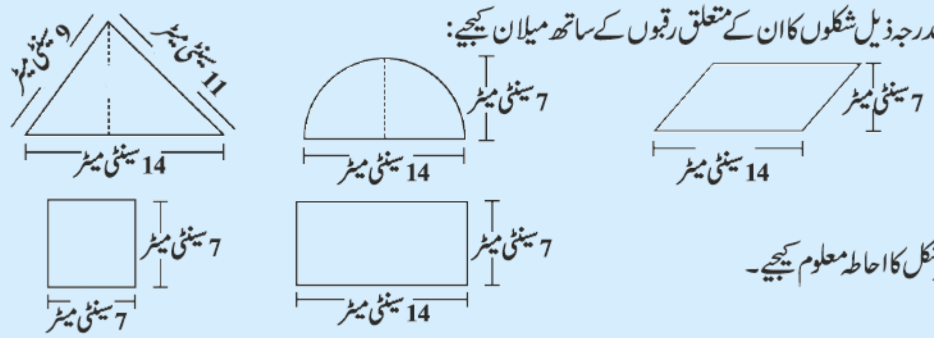
مندرجہ ذیل کو دوہرانے کی کوشش کیجیے اور میلان کیجیے:

ڈائیگرام	شکل	رقبہ
	مستطیل	$a\times a$
	مربع	$b\times h$
	مثلث	πb^2
	متوازی الاضلاع	$\frac{1}{2}b\times h$
	دائرہ	$a\times b$

کیا آپ درج بالا اشکال کے احاطے کے فارمولے لکھ سکتے ہیں؟

کوشش کیجیے

(a) مندرجہ ذیل شکلوں کا ان کے متعلق رقبوں کے ساتھ میلان کیجیے:



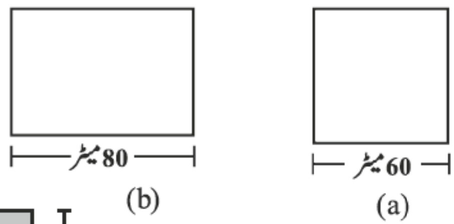
49 مربع سینٹی میٹر

77 مربع سینٹی میٹر

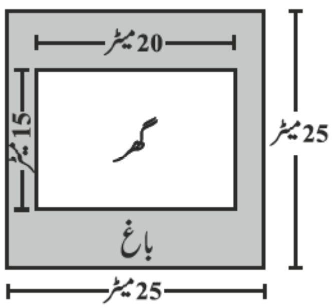
98 مربع سینٹی میٹر

(b) ہر شکل کا احاطہ معلوم کیجیے۔

مشق 11.1

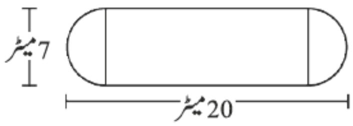


1. ایک مربع اور مستطیل نما میدان جن کی پیمائش شکل میں دی گئی ہے، کا احاطہ یکساں ہے۔ کس میدان کا رقبہ زیادہ ہے؟



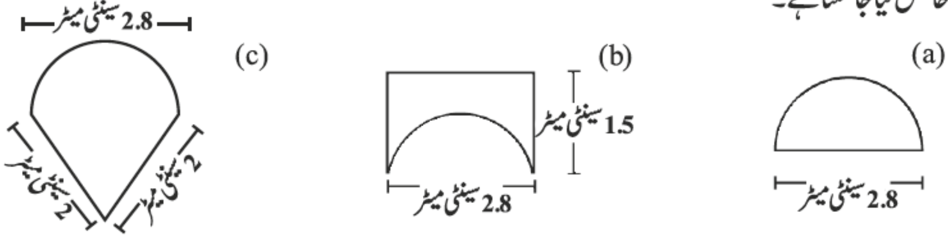
2. محترمہ کوشک کے پاس شکل میں دکھائی گئی پیمائش کا ایک مربع نما پلاٹ ہے۔ وہ پلاٹ کے درمیان میں گھر بنانا چاہتی ہیں۔ گھر کے چاروں طرف ایک باغ بنایا گیا ہے۔ 55 روپیے فی مربع میٹر کی شرح سے گھر کے چاروں طرف اس باغ کو بہتر بنانے کا خرچ معلوم کیجیے۔

3. جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے، ایک باغیچے کی شکل بیچ میں سے مستطیل نما اور کناروں پر نصف دائری ہے اس باغیچے کا رقبہ اور احاطہ معلوم کیجیے [باغیچہ کی لمبائی 20 − (3.5+3.5) میٹر ہے]



4. فرش کی ایک ٹائل متوازی الاضلاع شکل کی ہے جس کا اساس 24 سینٹی میٹر اور اس کی اونچائی 10 سینٹی میٹر ہے۔ 1080 مربع میٹر رقبہ کے ایک فرش کو پوری طرح ڈھکنے کے لیے ایسے کتنے ٹائلوں کی ضرورت ہے؟
(فرش کے کونوں کو بھرنے کے لیے ضرورت کے مطابق آپ ٹائلوں کو کسی بھی شکل میں توڑ سکتے ہیں)۔

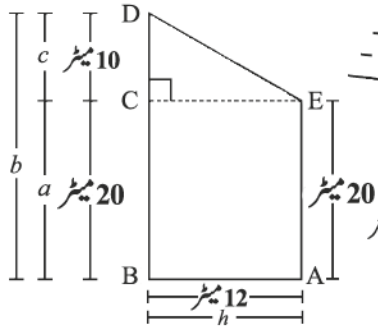
5. ایک چیونٹی فرش پر بکھری ہوئی مختلف شکلوں کی کھانے کی چیزوں کے ٹکڑوں کے چاروں طرف گھوم رہی ہے۔ چیونٹی کو کھانے کی چیزوں کے کس ٹکڑے کے لیے لمبا چکر لگانا پڑے گا؟ یاد کیجیے، دائرہ کا محیط $c = 2\pi r$ ہے جہاں r نصف قطر ہے، کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔



11.3 منحرف کا رقبہ

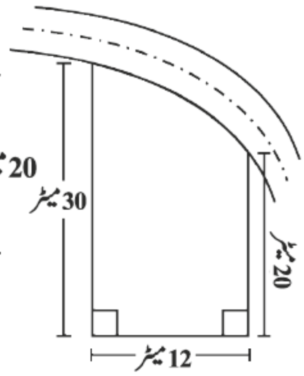
ناظمہ نے سڑک کے نزدیک ایک پلاٹ خریدا (شکل 11.2)۔ اس پلاٹ کی شکل پڑوس کے دوسرے مستطیل نما پلاٹوں کی طرح نہیں ہے، بلکہ پلاٹ میں مقابل اضلاع کا صرف ایک جوڑا متوازی ہے۔ اس لیے یہ تقریباً منحرف کی شکل کا ہے۔ کیا آپ اس کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں؟

آیئے جیسا شکل 11.3 سے ظاہر ہوتا ہے ہم اس پلاٹ کے راسوں کو نام دیتے ہیں۔



شکل 11.3

($b = c + a = 30$ میٹر)



شکل 11.2

$EC \parallel AB$ کھینچ کر ہم اسے دو حصوں میں بانٹ سکتے ہیں۔ اس میں ایک شکل مستطیل نما ہے اور دوسری مثلث نما، (جو C پر قائم زاویہ بناتا ہے)، جیسا کہ شکل 11.3 سے ظاہر ہوتا ہے۔

ΔECD کا رقبہ $= \frac{1}{2}\, h \times c = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$ مربع میٹر

مستطیل ABCE کا رقبہ $= h \times a = 12 \times 20 = 240$ مربع میٹر

منحرف ABDE کا رقبہ = ΔECD کا رقبہ + مستطیل ABCE کا رقبہ $= 240 + 60 = 300$ مربع میٹر

ہم دونوں رقبوں کو ملا کر منحرف کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں، جیسے

منحرف ABCD کا رقبہ $= \left(\frac{1}{2} \times h \times c\right) + (h \times a) = h\left(\frac{c}{2} + a\right)$

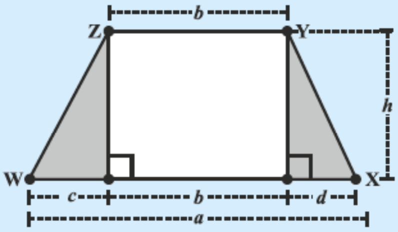
$$= h\left(\frac{c + 2a}{2}\right) = h\left(\frac{c + a + a}{2}\right)$$

$= h\frac{(b + a)}{2} = \frac{\text{(متوازی الاضلاع کا احاطہ) اونچائی}}{2}$

اس عبارت میں b, h اور a کی قیمت رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $h\,\frac{(b+a)}{2} = 300$ مربع میٹر

کوشش کیجیے

1. ناظمہ کی بہن کے پلاٹ کی شکل بھی منحرف ہے۔ اس کو تین حصوں میں تقسیم کیجیے جیسا کہ (شکل 11.4) سے ظاہر ہوتا ہے۔ دکھایئے کہ منحرف WXYZ کا رقبہ $= h\,\dfrac{(a+b)}{2}$

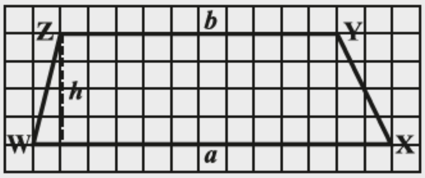


شکل 11.4

2. اگر $h = 10$ سینٹی میٹر، $c = 6$ سینٹی میٹر، $b = 12$ سینٹی میٹر اور $d = 4$ سینٹی میٹر ہے تو اس کے ہر حصے کی قدریں الگ الگ معلوم کیجیے، اور انھیں جمع کر کے WXYZ کا رقبہ معلوم کیجیے۔ عبارت $\frac{h(a+b)}{2}$ میں h، a اور b کی قدر رکھ کر اس کی تصدیق کیجیے۔

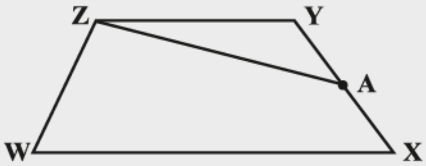
اسے کیجیے

1. ایک گراف پیپر پر کوئی منحرف WXYZ بنائیے جیسا کہ (شکل 11.5 میں دکھایا گیا ہے اور اسے کاٹ کر نکال لیجیے۔



شکل 11.5

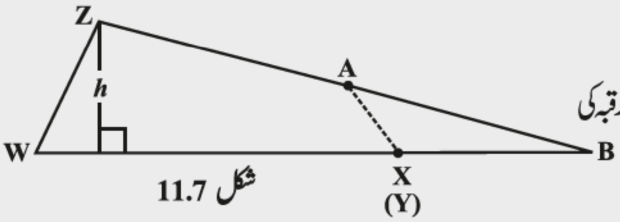
2. اس کے ایک ضلع کو موڑ کر XY کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے اور اس کو A نام دیجیے (شکل 11.6)۔



شکل 11.6

3. ZA کے ہمراہ کاٹتے ہوئے منحرف WXYZ کو دو حصوں میں بانٹیے۔ شکل 11.7 میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق ΔZYA کو وہاں رکھیے جہاں AY کو AX پر رکھا گیا ہے۔

بڑے مثلث کے قاعدہ کی لمبائی کیا ہے؟ اس مثلث کے رقبہ کی عبارت لکھیے (شکل 11.7)۔



شکل 11.7

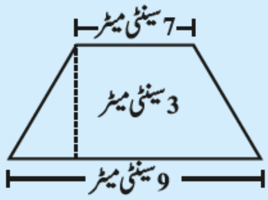
4. اس مثلث کا رقبہ اور منحرف WXYZ کا رقبہ برابر ہے (کیسے؟)۔ مثلث کے رقبہ کی عبارت کا استعمال کرتے ہوئے منحرف کے رقبہ کی عبارت حاصل کیجیے۔

منحرف کا رقبہ حاصل کرنے کے لیے ہمیں متوازی ضلعوں کی لمبائی اور دو متوازی ضلعوں کے درمیان عمودی فاصلے کی ضرورت ہے۔ متوازی ضلعوں کی لمبائیوں کا حاصل جمع اور ان کے درمیان عمودی فاصلے کے حاصل ضرب کے نصف سے ہم منحرف کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

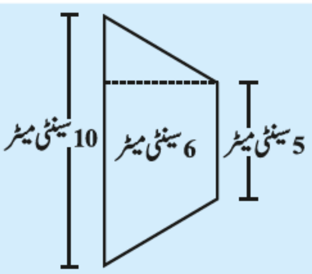
کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل منحرفوں کے رقبہ معلوم کیجیے (شکل 11.8)

(i)



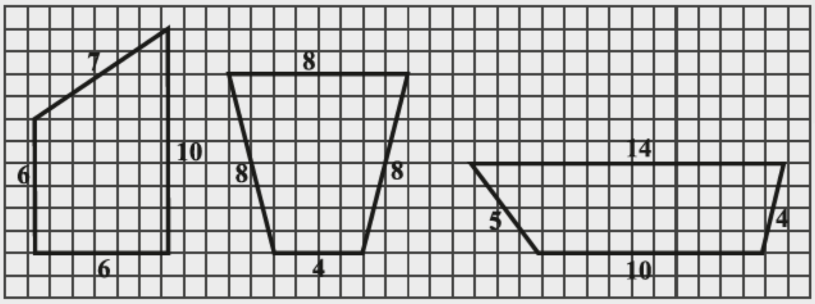
(ii)



شکل 11.8

اسے کیجیے

ساتویں جماعت میں ہم مختلف احاطوں لیکن مساوی رقبہ والے چار ضلعی کی تشکیل کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ کیا یہ منحرف کے لیے بھی ممکن ہے؟ جانچ کیجیے کہ مندرجہ ذیل منحرف کے رقبے مساوی ہیں لیکن ان کے احاطے مختلف ہیں (شکل 11.9)



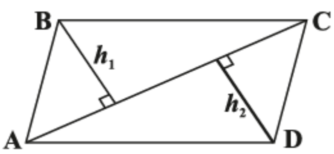
شکل 11.9

ہم جانتے ہیں کہ سبھی متماثل شکلوں کے رقبے مساوی ہوتے ہیں۔ کیا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ مساوی رقبوں والی شکلیں متماثل بھی ہوتی ہیں؟ کیا یہ شکلیں متماثل ہیں؟

ایک مربع نما کاغذ پر کم سے کم تین ایسے منحرف کھینچیے جن کے احاطے مساوی ہوں لیکن رقبہ غیر مساوی ہوں۔

11.4 عمومی چار ضلعی کا رقبہ

ایک عمومی چار ضلعی کو ایک وتر کھینچ کر دو مثلثوں میں بانٹا جاسکتا ہے۔ یہ بانٹنے کا کام عمومی چار ضلعی کے لیے فارمولہ معلوم کرنے میں معاون ہوتا ہے۔ دی ہوئی شکل 11.10 پر غور کیجیے



شکل 11.10

چار ضلعی ABCD کا رقبہ

$= (\Delta ABC$ کا رقبہ$) + (\Delta ADC$ کا رقبہ$)$

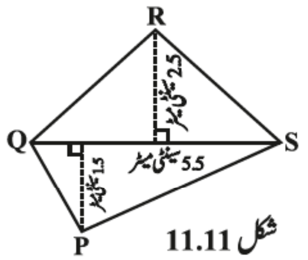
$= (\frac{1}{2} AC \times h_1) + (\frac{1}{2} AC \times h_2)$

$= (\frac{1}{2} AC \times (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$ یہاں d وتر AC کی لمبائی ظاہر کرتا ہے۔

مثال 1 : شکل 11.11 میں دکھائے گئے چار ضلعی PQRS کا رقبہ معلوم کیجیے

حل : یہاں $d = 5.5$ سینٹی میٹر، $h_1 = 2.5$ سینٹی میٹر، $h_2 = 1.5$ سینٹی میٹر ہے



شکل 11.11

رقبہ $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times (2.5+1.5)$ مربع سینٹی میٹر

$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times 4 =$ مربع سینٹی میٹر 11 مربع سینٹی میٹر

کوشش کیجیے

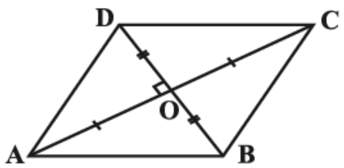
ہم جانتے ہیں کہ متوازی الاضلاع ایک چار ضلعی بھی ہے۔ آیئے اس طرح کے ایک متوازی الاضلاع کو بھی ہم دو مثلثوں میں بانٹیں۔ دونوں مثلثوں کا رقبہ معلوم کریں اور اسی طرح متوازی الاضلاع کا بھی۔ کیا یہ فارمولہ اوپر نکالے گئے فارمولے سے مطابقت رکھتا ہے؟ (شکل 11.12)

شکل 11.12

11.4.1 مخصوص چار ضلعی کا رقبہ

مثلثوں میں بانٹنے والے اس طریقہ کو ہم معین کے رقبہ کا فارمولہ معلوم کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں (جسے ہم مثلثی پیمائش کہتے ہیں)۔ شکل 11.13 میں ABDC ایک معیّن ہے۔ اس لیے، اس کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہیں۔

معیّن ABCD کا رقبہ = (ΔACD کا رقبہ) + (ΔABC کا رقبہ)



شکل 11.13

$= (\frac{1}{2} \times AC \times OD) + (\frac{1}{2} \times AC \times OB) = \frac{1}{2} AC \times (OD + OB)$

$= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$ (یہاں $AC = d_1$ اور $BD = d_2$)

دوسرے لفظوں میں معیّن کا رقبہ اس کے وتروں کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

مثال 2 : ایک ایسے معیّن کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے وتروں کی لمبائی 10 سینٹی میٹر اور 8.2 سینٹی میٹر ہے۔

حل : معین کا رقبہ $= \frac{1}{2} d_1 d_2$ یہاں d_1 اور d_2 وتر ہیں

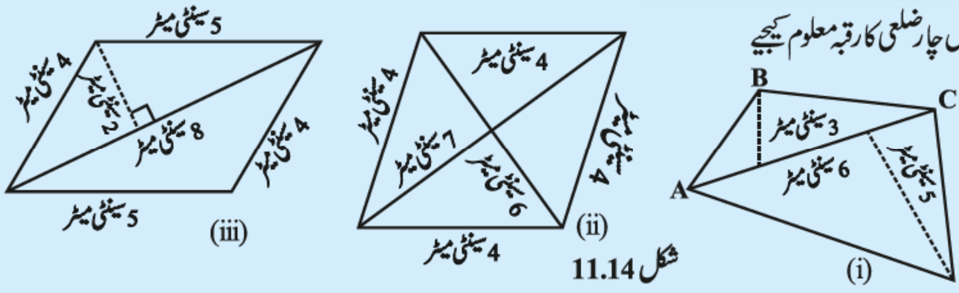
$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2 =$ مربع سینٹی میٹر 41 مربع سینٹی میٹر

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

ایک متوازی الاضلاع کا وتر کھینچ کر اسے دو متماثل مثلثوں میں بانٹ سکتے ہیں۔ کیا ہم ایک منحرف کو بھی دو متماثل مثلثوں میں بانٹ سکتے ہیں؟

کوشش کیجیے

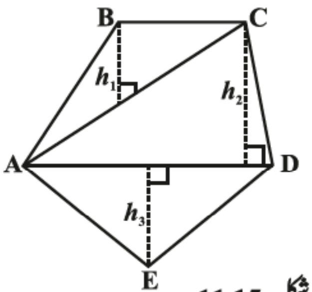
مندرجہ ذیل چار ضلعی کا رقبہ معلوم کیجیے



شکل 11.14

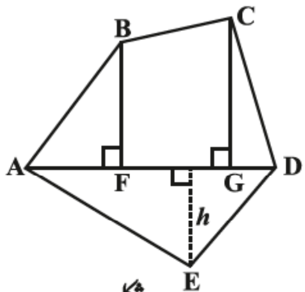
11.5 کثیر ضلعی کا رقبہ

ہم ایک چار ضلعی کو مثلثوں میں تقسیم کرتے ہیں اور اس کا رقبہ معلوم کرتے ہیں ۔ کثیر ضلعی کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے اسی طریقے کا استعمال کیا جاسکتا ہے ۔ ایک پانچ ضلعی کے لیے مندرجہ ذیل پر غور کیجیے : (شکل 11.5، 11.6)



شکل 11.15

وتر AC اور AD کو ملانے پر پانچ ضلعی ABCDE کو تین حصوں میں بانٹا گیا ہے ۔ اس لیے، ABCDE کا رقبہ = Δ ABC کا رقبہ + Δ ACD کا رقبہ +Δ AED کا رقبہ۔

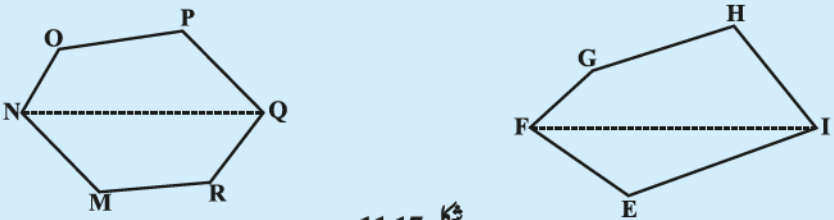


شکل 11.16

ایک وتر AD اور اس پر دو عمود BF اور CG کو بناتے ہوئے پانچ ضلعی ABCDE کو چار حصوں میں بانٹا گیا ہے ۔ اس لیے ABCDE کا رقبہ = قائم مثلث AFB Δ کا رقبہ+ منحرف BFGC کا رقبہ+ قائم مثلث CGD Δ کا رقبہ+ Δ AED کا رقبہ (منحرف BFGC کے متوازی الاضلاع کی شناخت کیجیے)۔

کوشش کیجیے

(i) مندرجہ ذیل کثیر ضلعی (شکل 11.7) کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے انھیں مختلف حصوں (مثلث اور منحرف) میں تقسیم کیجیے۔



شکل 11.17

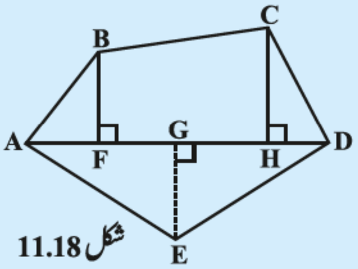
FI کثیر ضلعی EFGHI کا ایک وتر ہے

NQ کثیر ضلعی MNOPQR کا ایک وتر ہے

(ii) کثیر ضلعی ABCDE کو مندرجہ ذیل حصوں میں بانٹا گیا ہے، جیسا کہ (شکل 11.18) میں دکھایا گیا ہے۔

اگر AF=3 سینٹی میٹر، AG=4 سینٹی میٹر، AH=6 سینٹی میٹر، AD=8 سینٹی میٹر اور BF=2 سینٹی میٹر

EG=2.5 سینٹی میٹر، CH = 3 سینٹی میٹر ہے تو اس کا رقبہ معلوم کیجیے۔



شکل 11.18

کثیر ضلعی ABCDE کا رقبہ = ΔAFB کا رقبہ + ...

ΔAFB کا رقبہ = $\frac{1}{2} \times AF \times BF = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = ...$

منحرف FBCH کا رقبہ = $\frac{(BF+CH)}{2} \times FH$

$= \frac{(2+3)}{2} \times 3$ $[FH = AH - AF]$

ΔCHD کا رقبہ = ...; = $\frac{1}{2} \times HD \times CH$ = ΔADE کا رقبہ =

$\frac{1}{2} \times AD \times GE = ...$

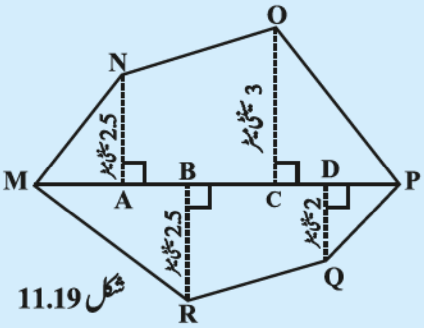
اس لیے کثیر ضلعی ABCDE کا رقبہ = ...

(iii) کثیر ضلعی MNOPQR (شکل 11.19) کا رقبہ بتائیے، اگر

MC=6 سینٹی میٹر، MD=7 سینٹی میٹر، MP = 9 سینٹی میٹر،

MB = 4 سینٹی میٹر، MA=2 سینٹی میٹر ہے۔

NA, OC, QD اور RB وتر MP پر عمود ہیں۔



شکل 11.19

مثال 1 : ایک منحرف کی شکل کے میدان کا رقبہ 480 مربع میٹر ہے، دو متوازی ضلعوں کے درمیان کا فاصلہ 15 میٹر ہے اور ایک متوازی ضلع 20 میٹر ہے۔ دوسرا متوازی ضلع معلوم کیجیے۔

حل : منحرف کا ایک متوازی ضلع $a = 20$ میٹر ہے۔ مان لیجیے دوسرا متوازی ضلع b ہے اور اونچائی $h = 15$ میٹر۔

منحرف کا دیا ہوا رقبہ = 480 مربع میٹر

منحرف کا رقبہ = $\frac{1}{2} h (a + b)$

اس لیے $480 = \frac{1}{2} \times 15 \times (20 + b)$ یا $\frac{480 \times 2}{15} = 20 + b$

یا $64 = 20 + b$ یا $b = 44$ میٹر

لہٰذا منحرف کا دوسرا متوازی ضلع 44 میٹر ہے۔

مثال 2 : ایک معین کا رقبہ 240 مربع سینٹی میٹر ہے۔ اگر اس کے ایک وتر کی لمبائی 16 سینٹی میٹر ہو تو دوسرے کی لمبائی وتر معلوم کیجیے۔

حل : مان لیجیے ایک وتر d_1 کی لمبائی = 16 سینٹی میٹر

اور دوسرے وتر کی لمبائی $= d_2$

$$\text{منحرف کا رقبہ} = 240 = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$$

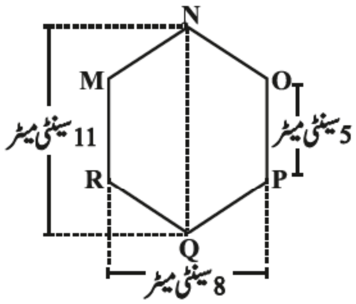
اس لیے $\frac{1}{2} 16 \cdot d_2 = 240$

$$d_2 = \frac{240 \times 2}{16}$$

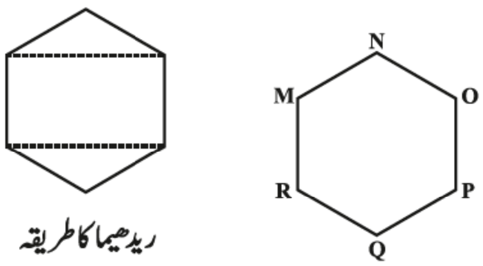
اس لیے $d_2 = 30$ سینٹی میٹر

اس طرح دوسرے وتر کی لمبائی 30 سینٹی میٹر ہے۔

مثال 3 : 5 سینٹی میٹر ضلعی والا ایک مسدس MNOPQR (شکل 11.20) ہے۔ امن اور ریدھیما نے اسے دو مختلف طریقوں سے تقسیم کیا (شکل 11.21) دونوں حالتوں میں مسدس کا رقبہ معلوم کیجیے۔



شکل 11.20

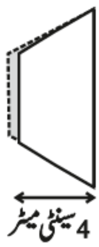


ریدھیما کا طریقہ **امن کا طریقہ**

شکل 11.21

حل : **امن کا طریقہ:**

چوں کہ یہ ایک مسدس ہے اس لیے 'NQ' مسدس کو دو متماثل منحرفوں میں تقسیم کرتا ہے۔ آپ اس کی تصدیق کاغذ موڑ کر کر سکتے ہیں (شکل 11.22)۔

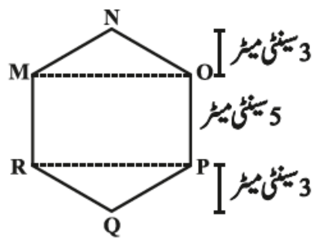


شکل 11.22

اب منحرف MNQR کا رقبہ $= 4 \times \frac{(11+5)}{2} = 4 \times 16 = 2 \times 16 = 32$ مربع سینٹی میٹر

اس لیے مسدس MNOPQR کا رقبہ $= 2 \times 32 = 64$ مربع سینٹی میٹر

ریدھیما کا طریقہ:



شکل 11.23

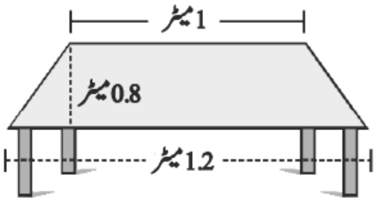
ΔMNO اور ΔRPQ متماثل مثلث ہیں جن کا ارتفاع 3 سینٹی میٹر ہے (شکل 11.23)۔

آپ دونوں مثلثوں کو کاٹ کر ان کو ایک دوسرے کے اوپر رکھ کر تصدیق کر سکتے ہیں۔

ΔMNO کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$ مربع سینٹی میٹر $= \Delta RPQ$ کا رقبہ

مستطیل MNPR کا رقبہ $= 5 \times 8 = 40$ مربع سینٹی میٹر

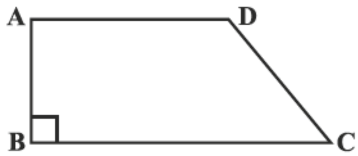
اب مسدس MNOPQR کا رقبہ $= 12 + 12 + 40 = 64$ مربع سینٹی میٹر



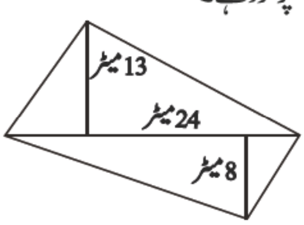
مشق 11.2

1. ایک میز کی اوپری سطح منحرف کی شکل کی ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کیجیے اگر اس کے متوازی ضلعوں کی لمبائیاں 1 میٹر اور 1.2 میٹر ہیں اور ان کے درمیان کا عمودی فاصلہ 0.8 میٹر ہے۔

2. ایک منحرف کا رقبہ 34 مربع سینٹی میٹر، اس کے ایک متوازی ضلع کی لمبائی 10 سینٹی میٹر اور اونچائی 4 سینٹی میٹر ہے۔ دوسرے متوازی ضلع کی لمبائی معلوم کیجیے۔



3. ایک منحرف کی شکل والے میدان ABCD کی لمبائی 120 میٹر ہے۔ اگر CD = 17 میٹر، BC = 48 میٹر اور AD = 40 میٹر ہے تو میدان کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ضلع AB، متوازی ضلعوں AD اور BC پر عمود ہے۔

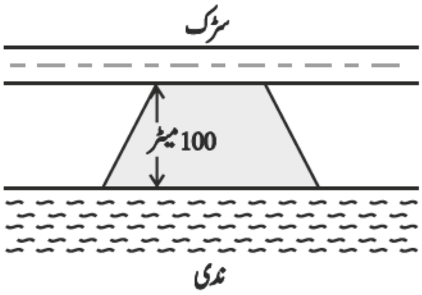


4. ایک چار ضلعی شکل کے میدان کا وتر 24 میٹر ہے اور مقابل راسوں سے اس پر ڈالے گئے عمودوں کی لمبائیاں 8 میٹر اور 13 میٹر ہیں۔ میدان کا رقبہ معلوم کیجیے۔

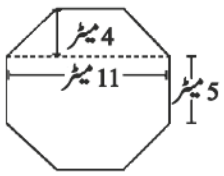
5. ایک معین کے وتروں کی لمبائی 7.5 سینٹی میٹر اور 12 سینٹی میٹر ہے۔ اس معین کا رقبہ معلوم کیجیے؟

6. ایک معین کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے ضلع کی لمبائی 5 سینٹی میٹر اور ارتفاع 4.8 سینٹی میٹر ہے۔ اگر اس کا ایک وتر 8 سینٹی میٹر لمبا ہے تو دوسرے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

7. کسی عمارت کے فرش میں 3000 ٹائل لگے ہوئے ہیں جو معین کی شکل کے ہیں اور اس میں ہر ایک کے وتر کی لمبائی 45 سینٹی میٹر اور 30 سینٹی میٹر ہے۔ 4 روپے فی مربع میٹر شرح سے فرش کی پالش کا خرچ معلوم کیجیے۔



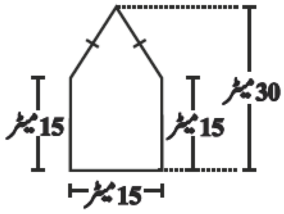
8. موہن منحرف کی شکل کا ایک کھیت خریدنا چاہتا ہے۔ اس کھیت کی ندی کے ساتھ کے ضلع کی لمبائی روڈ کے ہمراہ کی لمبائی کی دوگنی اور متوازی ہے۔ اگر اس میدان کا رقبہ 10500 مربع میٹر ہے اور دو متوازی ضلعوں کے درمیان کا عمودی فاصلہ 100 میٹر ہے۔ تو ندی کے ہمراہ اس کی لمبائی معلوم کیجیے۔

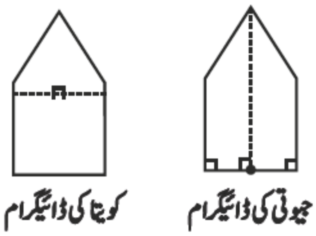


9. ایک اونچے پلیٹ فارم کی اوپری سطح کی شکل ایک منظم 8 ضلعی کی سی ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ 8 ضلعی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

10. ایک پانچ ضلعی پارک ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

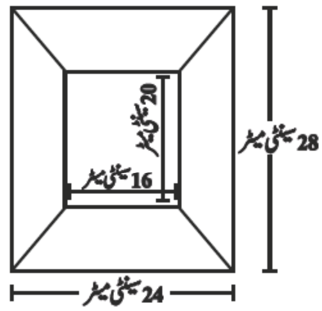
اس کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے جیوتی اور کویتا نے اس کو دو مختلف طریقوں سے تقسیم کیا۔





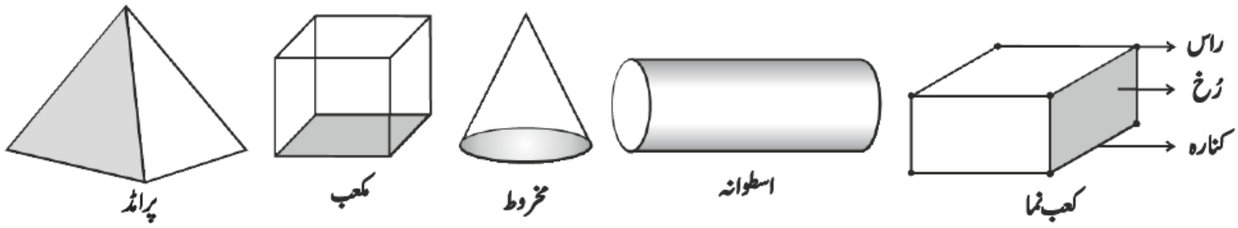
دونوں حالتوں میں پارک کا رقبہ معلوم کیجیے۔ کیا آپ رقبہ معلوم کرنے کا کوئی اور طریقہ بھی تجویز کر سکتے ہیں۔

.11 متصل تصویری فریم کے باہری ابعاد=28 سینٹی میٹر×24 سینٹی میٹر ہیں اور اندرونی ابعاد=20 سینٹی میٹر × 16 سینٹی میٹر ہیں۔ فریم کے ہر حصّے کا رقبہ معلوم کیجیے اگر ہر حصّے کی چوڑائی یکساں ہے۔



11.6 ٹھوس اشکال

پچھلی جماعتوں میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ ہم دو ابعادی شکلوں کو تین ابعادی شکلوں کے رخ کی شکل میں پہچان سکتے ہیں۔ ہم جن ٹھوسوں کا مشاہدہ کر چکے ہیں ان پر غور کیجیے (شکل 11.24)۔



شکل 11.24

مشاہدہ کیجیے کہ ان میں سے بعض شکلوں کے دو یا دو سے زیادہ یکساں (متماثل) رخ ہیں۔ ان کے نام بتائیے۔ کس ٹھوس کے تمام رخ متماثل ہیں؟

اسے کیجیے

بازار میں صابن، کھلونے، پیسٹ، اسنیکس (Snacks) وغیرہ اکثر کعب نما، مکعب نما یا اسطوانہ پیکٹوں میں ملتے ہیں۔ ایسے کچھ ڈبوں کو جمع کیجیے (شکل 11.25)۔

شکل 11.25

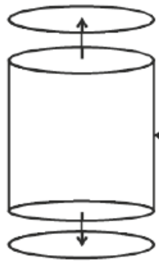
مکعب نما ڈبہ

کعب نما ڈبہ

سبھی چھ رخ مستطیل نما ہیں اور مقابل رخ یکساں ہیں۔ اس لیے تینوں رخوں کے جوڑے یکساں ہیں۔

سبھی چھ رخ مربعے اور یکساں ہیں

ایک خمیدہ سطح اور دو دائری رخ جو یکساں ہیں۔



اب ایک وقت میں ایک ہی قسم کے ڈبے کو لیجیے۔ اس کے سبھی رخوں کو کاٹیے۔ ہر ایک رخ کی شکل کو دیکھیے اور یکساں رخوں کو ایک دوسرے کے اوپر رکھ کر ڈبے کے رخوں کی تعداد معلوم کیجیے۔ اپنے مشاہدات نوٹ کیجیے۔

کیا آپ نے مندرجہ ذیل پر غور کیا ہے:

اسطوانہ کے متماثل دائری رخ ایک دوسرے کے متوازی ہیں (شکل 11.26)۔ غور کیجیے کہ دائری رخوں کے وسطی نقطوں کو ملانے والا قطع خط قاعدہ پر عمود ہے۔ ایسے اسطوانہ **قائم دائری اسطوانہ** کہلاتے ہیں ہم صرف اسی قسم کے اسطوانہ کے بارے میں بحث کریں گے حالاں کہ دوسری قسم کے اسطوانے بھی ہوتے ہیں۔ (شکل 11.27)۔

شکل 11.26
(یہ ایک قائم دائری اسطوانہ ہے)

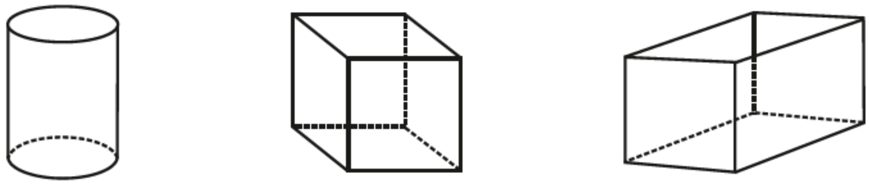
شکل 11.27
یہ ایک قائم دائری اسطوانہ نہیں ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

متصل شکل میں دکھائے گئے ٹھوس کو اسطوانہ کہنا کیوں غلط ہے؟

11.7 مکعب، مکعب نما اور اسطوانہ کا سطحی رقبہ

عمران، مونیکا اور جسپال بالترتیب یکساں اونچائی والے مکعب نما، مکعبی اور اسطوانے ڈبوں کو رنگ رہے ہیں (شکل 11.28)۔

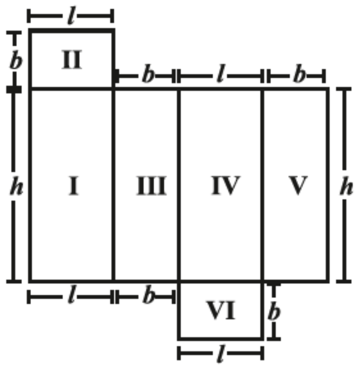


شکل 11.28

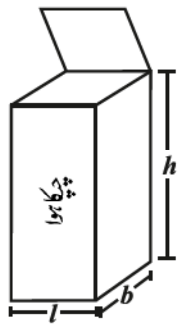
وہ یہ معلوم کرنے کی کوشش کر رہے ہیں کہ کس نے زیادہ رقبہ میں رنگ بھرا ہے۔ ہری نے مشورہ دیا کہ ہر ڈبے کا سطحی رقبہ معلوم کرنے کے بعد ہی فیصلہ ہو سکتا ہے۔

کل سطحی رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہر ڈبے کا رقبہ معلوم کیجیے اور ان کا حاصل جمع معلوم کیجیے۔ کسی ٹھوس کا سطحی رقبہ اس کے رخوں کے رقبوں کا حاصل جمع ہوتا ہے۔ مزید وضاحت کے لیے ہم ہر ایک شکل کا باری باری سے ذکر کرتے ہیں۔

11.7.1 مکعب نما



شکل 11.30



شکل 11.29

مان لیجیے آپ ایک مکعب نما ڈبہ (شکل 11.29) کا ٹکڑا کاٹ کر اسے سیدھا پھیلا دیتے ہیں۔ ہمیں ایک جال نظر آتا ہے۔ (شکل 11.30)

ہر ایک ضلع کی ابعاد لکھیے۔ آپ جانتے ہیں کہ کعب نما کے تین یکساں رخ ہوتے ہیں۔ ہر رخ کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے آپ کس عبارت کا استعمال کر سکتے ہیں؟

ڈبے کے تمام رخوں کا کل رقبہ معلوم کیجیے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مکعب نما کا کل سطحی رقبہ ہے: I کا رقبہ + II کا رقبہ + III کا رقبہ + IV کا رقبہ + V کا رقبہ + VI کا رقبہ

$$= h \times l + b \times l + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$$

اس طرح کل سطحی رقبہ $= 2\ (h \times l + b \times h + b \times l) = 2(lb + bh\ + hl)$ جہاں h, l اور b بالترتیب مکعب نما کی لمبائی، اونچائی اور چوڑائی ہے۔

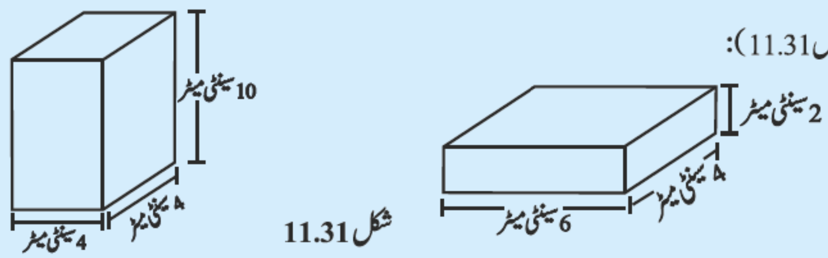
مان لیجیے اوپر دیے گئے ڈبے کی اونچائی، لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 20 سینٹی میٹر، 15 سینٹی میٹر اور 10 سینٹی میٹر ہے۔

لٰہذا کل سطحی رقبہ $= 2\ (20 \times 15\ +\ 20 \times 10\ +\ 10 \times 15)$

$= 2\ (300 + 200 + 150) = 1300$ مربع میٹر

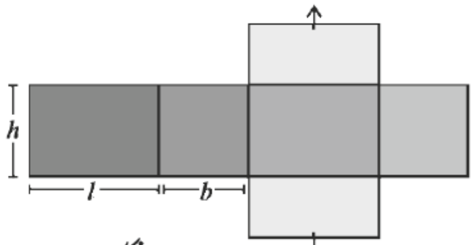
کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل مکعب نما کا رقبہ معلوم کیجیے (شکل 11.31):



شکل 11.31

- مکعب نما کی دیواریں (اوپری اور نچلی سطح کے سوا) خمیدہ سطح کا رقبہ دیتی ہیں۔ مثال کے طور پر جس مکعب نما کمرے میں آپ بیٹھے ہوئے ہیں اس کمرے کی چار دیواری کا کل رقبہ کمرے کی خمیدہ سطح کا رقبہ کہلاتا ہے (شکل 11.32)۔ اس لیے مکعب نما کی خمیدہ سطح کا رقبہ $2(h \times l + b \times h)$ یا $2h(l + b)$ کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔



شکل 11.32

اسے کیجیے

(i) ایک مکعب نما ڈسٹر (جسے آپ کے استاد کلاس میں استعمال کرتے ہیں) کی خمیدہ سطح کو بھورے رنگ کے کاغذ کی پٹی سے اس طرح ڈھکیے کہ یہ ڈسٹر کی خمیدہ سطح کو ٹھیک طرح سے ڈھک لے۔ پھر کاغذ کو ہٹایئے اور کاغذ کے رقبہ کی پیمائش کیجیے۔ کیا یہ ڈسٹر کی خمیدہ سطح کا رقبہ ہے؟

(ii) اپنی کلاس کے کمرے کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی ناپیے اور مندرجہ ذیل کو معلوم کیجیے:

(a) کھڑکیوں اور دروازوں کے رقبہ کو چھوڑ کر کمرے کا کل سطحی رقبہ۔

(b) اس کمرے کی خمیدہ سطح کا رقبہ۔

(c) کمرے کا کل وہ رقبہ جس پر سفیدی ہونی ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1. کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ مکعب نما کا کل سطحی رقبہ = خمیدہ سطح کا رقبہ + 2 × قاعدہ کا رقبہ؟

2. اگر ہم کسی کعب نما (شکل 11.33(i)) کی اونچائی اور قاعدہ کی لمبائی کو ایک دوسرے سے بدل کر ایک دوسرا مکعب نما (شکل 11.33(ii)) حاصل کر لیں تو کیا خمیدہ سطح کا رقبہ بدل جائے گا؟

(i)

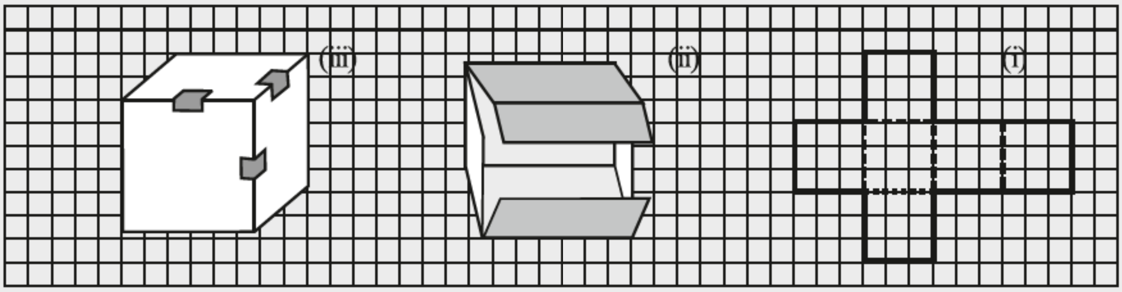
شکل 11.33

(ii)

11.7.2 مکعب

اسے کیجیے

ایک مربع نما کاغذ پر دکھائے گئے نمونہ (Pattern) کو لیجیے اور اسے کاٹیے [شکل (i) 11.34]۔ (آپ جانتے ہیں کہ یہ نمونہ مکعب کا جال (Net) ہے۔ اسے لکیروں کے ساتھ موڑیے [شکل (ii) 11.34] اور مکعب بنانے کے لیے کناروں پر ٹیپ لگائیے [شکل (iii) 11 34]



شکل 11.34

(ii) شکل 11.35 (i)

(a) مکعب کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی کیا ہے؟ دھیان دیجیے کہ مکعب کے سبھی رخ مربع نما ہوتے ہیں۔ اس لیے مکعب کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی یکساں ہوتی ہے۔ (شکل (i) 11.35)

(b) ہر ایک رخ کا رقبہ لکھیے۔ کیا سبھی رخوں کے رقبہ یکساں ہیں؟

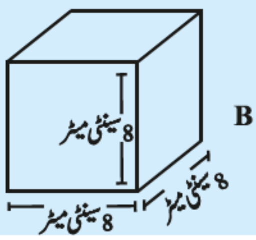
(c) اس مکعب کا کل سطحی رقبہ لکھیے۔

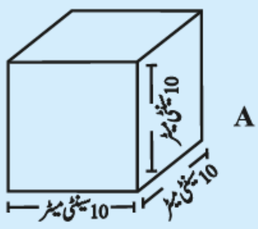
(d) اگر مکعب کا ہر ضلع l ہو تو اس کے ہر ایک رخ کا رقبہ کیا ہوگا؟ (شکل (ii)11.35)۔

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ l ضلع والے مکعب کا کل سطحی رقبہ $6l^2$ ہے۔

کوشش کیجیے

مکعب A کا سطحی رقبہ اور مکعب B کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے (شکل 11.36)





شکل 11.36

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

(i) b ضلع والے دو مکعبوں کو ملا کر ایک کعب نما بنایا گیا ہے (شکل 11.37)۔ اس کعب نما کا سطحی رقبہ کیا ہے؟ کیا یہ $12b^2$ ہے؟

کیا ایسے تین مکعبوں کو ملا کر بنائے گئے مکعب کا سطحی رقبہ $18b^2$ ہے؟ کیوں؟

شکل 11.37

(ii) سب سے کم سطحی رقبہ کا مکعب نما بنانے کے لیے آپ یکساں ضلع والے 12 مکعبوں کو کس طرح ترتیب دیں گے؟

(iii) مکعب کے سطحی رقبہ کو رنگنے کے بعد اس مکعب کو یکساں ابعاد والے 64 مکعبوں میں کاٹا جائے تو (شکل 11.38)۔

کتنے مکعبوں کا کوئی بھی رخ رنگا نہیں گیا ہے؟ کتنے مکعبوں کا 1 رخ رنگا گیا ہے؟ کتنے مکعبوں کے 2 رخ رنگے ہوئے ہیں؟ کتنے مکعبوں کے 3 رخ رنگے ہوئے ہیں؟

شکل 11.38

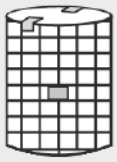
11.7.3 اسطوانہ

ہم جتنے بھی اسطوانہ دیکھتے ہیں ان میں سے زیادہ تر قائم دائری اسطوانہ ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر ایک ٹن، گول کھمبا، ٹیوب لائٹ پانی کا پائپ وغیرہ۔

اسے کیجیے

(i) ایک اسطوانہ نما ڈبہ یا صندوق لیجیے اور اس کا قاعدہ گراف پیپر پر بنائیے اور اسے کاٹ کر باہر نکال لیجیے [شکل (i) 11.39]۔ ایک دوسرا گراف پیپر لیجیے جس کی چوڑائی ڈبے کی اونچائی کے برابر ہو۔ اس پٹی کو ڈبے کے چاروں طرف اس طرح سے لپیٹیے کہ یہ ڈبے کے چاروں طرف بالکل ٹھیک بیٹھے (زائد کاغذ کو ہٹا دیجیے) [شکل (ii) 11.39]۔

ٹکڑوں کو ایک دوسرے سے ملا کر ٹیپ لگائیے [شکل (iii) 11.39] تا کہ ایک اسطوانہ بن جائے [شکل (iv) 11.39]



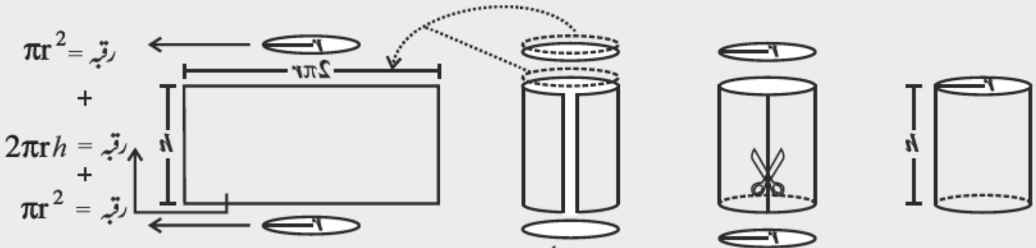
(i) (ii) (iii) (iv)

شکل 11.39

ڈبے کے چاروں طرف لپیٹے گئے کاغذ کی شکل کیا ہے؟

یقینی بات ہے کہ یہ مستطیل نما ہے۔ جب آپ اس اسطوانہ کے حصوں کو ٹیپ لگا کر ایک دوسرے سے ملا دیتے ہیں تو مستطیل نما پٹی کی لمبائی دائرہ کے محیط کے برابر ہوتی ہے۔ دائری قاعدہ کے نصف قطر (r) اور مستطیل نما پٹی کی لمبائی (l) اور چوڑائی (h) کو نوٹ کیجیے۔ کیا پٹی کی لمبائی = $2\pi r$ ہے؟ جانچ کیجیے کہ کیا مستطیل نما پٹی کا رقبہ $2\pi rh$ ہے۔ گنتی کیجیے کہ مربع نما کاغذ کی کتنی مربع اکائیاں اسطوانہ کو بنانے میں استعمال کی گئی ہیں۔ جانچ کیجیے کہ کیا یہ گنتی $2\pi r(r+h)$ کی قدر کے تقریباً برابر ہے۔

(ii) ہم اسطوانہ کے سطحی رقبہ $2\pi r(r+h)$ کو دوسرے طریقے سے بھی نکال سکتے ہیں۔ ایک اسطوانہ کو اس طرح کاٹنے کا تصور کیجیے جیسا کہ مندرجہ ذیل (شکل 11.40) میں دکھایا گیا ہے



شکل 11.40

اسطوانہ (یا خمیدہ) سطح کا رقبہ $2\pi rh$ ہے

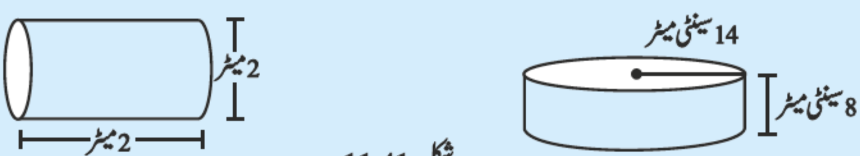
اسطوانہ کا کل سطحی رقبہ = $\pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2$

$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$ یا $2\pi r(r+h)$

نوٹ : جب تک کچھ کہا نہ جائے π کی قدر $\frac{22}{7}$ لیتے ہیں۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل اسطوانوں کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے (شکل 11.41)

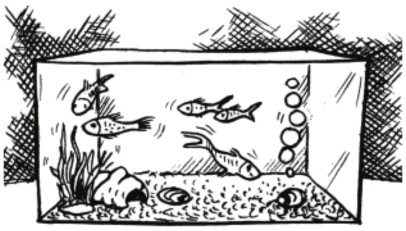


شکل 11.41

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

نوٹ کیجیے کہ اسطوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ، قاعدہ کا محیط × اسطوانہ کی اونچائی کے برابر ہوتا ہے۔ کیا ہم مکعب نما کی خمیدہ سطح کے رقبہ کو قاعدہ کے محیط × کعب نما کی اونچائی کی شکل میں لکھ سکتے ہیں؟

مثال 4: ایک مچھلی دان (aquarium) مکعب نما کی شکل کا ہے جس کی باہری پیمائشیں 40 سینٹی میٹر × 30 سینٹی میٹر × 80 سینٹی میٹر ہیں۔ اس کے اساس، (قاعدہ)، ایک طرف کا منظر اور پیچھے کے منظر کو رنگین کاغذ سے ڈھکنا ہے۔ اُس کاغذ کا رقبہ معلوم کیجیے؟



حل : مچھلی دان کی لمبائی $= l = 80$ سینٹی میٹر

مچھلی دان کی چوڑائی $= b = 30$ سینٹی میٹر

مچھلی دان کی اونچائی $= h = 40$ سینٹی میٹر

قاعدہ کا رقبہ $= l \times b = 80 \times 30 = 2400$ مربع سینٹی میٹر

ایک طرف کا رقبہ $= b \times h = 30 \times 40 = 1200$ مربع سینٹی میٹر

پیچھے کا رقبہ $= l \times h = 80 \times 40 = 3200$ مربع سینٹی میٹر

مطلوبہ رقبہ = قاعدہ کا رقبہ + پیچھے کا رقبہ +

(ایک طرف کا رقبہ × 2) +

$(2 \times 1200) + 3200 + 2400 = 8000$ مربع سینٹی میٹر

اس لیے مطلوبہ کاغذ کا رنگین رقبہ 8000 مربع سینٹی میٹر ہے۔

مثال 5 : ایک مکعب نما کمرے کی اندرونی پیمائش 4 میٹر × 8 میٹر × 12 میٹر ہے۔ اگر سفیدی کرانے کا خرچ 5 ₹ فی مربع میٹر ہے تو اس کمرے کی چار دیواری پر سفیدی کرانے کا خرچ معلوم کیجیے۔ اگر اس کمرے کی چھت کی بھی سفیدی کرائی جائے تو سفیدی کرانے کا خرچ کتنا ہوگا؟

حل : مان لیجیے کمرے کی لمبائی $(l) = 12$ میٹر

کمرے کی چوڑائی $(b) = 8$ میٹر

کمرے کی اونچائی $(h) = 4$ میٹر

کمرے کی چاروں دیواروں کا رقبہ = کمرے کی اونچائی × قاعدہ کا احاطہ

$= 2\,(l + b) \times h = 2\,(12 + 8) \times 4$

$= 2 \times 20 \times 4 = 160$ مربع میٹر

سفیدی کرانے کا فی مربع میٹر خرچ = 5 ₹ ہے

اس لیے کمرے کی چاروں دیواروں پر سفیدی کرانے کا کل خرچ = (5×160) × ₹ = 800 ₹ ہے۔

چھت کا رقبہ ہے = $8 \times 12 = 96$ مربع میٹر

چھت پر سفیدی کرانے کا خرچ = (5 × 96) ₹ = 480 ₹

اس لیے سفیدی کرانے کا کل خرچ = (480+800) ₹ =1280 ₹

مثال 6 : ایک بلڈنگ میں 24 اسطوانہ نما کھمبے ہیں۔ ہر کھمبہ کا نصف قطر 28 سینٹی میٹر اور اونچائی 4 میٹر ہے۔ 8 روپے فی مربع میٹر کی شرح سے سبھی کھمبوں کی (خمیدہ سطح) پر رنگ کرانے کا خرچ معلوم کیجیے۔

حل : اسطوانہ کھمبے کا نصف قطر = 28 سینٹی میٹر = 0.28 میٹر = r

اونچائی $h = 4$ میٹر

اسطوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ = $2\pi rh$

کھما کی خمیدہ سطح کا رقبہ = $2 \times \frac{22}{7} \times 0.28 \times 4 = 7.04$ مربع میٹر

ایسے 24 کھمبوں کی خمیدہ سطح کا رقبہ = $7.04 \times 24 = 168.96$ مربع میٹر

1 مربع میٹر پر رنگ کرانے کا خرچ = ₹ 8

اس لیے 168.96 مربع میٹر رقبہ پر رنگ کرانے کا خرچ = 8 × 168.96₹8 = 1351.68₹

مثال 7 : ایک ایسے اسطوانہ کی اونچائی معلوم کیجیے جس کا نصف قطر 7 سینٹی میٹر اور کل سطحی رقبہ 968 مربع سینٹی میٹر ہے

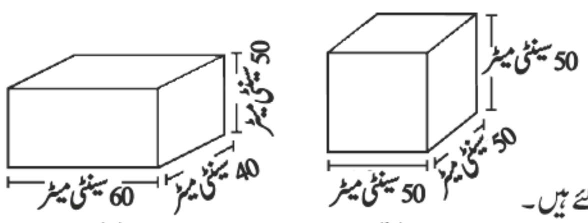
حل : مان لیجیے اسطوانہ کی اونچائی = h، نصف قطر = r = 7 سینٹی میٹر

کل سطحی رقبہ = $2\pi r(h + r)$

اس لیے $968 = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (7 + h)$

$h = 15$ سینٹی میٹر

اس لیے اسطوانہ کی اونچائی = 15 سینٹی میٹر ہے



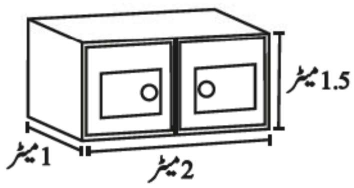
(a) (b)

مشق 11.3

1. دو مکعب نما ڈبے ہیں جیسا کہ متصل شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

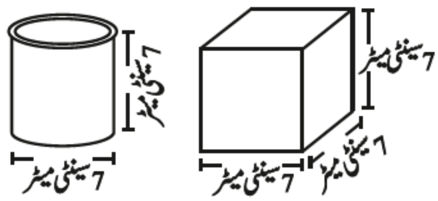
کس ڈبے کو بنانے کے لیے کم سامان کی ضرورت ہے؟

.2 24 سینٹی میٹر × 48 سینٹی میٹر × 80 سینٹی میٹر پیائش والے ایک سوٹ کیس کو ترپال کے کپڑے سے ڈھکنا ہے۔ ایسے 100 سوٹ کیسوں کو ڈھکنے کے لیے 96 سینٹی میٹر چوڑائی والی کتنے میٹر ترپال کے کپڑے کی ضرورت ہے؟



.3 ایک ایسے مکعب کا ضلع معلوم کیجیے جس کا سطحی رقبہ 600 مربع سینٹی میٹر ہے۔

.4 رخسار نے 1.5 میٹر×2 میٹر×1 میٹر پیائش والی ایک پیٹی کو باہر سے رنگ کیا اگر اس نے پیٹی کی نچلی سطح کے علاوہ سبھی طرف سے رنگ کیا ہو تو معلوم کیجیے کہ اس نے کتنے سطحی رقبہ کو رنگ کیا۔

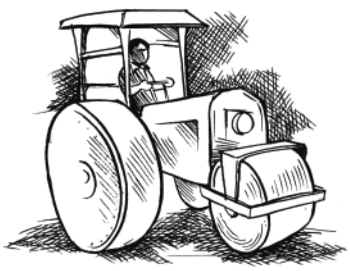


.5 ڈینیل ایک ایسے مکعب نما کمرے کی دیواروں اور چھت کو رنگ کر رہا ہے جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 15 میٹر، 10 میٹر اور 7 میٹر ہے۔ رنگ کے ہر ایک ڈبہ سے 100 مربع میٹر رقبہ کو رنگ کیا جا سکتا ہے تو اس کمرے کے لیے رنگ کے کتنے ڈبوں کی ضرورت ہوگی؟

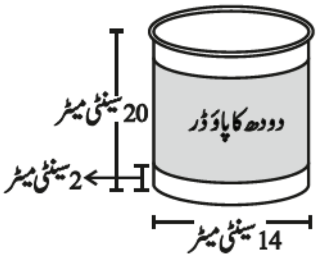
.6 بیان کیجیے کہ دائیں طرف دی گئی شکلیں کس طرح سے یکساں اور ایک دوسرے سے مختلف ہیں؟ کس ڈبے کی سطح کا رقبہ زیادہ ہے؟

.7 7 میٹر نصف قطر اور 3 میٹر اونچائی والا ایک بند اسطوانوی ٹینک دھات کی ایک چادر سے بنا ہے۔ اسے بنانے کے لیے دھات کی کتنی چادر درکار ہوگی؟

.8 ایک کھوکھلے اسطوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ 4224 مربع سینٹی میٹر ہے، اسے اس کی اونچائی کے برابر کاٹ کر 33 سینٹی میٹر چوڑائی کی ایک مستطیل نما چادر بنائی جاتی ہے۔ مستطیل نما چادر کا احاطہ معلوم کیجیے؟



.9 سڑک کو ہموار کرنے کے لیے ایک رولر کو سڑک کے اوپر ایک بار گھمانے کے لیے 750 چکر لگانے پڑتے ہیں اگر سڑک رولر کا قطر 84 سینٹی میٹر اور لمبائی 1 میٹر ہے تو سڑک کا رقبہ معلوم کیجیے۔



.10 ایک کمپنی اپنے دودھ پاؤڈر کو ایسے اسطوانوی ڈبوں میں پیک کرتی ہے جن کا قطر 14 سینٹی میٹر اور اونچائی 20 سینٹی میٹر ہے۔ کمپنی ڈبّے کی سطح کے چاروں طرف ایک لیبل لگاتی ہے (جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے) اگر یہ لیبل برتن کے نچلے حصے اور اوپری حصے، دونوں سے 2 سینٹی میٹر کی دوری پر چپکایا جاتا ہے تو لیبل کا رقبہ کیا ہے؟

11.8 مکعب، مکعب نما اور اسطوانہ کا حجم

ایک سہ ابعادی شے کے ذریعہ گھری ہوئی جگہ کو اس کا حجم کہتے ہیں۔ اپنے آس پاس کی چیزوں کا موازنہ کرنے کی کوشش کیجیے۔ مثال کے طور پر کسی کمرے کے اندر رکھی ہوئی الماری کے مقابلہ میں کمرے کا حجم زیادہ ہے۔ کیا آپ ان میں سے کسی بھی شے کا حجم ناپ سکتے ہیں؟

شکل 11.42

مشاہدہ کیجیے، ہم کسی علاقے کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے مربع اکائی کا استعمال کرتے ہیں یہاں ہم ٹھوس کا حجم معلوم کرنے کے لیے مکعب اکائی کا استعمال کریں گے کیوں کہ مکعب بہت زیادہ موزوں ٹھوس شکل ہے (ٹھیک اسی طرح جیسے کسی علاقہ کا رقبہ ناپنے کے لیے مربع سب سے زیادہ موزوں ہے)۔

رقبہ معلوم کرنے کے لیے، ہم علاقہ کو مربع اکائیوں میں تقسیم کرتے ہیں، اسی طرح کسی ٹھوس کا حجم معلوم کرنے کے لیے، ہمیں اس ٹھوس کو مکعب اکائیوں میں تقسیم کرنے کی ضرورت ہے۔

سوچیے ٹھوس میں سے ہر ایک کا حجم 8 مکعب اکائی ہے (شکل 11.42)۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ ٹھوس کا حجم ناپنے کے لیے ہم اس میں موجود اکائیوں کو گنتے ہیں

1 مکعب سینٹی میٹر = 1 سینٹی میٹر × 1 سینٹی میٹر × 1 سینٹی میٹر = 1 مکعب سینٹی میٹر

= 10 ملی میٹر × 10 ملی میٹر × 10 ملی میٹر = ... مکعب ملی میٹر

1 مکعب میٹر = 1 میٹر × 1 میٹر × 1 میٹر = 1 مکعب میٹر

= .... مکعب میٹر

1 مکعب ملی میٹر = 1 ملی میٹر × 1 ملی میٹر × 1 ملی میٹر = 1 مکعب ملی میٹر

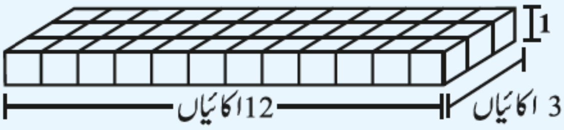
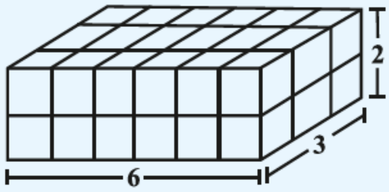
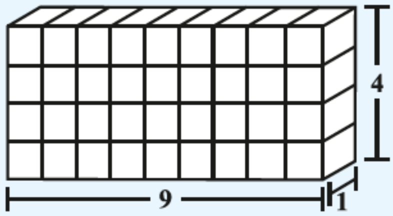
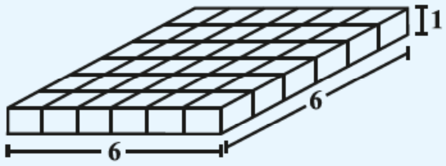
= 0.1 سینٹی میٹر × 0.1 سینٹی میٹر × 0.1 سینٹی میٹر = ... مکعب سینٹی میٹر

اب ہم کعب نما، مکعب اور اسطوانہ کا حجم معلوم کرنے کے لیے ضابطے معلوم کرتے ہیں۔ آیئے ہر ایک ٹھوس پر ایک ایک کر کے بحث کرتے ہیں۔

11.8.1 مکعب نما

یکساں شکل والے (ہر ایک مکعب کی لمبائی برابر ہو) 36 مکعب لیجیے۔ ایک مکعب نما بنانے کے لیے انھیں ترتیب دیجیے۔

آپ ان کو بہت سے طریقوں سے ترتیب دے سکتے ہیں۔ مندرجہ ذیل جدول کا مشاہدہ کیجیے اور خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

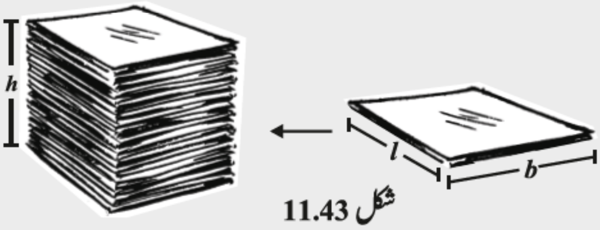
	مکعب نما	لمبائی	چوڑائی	اونچائی	$l \times b \times h = \mathrm{V}$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

چوں کہ ان مکعب نماؤں کو بنانے کے لیے ہم نے 36 مکعبوں کا استعمال کیا ہے اس لیے ہر ایک مکعب کا حجم 36 مکعب اکائی ہے۔ اس کے علاوہ ہر ایک مکعب نما کا حجم اس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔ مذکورہ بالا مثال سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ مکعب نما کا حجم = $l \times b \times h$ ہے۔ کیوں کہ $l \times h$ قاعدہ کا رقبہ ہے اس لیے ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ اونچائی × قاعدہ کا رقبہ = مکعب نما کا حجم

اسے کیجیے

ایک کاغذ کی شیٹ لیجیے۔ اس کے رقبہ کو ناپیے، اسی قسم کی کاغذ کی شیٹیں لے کر ان کا ڈھیر لگا کر ایک مکعب نما بنائیے (شکل 11.43)۔ اس ڈھیر کی اونچائی ناپیے۔ اور ایک شیٹ کے رقبے اور شیٹوں کی اونچائی کا حاصل ضرب معلوم کرتے ہوئے مکعب نما کا حجم معلوم کیجیے

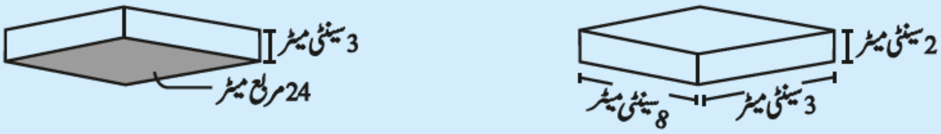


شکل 11.43

اس مشغلہ سے اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ ٹھوس کے حجم کو اس طریقہ سے بھی معلوم کیا جا سکتا ہے (اگر کسی ٹھوس کا قاعدہ اور اوپری حصہ ایک سا ہے اور ایک دوسرے کے متوازی ہے اور اس کے کنارے قاعدہ پر عمود ہیں)۔ کیا آپ ایسی چیزوں کے بارے میں سوچ سکتے ہیں جن کا حجم اس طریقہ کا استعمال کرتے ہوئے معلوم کیا جا سکتا ہے؟

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل ہر کعب نما (شکل 11.44) کا حجم معلوم کیجیے۔



شکل 11.44

11.8.2 مکعب

مکعب، مکعب نما کی ایک مخصوص مثال ہے جس میں $l = b = h$،

اس لیے مکعب کا حجم $= l \times l \times l = l^3$

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل مکعبوں کا حجم معلوم کیجیے:

(a) جس کے ضلع کی لمبائی 4 سینٹی میٹر ہو (b) 1.5 میٹر ہو۔

اسے کیجیے

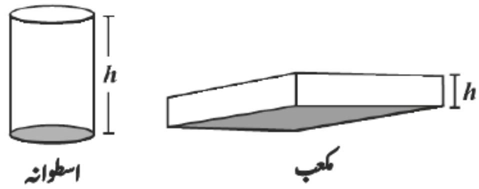
یکساں سائز والے 64 مکعبوں کو آپ جتنے طریقوں سے ترتیب دے سکتے ہیں ترتیب دیتے ہوئے کعب نما بنائیے۔ ہر ایک شکل کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔ کیا یکساں حجم والی ٹھوس چیزوں کا سطحی رقبہ یکساں ہوتا ہے؟

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

ایک کمپنی بسکٹ بیچتی ہے۔ بسکٹوں کو پیک کرنے کے لیے کعب نما ڈبوں کا استعمال کیا جا رہا ہے:

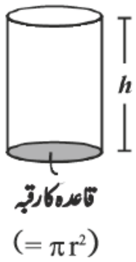
ڈبہ = 20 سینٹی میٹر × 8 سینٹی میٹر × 3 سینٹی میٹر A→، ڈبہ = 10 سینٹی میٹر × 12 سینٹی میٹر × 4 سینٹی میٹر B→۔ ان میں سے کس قسم کے ڈبے کمپنی کے لیے فائدہ مند ہوں گے؟ کیوں؟ کیا آپ ایسے کسی اور شکل کے ڈبے کا مشورہ (سجھاؤ) دے سکتے ہیں جس کا حجم ڈبہ کے برابر ہو لیکن اس کے مقابلہ میں زیادہ فائدہ مند ہو۔

11.8.3 اسطوانہ



ہم جانتے ہیں کہ کعب نما کا حجم اس کے قاعدہ کے رقبہ اور اونچائی کے حاصل ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔ کیا اسی طرح سے ہم اسطوانہ کا حجم بھی معلوم کر سکتے ہیں؟

کعب نما کی طرح اسطوانہ میں بھی ایک قاعدہ اور اوپری سطح ہوتی ہے۔ جو ایک دوسرے کے متماثل اور متوازی ہوتے ہیں۔ کعب نما کی طرح اس کی خمیدہ سطح قاعدہ پر عمود ہوتی ہے۔



اس لیے   کعب نما کا حجم = قاعدہ کا رقبہ × اونچائی

$= l \times b \times h = lbh$

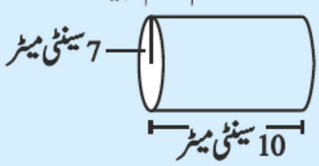
اسطوانہ کا حجم = اونچائی × قاعدہ کا رقبہ

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

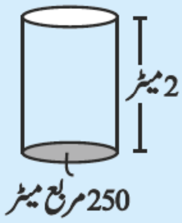
کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل اسطوانوں کا حجم معلوم کیجیے۔

(i)



(ii)



11.9 حجم اور گنجائش

ان دو لفظوں میں زیادہ فرق نہیں ہے۔

(a) کسی شے کے ذریعہ گھری ہوئی جگہ کی مقدار اس کا حجم کہلاتا ہے۔

(b) کسی برتن میں بھری گئی شے کی مقدار اس کی گنجائش کہلاتی ہے۔

نوٹ : اگر کسی پانی کی ٹنکی میں 100 مکعب سینٹی میٹر پانی بھرا جا سکتا ہے تو اس ٹنکی کی گنجائش 100 مکعب سینٹی میٹر ہے۔

گنجائش کو لیٹروں میں بھی ناپا جاتا ہے۔ لیٹر اور مکعب سینٹی میٹر میں مندرجہ ذیل رشتہ ہے:

1 ملی لیٹر = 1 مکعب سینٹی میٹر، 1 لیٹر = 1000 مکعب سینٹی میٹر۔ اس لیے، 1 مکعب میٹر = 1000000 مکعب سینٹی میٹر = 1000 لیٹر

مثال 8 : ایک ایسے کعب نما کی اونچائی معلوم کیجیے جس کا حجم 275 مکعب سینٹی میٹر اور قاعدہ کا رقبہ 25 مربع سینٹی میٹر ہے۔

حل : کعب نما کا حجم = اونچائی × قاعدہ کا رقبہ

اس لیے کعب نما کی اونچائی = $\frac{\text{کعب نما کا حجم}}{\text{قاعدہ کا رقبہ}}$

$\frac{275}{25} = 11$ سینٹی میٹر

اس طرح کعب نما کی اونچائی 11 سینٹی میٹر ہے۔

مثال 9 : ایک کعب نما گودام کی پیائش 30 میٹر × 40 میٹر × 60 میٹر ہے۔ اس کے اندر کتنے کعب نما ڈبے رکھے جاسکتے ہیں، اگر ایک ڈبے کا حجم 0.8 مکعب میٹر ہے؟

حل : ایک ڈبے کا حجم = 0.8 مکعب میٹر

گودام کا حجم = $30 \times 40 \times 60 = 72000$ مکعب میٹر

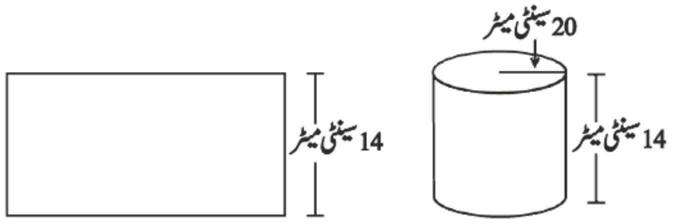
گودام کے اندر رکھے جاسکنے والے ڈبوں کی تعداد = $\frac{\text{گودام کا حجم}}{\text{ایک ڈبے کا حجم}}$

$= \frac{60 \times 40 \times 30}{0.8} = 90000$

اس طرح گودام کے اندر رکھے جاسکنے والے ڈبوں کی تعداد 90,000 ہے۔

مثال 10 : 14 سینٹی میٹر چوڑائی والے ایک مستطیل نما کاغذ کو چوڑائی کے ہمراہ موڑ کر 20 سینٹی میٹر نصف قطر والا ایک اسطوانہ بنایا اسطوانہ کا حجم معلوم کیجیے (شکل 11.45) (π کے لیے $\frac{22}{7}$ لیجیے)

حل : کاغذ کو چوڑائی کے ہمراہ موڑ کر اسطوانہ کو بنایا جارہا ہے۔ اس لیے کاغذ کی چوڑائی اسطوانہ کی اونچائی ہوگی اور اسطوانہ کا نصف قطر 20 سینٹی میٹر ہوگا



شکل 11.45

اسطوانہ کی اونچائی = $h = 14$ سینٹی میٹر

نصف قطر = $r = 20$ سینٹی میٹر

اسطوانہ کا حجم = $V = \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14 = 17600$ مکعب سینٹی میٹر

اس لیے استوانہ کا حجم = 17600 مکعب سینٹی میٹر ہے

مثال 11 : 4 سینٹی میٹر × 11 سینٹی میٹر پیمائش والے مستطیل نما کاغذ کے ٹکڑے کو بغیر ایک دوسرے کے اوپر نیچے کیے موڑ کر ایک 4 سینٹی میٹر اونچائی کا استوانہ بنایا گیا ہے۔ استوانہ کا حجم معلوم کیجیے۔

حل : کاغذ کی لمبائی استوانہ کے قاعدہ کا محیط بن جاتی ہے اور چوڑائی اونچائی بن جاتی ہے۔

مان لیجیے استوانہ کا نصف قطر = r اور اونچائی = h

استوانہ کے قاعدہ کا محیط = $2\pi r = 11$

یا $2\times\frac{22}{7}\times r = 11$

اس لیے r = $\frac{7}{4}$ سینٹی میٹر

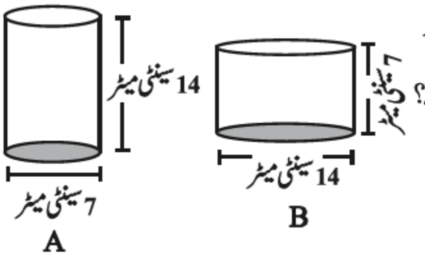
استوانہ کا حجم = $V = \pi r^2 h$

$\frac{22}{7}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times 4$ مکعب سینٹی میٹر = 38.5 مکعب سینٹی میٹر

اس لیے استوانہ کا حجم 38.5 مکعب سینٹی میٹر

مشق 11.4

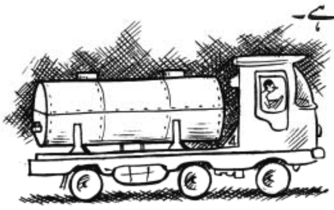
1. آپ کو ایک استوانہ ٹینک دیا ہوا ہے، کس صورت حال میں آپ اس کا سطحی رقبہ معلوم کریں گے اور کس صورت میں حجم۔
   (a) یہ معلوم کرنے کے لیے کہ اس میں کتنا پانی رکھا جا سکتا ہے۔
   (b) اس کا پلاسٹر کرنے کے لیے مطلوبہ سیمنٹ کی بوریوں کی تعداد
   (c) اس کے پانی سے بھرے جانے والے چھوٹے ٹینکوں کی تعداد



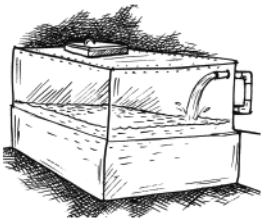
2. استوانہ A کا قطر 7 سینٹی میٹر اور اونچائی 14 سینٹی میٹر ہے۔ استوانہ B کا قطر 14 سینٹی میٹر اور اونچائی 7 سینٹی میٹر ہے۔ تحسیب کیے بنا کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان دونوں میں کس کا حجم زیادہ ہے؟ دونوں استوانوں کا حجم معلوم کرتے ہوئے اس کی تصدیق کیجیے۔ جانچ کیجیے کہ کیا زیادہ حجم والے استوانہ کا سطحی رقبہ بھی زیادہ ہے؟
3. ایک ایسے کعب نما کی اونچائی معلوم کیجیے جس کے قاعدہ کا رقبہ 180 مربع سینٹی میٹر اور جس کا حجم 900 مکعب سینٹی میٹر ہے؟
4. ایک کعب نما کے ابعاد 30 سینٹی میٹر × 54 سینٹی میٹر × 60 سینٹی میٹر ہیں۔ اس کعب نما کے اندر 6 سینٹی میٹر ضلع والے کتنے چھوٹے مکعب رکھے جا سکتے ہیں۔

5. ایک ایسے استوانہ کی اونچائی معلوم کیجیے جس کا حجم 1.54 مکعب سینٹی میٹر اور جس کے قاعدہ کا قطر 140 سینٹی میٹر ہے؟

6. ایک دودھ کا ٹینک استوانہ کی شکل کا ہے جس کا نصف قطر 1.5 میٹر اور لمبائی 7 میٹر ہے۔
اس ٹینک میں بھرے جا سکنے والے دودھ کی مقدار لیٹر میں معلوم کیجیے؟



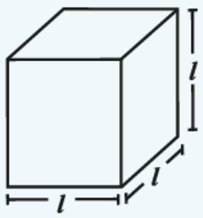
7. اگر کسی مکعب کے ہر کنارے کو دوگنا کر دیا جائے تو
(i) اس کے سطحی رقبہ میں کتنے گنا کا اضافہ ہوگا؟
(ii) اس کے حجم میں کتنے گنا کا اضافہ ہوگا؟



8. ایک مکعب نما حوض (Reservoir) کے اندر 60 لیٹر فی منٹ کی شرح سے پانی بھرا جا رہا ہے اگر حوض کا حجم 108 مکعب میٹر ہے تو معلوم کیجیے کہ اس حوض کو بھرنے میں کتنے گھنٹے لگیں گے؟

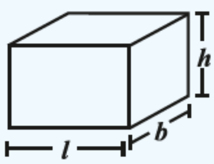
ہم نے کیا سیکھا؟

1. رقبہ
(i) ان کے درمیان کا عمودی فاصلہ × متوازی ضلع کی لمبائیوں کا حاصل جمع کا نصف = منحرف کا رقبہ
(ii) وتروں کے حاصل ضرب کا آدھا = معین کا رقبہ

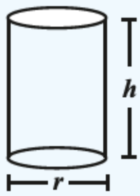


2. ایک ٹھوس کا سطحی رقبہ اس کے رخوں کے رقبوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے
3. مکعب نما کا سطحی رقبہ = $2(lb + bh + hl)$
مکعب = $6\,l^2$

استوانہ کا سطحی رقبہ = $2\pi r(r + h)$ =



4. کسی ٹھوس کے ذریعہ گھری ہوئی جگہ کی مقدار اس کا حجم کہلاتی ہے۔
5. حجم
مکعب نما کا حجم = $l \times b \times h$
مکعب کا حجم = l مکعب = l^3
استوانہ کا حجم = $\pi r^2 h$



6. (i) 1 مکعب سینٹی میٹر = 1 ملی لیٹر
(ii) 1 لیٹر = 1000 مکعب سینٹی میٹر
(iii) 1 مکعب میٹر = 1000000 مکعب سینٹی میٹر = 1000 لیٹر

باب

12

قوت نما اور قوتیں

48 7CH12

12.1 تعارف

کیا آپ جانتے ہیں؟

زمین کی کمیت 5,970,000,000,000,000,000,000,000 کلوگرام ہے۔

ہم پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں کہ اس قسم کی بڑی تعداد کو قوت نما کا استعمال کرتے ہوئے زیادہ آسانی سے کس طرح لکھ سکتے ہیں، جیسے 5.97×10^{24} کلوگرام۔

ہم 10^{24} کو 10 کی قوت 24 پڑھتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

اور $2^m = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 \times 2 \ldots$ (m مرتبہ)

قوت نما

اساس

ہم کہتے ہیں:

10 کی قوت 24 ہے۔

آیئے اب معلوم کرتے ہیں کہ 2^{-2} کس کے برابر ہے؟

قوت نما ایک منفی صحیح عدد ہے۔

12.2 منفی قوت نما والی قوتیں

آپ جانتے ہیں کہ $10^2 = 10 \times 10 = 100$

$$10^1 = 10 = \frac{100}{10}$$

$$10^0 = 1 = \frac{10}{10}$$

$$10^{-1} = ?$$

جیسے جیسے قوت نما 1 کم ہوتا ہے نئی قدر پچھلی قدر کی $\frac{1}{10}$ ہو جاتی ہے۔

مذکورہ بالا نمونے کو آگے بڑھاتے ہوئے $10^{-1} = \frac{1}{10}$

اس طرح سے $10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

10^{-10} کس کے برابر ہے؟

مندرجہ ذیل پر غور کیجیے۔

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9 = \frac{27}{3}$$

$$3^1 = 3 = \frac{9}{3}$$

$$3^0 = 1 = \frac{3}{3}$$

پچھلے عدد کو اساس 3 سے تقسیم کیا گیا ہے۔

اس طرح درج بالا نمونہ کو دیکھ کر ہم کہتے ہیں

$$3^{-1} = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^2} \div 3 = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$$

اسی طریقہ سے آپ 2^{-2} کی قدر معلوم کر سکتے ہیں۔

ہمارے پاس ہے،

$10^2 = \frac{1}{10^{-2}}$ یا $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$

$10^3 = \frac{1}{10^{-3}}$ یا $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$

$3^2 = \frac{1}{3^{-2}}$ یا $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ وغیرہ۔

عمومی طور پر، ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی غیر صفر عدد a کے لیے $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$، جہاں m ایک مثبت صحیح عدد ہے، a^m کا ضربی معکوس a^{-m} ہے۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل کا ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

(i) 2^{-4} (ii) 10^{-5} (iii) 7^{-2} (iv) 5^{-3} (v) 10^{-100}

ہم پڑھ چکے ہیں کہ 1425 قسم کے اعداد کو ہم کس طرح قوت نماؤں کا استعمال کرتے ہوئے پھیلی ہوئی شکل میں لکھتے ہیں

$1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

آیئے دیکھیں کہ ہم 1425.36 کو پھیلی ہوئی شکل میں کس طرح لکھ سکتے ہیں۔

ہمارے پاس ہے $1425.36 = 1 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$

$= 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5 \times 1 + 3 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}$

$10^{-1} = \frac{1}{10}$، $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

کوشش کیجیے

قوت نماؤں کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل اعداد کو پھیلایئے۔

(i) 1025.63 (ii) 1256.249

12.3 قوت نما کے قوانین

ہم مطالعہ کر چکے ہیں کہ کسی بھی غیر صحیح صفر عدد a کے لیے $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ہے ان میں m اور n طبعی اعداد ہیں۔ اگر قوت نما منفی ہوں تو تب بھی کیا یہ اصول درست ہے؟ آیئے معلوم کریں۔

(i) ہم جانتے ہیں کہ $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ اور $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

کسی بھی غیر صفر صحیح عدد a کے لیے $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

اس لیے $2^{-3} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^3 \times 2^2}$

$= \frac{1}{2^{3+2}} = 2^{-5}$

–3 اور –2 دونوں قوت نماؤں کا حاصل جمع –5 ہے۔

(ii) $(-3)^{-4} \times (-3)^{-3}$ کو لیجیے

$(-3)^{-4} \times (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^4} \times \frac{1}{(-3)^3}$

$= \frac{1}{(-3)^4 \times (-3)^3} = \frac{1}{(-3)^{4+3}} = (-3)^{-7}$

$(-4) + (-3) = -7$

(iii) اب غور کیجیے $5^{-2} \times 5^4$ پر غور کیجیے

$5^{-2} \times 5^4 = \frac{1}{5^2} \times 5^4 = \frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^{(2)}$

$(-2) + 4 = 2$

ساتویں جماعت میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ کسی بھی غیر صفر صحیح عدد a کے لیے $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ہوتا ہے۔ یہاں m اور n طبعی اعداد ہیں اور $m > n$

(iv) اب $(-5)^{-4} \times (-5)^2$ پر غور کیجیے

$$(-5)^{-4} \times (-5)^2 = \frac{1}{(-5)^4} \times (-5)^2 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5)^4 \times (-5)^{-2}}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{4-2}} = (-5)^{(-2)} \quad (-4) + 2 = -2$$

عمومی طور پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی غیر صفر صحیح عدد a کے لیے جہاں m اور n صحیح عدد ہیں $a^m \times a^n = a^{m+n}$

کوشش کیجیے

مختصر کیجیے اور قوت نما کی شکل میں لکھیے

(i) $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$ (ii) $p^3 \times p^{-10}$ (iii) $3^2 \times 3^{-5} \times 3^6$

اسی طرح آپ مندرجہ ذیل قوت نما کے اصولوں کی تصدیق کر سکتے ہیں جہاں a اور b غیر صفر صحیح اعداد ہیں نیز m اور n صحیح اعداد ہیں۔

(i) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(iv) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (v) $a^0 = 1$

ساتویں جماعت میں آپ نے ان اصولوں کو صرف مثبت قوت نما کے لیے پڑھا ہے۔

آیئے مندرجہ بالا قوت نما اصولوں کو استعمال کرتے ہوئے کچھ مثالوں کو حل کرتے ہیں

مثال 1 : مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) 2^{-3} (ii) $\frac{1}{3^{-2}}$

حل:

(i) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

مثال 2 : مختصر کیجیے

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10}$ (ii) $2^5 \div 2^{-6}$

حل :

(i) $(-4)^5 \times (-4)^{-10} = (-4)^{(5-10)} = (-4)^{-5} = \frac{1}{(-4)^5}$ $\left(a^m \times a^n = a^{m+n},\ a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right)$

(ii) $2^5 \div 2^{-6} = 2^{5-(-6)} = 2^{11}$ $(a^m \div a^n = a^{m-n})$

مثال 3 : 4^{-3} کو اساس 2 کی قوت کی شکل میں لکھیے۔

حل : ہمارے پاس ہے $4 = 2 \times 2 = 2^2$

اس لیے $(4)^{-3} = (2 \times 2)^{-3} = (2^2)^{-3} = (2)^{2\times(-3)} = 2^{-6}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

مثال 4 : مختصر کیجیے اور جواب کو قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5}$ (ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3}$

(iii) $\frac{1}{8} \times (3)^{-3}$ (iv) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$

حل :

(i) $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5} = (2^{5-8})^5 \times 2^{-5} = (2^{-3})^5 \times 2^{-5} = 2^{-15-5} = 2^{-20}$ $\frac{1}{2^{20}}$

(ii) $(-4)^{-3} \times (5)^{-3} \times (-5)^{-3} = [(-4) \times 5 \times (-5)]^{-3} = [100]^{-3} = \frac{1}{100^3}$

[اصول $a^m \times b^m = (ab)^m$ اور $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ کا استعمال کرتے ہوئے]

(iii) $\frac{1}{8} \times (3)^{-3} = \frac{1}{2^3} \times (3)^{-3} = 2^{-3} \times 3^{-3} = (2 \times 3)^{-3} = 6^{-3} = \frac{1}{6^3}$

(iv) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = (-1 \times 3)^4 \times \frac{5^4}{3^4} = (-1)^4 \times 3^4 \times \frac{5^4}{3^4}$

$= (-1)^4 \times 5^4 = 5^4$ $[(-1)^4 = 1]$

مثال 5 : m معلوم کیجیے جب کہ $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

حل: $(-3)^{m+1} \times (-3)^5 = (-3)^7$

$(-3)^{m+1+5} = (-3)^7$

$(-3)^{m+6} = (-3)^7$

دونوں جانب قوت نماؤں کے اساس یکساں ہیں جو 1 اور 1– سے مختلف ہیں۔ اس لیے ان کی قوت نما برابر ہونی چاہیے۔

اس لیے $m + 6 = 7$

یا $m = 7 - 6 = 1$

مثال 6 : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ کی قدر معلوم کیجیے

$a^n = 1$ ہوگا اگر $n = 0$ ہے۔ یہ a کے لیے کام کرے گا۔
$a = 1$ کے لیے $1^1 = 1^2 = 1^3 = \ldots = 1$
یا $(1)^n = 1$ لامحدود n کے لیے، $a = -1$ کے لیے
$(-1)^0 = (-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^{-2} = \ldots = 1$
یا $(-1)^p = 1$ کسی بھی جفت صحیح عدد p کے لیے۔

حل : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

مثال 7 : مختصر کیجیے

(i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

عام طور سے $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$

حل:

(i) $$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\} \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left\{\frac{1^{-2}}{3^{-2}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right\} \div \frac{1^{-2}}{4^{-2}}$$

$$= \left\{\frac{3^2}{1^2} - \frac{2^3}{1^3}\right\} \div \frac{4^2}{1^2} = \{9 - 8\} \div 16 = \frac{1}{16}$$

(ii) $$\left(\frac{5}{8}\right)^{-7} \times \left(\frac{8}{5}\right)^{-5} = \frac{5^{-7}}{8^{-7}} \times \frac{8^{-5}}{5^{-5}} = \frac{5^{-7}}{5^{-5}} \times \frac{8^{-5}}{8^{-7}} = 5^{(-7)-(-5)} \times 8^{(-5)-(-7)}$$

$$= 5^{-2} \times 8^2 = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$$

مشق 12.1

.1 جانچ کیجیے۔

(i) 3^{-2} (ii) $(-4)^{-2}$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

.2 مختصر کیجیے اور جواب کو مثبت قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) $(-4)^5 \div (-4)^8$ (ii) $\left(\frac{1}{2^3}\right)^2$

(iii) $(-3)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4$ (iv) $(3^{-7} \div 3^{-10}) \times 3^{-5}$ (v) $2^{-3} \times (-7)^{-3}$

.3 مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $(3^0 + 4^{-1}) \times 2^2$ (ii) $(2^{-1} \times 4^{-1}) \div 2^{-2}$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

(iv) $(3^{-1}+4^{-1}+5^{-1})^{0}$ (v) $\left\{\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2}\right\}^{2}$

.4 قدر معلوم کیجیے (i) $\frac{8^{-1}\times 5^{3}}{2^{-4}}$ (ii) $(5^{-1}\times 2^{-1})\times 6^{-1}$

.5 m کی قدر معلوم کیجیے جس کے لیے $5^{m}\div 5^{-3}=5^{1}$

.6 قدر معلوم کیجیے (i) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}^{-1}$ (ii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-7}\times\left(\frac{8}{5}\right)^{-4}$

.7 مختصر کیجیے

(i) $\frac{25\times t^{-4}}{5^{-3}\times 10\times t^{-8}}$ $(t\neq 0)$ (ii) $\frac{3^{-5}\times 10^{-5}\times 125}{5^{-7}\times 6^{-5}}$

12.4 چھوٹے اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کرنے کے لیے قوت نماؤں کا استعمال

مندرجہ ذیل حقیقتوں پر غور کیجیے۔

.1 زمین سے سورج کا فاصلہ 150,000,000,000 میٹر ہے۔

.2 روشنی کی رفتار 300,000,000 میٹر فی سیکنڈ ہے۔

.3 ساتویں کلاس کی حساب کی کتاب کی موٹائی 20 ملی میٹر ہے۔

.4 RBC کا اوسط قطر 0.000007 ملی میٹر ہے۔

.5 انسان کے بال کی موٹائی 0.005 سینٹی میٹر سے 0.01 سینٹی میٹر تک ہوتی ہے۔

.6 زمین سے چاند کا فاصلہ تقریباً 384,467,000 میٹر ہے۔

.7 ایک پودے کے خلیہ کا سائز 0.00001275 میٹر ہے۔

.8 سورج کا اوسطاً نصف قطر 695000 کلومیٹر ہے۔

.9 خلائی شٹل ٹھوس راکٹ بوسٹر میں پروپیلنٹ کی کمیت 503600 کلوگرام ہے۔

.10 کاغذ کے ایک ٹکڑے کی موٹائی 0.0016 سینٹی میٹر ہے۔

.11 کمپیوٹر کی چپ کے ایک تار کا قطر 0.000003 میٹر ہے۔

.12 ماؤنٹ ایوریسٹ کی اونچائی 8848 میٹر ہے۔

غور کیجیے کہ یہاں کچھ ایسے اعداد ہیں جنھیں ہم، 6,95,000 کلومیٹر، 8848 میٹر، 20 ملی میٹر پڑھ سکتے ہیں۔ کچھ بڑے اعداد ہیں جیسے 150,000,000,000 میٹر اور کچھ بہت چھوٹے اعداد جیسے 0.000007 میٹر ہوتے ہیں۔

مندرجہ بالا حقیقتوں کی بنیاد پر، بہت بڑے اور بہت چھوٹے اعداد کو پہچانیے اور دی ہوئی جدول میں لکھیے۔

بہت بڑے اعداد	بہت چھوٹے اعداد
149,600,000,000 میٹر	0.000007 میٹر
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------
---------------	---------------

پچھلی جماعت میں ہم معلوم کر چکے ہیں کہ کسی بہت بڑے عدد کو معیاری شکل میں کس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر: $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$

آیئے اب 0.000007 کو معیاری شکل میں ظاہر کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

جیسے $0.000007 = \frac{7}{1000000} = \frac{7}{10^6} = 7 \times 10^{-6}$

اعشاریہ بائیں طرف سے گیارہویں مقام پر چلا گیا۔

0.000007 میٹر $= 7 \times 10^{-6}$

اسی طرح ایک کاغذ کی موٹائی پر غور کیجیے جو کہ 0.0016 سینٹی میٹر ہے

$$0.0016 = \frac{16}{10000} = \frac{1.6 \times 10}{10^4} = 1.6 \times 10 \times 10^{-4}$$

$$= 1.6 \times 10^{-3}$$

اعشاریہ دائیں جانب سے چھٹے مقام پر چلا گیا ہے۔

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کاغذ کی موٹائی 1.6×10^{-3} سینٹی میٹر ہے۔

دوبارہ غور کیجیے

اعشاریہ دائیں طرف سے تیسری مقام پر چلا گیا ہے۔

کوشش کیجیے

.1 مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں لکھیے۔

(i) 0.000000564 (ii) 0.0000021 (iii) 21600000 (iv) 15240000

.2 دی گئی تمام حقیقتوں کو معیاری شکل میں لکھیے۔

12.4.1 بہت بڑے اعداد اور بہت چھوٹے اعداد کا موازنہ

سورج کا قطر 1.4×10^9 میٹر اور زمین کا قطر 1.2756×10^7 میٹر ہے۔

مان لیجیے آپ ان کا موازنہ کرنا چاہتے ہیں۔

سورج کا قطر = 1.4×10^9 میٹر

زمین کا قطر = 1.2756×10^7 میٹر

اس لیے = $\dfrac{1.4 \times 10^9}{1.2756 \times 10^7} = \dfrac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756} = \dfrac{1.4 \times 100}{1.2756}$ جو تقریباً 100 ہے

اس لیے سورج کا قطر، زمین کے قطر کا تقریباً 100 گنا ہے۔

سرخ خون کے خلیے (RBC) کا سائز 0.000007 میٹر ہے اور پودوں کے خلیے کا سائز 0.00001275 میٹر ہے۔ آیئے ان کی پیمائشوں کا موازنہ کریں۔

RBC کا سائز = $0.000007 = 7 \times 10^{-6}$ میٹر

پودوں کے خلیوں کا سائز = $0.00001275 = 1.275 \times 10^{-5}$ میٹر

اس لیے، $\dfrac{7 \times 10^{-6}}{1.275 \times 10^{-5}} = \dfrac{7 \times 10^{-6-(-5)}}{1.275} = \dfrac{7 \times 10^{-1}}{1.275} = \dfrac{0.7}{1.275} = \dfrac{0.7}{1.3} = \dfrac{1}{2}$ (تقریباً)

اس لیے سرخ خون کا خلیہ (RBC) سائز میں پودوں کے خلیوں کے سائز کا تقریباً نصف ہے۔

زمین کی کمیت 5.97×10^{24} کلوگرام اور چاند کی کمیت 7.35×10^{22} کلوگرام ہے۔ دونوں کی کل کمیت کیا ہوگی؟

کل کمیت = 5.97×10^{24} کلوگرام + 7.35×10^{22} کلوگرام

$= 5.97 \times 100 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= 597 \times 10^{22} + 7.35 \times 10^{22}$

$= (597 + 7.35) \times 10^{22}$

$= 604.35 \times 10^{22}$ کلوگرام

جب ہم معیاری شکل میں لکھے اعداد کو جمع کرتے ہیں تو ہم انھیں 10 کی یکساں قوت نماؤں میں بدلتے ہیں۔

سورج اور زمین کے درمیان کا فاصلہ 1.496×10^{11} میٹر اور زمین اور چاند کے درمیان کا فاصلہ 3.84×10^8 میٹر ہے۔

سورج گرہن کے دوران چاند، زمین اور سورج کے درمیان میں آجاتا ہے۔

اُس وقت چاند اور سورج کے درمیان کا فاصلہ کتنا ہوتا ہے۔

سورج اور زمین کے درمیان کا فاصلہ = 1.496×10^{11} میٹر

زمین اور چاند کے درمیان کا فاصلہ = 3.84×10^{8} میٹر

سورج اور چاند کے درمیان کا فاصلہ = $1.496 \times 10^{11} - 3.84 \times 10^{8}$

$= 1.496 \times 1000 \times 10^{8} - 3.84 \times 10^{8}$

$= (1496 - 3.84) \times 10^{8}$ میٹر $= 1492.16 \times 10^{8}$ میٹر

ایک مرتبہ پھر ہمیں انھیں قوت نماؤں کی مدد سے اعداد کو معیاری شکل میں بدلنے کی ضرورت ہے۔

مثال 8 : مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) 0.000035 (ii) 4050000

حل : (i) $0.000035 = 3.5 \times 10^{-5}$ (ii) $4050000 = 4.05 \times 10^{6}$

مثال 9 : مندرجہ ذیل اعداد کو ان کی اصل (عام) شکل میں لکھیے ۔

(i) 3.52×10^{5} (ii) 7.54×10^{-4} (iii) 3×10^{-5}

حل : (i) $3.52 \times 10^{-5} = 3.52 \times 100000 = 352000$

(ii) $7.54 \times 10^{-4} = \frac{7.54}{10^4} = \frac{7.54}{10000} = 0.000754$

(iii) $3 \times 10^{-5} = \frac{3}{10^5} = \frac{3}{100000} = 0.00003$

مشق 12.2

1. مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں لکھیے ۔

(i) 0.0000000000085 (ii) 0.00000000000942

(iii) 6020000000000000 (iv) 0.00000000837

(v) 31860000000

2. مندرجہ ذیل اعداد کو ان کی اصل (عام) شکل میں لکھیے ۔

(i) 3.02×10^{-6} (ii) 4.5×10^{4} (iii) 3×10^{-8}

(iv) 1.0001×10^{9} (v) 5.8×10^{12} (vi) 3.61492×10^{6}

3. مندرجہ ذیل بیانات میں دکھائی دینے والے اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کیجیے

(i) ایک مائیکرون $\frac{1}{1000000}$ میٹر کے برابر ہوتا ہے۔

(ii) ایک الیکٹرون کا چارج 0.000,000,000,000,000,000,16 کولمب ہوتا ہے۔

(iii) بیکٹیریا کا سائز 0.0000005 میٹر ہے۔

(iv) پودوں کے خلیہ کا سائز 0.00001275 میٹر ہے۔

(v) ایک موٹے کاغذ کی موٹائی 0.07 ملی میٹر ہے۔

4. ایک ڈھیر میں 5 کتابیں ہیں جن میں سے ہر ایک کی موٹائی 20 ملی میٹر ہے اور کاغذ کی 5 شیٹ ہیں جن میں سے ہر ایک کی موٹائی 0.016 ملی میٹر ہے۔ اس ڈھیر کی کل موٹائی معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1. منفی قوت نما والے اعداد مندرجہ ذیل قوانین کا اتباع کرتے ہیں۔

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(d) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (e) $a^0 = 1$ (f) $\frac{a^m}{a^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. منفی قوت کا استعمال کرتے ہوئے سب سے چھوٹے اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

نوٹ

باب

13

راست اور معکوس تناسب

4817CH13

13.1 تعارف

موہن نے اپنے اور اپنی بہن کے لیے چائے بنائی۔ اس نے 300 ملی لیٹر پانی، 2 چمچہ چینی، 1 چمچہ چائے کی پتی اور 50 ملی لیٹر دودھ کا استعمال کیا۔ اگر وہ پانچ لوگوں کے لیے چائے بنائے تو اسے ہر ایک چیز کی کتنی مقدار میں ضرورت پڑے گی؟

اگر دو طالب علم کسی اسمبلی کے لیے کرسیوں کو ترتیب سے رکھنے میں 20 منٹ کا وقت لگاتے ہیں تو اسی کام کو کرنے میں 5 طالب علم کتنا وقت لیں گے؟

ہمیں اپنی روز مرہ کی زندگی میں اکثر ایسی صورت حال کا سامنا کرنا پڑتا ہے جہاں ہمیں یہ دیکھنا ضروری ہو جاتا ہے کہ ایک مقدار میں تبدیلی ہونے سے دوسری مقدار میں بھی تبدیلی ہو رہی ہے۔

مثال کے طور پر:

(i) اگر خریدی گئی چیزوں کی تعداد میں اضافہ ہوتا ہے تو ان کی کل قیمت میں بھی اضافہ ہوتا ہے۔

(ii) بینک میں جتنی زیادہ رقم جمع کرائی جائے گی اتنا ہی زیادہ سود حاصل ہوگا۔

(iii) جب گاڑی کی رفتار میں اضافہ ہوتا ہے تو اسی فاصلہ کو طے کرنے میں لیے گئے درکار وقت میں کمی ہو جاتی ہے۔

(iv) ایک دیے ہوئے کام کے لیے جتنے زیادہ لوگ کام پر لگائے جائیں گے اتنا ہی اس کام کو پورا کرنے میں وقت کم لگے گا۔

غور کیجیے کہ ایک مقدار میں تبدیلی سے دوسری مقدار میں تبدیلی ہو رہی ہے۔

مزید ایسی پانچ صورت حال لکھیے جہاں ایک مقدار میں تبدیلی ہونے سے دوسری مقدار میں بھی تبدیلی ہوتی ہے۔

ہم ہر ایک ضروری چیز کی مقدار کس طرح معلوم کریں گے جن کی موہن کو ضرورت پڑے گی؟ یا پانچ طالب علموں کے ذریعے کام کو پورا کرنے میں استعمال ہونے والے وقت کو ہم کس طرح معلوم کریں گے؟

اس قسم کے سوالوں کے جواب دینے کے لیے، ہم کچھ تغیّر (Variation) کے تصورات کا مطالعہ کریں گے۔

13.2 راست تناسب

اگر 1 کلوگرام چینی کی قیمت 36 ₹ ہے تو 3 کلوگرام چینی کی قیمت کیا ہوگی؟ یہ 108₹ ہے۔

اسی طرح ہم 5 کلوگرام یا 8 کلوگرام چینی کی قیمت بھی معلوم کرسکتے ہیں۔ مندرجہ ذیل جدول کا مطالعہ کیجیے۔

×10 ×8 ×6 ×5 ×3

10	8	6	5	3	1	چینی کا وزن (کلوگرام میں)
			180	108	36	قیمت (روپیوں میں)

×3 ×5 ×6 ×8 ×10

غور کیجیے کہ جیسے جیسے چینی کے وزن میں اضافہ ہوتا ہے، اسی طرح قیمت میں بھی اضافہ ہوتا جاتا ہے جس سے ان کی نسبت مستقل رہتی ہے۔

ایک اور مثال دیکھیے۔ ایک کار 60 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں 4 لیٹر پٹرول استعمال کرتی ہے۔ تو وہ 12 لیٹر پٹرول میں کتنا فاصلہ طے کرے گی؟ اس کا جواب 180 کلومیٹر ہے۔ ہم نے اس کی تحسیب کیسے کی؟ چوں کہ دوسری حالت میں 12 لیٹر پٹرول یعنی 4 لیٹر کا تین گنا پٹرول استعمال ہوتا ہے اس لیے طے کیا گیا فاصلہ بھی 60 کلومیٹر کا 3 گنا ہوگا۔ دوسرے لفظوں میں جب پٹرول کا استعمال تین گنا ہوگا تو طے کیا گیا فاصلہ بھی پچھلے فاصلہ کا 3 گنا ہو جائے گا۔ مان لیجیے پٹرول کا استعمال x لیٹر ہے اور طے کیا گیا فاصلہ y کلومیٹر ہے تو اب مندرجہ ذیل جدول کو پورا کیجیے:

25	20	15	12	8	4	پٹرول (x) لیٹر میں
......	......	.....	180	.....	60	فاصلہ (y) کلومیٹر میں

ہم دیکھتے ہیں کہ جب x کی قدر میں اضافہ ہوتا ہے تو y کی قدر میں بھی اس طرح اضافہ ہوتا ہے اور اس طرح $\frac{x}{y}$ نسبت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے۔ یہ مستقل (مان لیجیے k) رہتا ہے۔ اس حالت میں یہ $\frac{1}{15}$ ہے (اس کی جانچ کیجیے!)

اگر $\frac{x}{y} = k$ یا $x = ky$ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ x اور y میں راست (سیدھا) تناسب ہے (یا وہ راست طور پر متناسب ہیں)۔

اس مثال میں $\frac{4}{60} = \frac{12}{180}$ ہے۔ جہاں 4 اور 12 استعمال شدہ پٹرول کی لیٹر میں مقداریں (x) ہیں اور 60 اور 180 کلومیٹر میں فاصلہ (y) ہیں اس لیے جب x اور y میں **راست تناسب** ہوتا ہے تو ہم $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ لکھ سکتے ہیں۔ [x کی قدروں x_1، x_2 کے لیے y کی بالترتیب قدریں y_1، y_2 ہیں]

پٹرول کی کھپت اور ایک کار کے ذریعہ طے کی گئی دوری ایک راست تناسب کی شکل ہے۔ اس لیے خرچ کی گئی کل رقم اور خریدی گئی اشیا کی تعداد بھی راست تناسب کی ایک مثال ہے۔

راست تناسب کی کچھ اور مثالیں لیجیے۔ جانچ کیجیے کہ کیا موہن [شروع کی مثال میں] 5 لوگوں کے لیے چائے بنانے میں 750 ملی لیٹر پانی، 5 چمچے چینی، $2\frac{1}{2}$ چمچے چائے کی پتی، 125 ملی لیٹر دودھ کا استعمال کرے گا۔ آیئے مندرجہ ذیل مثالوں (عملی کاموں) کی مدد سے راست تناسب کے تصور کو اور زیادہ واضح کرنے کی کوشش کریں۔

اسے کیجیے

(i)
- ایک گھڑی لیجیے اور اس کی منٹ والی سوئی کو 12 پر ٹھہرا دیجیے۔
- منٹ کی سوئی کے ذریعہ اپنی شروعاتی حالت سے گھومے گئے زاویہ اور گزرے ہوئے وقت کو مندرجہ ذیل جدول میں لکھیے۔

گزرا ہوا وقت (T) (منٹ میں)	(T_1) 15	(T_2) 30	(T_3) 45	(T_4) 60
گھوما گیا زاویہ (ڈگری میں)	(A_1) 90	(A_2)	(A_3)	(A_4) .....
$\frac{T}{A}$	.....	.....	.....	.....

T اور A کے بارے میں آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ کیا ان میں ساتھ ساتھ اضافہ ہوتا ہے؟

کیا $\frac{T}{A}$ ہر وقت یکساں رہتا ہے؟

کیا منٹ کی سوئی کے ذریعہ گھوما گیا زاویہ گزرے ہوئے وقت کے راست طور پر متناسب ہے؟ ہاں!

مندرجہ بالا جدول سے آپ یہ اندازہ کر سکتے ہیں

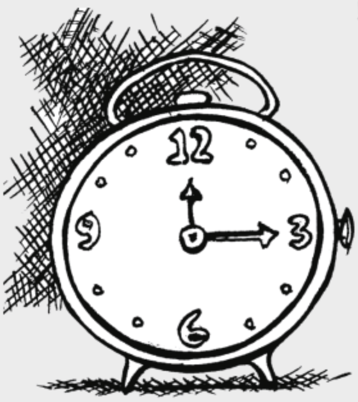
$A_1 : A_2 = T_1 : T_2$ کیوں کہ

$1 : 2 = 15 : 30 = T_1 : T_2$

$1 : 2 = 90 : 180 = A_1 : A_2$

جانچ کیجیے اگر $A_2 : A_3 = T_2 : T_3$ اور $A_3 : A_4 = T_3 : T_4$

آپ خود وقت کا اپنا وقفہ لے کر اس عمل کو دوہرا سکتے ہیں۔



(ii) اپنے دوست سے مندرجہ ذیل جدول کو بھرنے کے لیے کہیے اور بالترتیب اس کی عمر اور اس کی ماں کی عمر کا تناسب معلوم کرنے کے لیے بھی کہیے۔

	پانچ سال پہلے کی عمر	موجودہ عمر	پانچ سال بعد کی عمر
دوست کی عمر (F)			
ماں کی عمر (M)			
$\frac{F}{M}$			

آپ کیا دیکھتے ہیں؟

کیا F اور M میں ساتھ ساتھ اضافہ (یا کمی) ہوتا ہے؟ کیا $\frac{F}{M}$ ہر مرتبہ وہی رہتا ہے؟ نہیں!

آپ اس عمل کو اپنے دوسرے دوستوں کے ساتھ بھی دوہرا سکتے ہیں اور اپنے مشاہدوں کو درج کر سکتے ہیں۔

اس طرح یہ ضروری نہیں ہے کہ ساتھ ساتھ بڑھنے (یا کم ہونے) والے متغیر راست طور پر متناسب ہوں۔ مثال کے طور پر:

(i) انسانوں میں جسمانی تبدیلیاں وقت کے ساتھ ہوتی رہتی ہیں لیکن ضروری نہیں ہے کہ یہ پہلے سے طے شدہ نسبت میں ہو۔

(ii) لوگوں کے وزن اور لمبائی میں تبدیلی کسی خاص نسبت میں نہیں ہوتی۔

(iii) کسی درخت کی اونچائی اور اس کی شاخوں پر اُگنے والی پتیوں کی تعداد میں کوئی راست تعلق یا تناسب نہیں ہوتا ہے۔ راست تناسب کی مثالوں پر مزید غور کیجیے۔

کوشش کیجیے

1. مندرجہ ذیل جدول کو دیکھیے اور معلوم کیجیے کہ کیا x اور y راست تناسب ہیں۔

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

2. اصل زر = ₹ 1000، شرح = 8% سالانہ۔ مندرجہ ذیل جدول کو بھریے اور معلوم کیجیے کہ کس طرح کا سود (سود مفرد یا سود مرکب) مدت کے ساتھ راست تناسب میں بدلتا ہے۔

مدت	1 سال	2 سال	3 سال
سود مفرد (روپیوں میں)			
سود مرکب (روپیوں میں)			

$\frac{P \times r \times t}{100}$

$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - P$

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

اگر ہم مدت اور سود کی شرح کو مستقل رکھیں تو سود مفرد اصل زر کے ساتھ راست تناسب میں تبدیل ہوتا ہے۔ کیا یہی رشتہ سود مرکب کے ساتھ بھی ہوگا؟

آیئے اب کچھ حل کی ہوئی مثالوں پر غور کریں جہاں ہم راست تناسب کے تصور کا استعمال کریں گے۔

مثال 1: ایک خاص قسم کے 5 میٹر کپڑے کی قیمت ₹ 210 ہے۔ اسی قسم کے 2، 4، 10 اور 13 میٹر کپڑے کی قیمتوں کے لیے جدول بنائیے۔

حل : مان لیجیے کپڑے کی لمبائی x میٹر ہے اور اس کی قیمت (₹ میں) y ہے۔

x	2	4	5	10	13
y	y_2	y_3	210	y_4	y_5

جیسے جیسے کپڑے کی لمبائی میں اضافہ ہوتا ہے اس کی قیمت میں بھی اسی نسبت سے اضافہ ہوتا ہے۔ اس لیے یہ ایک راست تناسب کی حالت ہے۔

ہم $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ قسم کے تعلق کا استعمال کرتے ہیں۔

(i) یہاں $x_1 = 5$ ، $y_1 = 210$ اور $x_2 = 2$

اس لیے، $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ سے ہمیں $\frac{5}{210} = \frac{2}{y_2}$ حاصل ہوتا ہے یا $5y_2 = 2 \times 210$ یا $y_2 = \frac{2 \times 210}{5} = 84$

(ii) اگر $x_3 = 4$ تب $\frac{4}{y_3} = \frac{5}{210}$ یا $4 \times 210 = 5y_3$ یا $y_3 = \frac{4 \times 210}{5} = 168$

(کیا ہم یہاں $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ کا استعمال کر سکتے ہیں؟ کوشش کیجیے)

(iii) اگر $x_4 = 10$ ، تب $\frac{10}{y_4} = \frac{5}{210}$ یا $y_4 = \frac{10 \times 210}{5} = 420$

(iv) اگر $x_5=13$ تب $\frac{13}{y_5}=\frac{5}{210}$ یا $546=\frac{13\times 210}{5}=y_5$

[نوٹ کیجیے، کہ یہاں ہم $\frac{5}{210}$ کی جگہ $\frac{2}{84}$ یا $\frac{4}{168}$ یا $\frac{10}{420}$ کا استعمال بھی کر سکتے ہیں]

مثال 2 : 14 میٹر اونچے ایک بجلی کے کھمبے کی پرچھائیں 10 میٹر ہے۔ یکساں حالات میں اس درخت کی اونچائی معلوم کیجیے جس کی پرچھائیں 15 میٹر ہے۔

حل : مان لیجیے کہ درخت کی اونچائی x میٹر ہے۔ ہم درج ذیل جدول بناتے ہیں۔

شے کی اونچائی (میٹر میں)	14	x
پرچھائیں کی لمبائی (میٹر میں)	10	15

غور کیجیے کہ شے کی اونچائی جتنی زیادہ ہوگی، اس کی پرچھائیں کی لمبائی بھی اتنی ہی زیادہ ہوگی۔

اس لیے یہ راست تناسب کی حالت ہے، یعنی $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ سے

ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{14}{10}=\frac{x}{15}$ (کیوں؟)

یا $x=15\times\frac{14}{10}$

یا $x=\frac{14\times 3}{2}$

اس لیے $x=21$

اس طرح درخت کی اونچائی 21 میٹر ہے۔

متبادل طریقے سے ہم $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ کو $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ بھی لکھ سکتے ہیں

اس لیے $x_1:x_2=y_1:y_2$

یا $14:x=10:15$

اس لیے $10\times x=15\times 14$

یا $x=\frac{15\times 14}{10}=21$

مثال 3 : اگر موٹے کاغذ کے 12 اوراق کا وزن 40 گرام ہے تو کاغذ کے ایسے کتنے اوراق کا وزن $2\frac{1}{2}$ کلوگرام ہوگا؟

حل :

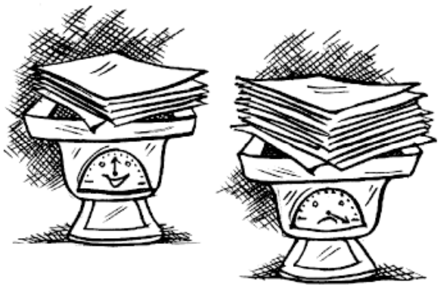
مان لیجیے کہ ان اوراق کی تعداد x ہے جن کا وزن $2\frac{1}{2}$ کلوگرام ہے۔ ہم مذکورہ بالا معلومات کو نیچے دیے گئے جدول میں لکھتے ہیں۔

شیٹوں کی تعداد	12	x
شیٹوں کا وزن (گرام میں)	40	2500

1 کلوگرام = 1000 گرام

$2\frac{1}{2}$ کلوگرام = 2500 گرام

اوراق کی تعداد زیادہ ہوگی تو اس کا وزن بھی اتنا ہی زیادہ ہوگا۔ اس لیے اوراق کی تعداد اور ان کا وزن ایک دوسرے کے راست تناسب میں ہیں۔



اس لیے، $\frac{x}{2500} = \frac{12}{40}$

یا $x = \frac{12 \times 2500}{40}$

یا $x = 750$

اس طرح سے مطلوبہ کاغذ کے اوراق کی تعداد = 750

متبادل طریقہ :

دو مقداریں x اور y جو راست تناسب میں تبدیل ہوتی ہیں $x = ky$ یا $k = \frac{x}{y}$ کا رشتہ ہوتا ہے۔

$$k = \frac{\text{اوراق کی تعداد}}{\text{گراموں میں اوراق کا وزن}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

اب x ان کاغذ کے اوراق کی تعداد ہے جن کا وزن $2\frac{1}{2}$ کلوگرام (2500 گرام) ہے۔

رشتہ $x = ky$ کا استعمال کر کے $x = 2500\times \frac{3}{10} = 750$

اس طرح، کاغذ کے 750 اوراق کا وزن $2\frac{1}{2}$ کلوگرام ہوگا۔

مثال 4 : ایک ریل گاڑی 75 کلومیٹر فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے چل رہی ہے۔

(i) وہ 20 منٹ میں کتنا فاصلہ طے کرے گی؟

(ii) 250 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں لگنے والا وقت معلوم کیجیے۔

حل : مان لیجیے کہ 20 منٹ میں طے کیا گیا فاصلہ (کلومیٹر میں) x ہے اور 250 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں لگنے والا وقت (منٹوں میں) y ہے۔

طے کیا گیا فاصلہ (کلومیٹر میں)	75	x	250
لگنے والا وقت (منٹ میں)	60	20	y

1 گھنٹہ = 60 منٹ

چوں کہ رفتار یکساں ہے اس لیے طے کیا گیا فاصلہ لگنے والے وقت کے متناسب ہوگا۔

(i) ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{x}{20} = \frac{75}{60}$

یا $x = \frac{75}{60} \times 20$

یا $x = 25$

اس لیے ریل گاڑی 20 منٹ میں 25 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرے گی۔

(ii) ساتھ ہی $\frac{250}{y} = \frac{75}{60}$

یا $y = \frac{250 \times 60}{75}$ 200 (منٹ) یا 3 گھنٹہ 20 منٹ

اس لیے 250 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے کے لیے 3 گھنٹہ 20 منٹ کا وقت درکار ہوگا۔

متبادل طور پر جب x معلوم ہے تو رشتہ $\frac{x}{20} = \frac{250}{y}$ سے y کو حاصل کیا جا سکتا ہے۔

> آپ جانتے ہیں کہ نقشہ ایک بہت بڑے علاقہ کا مختصر اظہار ہوتا ہے۔ نقشہ میں سب سے نیچے ایک پیمانہ (Scale) دیا ہوتا ہے۔ یہ پیمانہ اصل دوری اور نقشہ پر دکھائی گئی لمبائی کے رشتہ کو ظاہر کرتا ہے۔ اس طرح نقشہ پر دیا پیمانہ نقشہ پر دو نقطوں کا فاصلہ اور علاقہ کے اصل فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے۔
>
> اگر نقشہ پر 1 سینٹی میٹر اصل فاصلہ 8 کلومیٹر کو ظاہر کرتا ہے [یعنی پیمانہ 8 کلومیٹر : 1 سینٹی میٹر یا 1:800,000] تو اسی نقشہ پر 2 سینٹی میٹر 16 کلومیٹر کی اصل دوری کو ظاہر کرے گا۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقشہ کے پیمانہ کی بنیاد راست تناسب کے تصور پر قائم ہے۔

مثال 5 : ایک نقشہ کا پیمانہ 1:30000000 دیا ہوا ہے۔ نقشہ میں دو شہروں کے درمیان 4 سینٹی میٹر کا فاصلہ ہے۔ ان کے درمیان کا اصل فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل : مان لیجیے کہ نقشہ پر فاصلہ x سینٹی میٹر ہے اور اصل فاصلہ y سینٹی میٹر ہے۔

$$x : y = 1 : 30000000$$

یا $\frac{x}{y} = \frac{1}{3 \times 10^7}$

کیوں کہ $x = 4$ ہے اس لیے $\frac{4}{y} = \frac{1}{3 \times 10^7}$

یا $y = 4 \times 3 \times 10^7 = 12 \times 10^7$ سینٹی میٹر = 1200 کلومیٹر

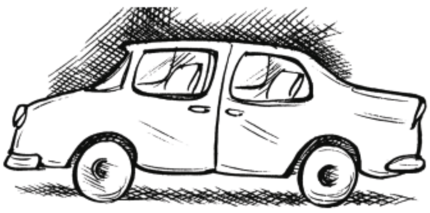
لہٰذا نقشہ پر 4 سینٹی میٹر کی دوری والے شہروں کے درمیان اصل دوری 1200 کلومیٹر ہے۔

اسے کیجیے

اپنے صوبہ کا ایک نقشہ لیجیے اس پر دیے ہوئے پیمانہ کو نوٹ کیجیے۔ پیمانہ کا استعمال کرتے ہوئے نقشہ پر کنھیں دو شہروں کے درمیان کا فاصلہ ناپیے۔ ان دونوں شہروں کا اصل فاصلہ بھی معلوم کیجیے۔

مشق 13.1

1. ایک ریلوے اسٹیشن کے قریب کار پارکنگ کے کرائے اس طرح ہیں:



4 گھنٹوں تک	₹ 60
8 گھنٹوں تک	₹ 100
12 گھنٹوں تک	₹ 140
24 گھنٹوں تک	₹ 180

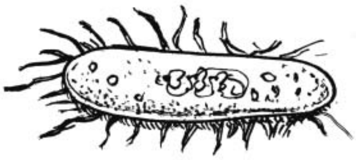
جانچ کیجیے کہ کیا کار پارکنگ کا کرایہ پارکنگ کے وقت سے سیدھے راست میں ہے۔

2. ایک روغن کے اصل آمیزہ کے 8 حصوں (Base) میں لال رنگ کے مادہ کا ایک حصہ ملایا جاتا ہے۔ مندرجہ ذیل جدول میں اصل آمیزہ کے وہ حصے معلوم کیجیے جنھیں ملائے جانے کی ضرورت ہے۔

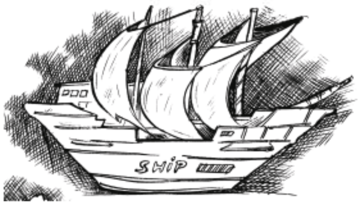
لال مادہ کا حصے	1	4	7	12	20
اصل آمیزہ کا حصے	8	...	...	...	...

3. اوپر دیے سوال 2 میں اگر لال رنگ کے مادے کے 1 حصے کے لیے 75 ملی لیٹر اصل آمیزہ کی ضرورت ہوتی ہے تو 1800 ملی لیٹر اصل آمیزہ کے لیے ہمیں کتنا لال رنگ کا مادہ ملانا چاہیے؟

4. سافٹ ڈرنک فیکٹری میں ایک مشین 6 گھنٹہ میں 840 بوتلیں بھرتی ہے۔ وہ مشین پانچ گھنٹوں میں کتنی بوتلیں بھرے گی؟



.5 ایک بیکٹریا کی تصویر کو 50,000 گنا بڑھانے پر اس کی لمبائی 5 سینٹی میٹر ہو جاتی ہے جیسا کے متصل شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس بیکٹریا کی اصل لمبائی کیا ہے؟ اگر تصویر کو صرف 20,000 گنا بڑا کیا جائے تو اس بیکٹریا کی بڑھی ہوئی لمبائی کیا ہوگی؟



.6 ایک جہاز کے ماڈل میں اس کا مستول (Mast) 9 سینٹی میٹر اونچا ہے جب کہ اصل جہاز کا مستول 12 میٹر اونچا ہے۔ اگر جہاز کی لمبائی 28 میٹر ہو تو اس کے ماڈل کی لمبائی کتنی ہوگی؟

.7 مان لیجیے 2 کلوگرام چینی میں 9×10^6 کرسٹل موجود ہیں۔ مندرجہ ذیل میں چینی کے کتنے کرسٹل موجود ہوں گے؟ (i) 5 کلو گرام چینی میں؟ (ii) 1.2 کلوگرام چینی میں؟

.8 رشمی کے پاس ایک سڑک کا نقشہ ہے جس کا پیمانہ 1 سینٹی میٹر = 18 کلومیٹر ہے۔ وہ اس سڑک پر اپنی گاڑی سے 72 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔ اس کے ذریعہ طے کیا گیا فاصلہ نقشہ میں کتنا ہوگا؟

.9 ایک 5 میٹر 60 سینٹی میٹر اونچے کھمبے کی پرچھائیں کی لمبائی 3 میٹر 20 سینٹی میٹر ہے۔ معلوم کیجیے اسی وقت پر۔ (i) 10 میٹر 50 سینٹی میٹر اونچے ایک دوسرے کھمبے کی پرچھائیں کی لمبائی (ii) اس کھمبے کی اونچائی جس کی پرچھائیں کی لمبائی 5 میٹر ہے۔

.10 مال سے لدا ہوا ایک ٹرک 25 منٹ میں 14 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرتا ہے۔ اگر رفتار وہی رہے تو وہ 5 گھنٹہ میں کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

اسے کیجیے

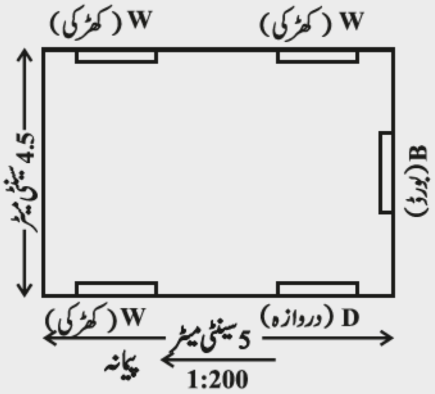
1. ایک مربع کاغذ پر مختلف اضلاع کے پانچ مربعے کھینچیے۔ مندرجہ ذیل معلومات کو ایک جدول کی شکل میں لکھیے۔

	مربع-1	مربع-2	مربع-3	مربع-4	مربع-5
ایک ضلع کی لمبائی (L)					
احاطہ (P)					
$\frac{L}{P}$					
رقبہ (A)					
$\frac{L}{A}$					

معلوم کیجیے کہ کیا ضلع کی لمبائی راست تناسب میں ہے:

(a) مربع کا احاطہ

(b) مربع کے رقبہ کی



2. پانچ لوگوں کے لیے حلوہ بنانے کے لیے مندرجہ ذیل چیزوں کی ضرورت پڑتی ہے :

سوجی/روا = 250 گرام، چینی = 300 گرام،

گھی = 200 گرام، پانی = 500 ملی لیٹر۔

تناسبت کے تصور کی مدد سے اپنی کلاس کے لیے حلوہ بنانے کی ان چیزوں کی مقدار میں ہونے والی تبدیلیوں کا تخمینہ لگائیے۔

3. ایک پیمانہ منتخب کیجیے اور اپنی کلاس کے کمرے کا نقشہ کھینچیے جس میں کھڑکیاں، دروازے، تختۂ سیاہ وغیرہ دکھائے گئے ہوں (ایک مثال یہاں دی گئی ہے)۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

اب تک حل کیے گئے 'راست تناسب' کے سوالوں میں سے کچھ مثالوں کو لیجیے۔ کیا آپ سوچتے ہیں کہ ان مثالوں کو 'اکائی کے طریقہ' کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے؟

13.3 معکوس تناسب

دو مقداروں میں یوں بھی تبدیلی آ سکتی ہے کہ اگر ایک مقدار میں اضافہ ہوتا ہے تو دوسری مقدار میں کمی ہوتی ہے یا ایک میں کمی ہونے پر دوسری میں اضافہ ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر جب کسی کام پر زیادہ مزدور لگائے جاتے ہیں تو وہ کام کم وقت میں پورا ہو جائے گا۔ اسی طرح اگر رفتار بڑھا دی جائے تو ایک متعینہ فاصلہ طے کرنے میں وقت کم لگے ۔

اس کی مزید وضاحت کے لیے آیئے مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کریں۔

زاہدہ 4 مختلف طریقوں سے یعنی پیدل، دوڑ کر، سائیکل اور کار کے ذریعہ اپنے اسکول جا سکتی ہے۔ متصل جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

$\times 15$ $\times 3$ $\times 2$

	پیدل چل کر	دوڑ کر	سائیکل سے	کار کے ذریعہ
رفتار (کلومیٹر فی گھنٹہ)	3	6	9	45
لگنے والا وقت (منٹ میں)	30	15	10	2

$\times \frac{1}{2}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{15}$

غور کیجیے جب رفتار میں اضافہ ہوتا ہے تو یکساں فاصلہ طے کرنے میں لگنے والے وقت میں کمی ہوتی ہے۔

جب زاہدہ دوڑ کر اپنی رفتار دگنی کرتی ہے تو اس کا صرف کیا ہوا وقت $\frac{1}{2}$ ہو جاتا ہے۔ جب وہ اپنی رفتار سائیکل کی رفتار '3' گنا کرتی ہے تو وقت $\frac{1}{3}$ رہ جاتا ہے۔ اسی طرح جب وہ اپنی رفتار 15 گنا کرتی ہے تو وقت $\frac{1}{15}$ رہ جاتا ہے۔ (یعنی وقت میں ہوئی کمی کی نسبت رفتار میں ہونے والے نظیری اضافہ کے تناسب کا معکوس ہوتا ہے۔) کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ رفتار اور وقت معکوس تناسب میں ہوتے ہیں۔

> کسی عدد کا ضربی معکوس اس کا مقلوب ہوتا ہے۔ اس طرح 2 کا معکوس $\frac{1}{2}$ ہے۔ (غور کیجیے کہ $2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 2=1$ ہے)۔

آیئے ایک دوسری مثال پر غور کرتے ہیں۔ ایک اسکول ریاضی کی نصابی کتابوں کے لیے 6,000 روپیے خرچ کرنا چاہتا ہے۔ 40 روپیے فی کتاب کی شرح سے کتنی کتابیں خریدی جا سکتی ہیں؟ ظاہر ہے کہ 150 کتابیں خریدی جا سکتی ہیں۔ اگر ایک نصابی کتاب کی قیمت 40 روپیے سے زیادہ ہو تو اسی رقم میں 150 سے کم کتابیں خریدی جائیں گی۔ مندرجہ ذیل جدول کو دیکھیے۔

ہر ایک کتاب کی قیمت (روپیوں میں)	40	50	60	75	80	100
خریدی جاسکنے والی کتابوں کی تعداد	150	120	100	80	75	60

آپ کیا دیکھتے ہیں؟ اگر ہر کتاب کی قیمت میں اضافہ ہوتا ہے تو ایک متعینہ فنڈ میں خریدی جا سکنے والی کتابوں کی تعداد میں کمی ہو جائے گی۔

جب کتاب کی قیمت 40 روپیے سے 50 روپیے ہوتی ہے تو اضافہ کی قیمت کی نسبت 5 : 4 ہے، نظیری کتابوں کی تعداد 150 سے کم ہو کر 120 ہونے پر نسبت 4 : 5 ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ دونوں نسبتیں ایک دوسرے کی معکوس ہیں۔

غور کیجیے کہ دونوں مقداروں کی نظیری قدروں کا حاصل ضرب مستقل ہے یعنی $120 \times 50 = 150 \times 40 = 6000$ ہے۔

اگر ہم ایک کتاب کی قیمت (روپیوں میں) کو x اور خریدی گئی کتابوں کی تعداد کو y سے ظاہر کریں تو اگر x میں اضافہ ہوتا ہے تو y میں کمی ہوتی ہے اور اس کے برعکس یہ بات غور کرنے لائق ہے کہ حاصل ضرب $x\,y$ مستقل رہتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ x کے ساتھ y اور y کے ساتھ x معکوس تناسب ہے۔ اس طرح دو مقدار x اور y معکوس تناسب میں کہی جاسکتی ہیں اگر ان کے درمیان میں $x\,y = k$ کی قسم کا کوئی رشتہ ہو جہاں k کوئی مستقلہ ہے۔ اگر x کی قدروں x_1، x_2 کے لیے y کی نظیری قدریں بالترتیب y_1، y_2 ہوں تو $x_1y_1 = x_2y_2\ (= k)$ یعنی $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$ ہوتا ہے۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ x اور y **معکوس تناسب** میں ہیں۔

اس طرح، اوپر دی گئی مثال میں ایک کتاب کی قیمت اور ایک متعینہ رقم میں خریدی جانے والی کتابوں کی تعداد معکوس تناسب میں ہے۔ اسی طرح سے ایک گاڑی کی رفتار اور اس کے ذریعہ متعینہ فاصلہ طے کرنے میں لیا گیا وقت ایک دوسرے کے معکوس تناسب میں بدلتے ہیں۔

اسی قسم کی کچھ دوسری مقداروں کے جوڑوں کی مثالوں پر غور کیجیے جو معکوس تناسب میں بدلتی ہیں۔ اب آپ فرنیچر کو ترتیب دینے کے اس مسئلہ پر غور کر سکتے ہیں جو ہم نے اس باب کے تعارف میں بیان کیا تھا۔

معکوس تناسب کو بہتر طریقے سے سمجھنے کے لیے یہاں ایک عملی کام دیا گیا ہے۔

اسے کیجیے

ایک مربع نما کاغذ لیجیے اور اس پر 48 کاؤنٹروں (گولوں) کو قطاروں کی مختلف تعداد میں نیچے دکھائے گئے طریقہ سے ترتیب دیجیے۔

4 قطاریں، 12 کالم

6 قطاریں، 8 کالم

قطاروں کی تعداد (R)	(R_1) 2	(R_2) 3	(R_3) 4	(R_4) 6	(R_5) 8
کالموں کی تعداد (C)	(C_1) ...	(C_2) ...	(C_3) 12	(C_4) 8	(C_5) ...

آپ کیا دیکھتے ہیں؟ جب R میں اضافہ ہوتا ہے تو C میں کمی ہوتی ہے۔

(i) کیا $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$ ہے؟ (ii) کیا $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$ ہے؟

(iii) کیا R اور C ایک دوسرے کے معکوس تناسب میں ہیں؟

اس سرگرمی کو 36 کاؤنٹروں کے ساتھ دوہرائیے۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل جدولوں کو دیکھیے اور معلوم کیجیے کہ کون سے متغیروں (یہاں x اور y) کے جوڑے معکوس تناسب میں ہیں۔

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(iii)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

آیئے کچھ ایسی مثالوں پر غور کریں جہاں ہم معکوس تناسب کے تصور کا استعمال کرتے ہیں۔

جب دو مقداریں x اور y راست تناسب میں ہوتی ہیں (یعنی تبدیل ہوتی ہیں) تو انھیں $x \propto y$ بھی لکھا جاتا ہے۔

جب دو مقداریں x اور y معکوس تناسب میں (یعنی معکوس طور پر بدلتی ہیں) تو انھیں $x \propto \frac{1}{y}$ لکھا جاتا ہے۔

مثال 7: ایک ٹنکی کو 1 گھنٹہ 20 منٹ میں بھرنے کے لیے 6 پائپوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ اگر اس قسم کے 5 پائپ کا ہی استعمال کیا جائے تو وہ ٹنکی کتنے وقت میں بھرے گی؟

حل :

مان لیجیے ٹنکی کو بھرنے کا مطلوبہ وقت x منٹ ہے تب ہمیں مندرجہ ذیل جدول حاصل ہوتا ہے۔

پائپ کی تعداد	6	5
وقت (منٹ میں)	80	x

پائپوں کی تعداد جتنی کم ہوگی ٹینکوں کو بھرنے میں اتنا ہی زیادہ وقت لگے گا۔ اس لیے یہ ایک معکوس تناسب کی صورت حال ہے۔

اس لیے $80 \times 6 = x \times 5$ $\quad [x_1 y_1 = x_2 y_2]$

یا $\frac{80 \times 6}{5} = x$

یا $96 = x$

لہٰذا ٹنکی کو 5 پائپوں کے ذریعہ 96 منٹ یا 1 گھنٹہ 36 منٹ میں بھرا جائے گا۔

مثال 8 : ایک ہوسٹل میں 100 طلبا ہیں اور ان کے کھانے پینے کی چیزیں 20 دن کے لیے کافی ہیں۔ اگر اس گروپ میں 25 طلبا اور شامل ہو جائیں تو کھانے پینے کا سامان کتنے دن چلے گا؟

حل: مان لیجیے کھانے پینے کا سامان 125 طلبا کے لیے y دن تک چلے گا۔ ہم مندرجہ ذیل جدول حاصل کرتے ہیں۔

طلبا کی تعداد	100	125
دنوں کی تعداد	20	y

غور کیجیے کہ جتنے طلبا زیادہ ہوں گے کھانے پینے کا سامان اتنی ہی جلدی ختم ہو جائے گا۔ اس لیے یہ ایک معکوس تناسب کی صورت حال ہے۔

اس لیے $y \times 125 = 100 \times 20$

یا $\frac{100 \times 20}{125} = y$

یا $16 = y$

اس لیے، اگر ہوسٹل میں مزید 25 طلبا آ جائیں تو کھانے پینے کا سامان 16 دن تک ہی چلے گا۔

متبادل طور، پر ہم $x_1 y_1 = x_2 y_2$ کو $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ لکھ سکتے ہیں۔

یعنی $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$

یا $100 : 125 = y : 20$

یا $16 = \frac{100 \times 20}{125} = y$

مثال 9 : اگر 15 مزدور کسی دیوار کو 48 گھنٹہ میں تعمیر کر سکتے ہیں تو اسی کام کو 30 گھنٹہ میں پورا کرنے کے لیے کتنے مزدوروں کی ضرورت پڑے گی؟

حل : مان لیجیے دیوار کو 30 گھنٹہ میں تعمیر کرنے کے لیے y مزدوروں کی ضرورت ہے

تب ہم مندرجہ ذیل جدول حاصل کرتے ہیں۔

گھنٹوں کی تعداد	48	30
مزدوروں کی تعداد	15	y

ظاہر ہے کہ زیادہ مزدور ہونے پر دیوار بننے میں کم وقت لگے گا۔

اس لیے گھنٹوں کی تعداد اور مزدوروں کی تعداد میں معکوس تناسب ہے

اس لیے $48 \times 15 = 30 \times y$

اس لیے $\frac{48 \times 15}{30} = y$ یا $24 = y$

یعنی 30 گھنٹہ میں کام کو ختم کرنے کے لیے 24 مزدور درکار ہوں گے۔

مشق 13.2

1. مندرجہ ذیل میں کون سے بیانات معکوس تناسب میں ہیں؟

(i) کسی کام پر لگے مزدوروں کی تعداد اور اس کام کو پورا کرنے میں لگا وقت۔

(ii) یکساں رفتار سے کسی سفر میں لگا وقت اور طے کیا گیا فاصلہ۔

(iii) کھیتی کی گئی زمین کا رقبہ اور کاٹی گئی فصل۔

(iv) ایک متعین سفر میں لگا وقت اور گاڑی کی رفتار۔

(v) کسی ملک کی آبادی اور فی کس زمین کا رقبہ۔

2. ایک ٹیلی ویژن کے گیم شو (Game Show) میں ₹1,00,000 کی انعامی رقم جیتنے والوں میں برابر تقسیم کی جاتی ہے۔ مندرجہ ذیل جدول کو پورا کیجیے اور معلوم کیجیے کہ کیا جیتنے والے افراد کو دی جانے والی انعام کی رقم جیتنے والوں کی تعداد کے راست تناسب میں ہے یا معکوس تناسب میں ہے؟

جیتنے والوں کی تعداد	1	2	4	5	8	10	20
جیتنے والے فرد کا انعام (روپیوں میں)	1,00,000	50,000	....	.....	....	....	....

3. رحمٰن آروں (Spokes) کا استعمال کرتے ہوئے ایک پہیہ بنا رہا ہے۔ وہ یکساں تیلیوں کو اس طرح لگانا چاہتا ہے کہ لگاتار تیلیوں کے کسی بھی جوڑے کے درمیان کے زاویے برابر ہیں۔ مندرجہ ذیل جدول کو پورا کر کے اس کی مدد کیجیے۔

تیلیوں کی تعداد	4	6	8	10	12
لگاتار تیلیوں کے ایک جوڑے کے درمیان زاویہ	90°	60°	...	...	...

(i) کیا تیلیوں کی تعداد اور لگاتار تیلیوں کے کسی جوڑے کے درمیان کا زاویہ معکوس تناسب میں ہے؟

(ii) 15 تیلیوں والے ایک پہیہ کی لگاتار تیلیوں کے کسی جوڑے کا زاویہ معلوم کیجیے۔

(iii) اگر لگاتار تیلیوں کے ہر ایک جوڑے کے درمیان کا زاویہ 40° ہے تو درکار تیلیوں کی تعداد کتنی ہوگی؟

4. اگر ایک ڈبے کی مٹھائی کو 24 بچوں میں بانٹا جائے تو ہر ایک بچے کو 5 مٹھائیاں ملتی ہیں۔ اگر بچوں کی تعداد میں 4 بچے کم کر دیے جائیں تو ہر ایک بچے کو کتنی مٹھائی ملے گی؟

5. ایک کسان کے تبیلے میں 20 مویشیوں کے لیے 6 دن کا چارہ موجود ہے۔ اگر اس تبیلے میں 10 مویشی اور آ جائیں تو یہ چارہ کتنے دنوں کے لیے کافی ہوگا؟

.6 ایک ٹھیکیدار تخمینہ لگاتا ہے کہ 3 شخص جسمندر کے گھر میں تار لگانے کا کام 4 دن میں پورا کر سکتے ہیں۔ اگر وہ 3 کی جگہ پر 4 لوگوں کو اس کام پر لگاتا ہے تو وہ کام کتنے دن میں پورا ہو جائے گا؟

.7 اگر ایک ڈبے میں 12 بوتلیں ہیں تو بوتلوں کے ایک بیچ (Batch) کو 25 ڈبوں میں رکھا جاتا ہے۔ اگر ہر ڈبے میں 20 بوتلیں ہی رکھی جائیں تو کتنے ڈبے بھرے جائیں گے؟

.8 ایک فیکٹری کو 63 دن میں اشیاء کی خاص اعداد بنانے کے لیے 42 مشینوں کی ضرورت پڑتی ہے۔ اتنی ہی اشیاء 54 دن میں بنانے کے لیے کتنی مشینوں کی ضرورت پڑے گی؟

.9 ایک کار 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے چل کر کسی مقام پر 2 گھنٹے میں پہنچتی ہے۔ اگر کار کی رفتار 80 کلومیٹر فی گھنٹہ ہو تو اس دوری کو طے کرنے میں کتنا وقت لگے گا؟

.10 دو لوگ ایک گھر میں 3 دن میں نئی کھڑکیاں لگا سکتے ہیں۔

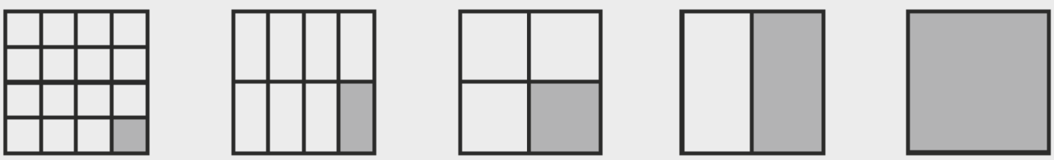
(i) کام شروع ہونے سے پہلے ہی ایک مزدور بیمار پڑ جاتا ہے۔ اب یہ کام کتنے دن میں پورا ہوگا؟

(ii) ایک ہی دن میں کھڑکیاں لگوانے کے لیے کتنے لوگوں کی ضرورت ہوگی؟

.11 ایک اسکول میں 45 منٹ کے وقفے کے 8 گھنٹے ہوتے ہیں۔ اگر اسکول کا وقت اتنا ہی رہے اور اسکول میں برابر وقفوں کے 9 گھنٹے ہوں تو ہر ایک گھنٹہ کتنے منٹ کا ہوگا؟

اسے کیجیے

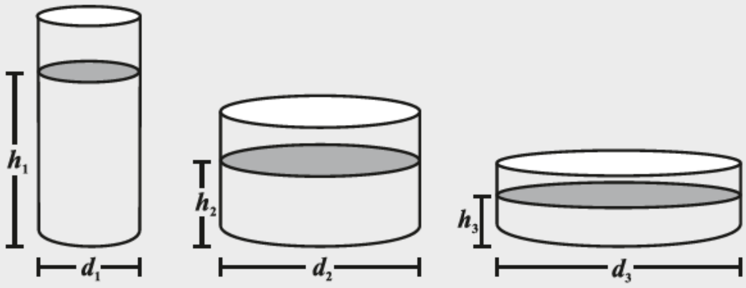
.1 ایک کاغذ کی شیٹ لیجیے، اسے شکل میں دکھائے گئے طریقے سے موڑیے۔ ہر ایک حالت میں حصوں کی تعداد اور ایک حصہ کا رقبہ لکھیے۔



اپنے مشاہدوں کا جدول بنائیے اور اس پر اپنے دوستوں سے بحث کیجیے۔ کیا یہ معکوس تناسب کی حالت ہے؟ کیوں؟

حصوں کی تعداد	1	2	4	8	16
ہر ایک حصہ کا رقبہ	کاغذ کا رقبہ	کاغذ کے رقبہ کا $\frac{1}{2}$	...	...	...

2. دائرہ نما قاعدہ والے مختلف پیمائشوں کے کچھ برتن لیجیے۔ ہر ایک برتن میں یکساں مقدار میں پانی بھریے۔ ہر برتن کا قطر اور اس برتن میں پانی کی اونچائی ناپ کر لکھیے۔ اپنے مشاہدوں کی ایک جدول بنائیے۔ کیا یہ معکوس تناسب کی حالت ہے؟



برتن کا قطر (سینٹی میٹر میں)			
پانی کی سطح کی اونچائی (سینٹی میٹر میں)			

ہم نے کیا سیکھا؟

1. دو مقداریں x اور y راست تناسب میں کہلاتی ہیں اگر دونوں اس طرح سے بڑھیں (یا گھٹیں) کہ ان کی نظیری قدروں کی نسبت مستقل رہے۔ یعنی اگر $\frac{x}{y} = k$ [k ایک مثبت عدد ہے]، تب x اور y راست تناسب میں کہلاتے ہیں۔ ایسی حالت میں اگر x کی قدریں x_1، x_2 کے لیے y کی نظیری قدریں بالترتیب y_1، y_2 ہوں تو $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ہوتا ہے۔

2. دو مقداریں x اور y معکوس تناسب میں کہی جاتی ہیں اگر x میں ہوا اضافہ y متناسب میں کمی پیدا کرے اور x میں ہوئی کمی y میں متناسب اضافہ پیدا کرے تاکہ ان کی نظیری قدروں کا حاصل ضرب مستقل رہے یعنی اگر $xy = k$ ہو تو x اور y معکوس تناسب میں بدلتی ہیں۔ اس حالت میں اگر x کی قدروں x_1، x_2 کے لیے y کی نظیری قدریں بالترتیب y_1، y_2 ہوں تو $x_1 y_1 = x_2 y_2$ یا $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ ہوتا ہے۔

باب

14

اجزائے ضربی میں تحلیل

4817CH14

14.1 تعارف

14.1.1 طبعی اعداد کے اجزائے ضربی

آپ چھٹی جماعت میں اجزائے ضربی کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ آیئے ایک طبعی عدد لیتے ہیں، مان لیجیے یہ عدد 30 ہے۔ ہم اسے دوسرے طبعی اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھتے ہیں۔ جیسے

$$2 \times 15 = 30$$

$$= 3 \times 10 = 5 \times 6$$

اس طرح 1، 2، 3، 5، 6، 10، 15 اور 30 عدد 30 کے اجزائے ضربی ہیں۔ ان میں 2، 3 اور 5 مفرد اجزائے ضربی ہیں (کیوں؟)

جب کوئی عدد مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھا ہوتو وہ اس کی مفرد اجزائے ضربی شکل کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر 30 کو مفرد اجزائے ضربی کی شکل میں $2 \times 3 \times 5$ لکھتے ہیں۔

70 کی مفرد اجزائے ضربی شکل $2 \times 5 \times 7$ ہے۔

90 کی مفرد اجزائے ضربی شکل $2 \times 3 \times 3 \times 5$ ہے، وغیرہ۔

> ہم جانتے ہیں کہ 30 کو اس شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے
>
> $30 = 1 \times 30$
>
> اس لیے، 1 اور 30 بھی 30 کے اجزائے ضربی ہیں۔
> آپ دیکھیں گے کہ 1 ہر عدد کا ایک جز ضربی ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر $101 = 101 \times 1$ ہوتا ہے۔ لیکن ہم جب بھی کسی عدد کو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیں گے تو ہم 1 کو حاصل ضرب کی شکل میں تب تک نہیں لکھیں گے جب تک خاص طور پر ضروری نہ ہو۔

اس طرح ہم الجبری عبارتوں کو بھی ان کے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ اس باب میں ہم اسی کا مطالعہ کریں گے۔

14.1.2 الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی

ساتویں جماعت میں ہم پڑھ چکے ہیں کہ الجبری عبارتوں کے ارکان اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں بنتے ہیں۔ مثال کے طور پر الجبری عبارت $5xy + 3x$ میں رُکن $5xy$ اجزائے ضربی 5، x اور y سے بنا ہے یعنی $5xy = 5 \times x \times y$

> غور کیجیے کہ 1، $5xy$ کا ایک جز ضربی ہے کیوں کہ
>
> $5xy = 1 \times 5 \times x \times y$
>
> حقیقت میں 1 ہر ایک رُکن کا جز ضربی ہوتا ہے۔ طبعی اعداد ہی کی طرح جب تک کہ خاص طور پر ضروری نہ ہو ہم 1 کو کسی بھی رُکن کا الگ سے جز ضربی نہیں ظاہر کرتے ہیں۔

غور کیجیے کہ $5xy$ کے اجزائے ضربی 5، x اور y کو مزید اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں نہیں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ $5xy$ کے مفرد اجزائے ضربی 5، x اور y ہیں۔الجبری عبارتوں میں ہم 'مفرد' کی جگہ 'نہ تحلیل ہونے والی' استعمال کرتے ہیں۔ہم کہتے ہیں کہ $5xy$ کی نہ تحلیل ہونے والی شکل $5 \times x \times y$ ہے۔غور کیجیے کہ $5 \times (xy)$ رُکن $5xy$ نہ تحلیل ہونے والی شکل نہیں ہے۔کیوں کہ جز ضربی xy کو اور آگے x اور y کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے یعنی

$xy = x \times y$ ہے۔

اب الجبری عبارت $3x(x+2)$ پر غور کیجیے۔اسے اجزائے ضربی 3، x اور $(x+2)$ کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے یعنی

$$3x(x+2) = 3 \times x \times (x+2)$$

الجبری عبارت $3x(x+2)$ کے نہ تحلیل ہونے والے اجزائے ضربی 3، x اور $(x+2)$ ہیں۔اسی طرح الجبری عبارت $10x(x+2)(y+3)$ کو نہ تحلیل ہونے والی شکل میں اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$10x(x+2)(y+3) = 2 \times 5 \times x \times (x+2) \times (y+3)$$

14.2 اجزائے ضربی میں تحلیل کیا ہے؟

جب ہم کسی الجبری عبارت کے اجزائے ضربی بناتے ہیں تو ہم انھیں اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھتے ہیں۔یہ اجزائے ضربی اعداد الجبری متغیر یا الجبری عبارتیں ہو سکتی ہیں۔

$3xy$، $5x^2y$، $2x(y+2)$، $5(y+1)(x+2)$ جیسی عبارتیں پہلے سے ہی اجزائے ضربی کی شکل میں ہیں۔

جیسا کہ ہم پہلے سے ہی جانتے ہیں ہم مذکورہ بالا عبارتوں کے اجزائے ضربی اُنھیں دیکھ کر ہی پڑھ سکتے ہیں۔

اس کے برخلاف $2x+4$، $3x+3y$، x^2+5x، x^2+5x+6 جیسی عبارتوں پر غور کیجیے۔یہ معلوم نہیں کہ اس کے اجزائے ضربی کیا ہیں۔اس طرح کی عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے ہمیں ایک منظّم طریقہ استعمال کرنے کی ضرورت ہے۔اسی طریقے کا استعمال ہم یہاں کریں گے۔

14.2.1 مشترک اجزائے ضربی کا طریقہ

- ہم ایک آسان مثال سے شروع کرتے ہیں۔ $2x+4$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

ہم اس کے ہر رُکن کو اجزائے ضربی میں نہ تحلیل ہونے والے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیں گے۔

$$2x = 2 \times x$$

$$4 = 2 \times 2$$

اس لیے $2x + 4 = (2 \times x) + (2 \times 2)$

نوٹ کیجیے کہ جز ضربی 2 دونوں ارکان میں مشترک ہے۔

دیکھیے، تقسیمی اصول کے ذریعے

$$2 \times (x+2) = (2 \times x) + (2 \times 2)$$

اس لیے، ہم لکھ سکتے ہیں

$$2x + 4 = 2 \times (x+2) = 2\,(x+2)$$

اس طرح عبارت $2x + 4$ وہی ہے جو $2\,(x+2)$ ہے۔ اب ہم اس کے اجزائے ضربی پڑھ سکتے ہیں: وہ ہیں 2 اور $(x+2)$، یہ نہ تحلیل ہونے والے اجزائے ضربی ہیں۔

اب $5xy + 10x$ کے اجزائے ضربی لکھیے۔

$5xy$ اور 10 کی نہ تحلیل ہونے والے اجزائے ضربی کی شکل بالترتیب ہے۔

$$5xy = 5 \times x \times y$$

$$10x = 2 \times 5 \times x$$

مشاہدہ کیجیے دو ارکان میں 5 اور x مشترک اجزائے ضربی ہیں۔ اب

$$5xy + 10x = (5 \times x \times y) + (5 \times x \times 2)$$

$$= (5x \times y) + (5x \times 2)$$

تقسیمی اصول کا استعمال کرتے ہوئے ہم دونوں ارکان کو ملاتے ہیں۔

$$(5x \times y) + (5x \times 2) = 5x \times (y+2)$$

اس لیے $5xy + 10x = 5x\,(y+2)$ (یہ مطلوب جز ضربی کی شکل ہے)

مثال 1 : $12a^2b + 15ab^2$ کے اجزائے ضربی لکھیے۔

حل : ہمارے پاس ہے:

$$12a^2b = 2 \times 2 \times 3 \times a \times a \times b$$

$$15ab^2 = 3 \times 5 \times a \times b \times b$$

دو ارکان میں 3، a اور b مشترک اجزائے ضربی ہیں۔

اس لیے، $12a^2b + 15ab^2 = (3 \times a \times b \times 2 \times 2 \times a) + (3 \times a \times b \times 5 \times b)$

$$= 3 \times a \times b \times [(2 \times 2 \times a) + (5 \times b)]$$ (رُکن کو ملانے پر)

$= 3\,a\,b \times (4\,a + 5\,b)$ (مطلوبہ جز ضربی شکل)

$= 3\,a\,b\,(4\,a + 5\,b)$

مثال 2 : $10\,x^2 - 18\,x^3 + 14\,x^4$ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے۔

حل :

$10\,x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$

$18\,x^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x$

$14\,x^4 = 2 \times 7 \times x \times x \times x \times x$

تین ارکان کے مشترک اجزائے ضربی 2، x اور x ہیں

اس لیے، $(2 \times x \times x \times 5) - (2 \times x \times x \times 3 \times 3 \times x) = 10\,x^2 - 18\,x^3 + 14\,x^4$

$+ (2 \times x \times x \times 7 \times x \times x)$

$= 2 \times x \times x \times [(5 - (3 \times 3 \times x) + (7 \times x \times x)]$ (تینوں ارکان کو ملانے پر)

$= 2\,x^2 \times (5 - 9\,x + 7\,x^2) = \underbrace{2x^2\,(7x^2 - 9x + 5)}$

کیا آپ نے غور کیا کہ کسی عبارت کے جز ضربی شکل میں صرف ایک رُکن ہوتا ہے؟

کوشش کیجیے

اجزائے ضربی بنایئے (i) $12\,x + 36$ (ii) $22\,y - 33\,z$ (iii) $14\,p\,q + 35\,pqr$

14.2.2 ارکان کے گروپ بنا کر اجزائے ضربی میں تحلیل

عبارت $2\,x\,y + 2\,y + 3\,x + 3$ کو دیکھیے۔ آپ نوٹ کریں گے کہ پہلے دو ارکان میں 2 اور y مشترک جز ضربی ہیں اور آخری دو ارکان میں 3 مشترک جز ضربی ہے۔ لیکن تمام ارکان میں کوئی ایک مشترک جز ضربی نہیں ہے۔ ہم کس طرح آگے بڑھیں گے؟

آیئے $(2\,x\,y + 2\,y)$ کو جز ضربی کی شکل میں لکھیں:

$2\,x\,y + 2\,y = (2 \times x \times y) + (2 \times y)$

$= (2 \times y \times x) + (2 \times y \times 1)$

$= (2\,y \times x) + (2\,y \times 1) = 2\,y\,(x + 1)$

نوٹ: یہاں ہمیں 1 کو جز ضربی کی شکل میں ظاہر کرنے کی ضرورت ہے۔ کیوں؟

اسی طرح $3\,x + 3 = (3 \times x) + (3 \times 1)$

$= 3 \times (x + 1) = 3\,(x + 1)$

لہٰذا $2\,x\,y + 2\,y + 3\,x + 3 = 2\,y\,(x + 1) + 3\,(x + 1)$

مشاہدہ کیجیے اب R H S کے دونوں ارکان میں مشترک اجزائے ضربی $(x + 1)$ ہے دونوں ارکان کو ملانے پر

$2\,x\,y + 2\,y + 3\,x + 3 = 2\,y\,(x + 1) + 3\,(x + 1) = (x + 1)\,(2\,y + 3)$

عبارت $2xy + 2y + 3x + 3$ اب اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں ہے۔ اس کے اجزائے ضربی ہیں $(x + 1)$ اور $(2y + 3)$، نوٹ کیجیے کہ یہ اجزائے ضربی نہ تحلیل ہونے والے اجزائے ضربی ہیں۔

دوبارہ گروپ بنانا کیا ہے؟

مان لیجیے اوپر دی گئی عبارت $2xy + 3 + 2y + 3x$ کی شکل میں دی ہوئی ہے، تب اس کے اجزائے ضربی بنانا آسان نہیں ہیں۔ اسی عبارت کو $2xy + 2y + 3x + 3$ کی شکل میں دوبارہ ترتیب دینے پر اس کے $(2xy+2y)$ اور $(3x + 3)$ گروپ بنا کر اجزائے ضربی بنائے جا سکتے ہیں۔ یہی دوبارہ گروپ بنانا ہے۔

دوبارہ گروپ بنانا ایک سے زیادہ طریقوں کے ذریعے ممکن ہو سکتا ہے۔ مان لیجیے ہم اوپر دی گئی عبارت کا $2xy + 3x + 2y + 3$ کی شکل میں دوبارہ گروپ بناتے ہیں اس سے بھی ہم اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں۔ آیئے کوشش کریں:

$$2xy + 3x + 2y + 3 = 2 \times x \times y + 3 \times x + 2y + 3$$

$$= x \times (2y + 3) + 1 \times (2y + 3)$$

$$= (2y + 3)(x + 1)$$

اجزائے ضربی وہی ہیں (جیسا کہ انھیں ہونا چاہیے)، بھلے ہی وہ مختلف ترتیب میں لکھے ہوئے ہوں۔

مثال 3 : $6xy - 4y + 6 - 9x$ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے۔

حل :

قدم 1 جانچ کیجیے کہ کیا سبھی ارکان میں کوئی مشترک جز ضربی ہے۔ یہاں کوئی نہیں ہے۔

قدم 2 گروپ کے بارے میں سوچیے، غور کیجیے کہ پہلے دو ارکانوں میں مشترک جز ضربی $2y$ ہے۔

$$6xy - 4y = 2y(3x - 2) \qquad \text{(a)}$$

آخری دو ارکان کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ انھیں دیکھیے۔ اگر آپ ان کی ترتیب بدل کر $-9x + 6$ لکھ لیں تو جز ضربی $(3x - 2)$ آجائے گا؛

اس لیے

$$-9x + 6 = -3(3x) + 3(2)$$

$$= -3(3x - 2) \qquad \text{(b)}$$

قدم 3 (a) اور (b) کو ایک ساتھ رکھنے پر

$$6xy - 4y + 6 - 9x = 6xy - 4y - 9x + 6$$

$$= 2y(3x - 2) - 3(3x - 2)$$

$$= (3x - 2)(2y - 3)$$

اس طرح $(6xy-4y+6-9x)$ کے اجزائے ضربی $(3x-2)$ اور $(2y-3)$ ہیں۔

مشق 14.1

1. دیے گئے ارکانوں کے مشترک اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $12x, 36$ (ii) $2y, 22xy$ (iii) $14pq, 28p^2q^2$

(iv) $2x, 3x^2, 4$ (v) $6abc, 24ab^2, 12a^2b$

(vi) $16x^3, -4x^2, 32x$ (vii) $10pq, 20qr, 30rp$

(viii) $3x^2y^3, 10x^3y^2, 6x^2y^2z$

2. مندرجہ ذیل عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $7x-42$ (ii) $6p-12q$ (iii) $7a^2+14a$

(iv) $-16z+20z^3$ (v) $20l^2m+30alm$

(vi) $5x^2y-15xy^2$ (vii) $10a^2-15b^2+20c^2$

(viii) $-4a^2+4ab-4ca$ (ix) $x^2yz+xy^2z+xyz^2$

(x) ax^2y+bxy^2+cxyz

3. اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے۔

(i) $x^2+xy+px+8y$ (ii) $15xy-6x+5y-2$

(iii) $ax+bx-ay-by$ (iv) $15pq+15+9q+25p$

(v) $z-7+7xy-xyz$

14.2.3 تماثلات کے استعمال سے اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا

ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad \text{(I)}$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \qquad \text{(II)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2 \qquad \text{(III)}$$

مندرجہ ذیل حل کی گئی مثالوں سے یہ ظاہر ہو جائے گا کہ اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے ان تماثلات کا کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے۔ پہلے ہم دی ہوئی عبارت کو دیکھتے ہیں۔ اگر یہ اوپر دی گئی تماثلات میں سے کسی ایک کے دائیں طرف کی شکل کا ہے تو اس تماثل

کے بائیں طرف کے نظیری عبارت سے مطلوبہ اجزائے ضربی حاصل ہوجاتے ہیں۔

مثال 4 : $x^2+8x+16$ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے۔

حل : عبارت پر غور کیجیے۔ اس میں تین ارکان ہیں۔ اس لیے اس میں تماثل III کا استعمال نہیں ہوسکتا۔ اس عبارت کا پہلا اور تیسرا رُکن کامل مربع ہے اور وسطی رُکن سے پہلے جمع کی علامت ہے۔ اس لیے یہ $a^2+2ab+b^2$ کی شکل کی ہے۔ جہاں $a=x$ اور $b=4$ ہے۔

اس لیے $\quad a^2+2ab+b^2=x^2+2(x)(4)+4^2$

اس لیے $\quad =x^2+8x+16$

اس لیے $\quad a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

موازنہ کرنے پر $\quad x^2+8x+16=(x+4)^2$ (مطلوبہ اجزائے ضربی)

مثال 5 : $4y^2-12y+9$ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے۔

حل : غور کیجیے $\quad 12y=2\times3\times(2y)$ اور $4y^2=(2y)^2,\ 9=3^2$

اس لیے $\quad 4y^2-12y+9=(2y)^2-2\times3\times(2y)+(3)^2$

$=(2y-3)^2$ (مطلوبہ اجزائے ضربی)

مشاہدہ کیجیے کہ یہاں دی ہوئی عبارت $a^2-2ab+b^2$ کی شکل کی ہے،
جہاں $a=2y$ اور $b=3$ اور
$2ab=2\times2y\times3=12y$

مثال 6 : $49p^2-36$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : اس سوال میں دو ارکان ہیں۔ دونوں کامل مربع ہیں اور دوسرا منفی ہے۔ یہ عبارت (a^2-b^2) کی شکل کی ہے۔ تماثل III یہاں استعمال ہوسکتا ہے؛

$$49p^2-36=(7p)^2-(6)^2$$

$=(7p-6)(7p+6)$ (مطلوبہ اجزائے ضربی)

مثال 7 : $a^2-2ab+b^2-c^2$ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے۔

حل : دی ہوئی عبارت کے پہلے تین ارکان $(a-b)^2$ کی شکل کے ہیں۔ چوتھا رُکن ایک مربع ہے۔ اس لیے عبارت کو دو مربعوں کے فرق میں تحلیل کرسکتے ہیں۔

اس طرح سے $\quad a^2-2ab+b^2-c^2=(a-b)^2-c^2$ (تماثل II استعمال کرنے پر)

$= [(a-b)-c]\ [(a-b)+c]$ (تماثل III استعمال کرنے پر)

$= (a-b-c)\ (a-b+c)$ (مطلوبہ اجزائے ضربی)

غور کیجیے کہ مطلوبہ اجزائے ضربی حاصل کرنے کے لیے ہم ایک کے بعد دوسرے تماثل کو کیسے استعمال کرتے ہیں۔

مثال 8 : $m^4 - 256$ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیجیے۔

حل : ہم لکھتے ہیں $m^4 = (m^2)^2$ اور $256 = (16)^2$

اس طرح سے، دی ہوئی عبارت میں تماثل III کا استعمال ہوگا۔

اس لیے $m^4 - 256 = (m^2)^2 - (16)^2$

$= (m^2 - 16)\ (m^2 + 16)$ [تماثل III استعمال کرنے پر]

اب $(m^2 + 16)$ کے مزید اجزائے ضربی نہیں بنائے جاسکتے لیکن $(m^2 - 16)$ کے اجزائے ضربی بنائے جاسکتے ہیں۔ تماثل III کے استعمال سے

$$m^2 - 16 = m^2 - 4^2$$

$$= (m-4)\ (m+4)$$

اس لیے $m^2 - 256 = (m-4)\ (m+4)\ (m^2+16)$

14.2.4 $(x + a)\ (x + b)$ کی شکل کے اجزائے ضربی

آیئے اب ہم بحث کرتے ہیں کہ کس طرح ایک متغیر والی عبارتوں کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاتا ہے جیسے $x^2 + 5x + 6$، $y^2 - 7y + 12$، $z^2 - 4z - 12$، $3m^2 + 9m + 6$ وغیرہ۔ مشاہدہ کیجیے کہ یہ عبارتیں $(a + b)^2$ یا $(a - b)^2$ قسم کی نہیں ہیں یعنی یہ کامل مربع نہیں ہیں۔ مثال کے طور پر $x^2 + 5x + 6$ میں رُکن 6 کامل مربع نہیں ہے۔ یہ عبارتیں یقیناً $(a^2 - b^2)$ کے استعمال سے اجزائے ضربی میں تحلیل نہیں ہوسکتی۔

جب کہ یہ بظاہر $x^2 + (a + b)\ x + a\,b$ قسم کی لگتی ہیں۔ اس لیے ہم ان عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے پچھلے باب میں دیے گئے تماثل IV کو استعمال کرتے ہیں:

$$(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + a\,b \qquad \text{(IV)}$$

اس کے لیے ہمیں x کے ضریب اور مستقل رکن کو دیکھنا ہوگا۔ مندرجہ ذیل مثال کو دیکھیے کہ اس کا حل کس طرح کیا جاتا ہے۔

مثال 9 : $x^2 + 5x + 6$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : اگر ہم تماثل (IV) کے RHS کا $x^2 + 5x + 6$ سے موازنہ کریں تو ہم پائیں گے کہ $ab = 6$ اور $a + b = 5$ ہے۔ اس سے ہمیں a اور b معلوم کرنا چاہیے، تب $(x + a)$ اور $(x + b)$ اجزائے ضربی ہوں گے۔

اگر $a\,b = 6$ ہے تو اس کا مطلب ہے کہ a اور b عدد 6 کے اجزائے ضربی ہیں۔ آیئے $a = 6$ اور $b = 1$ لے کر کوشش کرتے ہیں۔ ان قدروں کے لیے $a + b = 7$ اور 5 نہیں ہے۔ اس لیے یہ انتخاب صحیح نہیں ہے۔

آیئے $a = 2$ اور $b = 3$ لے کر کوشش کریں۔ اس کے لیے $a + b = 5$ ہے جو ٹھیک ہے اور یہ وہی ہے جو ہم چاہتے ہیں۔ اس لیے اس دی ہوئی عبارت کے اجزائے ضربی $(x + 2)\,(x + 3)$ ہوں گے

> عام طور پر $x^2 + p\,x + q$ قسم کی عبارت کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے ہم q (مستقل رکن) کے دو اجزائے ضربی a اور b معلوم کرتے ہیں جب کہ
>
> $$\boxed{a + b = p \text{ اور } a\,b = q}$$
>
> تب یہ عبارت بنتی ہے $\quad x^2 + (a + b)\,x + a\,b$
>
> یا $\quad x^2 + a\,x + b\,x + a\,b$
>
> یا $\quad x\,(x + a) + b\,(x + a)$
>
> یا $\quad (x + a)\,(x + b)$ جو مطلوبہ اجزائے ضربی ہیں۔

مثال 10 : $y^2 - 7y + 12$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : ہم دیکھتے ہیں کہ $12 = 3 \times 4$ اور $3 + 4 = 7$ ہے۔ اس لیے،

$$y^2 - 7\,y + 12 = y^2 - 3\,y - 4\,y + 12$$

$$= y\,(y - 3) - 4\,(y - 3) = (y - 3)\,(y - 4)$$

غور کیجیے کہ اس بار ہم نے a اور b معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی عبارت کا موازنہ تماثل IV سے نہیں کیا۔ خاصی مشق کے بعد آپ کو دی ہوئی عبارت کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے اس کا موازنہ تماثلات کی عبارتوں سے کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی۔ آپ سیدھے ہی اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں جیسا کہ ہم نے اوپر کوشش کی۔

مثال 11 : $z^2 - 4z - 12$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : یہاں $ab = -12$ ہے، اس کا مطلب ہے a اور b میں سے ایک منفی ہے۔ ساتھ ہی $a + b = -4$ ہے۔ اس کا مطلب

ہے کہ بڑی قدر والا عدد منفی ہے۔ ہم $a=-4$ اور $b=3$ لے کر کوشش کرتے ہیں، لیکن اس سے بھی بات نہیں بنے گی کیوں کہ $a+b=-1$ ہے۔ اب دوسری ممکن قدریں $a=-6$ اور $b=2$ لیتے ہیں تب $a+b=-4$ ہے جو ہمیں چاہیے۔

$$z^2-4z-12=z^2-6z+2z-12$$
$$=z(z-6)+2(z-6)$$
$$=(z-6)(z+2)$$

مثال 12 : $3m^2+9m+6$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : ہم دیکھتے ہیں کہ 3 سبھی ارکان میں ایک مشترک جز ضربی ہے۔

اس لیے $3m^2+9m+6=3(m^2+3m+2)$

اب $m^2+3m+2=m^2+m+2m+2$ (کیوں کہ $2=1\times 2$)

$$=m(m+1)+2(m+1)$$
$$=(m+1)(m+2)$$

اس لیے $3m^2+9m+6=3(m+1)(m+2)$

مشق 14.2

1. مندرجہ ذیل عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $a^2+8a+16$ (ii) $p^2-10p+25$ (iii) $25m^2+30m+9$

(iv) $49y^2+84yz+36z^2$ (v) $4x^2-8x+4$

(vi) $121b^2-88bc+16c^2$

(vii) $(l+m)^2-4lm$ (اشارہ: پہلے $(l+m)^2$ کو پھیلائیے)

(viii) $a^4+2a^2b^2+b^4$

2. اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $4p^2-9q^2$ (ii) $63a^2-112b^2$ (iii) $49x^2-36$

(iv) $16x^5-144x^3$ (v) $(l+m)^2-(l-m)^2$

(vi) $9x^2y^2 - 16$ (viii) $(x^2 - 2xy + y^2) - z^2$

(viii) $25a^2 - 4b^2 + 28bc - 49c^2$

.3 مندرجہ ذیل عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $ax^2 + bx$ (ii) $7p^2 + 21q^2$ (iii) $2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2$

(iv) $am^2 + bm^2 + bx^2 + ax^2$ (v) $(lm + l) + m + 1$

(vi) $y(y + z) + 9(y + z)$ (vii) $5y^2 - 20y - 8z + 2yz$

(viii) $10ab + 4a + 5b + 2$ (ix) $6xy - 4y + 6 - 9x$

.4 اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $a^4 - b^4$ (ii) $p^4 - 81$ (iii) $x^4 - (y + z)^4$

(iv) $x^4 - (x - z)^4$ (v) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

.5 مندرجہ ذیل عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $p^2 + 6p + 8$ (ii) $q^2 - 10q + 21$ (iii) $p^2 + 6p - 16$

14.3 الجبری عبارتوں کی تقسیم

ہم پڑھ چکے ہیں کہ الجبری عبارتوں کو کس طرح جمع کیا جاتا ہے اور کس طرح گھٹایا جاتا ہے۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ دو عبارتوں کو کس طرح ضرب کیا جاتا ہے لیکن ہم نے ایک الجبری عبارت کو دوسری الجبری عبارت سے تقسیم کرنے پر ابھی تک بحث نہیں کی ہے۔ اس حصّے میں ہم یہی کوشش کریں گے۔

آپ کو یاد ہوگا کہ تقسیم ضرب کا معکوس عمل ہے۔ اس طرح $7 \times 8 = 56$ سے $56 \div 8 = 7$ یا $56 \div 7 = 8$ حاصل ہوتا ہے۔

یہی عمل ہم الجبری عبارتوں کی تقسیم (یا تقسیم کرنے) کے لیے بھی کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر

(i) $2x \times 3x^2 = 6x^3$

اس لیے $6x^3 \div 2x = 3x^2$

اور ساتھ ہی $6x^3 \div 3x^2 = 2x$

(ii) $5x(x + 4) = 5x^2 + 20x$

اس لیے $(5x^2 + 20x) \div 5x = x + 4$

اور ساتھ ہی $(5x^2+20x) \div (x+4) = 5x$

اب ہم غور سے دیکھیں کہ ایک عبارت کو دوسری عبارت سے کس طرح تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ شروع کرنے کے لیے ہم ایک یک رُکنی کو دوسری یک رُکنی سے تقسیم کرنے پر غور کریں گے۔

14.3.1 ایک یک رکنی کی دوسری یک رُکنی سے تقسیم

$6x^3 \div 2x$ پر غور کیجیے

ہم $2x$ اور $6x^3$ کو نہ تحلیل ہونے والے جز ضربی میں لکھ سکتے ہیں۔

$$2x = 2 \times x$$

$$6x^3 = 2 \times 3 \times x \times x \times x$$

اب ہم $2x$ کو الگ کرنے کے لیے $6x^3$ کے اجزائے ضربی کا گروپ بناتے ہیں۔

$$6x^3 = 2 \times x \times (3 \times x \times x) = (2x) \times (3x^2)$$

اس طرح $6x^3 \div 2x = 3x^2$

متحرک اجزائے ضربی کو خارج کرنے کا ایک مختصر طریقہ یہ ہے جو ہم اعداد کی تقسیم میں کرتے ہیں۔

$$77 \div 7 = \frac{77}{7} = \frac{7 \times 11}{7} = 11$$

اسی طرح

$$6x^3 \div 2x = \frac{6x^3}{2x}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times x \times x \times x}{2 \times x} = 3 \times x \times x = 3x^2$$

مثال 13 : مندرجہ ذیل کو تقسیم کیجیے

(i) $-20x^4 \div 10x^2$ (ii) $7x^2y^2z^2 \div 14xyz$

حل :

(i) $-20x^4 = -2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x$

$$10x^2 = 2 \times 5 \times x \times x$$

اس لیے $(-20x^4) \div 10x^2 = \frac{-2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times x \times x}{2 \times 5 \times x \times x} = -2 \times x \times x = -2x^2$

$$7x^2y^2z^2 \div 14xyz = \frac{7\times x\times x\times y\times y\times z\times z}{2\times 7\times x\times y\times z} \qquad \text{(ii)}$$

$$= \frac{x\times y\times z}{2} = \frac{1}{2}xyz$$

کوشش کیجیے

تقسیم کیجیے۔

(i) $24xy^2z^3$ کو $6yz^2$ سے

(ii) $63a^2b^4c^6$ کو $7a^2b^2c^3$ سے

14.3.2 ایک کثیر رُکنی کی یک رُکنی سے تقسیم

آیئے ایک سہ رُکنی $4y^3 + 5y^2 + 6y$ کی یک رُکنی $2y$ سے تقسیم پر غور کریں۔

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = (2\times 2\times y\times y\times y) + (5\times y\times y) + (2\times 3\times y)$$

(یہاں ہم کثیر رُکنی کے ہر ایک رُکن کو اجزائے ضربی کی شکل میں لکھتے ہیں) ہم دیکھتے ہیں کہ $2\times y$ ہر ایک رکن میں ایک مشترک جز ضربی ہے۔ اس لیے ہر ایک رکن سے $2\times y$ علاحدہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$4y^3 + 5y^2 + 6y = 2\times y\times(2\times y\times y) + 2\times y\times\left(\frac{5}{2}\times y\right) + 2\times y\times 3$$

$$= 2y(2y^2) + 2y\left(\frac{5}{2}y\right) + 2y(3)$$

$$= 2y\left(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3\right)$$ (مشترک جز ضربی $2y$ کو الگ دکھایا گیا ہے)

اس لیے $(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y$

$$= \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y} = \frac{2y(2y^2 + \frac{5}{2}y + 3)}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

متبادل شکل میں ہم سہ رُکنی کے ہر ایک رُکن کو خارج کرنے کے طریقہ کا استعمال کرتے ہوئے اسے یک رُکنی سے تقسیم کر سکتے ہیں۔

$$(4y^3 + 5y^2 + 6y) \div 2y = \frac{4y^3 + 5y^2 + 6y}{2y}$$

$$= \frac{4y^3}{2y} + \frac{5y^2}{2y} + \frac{6y}{2y} = 2y^2 + \frac{5}{2}y + 3$$

یہاں ہم شمار کنندہ میں کثیر رُکنی کے ہر ایک رُکن کو نسب نما میں یک رُکنی سے تقسیم دیتے ہیں۔

مثال 14 : مندرجہ بالا دونوں طریقوں کا استعمال کرتے ہوئے $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$ کو $8xyz$ سے تقسیم دیجیے۔

حل : $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times [(x \times x \times y \times z) + (x \times y \times y \times z) + (x \times y \times z \times z)]$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times z \times (x + y + z) = 8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)$$ (مشترک جز ضربی باہر لینے پر)

اس لیے، $24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz$

$$= \frac{(8 \times 3 \times xyz \times (x + y + z)}{8 \times xyz} = 3 \times (x + y + z) = 3\,(x + y + z)$$

متبادل شکل میں

$$24\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz = \frac{24x^2yz}{8xyz} + \frac{24xy^2z}{8xyz} + \frac{24xyz^2}{8xyz}$$

$$= 3x + 3y + 3z = 3\,(x + y + z)$$

14.4 کثیر رُکنی کی کثیر رکنی سے تقسیم

- $(7x^2 + 14x) \div (x + 2)$ پر غور کیجیے۔

نسب نما کے ساتھ $(7x^2 + 14x)$ کے اجزائے ضربی کی جانچ اور میلان کرنے کے لیے پہلے اس کے اجزائے ضربی معلوم کریں گے:

$$7x^2 + 14x = (7 \times x \times x) + (2 \times 7 \times x)$$

$$= 7 \times x \times (x + 2) = 7x\,(x + 2)$$

اب

$$(7x^2 + 14x) \div (x + 2) = \frac{(7x^2 + 14x)}{x + 2}$$

$$= \frac{7x(x + 2)}{x + 2} = 7x$$ (اجزائے ضربی $(x + 2)$ کو خارج کرنے پر)

کیا شمار کنندہ کے ہر رکن کو نسب نما کے دو رکنی سے تقسیم دینا فائدہ مند ہوگا؟

مثال 15 : $44\,(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ کو $11x\,(x - 8)$ سے تقسیم کیجیے۔

حل : $44\,(x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ کے اجزائے ضربی نکالنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$44\,(x^4 - 5x^3 - 24x^2) = 2 \times 2 \times 11 \times x^2\,(x^2 - 5x - 24)$$

(مشترک اجزائے ضربی x^2 کو بریکٹ سے باہر لانے پر)

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\,(x^2 - 8x + 3x - 24)$$

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2\,[x\,(x - 8) + 3(x - 8)]$$

$$= 2 \times 2 \times 11 \times x^2 (x - 8)(x + 3)$$

اس لیے، $44 (x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 11x(x - 8)$

$$= \frac{2 \times 2 \times 11 \times x \times x \times (x+3) \times (x-8)}{11 \times x \times (x-8)}$$

$$= 2 \times 2 \times x \times (x + 3) = 4x(x + 3)$$

هم شمار کنندہ اور نسب نما میں موجود مشترک اجزائے ضربی 11، x اور $(x - 8)$ کو خارج کرتے ہیں

مثال 16 : $z(5z^2 - 80)$ کو $5z(z + 4)$ سے تقسیم دیجیے۔

حل : مقسوم $= z(5z^2 - 80)$

$$= z[(5 \times z^2) - (5 \times 16)]$$

$$= z \times 5 \times (z^2 - 16)$$

$$= 5z \times (z + 4)(z - 4)$$

(تماثل $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ کا استعمال کرنے پر)

اس طرح $z(5z^2 - 80) \div 5z(z + 4) = \dfrac{5z(z-4)(z+4)}{5z(z+4)} = (z - 4)$

مشق 14.3

1. مندرجہ ذیل تقسیم کیجیے۔

(i) $28x^4 \div 56x$ (ii) $-36y^3 \div 9y^2$ (iii) $66pq^2r^3 \div 11qr^2$

(iv) $34x^3y^3z^3 \div 51xy^2z^3$ (v) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$

2. دی ہوئی کثیر رُکنی کو دی ہوئی یک رُکنی سے تقسیم کیجیے۔

(i) $(5x^2 - 6x) \div 3x$ (ii) $(3y^8 - 4y^6 + 5y^4) \div y^4$

(iii) $8(x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3) \div 4x^2y^2z^2$ (iv) $(x^3 + 2x^2 + 3x) \div 2x$

(v) $(p^3q^6 - p^6q^3) \div p^3q^3$

3. مندرجہ ذیل تقسیم کیجیے۔

(i) $(10x - 25) \div 5$ (ii) $(10x - 25) \div (2x - 5)$

(iii) $10y(6y+21) \div 5(2y+7)$ (iv) $9x^2y^2(3z-24) \div 27xy(z-8)$

(v) $96abc(3a-12)(5b-30) \div 144(a-4)(b-6)$

4. ہدایت کے مطابق تقسیم کیجیے۔

(i) $5(2x+1)(3x+5) \div (2x+1)$ (ii) $26xy(x+5)(y-4) \div 13x(y-4)$

(iii) $52pqr(p+q)(q+r)(r+p) \div 104pq(q+r)(r+p)$

(iv) $20(y+4)(y^2+5y+3) \div 5(y+4)$ (v) $x(x+1)(x+2)(x+3) \div x(x+1)$

5. عبارتوں کے اجزائے ضربی بنایئے اور ہدایت کے مطابق تقسیم کیجیے۔

(i) $(y^2+7y+10) \div (y+5)$ (ii) $(m^2-14m-32) \div (m+2)$

(iii) $(5p^2-25p+20) \div (p-1)$ (iv) $4yz(z^2+6z-16) \div 2y(z+8)$

(v) $5pq(p^2-q^2) \div 2p(p+q)$

(vi) $12xy(9x^2-16y^2) \div 4xy(3x+4y)$ (vii) $39y^3(50y^2-98) \div 26y^2(5y+7)$

14.5 کیا آپ غلطی تلاش کر سکتے ہیں؟

کسی رُکن کے ضریب 1 کو عام طور سے ظاہر نہیں کیا جاتا۔ لیکن یکساں ارکان کو جمع کرتے وقت ہم اسے جمع میں شامل کرتے ہیں۔

کام 1 ایک مساوات کو حل کرتے وقت سریتا نے مندرجہ ذیل طریقہ اختیار کیا۔

$$3x + x + 5x = 72$$

اس لیے $8x = 72$

اور اس لیے $x = \frac{72}{8} = 9$

ایک منفی قدر رکھتے وقت بریکٹوں کا استعمال کرنا یاد رکھیں۔

اس نے کہاں غلطی کی ہے؟ صحیح جواب معلوم کیجیے۔

کام 2 اپو نے اس طرح حل کیا:

$$5x = 5 - 3 = 2, x = -3$$

یاد رکھیے جب آپ بریکٹوں میں بند کسی عبارت کو اس کے باہر لکھے متعلقہ (یا متغیر) سے ضرب کرتے ہیں تو عبارت کے ہر ایک رُکن سے اس مستقلہ (یا متغیر) کو ضرب کیا جاتا ہے۔

کیا یہ طریقہ صحیح ہے؟ اگر نہیں تو اسے صحیح کیجیے۔

کام 3 نمرتا اور سلمہ نے الجبری عبارتوں کی ضرب کے لیے مندرجہ ذیل طریقہ اختیار کیا۔

نمرتا		سلمہ
(a)	$3\,(x-4) = 3\,x - 4$	$3\,(x-4) = 3\,x - 12$
(b)	$(2\,x)^2 = 2\,x^2$	$(2\,x)^2 = 4\,x^2$
(c)	$(2\,a-3)\,(a+2)$ $= 2a^2 - 6$	$(2\,a-3)\,(a+2)$ $= 2\,a^2 + a - 6$
(d)	$(x+8)^2 = x^2 + 64$	$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$
(e)	$(x-5)^2 = x^2 - 25$	$(x-5)^2 = x^2 - 10\,x + 25$

یاد رکھیے جب آپ کسی یک رُکنی کا مربع کرتے ہیں تو عددی ضریب اور ہر ایک جز ضربی کا مربع کیا جاتا ہے۔

کوئی بھی فارمولہ استعمال کرنے سے پہلے یہ یقین کرلیں کہ کیا وہ فارمولہ صحیح معنوں میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

کیا نمرتا اور سلمہ کے ذریعے کی گئی ضرب صحیح ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات بتائیے۔

کام 4 جوزف نے تقسیم کے سوال کو اس طرح حل کیا : $\dfrac{a+5}{5} = a + 1$

اُس کے دوست سریش نے اسے اس طرح کیا : $\dfrac{a+5}{5} = a$

اس کے دوسرے دوست سمن نے اسے اس طرح کیا: $\dfrac{a+5}{5} = \dfrac{a}{5} + 1$

کس کا طریقہ صحیح ہے اور کس کا غلط؟ اور کیوں؟

ایک کثیر رُکنی کو ایک یک رُکنی سے تقسیم کرتے وقت ہم شمار کنندہ کے ہر رُکن کو نسب نما میں دی گئی ایک رُکنی سے تقسیم کرتے ہیں۔

کچھ تفریح !

اتل کے سوچنے کا انداز ہمیشہ الگ ہوتا ہے۔ اس نے سوماتھی ٹیچر سے پوچھا ''آپ جو کچھ کہتی ہیں اگر وہ صحیح ہے تو مجھے $\dfrac{64}{16} = \dfrac{4}{1} = 4$ صحیح جواب کیوں معلوم ہو رہا ہے؟ ٹیچر نے اسے سمجھایا'' ایسا اس لیے ہے کیوں کہ $64 = 16 \times 4$ ہوتا ہے اور $\dfrac{64}{16} = \dfrac{16\times 4}{16\times 1} = \dfrac{4}{1}$ ہے۔ حقیقت میں، ہم مشترک جز ضربی 16 کو خارج کرتے ہیں، 6 کو نہیں، جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں۔ دراصل 6 نہ تو 64 اور نہ ہی 16 کا جز ضربی ہے''۔ ٹیچر نے گفتگو جاری رکھتے ہوئے کہا'' ساتھ ہی $\dfrac{664}{166} = \dfrac{4}{1}$، $\dfrac{6664}{1666} = \dfrac{4}{1}$ وغیرہ بھی ہوتا ہے۔'' کیا یہ دلچسپ نہیں ہے؟ کیا آپ $\dfrac{64}{16}$ جیسی کچھ اور مثالوں میں اتل کی مدد کرسکتے ہیں۔

مشق 14.4

مندرجہ ذیل ریاضیاتی عبارت میں غلطی تلاش کر کے اُسے صحیح کیجیے۔

.1 $4\,(x-5)=4x-5$

.2 $x\,(3x+2)=3x^2+2$

.3 $2\,x+3\,y=5\,x\,y$

.4 $x+2x+3x=5x$

.5 $5y+2y+y-7y=0$

.6 $3\,x+2\,x=5\,x^2$

.7 $(2x)^2+4\,(2x)+7=2x^2+8x+7$

.8 $(2\,x)^2+5\,x\ =4\,x+5\,x=9\,x$

.9 $(3x+2)^2=3x^2+6x+4$

.10 $x=-3$ رکھنے پر

(a) x^2+5x+4 سے $(-3)^2+5\,(-3)+4=9+2+4=15$ حاصل ہوتا ہے۔

(b) x^2-5x+4 سے $(-3)^2-5\,(-3)+4=9-15+4=-2$ حاصل ہوتا ہے۔

(c) x^2+5x سے $(-3)^2+5\,(-3)=-9\ -15=-24$ حاصل ہوتا ہے۔

.11 $(y-3)^2=y^2-9$

.12 $(z+5)^2=z^2+25$

.13 $(2a+3b)\,(a-b)=2a^2-3b^2$

.14 $(a+4)\,(a+2)=a^2+8$

.15 $(a-4)\,(a-2)=a^2-8$

.16 $\dfrac{3x^2}{3x^2}=0$

.17 $\dfrac{3x^2+1}{3x^2}=1+1=2$

.18 $\dfrac{3x}{3x+2}=\dfrac{1}{2}$

.19 $\dfrac{3}{4x+3}=\dfrac{1}{4x}$

.20 $\dfrac{4x+5}{4x}=5$

.21 $\dfrac{7x+5}{5}=7x$

ہم نے کیا سیکھا؟

1. جب ہم کسی عبارت کے اجزائے ضربی نکالتے ہیں تو ہم اسے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھتے ہیں۔ یہ اجزائے ضربی اعداد، الجبری متغیر یا الجبری عبارت ہو سکتے ہیں۔
2. ایک اجزائے ضربی میں نہ تحلیل ہونے والا جز ضربی ایسا جز ضربی ہے جسے اور آگے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔

.3 کسی عبارت کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کا ایک منظّم طریقہ مشترک جز ضربی طریقہ ہے۔ اس طریقہ کے 3 اقدام ہوتے ہیں۔ (i) عبارت کے ہر ایک رُکن کو مزید اجزائے ضربی میں نہ تحلیل ہونے والے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیے۔ (ii) مشترک اجزائے ضربی کا پتہ لگائیے اور انھیں الگ کیجیے۔ (iii) ہر ایک رُکن میں باقی اجزائے ضربی کو تقسیمی اُصول کے مطابق ملائیے۔

.4 کبھی کبھی ایک دی ہوئی عبارت کے سبھی ارکان میں ایک مشترک جز ضربی نہیں ہوتا لیکن ان ارکان کے کچھ گروپ اس طرح بنائے جاسکتے ہیں کہ ہر ایک گروپ کے سبھی ارکان میں ایک مشترک جز ضربی ہوتا ہے۔ جب ہم ایسا کرتے ہیں تو سبھی گروپ میں ایک مشترک جز ضربی ظاہر ہو جاتا ہے۔ جس سے ہم عبارت کے اجزائے ضربی حاصل کر لیتے ہیں۔ یہ طریقہ گروپ بنانے کا طریقہ کہلاتا ہے۔

.5 گروپ کے ذریعے اجزائے ضربی میں یہ یاد رکھنا چاہیے کہ عبارت کے ارکان کے دوسرے گروپ یا دوسری ترتیب بنانے سے اجزائے ضربی حاصل نہیں ہوتے ہیں۔ ہمیں عبارت کا مشاہدہ کرنا چاہیے اور سعی اور خطا کے طریقہ سے مطلوبہ گروپ حاصل کرنا چاہیے۔

.6 اجزائے ضربی میں تبدیل ہونے والی عبارتوں میں سے بہت سی $a^2 + 2\,ab + b^2$، $a^2 - 2ab + b^2$، $a^2 - b^2$ اور $x^2 + (a+b)x + ab$ کی شکل کے ہوتے ہیں یا انھیں اس شکل میں بدلا جا سکتا ہے۔ ان عبارتوں کے اجزائے ضربی باب 9 میں دی ہوئی مندرجہ ذیل تماثلات I، II، III اور IV سے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

$$a^2 + 2\,ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$$

$$x^2 + (a+b)\,x + ab = (x+a)\,(x+b)$$

.7 ان عبارتوں میں جن کے اجزائے ضربی $(x + a)\ (x + b)$ شکل کے ہیں یہ یاد رکھنا چاہیے کہ عددی رُکن سے ab حاصل ہوتا ہے۔ اس کے اجزائے ضربی $(a\,b)$ کو اس طرح منتخب کرنا چاہیے کہ علامت کا خیال رکھتے ہوئے ان کا حاصل جمع x کے ضریب کے برابر ہو۔

.8 ہم جانتے ہیں کہ اعداد میں تقسیم، ضرب کا معکوس عمل ہوتا ہے۔ یہی بات الجبری عبارتوں کی تقسیم کے لیے بھی مناسب ہوتی ہے۔

.9 ایک کثیر رُکنی کو ایک یک رُکنی سے تقسیم کی حالت میں ہم تقسیم کرنے کے لیے کثیر رُکنی کے ہر ایک رُکن کو اس یک رُکنی سے تقسیم دے کر کر سکتے ہیں یا مشترک اجزائے ضربی کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

.10 ایک کثیر رُکنی کی ایک کثیر رُکنی سے تقسیم کی حالت میں ہم مقسوم کثیر رُکنی کے ہر ایک رُکنی کو قاسم کثیر رُکنی سے تقسیم کر کے آگے نہیں بڑھتے اس کے بجائے ایک جگہ ہم ہر ایک کثیر رُکنی کے اجزائے ضربی معلوم کرتے ہیں اور مشترک اجزائے ضربی کو خارج کر دیتے ہیں۔

11. اس باب میں پڑھے گئے الجبری عبارت کی تقسیم کی حالت سے ہمیں مقسوم = (خارج قسمت) × قاسم حاصل ہوگا۔

عمومی طور پر یہ رشتہ اس طرح ہوتا ہے:

مقسوم = باقی + خارج قسمت × قاسم

اس طرح اس باب میں، ہم نے صرف ان تقسیموں کے بارے میں پڑھا ہے جن میں صفر باقی ہے۔

12. الجبری سوالوں کو حل کرتے ہوئے طلبا مختلف قسم کی غلطیاں کرتے ہیں آپ کو ایسی غلطیوں سے بچنا چاہیے۔

باب

15

گراف کا تعارف

4817CH15

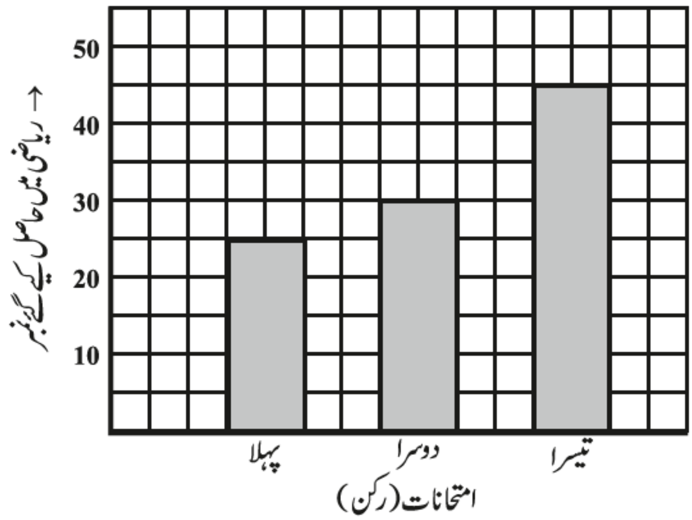
15.1 تعارف

کیا آپ نے اخبار، ٹیلی ویژن ، رسائل اور کتابوں وغیرہ میں گراف دیکھے ہیں؟ گراف کا مقصد عددی حقیقتوں کو بصری طریقے سے ظاہر کرنا ہے تا کہ اسے جلدی، بآسانی اور واضح طور پر سمجھا جا سکے۔ اس طرح گراف جمع کیے گئے اعداد و شمار کا بصری اظہار ہے۔ اعداد و شمار کو جدول کے ذریعے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے، لیکن گرافی اظہار سمجھنے میں زیادہ آسان ہے۔ اعداد و شمار کا رجحان یا ان کا موازنہ ظاہر کرنے کے لیے تو یہ بہت ہی مفید ہیں۔ ہم اب تک کئی قسم کے گراف دیکھ چکے ہیں۔ آیئے ان کا اعادہ کر لیں۔

15.1.1 بارگراف

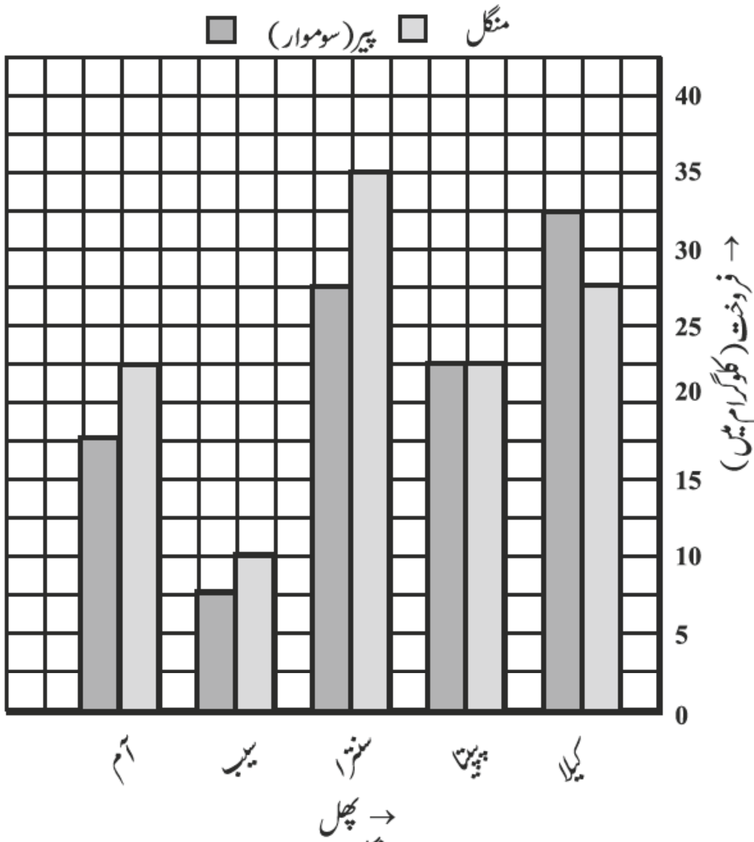
بارگراف (Bar Graph) مختلف زمروں (Categories) کے درمیان موازنہ کرنے میں کام آتا ہے۔ اس میں دو یا دو سے زیادہ متوازی اور انتصابی (یا اُفقی) بار (مستطیل) ہوتے ہیں۔

شکل 15.1 میں بارگراف تین امتحانوں میں انو کے ذریعہ حاصل کیے گئے ریاضی کے نمبروں کو ظاہر کرتا ہے۔ یہ اس کی کارکردگی کا موازنہ کرنے میں آپ کی مدد کرتا ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس کی کارکردگی بہتر ہوئی ہے۔



شکل 15.1

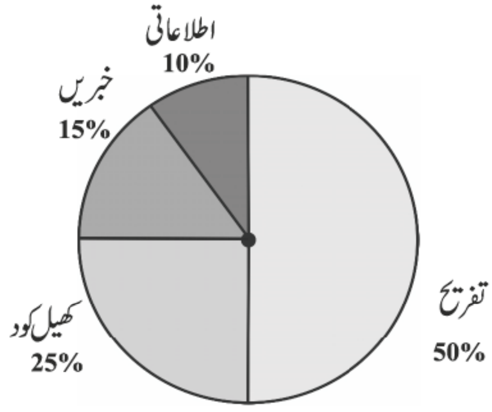
بارگراف میں دوہرے بار بھی ہوسکتے ہیں، جیسے (شکل 15.2) گراف دو دنوں میں مختلف قسم کے پھلوں کی فروخت (روپیوں میں) کا تقابلی جائزہ (Comparative Account) ہے ۔شکل 15.2 اور شکل 15.1 میں کیا فرق ہے؟ اپنے دوستوں کے ساتھ گفتگو کیجیے۔



شکل 15.2

15.1.2 پائی گراف یا (دائری گراف)

پائی گراف (Pie Graph) کا استعمال کسی ایک 'مکمل' کے مختلف حصوں کا موازنہ کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔ دائرہ، ایک مکمل کو ظاہر کرتا ہے۔ شکل 15.3 ایک پائی گراف ہے۔ یہ دوردرشن کے مختلف چینلوں کے ناظرین کی تعداد کا فی صد ظاہر کررہا ہے۔



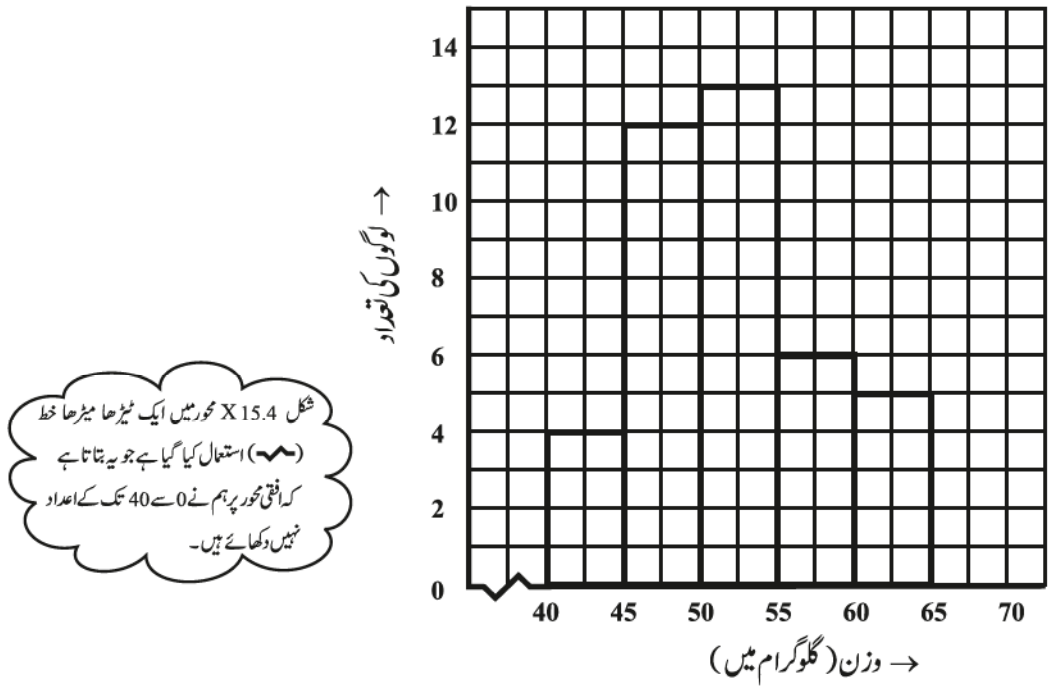
شکل 15.3

15.1.3 ہسٹوگرام

ہسٹوگرام (Histogram) وہ بار گراف ہوتا ہے جو اعداد و شمار کو وقفوں میں ظاہر کرتا ہے۔ اس میں وقفوں کو متصل بار کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے۔

شکل 15.4 کے ہسٹوگرام میں ایک علاقے کے 40 لوگوں کے وزن (کلوگرام میں) کو ظاہر کیا گیا ہے۔

وزن (کلوگرام میں)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
لوگوں کی تعداد	4	12	13	6	5



شکل 15.4

غور کیجیے کہ باروں کے درمیان کوئی خالی جگہ نہیں ہے کیوں کہ وقفوں کے درمیان بھی کوئی فرق نہیں ہے۔ اس ہسٹوگرام سے آپ کو کون سی معلومات حاصل ہوتی ہیں؟ ان کی ایک فہرست بنائیے۔

15.1.4 خطی گراف

خطی گراف (line graph) ایسے اعداد و شمار پیش کرتا ہے جو وقت کے ساتھ ساتھ لگاتار بدلتے رہتے ہیں۔

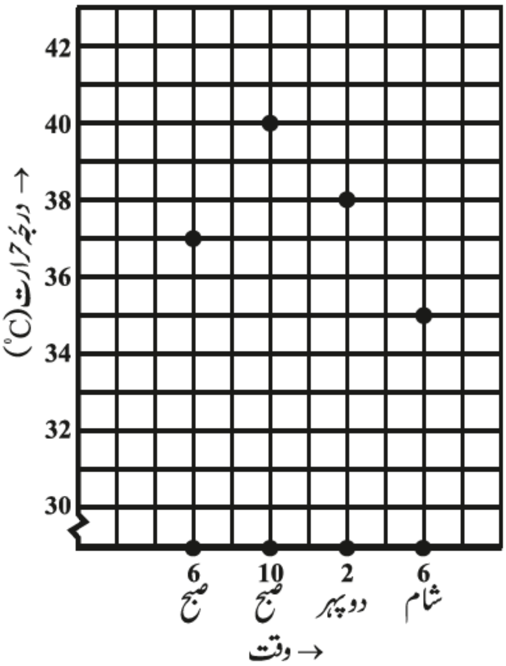
جب رینو بیمار ہوئی تب ڈاکٹر نے چار چار گھنٹے بعد اس کے جسمانی درجۂ حرارت کا ریکارڈ تیار کیا۔ یہ ایک گراف کی شکل میں تھا (جو شکل 15.5 اور 15.6 میں دکھایا گیا ہے۔)

ہم اسے 'وقت-درجۂ حرارت کا گراف' کہہ سکتے ہیں۔

ذیل میں مذکورہ بالا جدول میں دیے گئے اعداد و شمار کا تصویری اظہار ہے۔

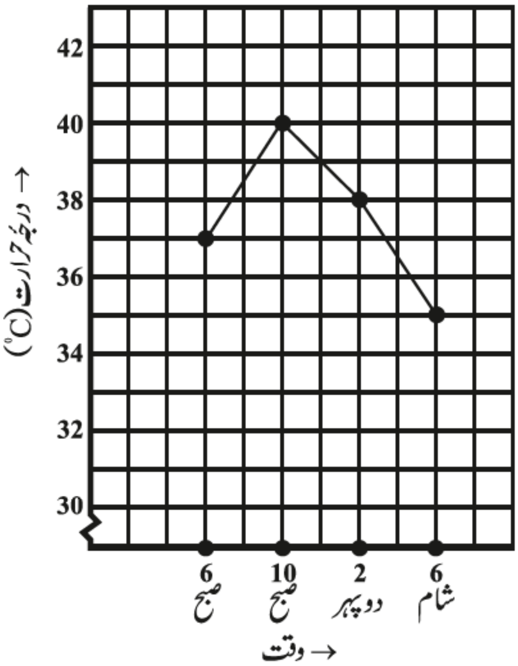
وقت	6 بجے صبح	10 بجے صبح	2 بجے دوپہر	6 بجے شام
درجۂ حرارت (°C)	37	40	38	35

افقی خط (جسے X محور بھی کہتے ہیں) اس وقت کو ظاہر کرتا ہے جب درجۂ حرارت لیا گیا۔ انتصابی خط (جسے Y محور بھی کہتے ہیں) پر کسے دکھایا گیا ہے؟



شکل 15.5

اعداد و شمار کے ہر حصے کو مربع نما کاغذ پر ایک نقطے کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔



شکل 15.6

بعد میں نقطوں کو قطع خط کے ذریعہ ملا دیا گیا ہے، یہ خطی گراف ہے۔

اس گراف سے کیا ظاہر ہوتا ہے؟ مثال کے طور پر آپ اس میں درجۂ حرارت کا نمونہ دیکھ سکتے ہیں؛ صبح 10 بجے درجۂ حرارت زیادہ تھا (دیکھیے شکل 15.5) اور پھر شام 6 بجے تک یہ کم ہوتا گیا۔ غور کیجیے کہ صبح 6 بجے اور 10 بجے کے درمیان درجۂ حرارت میں $3°\,C (= 40°\,C - 37°\,C)$ کا اضافہ ہوا۔

صبح 8 بجے درجۂ حرارت نہیں ناپا گیا پھر بھی گراف دیکھ کر یہ اندازہ لگایا جا سکتا ھے کہ درجۂ حرارت $37\,°C$ سے زیادہ تھا (کیسے؟)۔

مثال 1 : ''کارکردگی'' پر ایک گراف

دیے گئے گراف (شکل 15.7) میں سال 2007 میں کھیلے گئے 10 میچوں میں دو بلے بازوں A اور B کے ذریعہ بنائے گئے رنوں کو ظاہر کیا گیا ہے۔ گراف کا مشاہدہ کیجیے اور مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

(i) دونوں محور خطوں پر کیا کیا اطلاعات دی گئیں ہیں؟

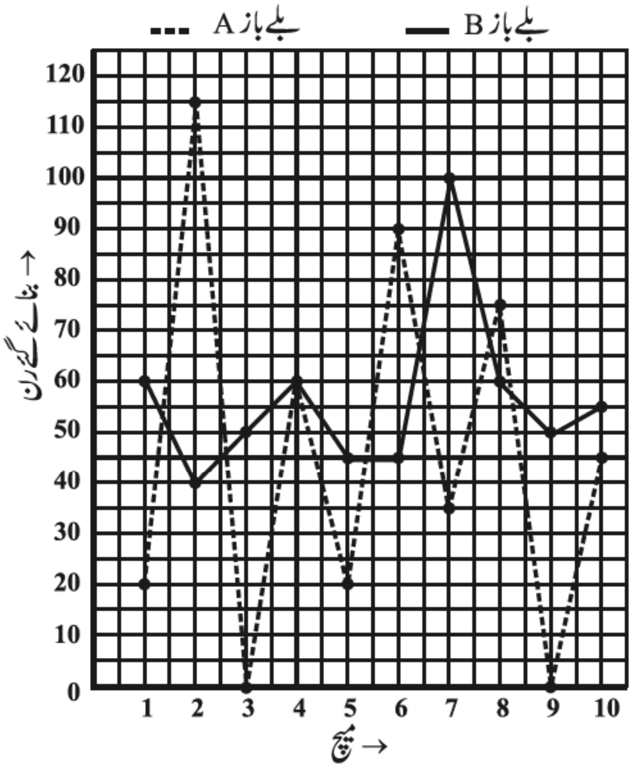
(ii) کون سا خط بلے باز A کے ذریعہ بنائے گئے رنوں کو دکھاتا ہے؟

(iii) کیا سال 2007 میں کسی میچ میں دونوں بلے بازوں کے ذریعہ بنائے گئے رن یکساں تھے؟ اگر ہاں تو کس میچ میں؟

(iv) دونوں بلے بازوں میں کون زیادہ بہتر ہے؟ آپ نے یہ فیصلہ کیسے کیا؟

حل :

(i) افقی محور (یا x– محور) سال 2007 میں کھیلے گئے میچوں کی تعداد ظاہر کرتا ہے۔ انتصابی محور (یا y– محور) ہر ایک میچ میں بنائے گئے رنوں کی تعداد ظاہر کرتا ہے۔



شکل 15.7

(ii) نقطہ دار خط A بلے باز کے ذریعہ بنائے گئے رنوں کو ظاہر کرتا ہے (جیسا کہ گراف کے اوپر دکھایا بھی گیا ہے۔)

(iii) چوتھے میچ کے دوران دونوں بلے بازوں نے 60 رن بنائے (یہ اس نقطہ سے پتہ چلتا ہے جہاں پر دونوں خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں)۔

(iv) بلے باز A کے گراف میں ایک اونچی چوٹی ہے اور بہت سی نشیبی گھاٹیاں ہیں۔ وہ رن بنانے میں مستقل نہیں ہے۔ جب کہ دوسری طرف بلے باز B نے کبھی 40 رن سے کم نہیں بنائے؛ حالاں کہ اس نے A کے 115 رنوں کے مقابلے میں زیادہ سے زیادہ 100 رن ہی بنائے۔ بلے باز A نے دو میچوں میں صفر رن بنائے اور کل پانچ میچوں میں 40 سے کم رن بنائے۔ چوں کہ A کے ذریعہ بنائے گئے رنوں میں زیادہ اتار چڑھاؤ ہے۔ اس لیے B ہی صحیح معنوں میں ایک مستحکم پر اعتماد بلے باز ہے۔

مثال 2 : ایک کار شہر P سے شہر Q کی طرف جا رہی ہے جو ایک دوسرے سے 350 کلو میٹر کے فاصلہ پر ہیں۔ دیے گئے گراف (شکل 15.8) میں مختلف اوقات میں کار کا P شہر سے فاصلہ معلوم ہوتا ہے۔ گراف پر غور کیجیے اور مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

(i) دونوں محوروں پر کیا کیا معلومات دی گئی ہیں؟

(ii) کار نے کس وقت اور کہاں سے سفر شروع کیا؟

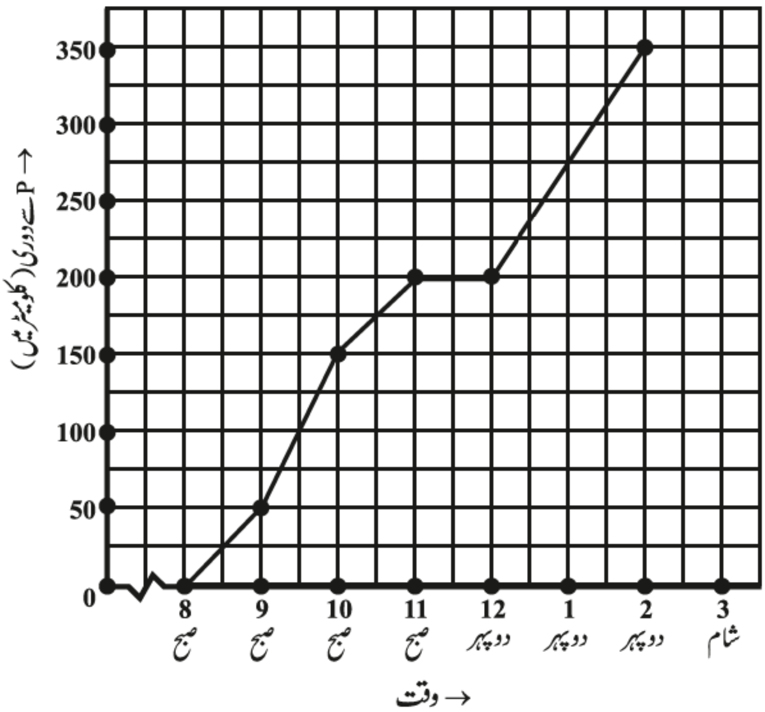
(iii) پہلے گھنٹے میں کار نے کتنا فاصلہ طے کیا؟

(iv) دوسرے گھنٹے اور تیسرے گھنٹے میں کار نے کتنا فاصلہ طے کیا؟

(v) کیا پہلے تین گھنٹوں میں کار کی رفتار یکساں تھی؟ آپ کو کس طرح معلوم ہوا؟

(vi) کیا کار کسی جگہ پر رکی؟ اپنے جواب کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(vii) کار کس وقت شہر Q میں پہنچی؟



شکل 15.8

حل : افقی (x) محور وقت ظاہر کرتا ہے، انتصابی (y) محور شہر P سے کار کا فاصلہ ظاہر کرتا ہے۔

(ii) شہر P سے کار 8 بجے صبح روانہ ہوئی۔

(iii) کار نے پہلے گھنٹے میں 50 کلومیٹر کا فاصلہ طے کیا۔ [آپ یہ دیکھ سکتے ہیں کہ کار شہر P سے صبح 8 بجے روانہ ہوئی اور اور صبح 9 بجے (گراف کے مطابق) 50 کلومیٹر کا فاصلہ طے کر چکی تھی۔ اس لیے صبح 8 بجے سے 9 بجے کے درمیان ایک گھنٹہ میں کار نے 50 کلومیٹر کا فاصلہ طے کیا]۔

(iv) کار کے ذریعے طے کی گئی دوری

(a) کار نے دوسرے گھنٹے (صبح 9 بجے سے صبح 10 بجے) میں 100 کلومیٹر کا فاصلہ (150−50) طے کیا۔

(b) کار نے تیسرے گھنٹے (صبح 10 بجے سے صبح 11 بجے) میں 50 کلومیٹر کا فاصلہ (200−150) طے کیا۔

(v) سوال (iii) اور (iv) کے جوابات سے معلوم ہوتا ہے کہ کار کی رفتار ہر وقت یکساں نہیں رہی۔ (گراف یہ بھی ظاہر کرتا ہے کہ رفتار میں تبدیلی کس طرح ہوئی)۔

(vi) ہم دیکھتے ہیں کہ کار صبح 11 بجے اور دوپہر 12 بجے تک شہر P سے 200 کلومیٹر کے فاصلہ پر تھی۔ اس سے یہ پتہ چلتا ہے کہ اس وقفہ میں کار نے سفر طے نہیں کیا۔ اس وقفے میں طے کیا گیا فاصلہ ایک افقی قطع خط ہے جو اس حقیقت کی تصدیق کرتا ہے۔

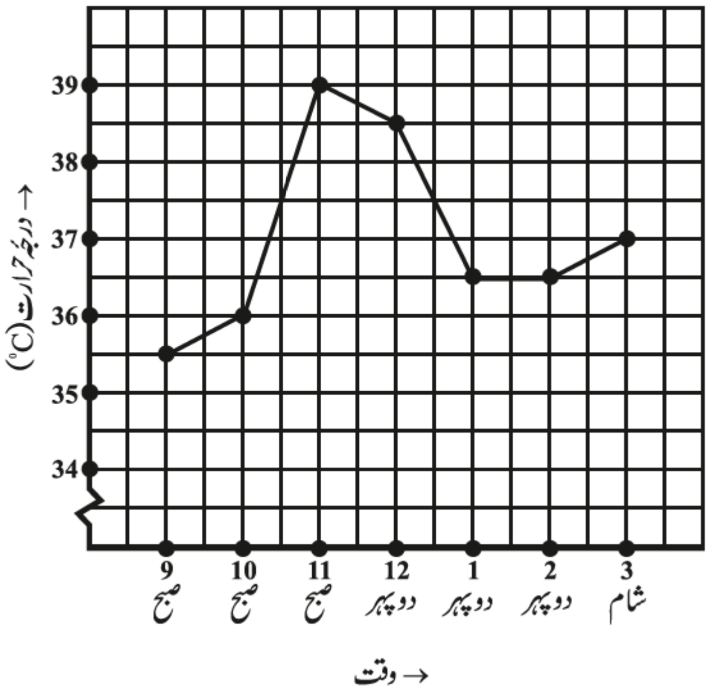
(vii) کار دوپہر 2 بجے شہر Q میں پہنچی؟

مشق 15.1

1. مندرجہ ذیل گراف اسپتال میں ایک مریض کا فی گھنٹہ لیا گیا درجۂ حرارت کو ظاہر کرتا ہے:

(a) مریض کا دوپہر 1 بجے درجۂ حرارت کیا تھا؟

(b) کب مریض کا درجۂ حرارت 38.5°C تھا؟



(c) اس پورے وقفے میں مریض کا درجۂ حرارت دو وقتوں میں ایک سا تھا۔ یہ دونوں اوقات کیا تھے؟

(d) دوپہر ڈیڑھ بجے مریض کا درجۂ حرارت کیا تھا؟ اس نتیجہ پر آپ کیسے پہنچے؟

(e) کن وقفوں میں مریض کے درجۂ حرارت میں 'اضافے کا رجحان' نظر آتا ہے۔

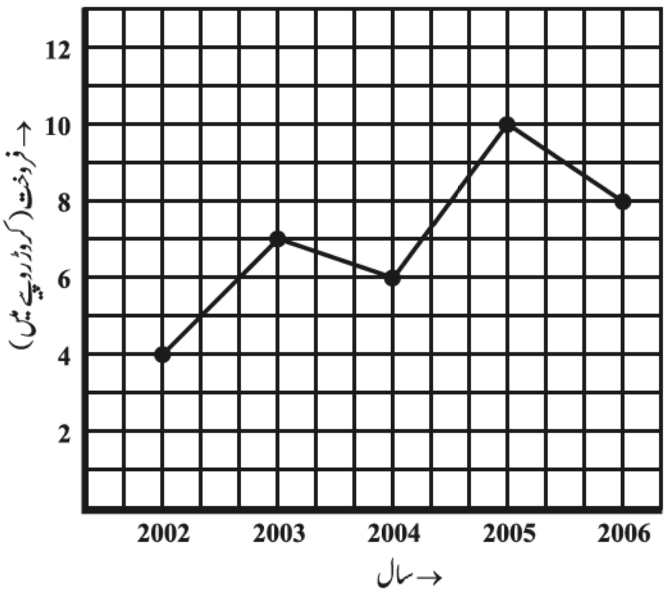
2. مندرجہ ذیل خطی گراف میں ایک صنعتی کمپنی کی الگ الگ برسوں میں کی گئی فروخت دکھائی گئی ہے:

(a) (i) 2002 میں اور (ii) 2006 میں کتنی فروخت ہوئی؟

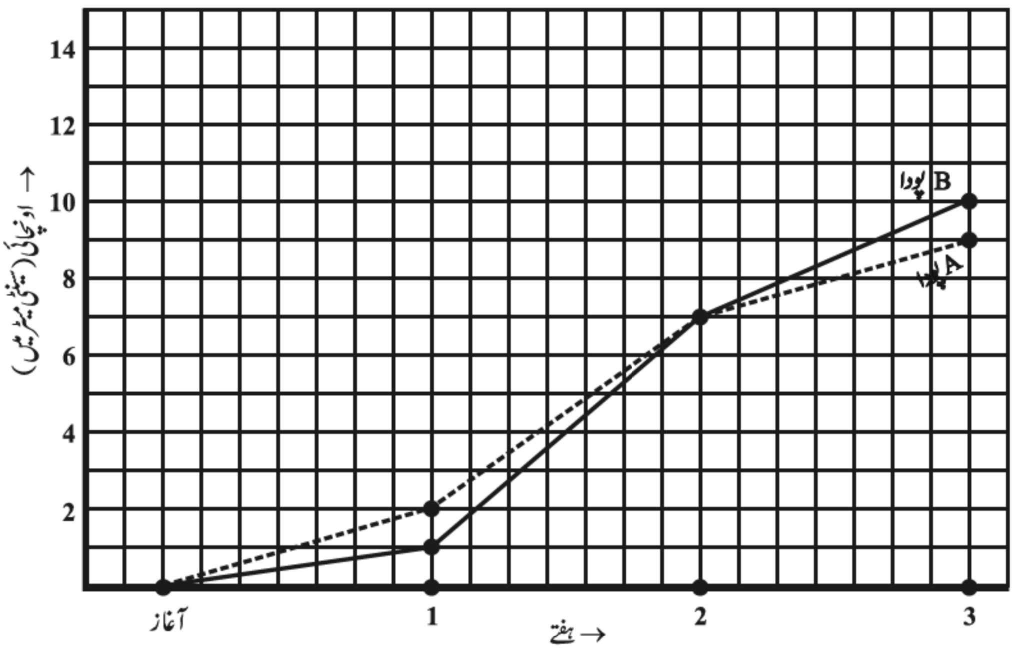
(b) (i) 2003 میں اور (ii) 2005 میں کتنی فروخت ہوئی؟

(c) 2002 اور 2006 کے درمیان فروخت میں کتنا فرق تھا؟

(d) کس سال میں پچھلے سال کے مقابلے فروخت کے درمیان فرق سب سے زیادہ تھا؟



3. علم نباتات کے ایک تجربہ میں، یکساں لیبارٹری حالات میں دو پودے A اور B اُگائے گئے۔ تین ہفتوں تک ان کی اونچائی کو ہر ہفتہ کے آخر میں ناپا گیا۔ نتیجوں کو مندرجہ ذیل گراف کی مدد سے ظاہر کیا گیا ہے:



(a) A پودے کی اونچائی کتنی تھی؟ (i) 2 ہفتے کے بعد (ii) 3 ہفتے کے بعد

(b) B پودے کی اونچائی کتنی تھی؟ (i) 2 ہفتے کے بعد (ii) 3 ہفتے کے بعد

(c) تیسرے ہفتے میں پودا A کی اونچائی میں کتنا اضافہ ہوا؟

(d) دوسرے ہفتے کے آخر سے تیسرے ہفتے کے ختم ہونے تک پودے B کی اونچائی میں کتنا اضافہ ہوا؟

(e) کس ہفتے میں پودا A کی اونچائی میں سب سے زیادہ اضافہ ہوا؟

(f) کس ہفتے میں B پودے کی اونچائی میں سب سے کم اضافہ ہوا؟

(g) کیا کسی ہفتے میں دونوں پودوں کی اونچائی یکساں تھی؟ وضاحت کیجیے۔

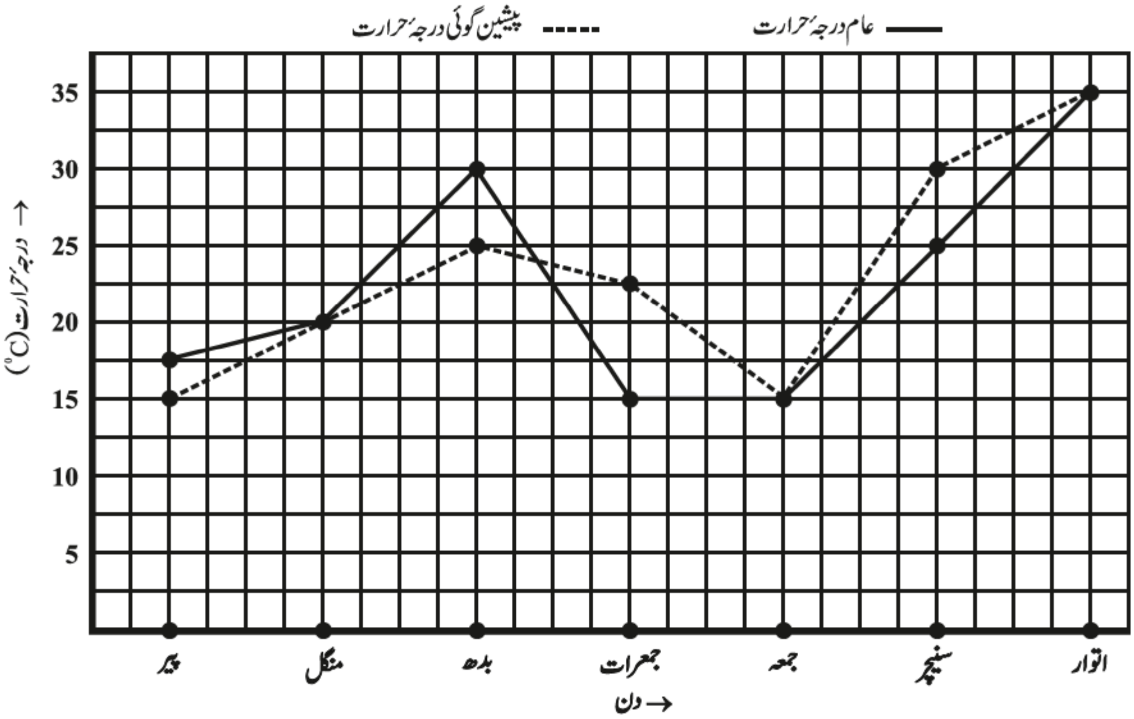
4. مندرجہ ذیل گراف میں ایک ہفتے کے ہر روز کے اصل درجۂ حرارت اور درجۂ حرارت کی پیشین گوئی کو ظاہر کیا گیا ہے:

(a) کس دن درجۂ حرارت کی پیشین گوئی اور اصل درجۂ حرارت میں یکسانیت تھی؟

(b) ہفتے کے دوران سب سے زیادہ پیشین گوئی کی گئی۔ درجۂ حرارت کتنا تھا؟

(c) ہفتے کے دوران سب سے کم اصل درجۂ حرارت کتنا تھا؟

(d) کس دن اصل درجۂ حرارت اور پیشین گوئی کیے گئے درجۂ حرارت میں سب سے زیادہ فرق تھا؟



5. مندرجہ ذیل جدول کا استعمال کر کے ایک خطی گراف بنائیے۔

(a) مختلف برسوں میں کسی پہاڑی علاقہ میں برف باری کے دنوں کی تعداد:

سال	2003	2004	2005	2006
دن	8	10	5	12

(b) مختلف برسوں میں ایک دیہات میں مردوں اور عورتوں کی تعداد (ہزاروں میں)

سال	2003	2004	2005	2006	2007
مردوں کی تعداد	12	12.5	13	13.2	13.5
عورتوں کی تعداد	11.3	11.9	13	13.6	12.8

6. ایک پیغام رساں سائیکل سے کسی شہر کے نزدیک واقع نواحی علاقے میں ایک تاجر کو پارسل پہچانے کے لیے جاتا ہے گراف میں مختلف وقتوں پر شہر سے اس شخص کا فاصلہ دکھایا گیا ہے۔

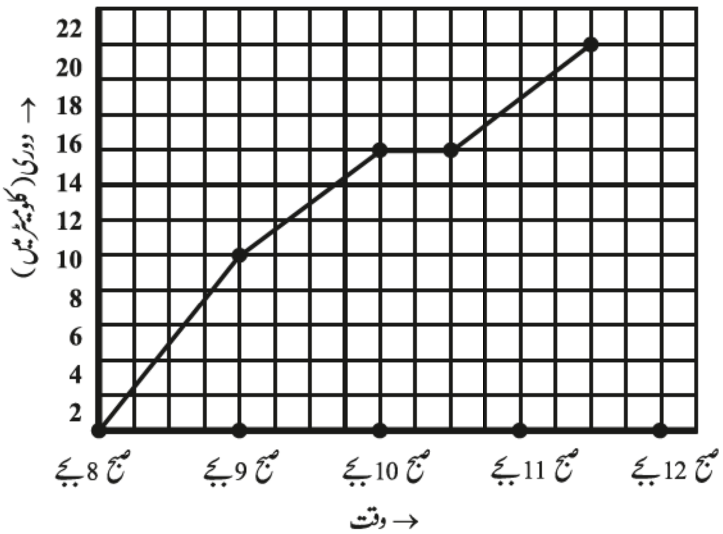
(a) محور پر وقت کو ظاہر کرنے کے لیے کیا پیمانہ استعمال کیا گیا ہے؟

(b) اس نے پورے سفر کے لیے کتنا وقت لیا؟

(c) تاجر کے مکان سے شہر کا فاصلہ کتنا ہے؟

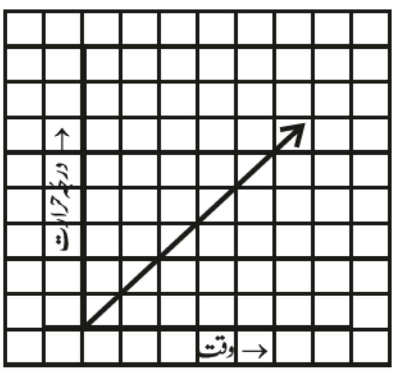
(d) کیا وہ شخص راستے میں کہیں ٹھہرا تھا؟ تشریح کیجیے۔

(e) کس وقفے میں اس کی رفتار سب سے زیادہ تیز تھی؟

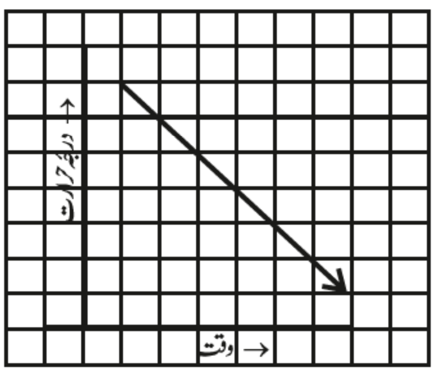


7. نیچے کون کون سی شکلیں وقت اور درجۂ حرارت کے لیے ممکن ہیں؟ اپنے جواب کے لیے دلیل پیش کیجیے؟

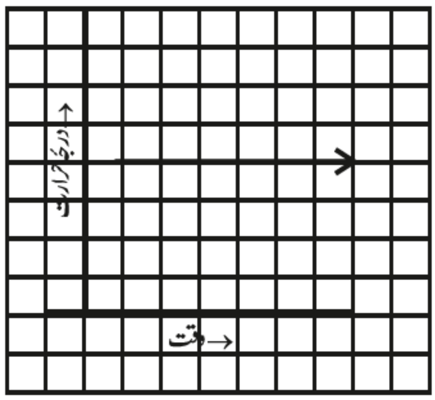
(ii)



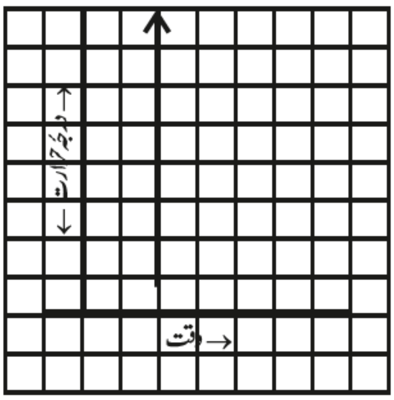
(i)



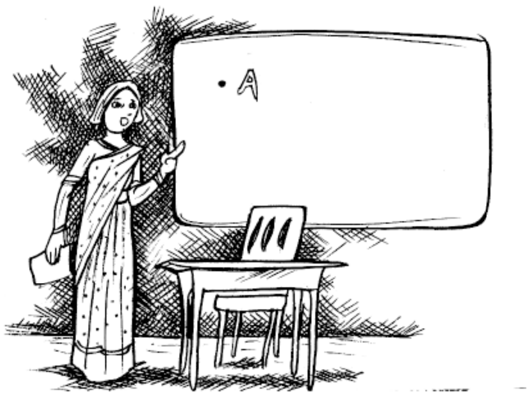
(iii)



(iv)



15.2 خطی گراف



خط گراف بہت سے قطعات خط کو لگا تار ملا کر بنایا جاتا ہے۔ کبھی کبھی یہ گراف ایک غیر شکستہ خط بھی ہو سکتا ہے۔ ایسے گراف کو **خطی گراف** (Linear Graph) کہتے ہیں۔ اس گراف کو بنانے کے لیے ہمیں مربع کاغذ پر کچھ نقطے دکھانے پڑتے ہیں۔ اب ہم گرافی کاغذ پر نقطوں کا مقام متعین کرنا سیکھیں گے۔

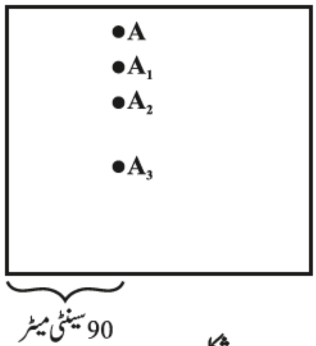
15.2.1 نقطے کا مقام

ایک ٹیچر نے بلیک بورڈ پر ایک نقطہ بنایا۔ پھر اس نے طلبا سے پوچھا کہ بلیک بورڈ پر وہ اس کا مقام کیسے معلوم کریں گے؟ اسے کئی جوابات ملے (شکل 15.9)۔

شکل 15.9

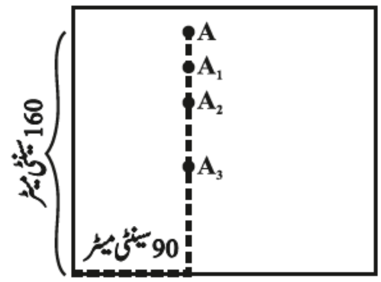
کیا ان میں سے کوئی بھی بیان نقطہ کے مقام کو صحیح صحیح متعین کرتا ہے؟ نہیں! کیوں نہیں؟ اس کے بارے میں سوچیے۔

تب جان نے ایک مشورہ دیا۔ اس نے بورڈ کے بائیں کنارے سے نقطہ کا فاصلہ ناپا اور کہا ''یہ نقطہ بورڈ کے بائیں کنارے سے 90 سینٹی میٹر کے فاصلے پر ہے۔'' کیا آپ سمجھتے ہیں کہ جان کا مشورہ بالکل ٹھیک ہے (شکل 15.10)؟



شکل 15.10

A, A_1, A_2, A_3 سبھی نقطے بائیں کنارے سے 90 سینٹی میٹر کے فاصلہ ہیں۔



شکل 15.11

نقطہ A بائیں کنارے سے 90 سینٹی میٹر اور نچلے کنارے سے 160 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر ہے۔

تب ریکھا نے بیان کی تصحیح کرتے ہوئے کہا ''یہ نقطہ بائیں کنارے سے 90 سینٹی میٹر اور نچلے کنارے سے 160 سینٹی میٹر کے فاصلے پر ہے۔'' اس طرح مسئلہ کا ٹھیک حل حاصل ہوا! (شکل 15.11) تب استاد محترم نے بتایا ''ہم نقطے کا مقام اس طرح (90, 160) لکھ کر ظاہر کرتے ہیں۔'' کیا نقطہ (160, 90) نقطہ (90, 160) سے مختلف ہوگا؟ اس کے بارے میں سوچیے۔

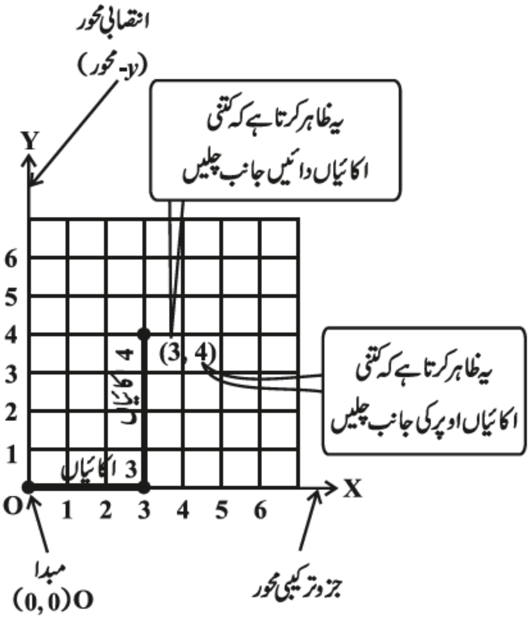
کہا جاتا ھے کہ سترھویں صدی میں ریاضی داں **رینے دکارٹس** (Rene Descartes) نے ایک چیونٹی کو چھت کے کونے کے پاس چلتے ہوئے دیکھا۔ اس نے مستوی میں کسی نقطے کے مقام کو متعین کرنے کے بارے میں سوچنا شروع کیا۔ افقی اور انتصابی دو خطوط سے دیے گئے نقطوں کے دو فاصلوں کی پیمائش کر کے ان کے مقام کو ظاہر کرنے کا طریقہ ان کی تعظیم میں آج 'کارٹیزین نظام' *(Cartesian System)* کہلاتا ھے۔

رینے دکارٹس
1596-1650

15.2.2 مختصات

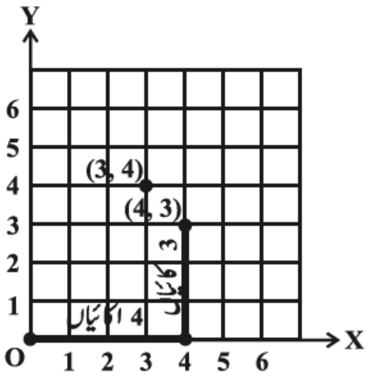
مان لیجیے کہ آپ کسی جلسہ گاہ میں جاتے ہیں اور اپنی محفوظ سیٹ تلاش کرتے ہیں۔ اس کے لیے آپ کو دو اعداد چاہیے، قطاروں کی تعداد اور سیٹوں کی تعداد۔ کسی مستوی میں نقطے کا مقام متعین کرنے کا یہی طریقہ ہے۔

شکل 15.12 پر غور کیجیے، نقطہ (3,4) جس کا فاصلہ بائیں کنارے سے 3 اکائی اور نچلے کنارے سے 4 اکائی ہے، مربع کاغذ پر کس طرح دکھایا گیا ہے۔ گراف کا کاغذ بھی ایک مربع کاغذ ہی ہے۔ جس پر ہم x اور y



شکل 15.12

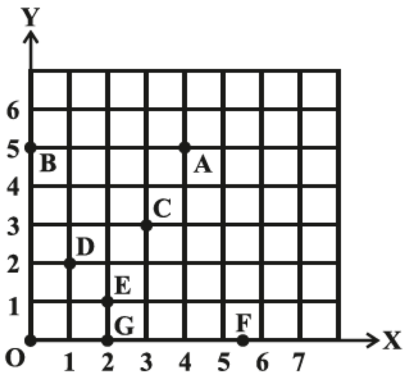
محور اپنی آسانی کے حساب سے دکھاتے ہیں اور پھر اس پر نقطے کا مقام متعین کرتے ہیں۔ عدد 3 نقطہ x کا مختص اور عدد 4 نقطہ کا مختص کہلاتا ہے۔ اس طرح ہم کہتے ہیں کے (3,4) نقطے کے مختصات ہیں۔



شکل 15.13

مثال 3 : ایک گراف میں نقطہ (4,3) کا مقام دکھایئے۔ کیا یہ وہی نقطہ ہے جو (3,4) کو ظاہر کرتا ہے؟

حل : مربع کاغذ پر x-محور اور y-محور متعین کیجیے۔ (یہ حقیقت میں عددی خط ہی ہیں)۔ مبدا O (0,0) سے شروع کیجیے۔ 4 اکائیاں دائیں طرف چل کر پھر 3 اکائیاں اوپر کی طرف چلیں تو آپ کو ایک نقطہ (4,3) حاصل ہوتا ہے۔ شکل 15.13 سے آپ یہ سمجھ سکتے ہیں کہ نقطہ (4,3) اور نقطہ (3,4) الگ الگ نقطے ہیں۔



شکل 15.14

مثال 4 : شکل 15.14 دیکھ کر مندرجہ ذیل نقطوں کے مقام کے لیے مناسب حرف کا انتخاب کیجیے:

(i) (2, 1)

(ii) (0, 5)

(iii) (2, 0)

یہ بھی لکھیے

(iv) نقطہ A کے مختصات

(v) نقطہ F کے مختصات

حل :

(i) (2,1) نقطہ E ہے (یہ D نہیں!)۔

(ii) (0,5) نقطہ B ہے (کیوں؟ اپنے دوستوں کے ساتھ گفتگو کیجیے!)

(iii) (2,0) نقطہ G ہے۔

(iv) نقطہ A کے مختصات (4,5) ہیں۔

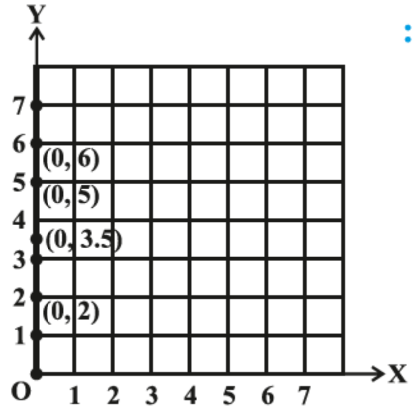
(v) نقطہ F کے مختصات (5.5, 0) ہیں۔

مثال 5 : مندرجہ ذیل نقطوں کو کاغذ پر بنائیے اور دیکھیے کہ کیا وہ سبھی ایک ہی خط پر ہیں۔ اگر وہ سبھی ایک ہی خط پر ہیں تو اس کا نام بتائیے۔

(i) (0, 2), (0, 5), (0, 6), (0, 3.5)   (ii) A (1, 1), B (1, 2), C (1, 3), D (1, 4)

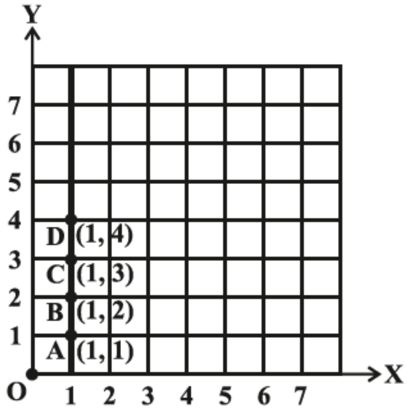
(iii) K (1, 3), L (2, 3), M (3, 3), N (4, 3)   (iv) W (2, 6), X (3, 5), Y (5, 3), Z (6, 2)

حل :



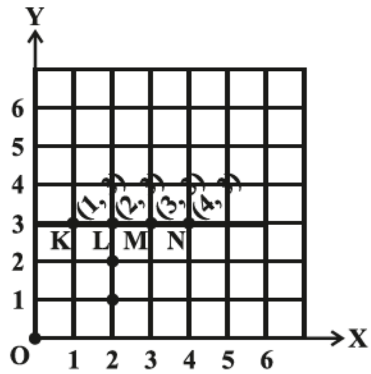
(i)

یہ سبھی نقطے ایک ہی خط پر ہیں۔
وہ خط y– محور ہے۔



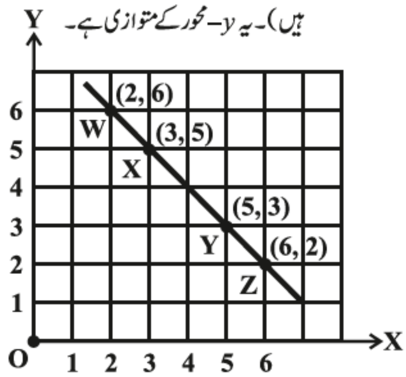
(ii)

یہ سبھی نقطے ایک ہی خط پر ہیں۔ یہ خط AD ہے۔ (آپ اسے کوئی دوسرا نام بھی دے سکتے ہیں)۔ یہ y– محور کے متوازی ہے۔



(iii)

یہ سبھی نقطے ایک ہی خط پر ہیں۔ ہم اسے KL یا KM یا MN وغیرہ نام دے سکتے ہیں۔ یہ x– محور کے متوازی ہے۔



(iv)

یہ سبھی نقطے ایک ہی خط پر ہیں ہم اسے XY یا WY یا YZ وغیرہ نام دے سکتے ہیں۔

شکل 15.15

غور کیجیے کہ اوپر دی گئی ہر ایک مثال میں موجود نقطوں کو ملانے پر حاصل گراف ایک سیدھا خط ہے۔ ایسے گراف کو **خطی گراف** کہتے ہیں۔

مشق 15.2

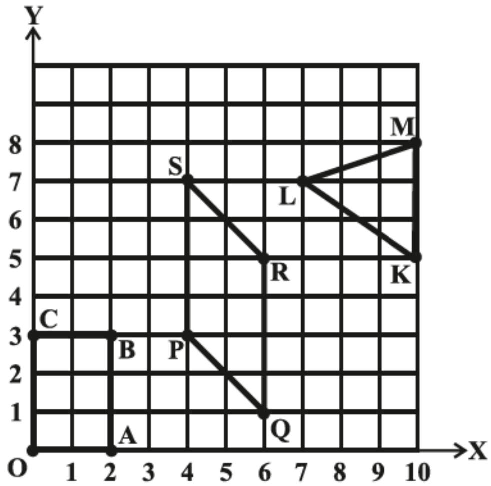
1. مندرجہ ذیل نقطوں کو ایک گراف شیٹ پر بنائیے اور تصدیق کیجیے کہ کیا وہ ایک ہی خط پر واقع ہیں؟

(a) A(4, 0), B(4, 2), C(4, 6), D(4, 2.5)

(b) $P(1, 1),\ Q(2, 2),\ R(3, 3),\ S(4, 4)$

(c) $K(2,3),\ L(5, 3),\ M(5, 5),\ N(2, 5)$

.2 $(2, 3)$ اور $(3, 2)$ سے گزرتا ہوا ایک خط کھینچیے۔ ان نقطوں کے مختصات معلوم کیجیے جن پر یہ خط x– محور اور y– محور کو قطع کرتا ہے۔



.3 گراف میں بتائی گئی شکلوں میں ہر ایک کے راسوں کے مختصات لکھیے۔

.4 مندرجہ ذیل بیانوں میں بتائیے کون سا صحیح ہے اور کون سا غلط ہے؟ غلط بیان کو درست کیجیے۔

(i) کوئی نقطہ جس کا x مختص صفر ہے اور y– مختص غیر صفر ہے y– محور پر واقع ہوگا۔

(ii) کوئی نقطہ جس کا y مختص صفر ہے اور x– مختص 5 ہے، y– محور پر واقع ہوگا۔

(iii) مبدا کے مختصات $(0,0)$ ہیں۔

15.3 کچھ استعمال

روزمرہ زندگی میں آپ نے دیکھا ہوگا کہ کسی بھی سہولت کا ہم جتنا زیادہ استعمال کرتے ہیں اتنا ہی زیادہ اس کے لیے قیمت ادا کرنا پڑتی ہے۔ اگر آپ بجلی زیادہ خرچ کرتے ہیں تب آپ کو بل بھی زیادہ ادا کرنا ہوگا۔ اگر آپ بجلی کم خرچ کرتے ہیں تو بل بھی کم آئے گا۔ یہ ایک مثال ہے جہاں ایک مقدار دوسری کو متاثر کرتی ہے۔ بجلی کا بل استعمال کی گئی بجلی کی مقدار پر منحصر ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ بجلی کی مقدار ایک **غیر تابع متغیر** (یا کبھی متغیر جس پر کنٹرول ہو) ہے جب کہ بجلی کا بل ایک **تابع متغیر** ہے۔ ایسے متغیروں کے رشتہ کو ہم گراف کے ذریعے ظاہر کر سکتے ہیں۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

ایک کار کی پٹرول کی ٹنکی کو بھرنے کے لیے دی گئی رقم خریدے گئے پٹرول کی مقدار (لیٹر میں) کے ذریعہ متعین ہوتی ہے۔ یہاں پر کون سا متغیر غیر تابع ہے؟ اس کے بارے میں غور کیجیے۔

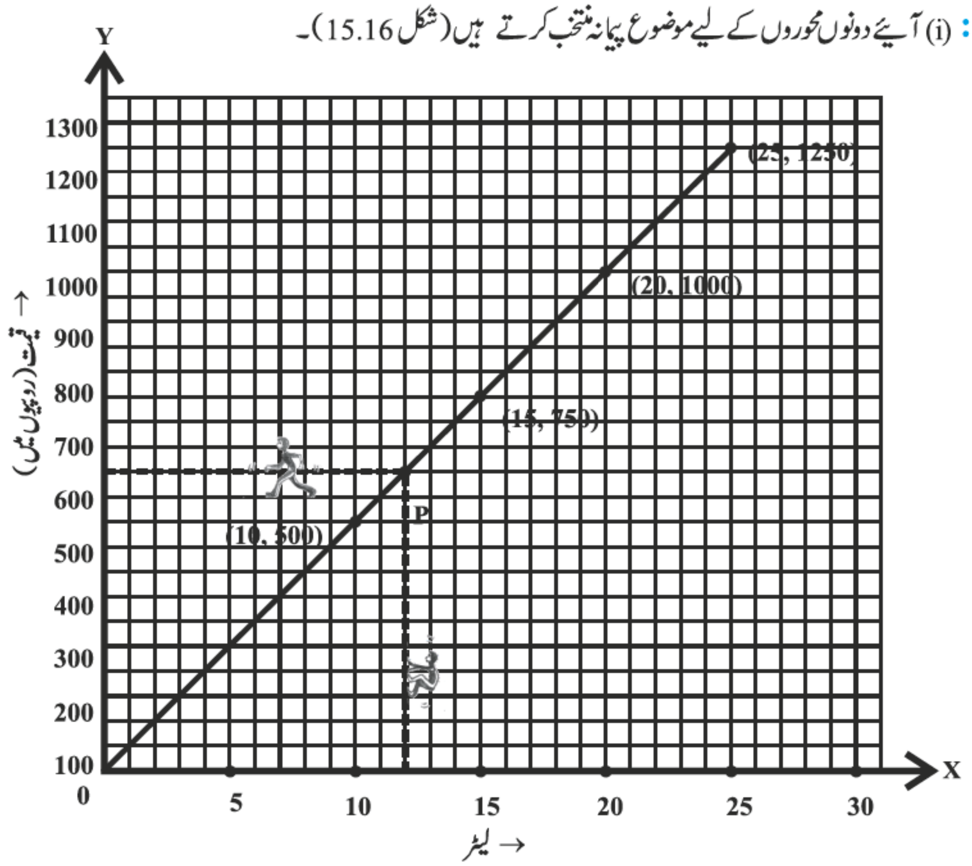
مثال 6 : (مقدار اور قیمت)

مندرجہ ذیل جدول پٹرول کی مقدار اور اس کی قیمت کو ظاہر کرتا ہے۔

پٹرول کی مقدار (لیٹر میں)	10	15	20	25
پٹرول کی قیمت (روپیوں میں)	500	750	1000	1250

ان اعداد و شمار کو گراف کے ذریعے دکھائیے۔

حل : (i) آیئے دونوں محوروں کے لیے موضوع پیمانہ منتخب کرتے ہیں (شکل 15.16)۔



شکل 15.16

(ii) افقی محور (X محور) پر پٹرول کی مقدار کو ظاہر کیجیے۔

(iii) انتصابی محور (Y محور) پر پٹرول کی قیمتوں کو ظاہر کیجیے۔

(iv) نقطوں کو بنایئے: (10,500), (15,750), (20,1000), (25,1250)

(v) نقطوں کو ملایئے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ گراف ایک خط ہے (یہ ایک خطی گراف ہے)۔ یہ گراف مبدا سے ہو کر کیوں گذرتا ہے؟ اس کے بارے میں سوچیے۔

یہ گراف ہمیں بعض چیزوں کا اندازہ لگانے میں مددگار ثابت ہو سکتا ہے۔ مان لیجیے ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ 12 لیٹر پٹرول کی قیمت کیا ہوگی۔ افقی محور پر 12 کا مقام دیکھیے۔

12 سے گزرتے ہوئے انتصابی خط کے ہمراہ چلیے جب تک آپ گراف سے P (مان لیجیے) پر نہ پہنچ جائیں۔

نقطہ P سے افقی خط کے ہمراہ چل کر انتصابی محور پر پہنچتے ہیں جہاں ہمیں وہ نقطہ ملتا ہے جو ہمیں جواب مہیا کراتا ہے۔

یہ ایک ایسا گراف ہے جس میں دو مقداریں تناسب میں ہیں (کیسے؟)۔

ایسی صورت حال میں گراف ہمیشہ خطی ہوتا ہے۔

کوشش کیجیے

اوپر دی گئی مثال میں گراف کا استعمال کر کے معلوم کیجیے کہ 800 روپے میں کتنا پٹرول خریدا جا سکتا ہے؟

مثال 7 : (اصل زر اور سود مفرد)

ایک بینک بزرگ شہریوں کو ان کی جمع رقم پر 10% سالانہ شرح سے سود مفرد دیتا ہے۔ جمع کی گئی رقم اور کمائے گئے سود مفرد کے رشتے کو ظاہر کرنے کے لیے ایک گراف بنائیے اور مندرجہ ذیل کے بارے میں معلوم کیجیے

(a) 250 روپے جمع کرنے پر حاصل سالانہ سود۔

(b) 70 روپے سالانہ سود حاصل کرنے کے لیے کتنی رقم جمع کرنی پڑے گی۔

حل :

جمع کی گئی رقم	ایک سال کے لیے سود مفرد
100 روپے	$₹\,10 = \dfrac{100\times1\times10}{100}$
200 روپے	$₹\,20 = \dfrac{200\times1\times10}{100}$
300 روپے	$₹\,30 = \dfrac{300\times1\times10}{100}$
500 روپے	$₹\,50 = \dfrac{500\times1\times10}{100}$
1000 روپے	₹ 100

مناسب اقدام:

1. دکھائی جانے والی مقداریں جو جمع رقم اور سود مفرد ہے معلوم کیجیے۔
2. x–محور اور y–محور پر دکھائی جانے والی مقداریں متعین کیجیے۔
3. پیمانہ منتخب کیجیے۔
4. نقطے متعین کیجیے۔
5. نقطوں کو ملائیے۔

ہمیں مندرجہ ذیل جدول حاصل ہوتا ہے۔

جمع رقم (₹ میں)	100	200	300	500	1000
سالانہ سود مفرد (₹ میں)	10	20	30	50	100

(i) پیمانہ : X محور پر 1 اکائی = ₹ 100 ؛ (Y محور) پر 1 اکائی = ₹ 10

(ii) جمع رقم کو (X محور) پر دکھایئے۔

(iii) سود مفرد کو (Y محور) پر دکھایئے۔

(iv) (100,10), (200,20), (300,30), (500,50) وغیرہ نقطوں کو قائم کیجیے۔

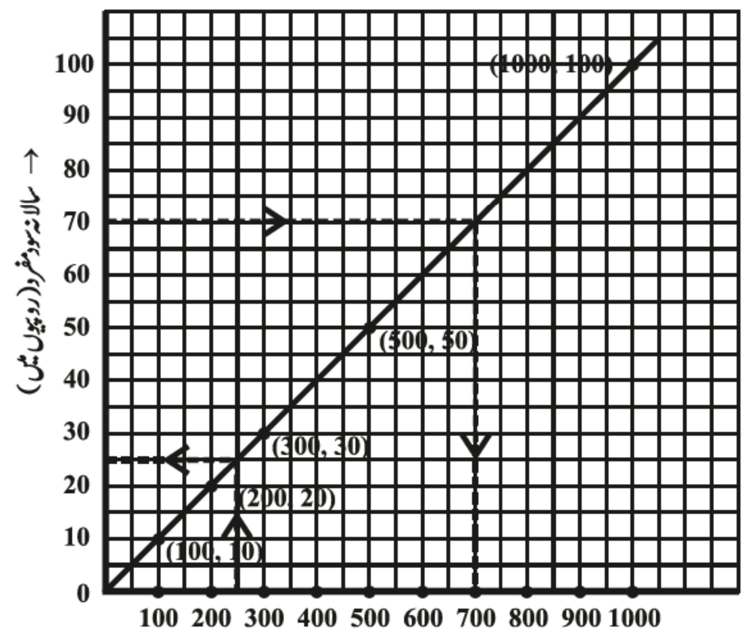
(v) نقطوں کو ملایئے۔ ہمیں ایک گراف حاصل ہوتا ہے جو ایک خط کی شکل ہے (شکل 15.17)۔

(a) افقی محور پر ₹ 250، اصل زر کے لیے ہمیں انتصابی محور پر ₹ 25 سود مفرد حاصل ہوتا ہے۔

(b) انتصابی محور پر ₹ 70، سود کے لیے ہمیں افقی محور پر ₹ 700 اصل زر حاصل ہوتا ہے۔

کوشش کیجیے

کیا مثال 7 ایک سیدھے تناسب کی مثال ہے؟



شکل 15.17

مثال 8 : (وقت اور فاصلہ)

اجیت لگاتار 30 کلومیٹر فی گھنٹے کی رفتار سے اسکوٹر چلاتا ہے۔ اس صورتِ حال کے لیے ایک وقت اور فاصلہ کا ایک گراف کھینچیے۔ اسے گراف سے معلوم کیجیے

(i) اجیت کو 75 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں لگنے والا وقت۔

(ii) اجیت کے ذریعہ $3\frac{1}{2}$ گھنٹے میں طے کی گئی دوری۔

سفر (گھنٹوں میں)	طے کیا گیا فاصلہ
1 گھنٹہ	30 کلومیٹر
2 گھنٹے	2×30 کلومیٹر = 60 کلومیٹر
3 گھنٹے	3×30 کلومیٹر = 90 کلومیٹر
4 گھنٹے	4×30 کلومیٹر = 120 کلومیٹر

ان قدروں سے ہمیں مندرجہ ذیل جدول حاصل ہوتا ہے:

وقت (گھنٹوں میں)	1	2	3	4
طے کیا گیا فاصلہ (کلومیٹر میں)	30	60	90	120

(i) پیمانہ : (شکل 15.18)

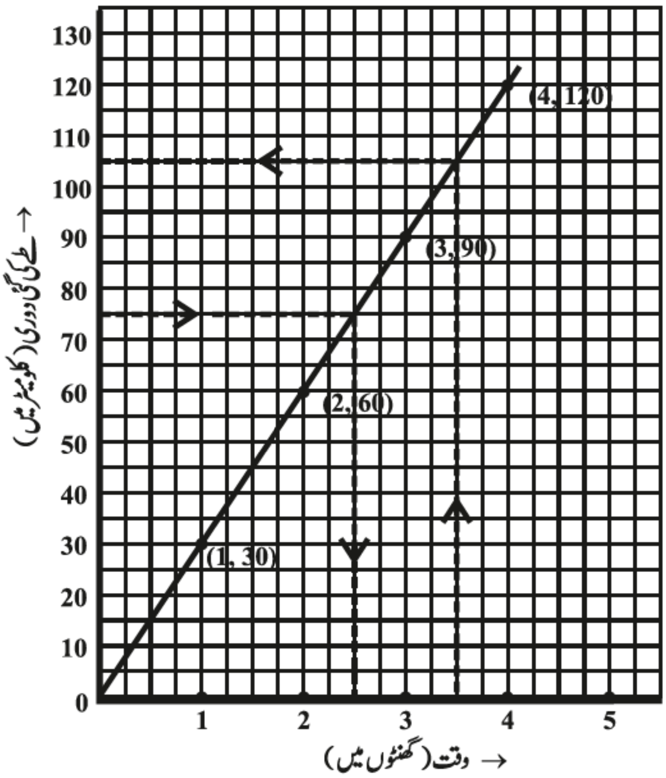
X محور: 2 اکائی = 1 گھنٹہ

Y محور : 1 اکائی = 10 کلومیٹر

(ii) X محور پر وقت دکھایئے۔

(iii) Y محور پر فاصلہ دکھایئے۔

(iv) $(1, 30), (2, 60), (3, 90), (4, 120)$ نقطوں کو قائم کیجیے۔



شکل 15.18

(v) نقطوں کو ملائیے۔ ہمیں ایک خطی گراف حاصل ہوتا ہے۔

(a) انتصابی محور پر 75 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے پر ہمیں نظیری افقی محور پر 2.5 گھنٹے حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح 75 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے کے لیے 2.5 گھنٹے کا وقت لگے گا۔

(b) افقی محور پر $3\frac{1}{2}$ گھنٹے کے لیے نظیری انتصابی محور پر 105 کلومیٹر فاصلہ طے کیا گیا ہے۔

مشق 15.3

1. محوروں پر مناسب پیمانہ کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل جدول میں دی گئی قدروں کے لیے گراف بنائیے۔

(a) سیب کی قیمت

سیبوں کی تعداد	1	2	3	4	5
قیمت (روپیوں میں)	5	10	15	20	25

(b) کار کے ذریعہ طے کیا گیا فاصلہ

وقفہ (گھنٹوں میں)	صبح 6 بجے	صبح 7 بجے	صبح 8 بجے	صبح 9 بجے
فاصلہ (کلومیٹر میں)	40	80	120	160

(i) صبح 7:30 بجے اور 8:00 بجے کے وقفہ میں کار کے ذریعہ کتنا فاصلہ طے کیا گیا؟

(ii) کار نے 100 کلومیٹر کا فاصلہ کس وقت طے کیا تھا؟

(c) جمع رقم پر سالانہ سود۔

جمع رقم (روپیوں میں)	1000	2000	3000	4000	5000
سود مفرد (روپیوں میں)	80	160	240	320	400

(i) کیا گراف مبدا سے ہو کر گزرتا ہے؟

(ii) گراف کی مدد سے 2500 روپیے کا سالانہ سود معلوم کیجیے؟

(iii) 280 روپیے سالانہ سود حاصل کرنے کے لیے کتنی رقم جمع کرنی ہوگی؟

2. مندرجہ ذیل جدول کے لیے گراف کھینچیے۔

(i)

مربع کا ضلع (سینٹی میٹر میں)	2	3	3.5	5	6
احاطہ (سینٹی میٹر میں)	8	12	14	20	24

کیا یہ ایک خطی گراف ہے؟

مربع کا ضلع (سینٹی میٹر میں)	2	3	4	5	6
رقبہ (مربع سینٹی میٹر میں)	4	9	16	25	36

کیا یہ ایک خطی گراف ہے؟

ہم نے کیا سیکھا؟

1. اعداد و شمار کو گرافی اظہار سے آسانی سے سمجھا جا سکتا ہے۔
2. (i) **بار گراف** مختلف زمروں کا موازنہ کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔
   (ii) دائری گراف یا **پائی گراف** ایک مکمل کے مختلف حصوں کا موازنہ کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔
   (iii) **ہسٹوگرام** ایک بار گراف ہے جو اعداد و شمار کو وقفوں میں ظاہر کرتا ہے۔
3. ایک **خطی گراف** اُن اعداد و شمار کو ظاہر کرتا ہے جو وقت کے ساتھ ساتھ **مسلسل** بدلتے رہتے ہیں۔
4. خطی گراف جو ایک مکمل غیر شکستہ خط ہے، **خطی گراف** کہلاتا ہے۔
5. مربع کاغذ پر کسی نقطے کا مقام متعین کرنے کے لیے ہمیں x- **مختص** اور y- **مختص** کی ضرورت پڑتی ہے۔
6. ایک **غیر تابع متغیر** اور **تابع متغیر** کے درمیان رشتے کو گراف کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔

نوٹ

باب

16

اعداد کے ساتھ کھیلنا

4817CH16

16.1 تعارف

آپ مختلف قسم کے اعداد جیسے طبعی اعداد، مکمل اعداد، صحیح اعداد اور ناطق اعداد کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ ان کی بہت سی دلچسپ خصوصیات کا بھی مطالعہ کر چکے ہیں۔ چھٹی جماعت میں ہم نے اجزائے ضربی اور اضعاف کو معلوم کرنے کا طریقہ دریافت کیا تھا اور یہ بھی دیکھا تھا کہ ان کے درمیان کیا رشتے قائم کیے جا سکتے ہیں۔

اس باب میں، ہم اعداد کے بارے میں مزید تفصیلی معلومات حاصل کریں گے۔ یہ تصورات تقسیم پذیری کی جانچ کی تصدیق کرنے میں ہماری مدد کریں گے۔

16.2 عمومی شکل میں اعداد

یہاں ab کا مطلب $a \times b$ نہیں ہے!

آیئے عدد 52 کو لیتے ہیں اور اس کو درج ذیل طریقہ سے لکھتے ہیں

$$52 = 50 + 2 = 10 \times 5 + 2$$

اسی طرح، عدد 37 کو بھی یوں لکھا جا سکتا ہے

$$37 = 10 \times 3 + 7$$

عمومی طور پر a اور b سے بنا کوئی بھی دو ہندسی عدد ab اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$$ab = 10 \times a + b = 10a + b$$

ba کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

$$ba = 10 \times b + a = 10b + a$$

آیئے اب عدد 351 لیتے ہیں۔ یہ ایک تین ہندسی عدد ہے۔ اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

اسی طرح

$$497 = 100 \times 4 + 10 \times 9 + 1 \times 7$$

عمومی طور پر a، b اور c سے بنا ایک تین ہندسی عدد abc اس طرح لکھا جا سکتا ہے

$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$

$= 100a + 10b + c$

اس طرح سے

$cab = 100c + 10a + b$

$bca = 100b + 10c + a$ وغیرہ۔

کوشش کیجیے

1. مندرجہ ذیل اعداد کو عمومی شکل میں لکھیے۔

(i) 25 (ii) 73 (iii) 129 (iv) 302

2. مندرجہ ذیل کو عام شکل میں لکھیے۔

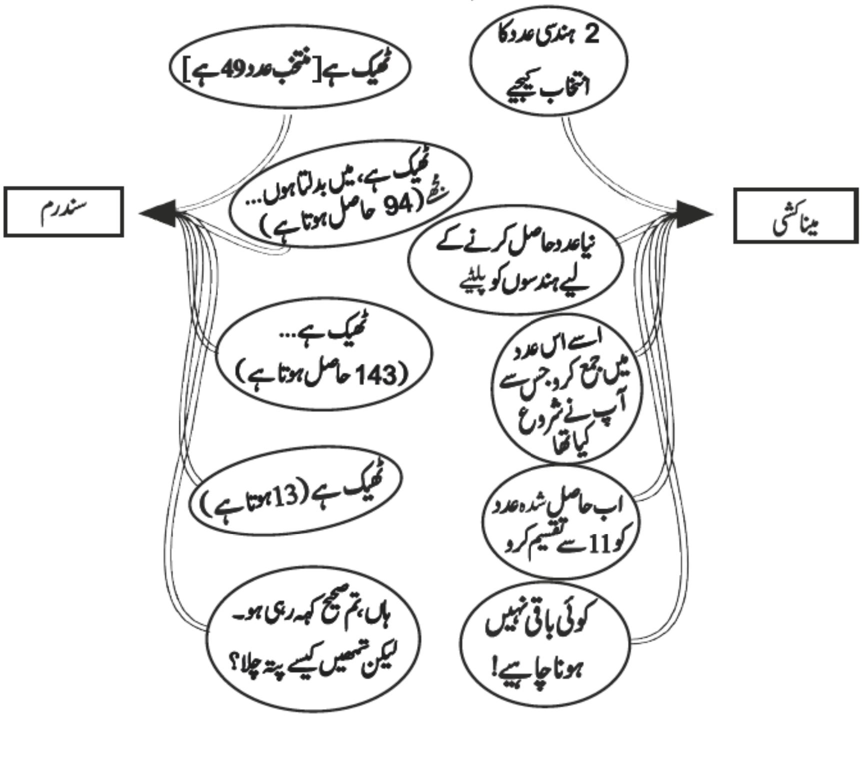
(i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $100 \times a + 10 \times c + b$

16.3 اعداد کے ساتھ کھیل

(i) ہندسوں کی جگہ بدلنا – دو ہندسی عدد

میناکشی نے سندرم سے کسی 2 ہندسی عدد کے بارے میں سوچنے کے لیے کہا اور یہ بھی کہا کہ وہ جیسا کہتی جائے ویسا ہی کرے۔ ان کی بات چیت کو مندرجہ ذیل شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔ مہربانی کرکے آگے بڑھنے سے پہلے غور سے شکل کو دیکھیے۔

میناکشی اور سندرم میں بات چیت: پہلا دور....



یہاں سندرم عدد 49 کا انتخاب کرتا ہے۔ ہندسہ پلٹنے پر اسے عدد 94 حاصل ہوتا ہے، پھر وہ ان دو اعداد کو جمع کر کے $94 + 49 = 143$ حاصل کرتا ہے۔ آخر میں اس عدد کو 11 سے تقسیم دے کر اس نے $143 \div 11 = 13$ حاصل کیا اور کوئی باقی نہیں رہا۔ یہی وہ بات ہے جس کی میناکشی نے پیشن گوئی کی۔

کوشش کیجیے

جانچ کیجیے اگر سندرم نے مندرجہ ذیل اعداد منتخب کیے ہوتے تو کیا نتیجہ حاصل ہوتا۔

1. 27
2. 39
3. 64
4. 17

آیئے اب ہم دیکھیں کہ کیا ہم میناکشی کی ''ترکیب'' کی وضاحت کر سکتے ہیں۔

مان لیجیے سندرم عدد ab منتخب کرتا ہے جو 2 ہندسوں کے عدد $10a + b$ کی مختصر شکل ہے۔ ہندسوں کو پلٹنے پر وہ عدد $ba = 10b + a$ حاصل ہوتا ہے ان دونوں اعداد کو جمع کرنے پر اسے حاصل ہوتا ہے:

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$

$$= 11\,(a + b)$$

اس لیے حاصل جمع ہمیشہ 11 کا ایک ضعف ہے جیسا کہ میناکشی نے دعویٰ کیا تھا۔

غور کیجیے اگر حاصل جمع کو 11 سے تقسیم کریں تو خارج قسمت $(a + b)$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ خارج قسمت منتخب کیے گئے دو ہندسی عدد ab کے ہندسوں کے حاصل جمع کے برابر ہوگا۔

اب آپ مذکورہ بالا جانچ کوئی بھی دو ہندسی عدد کو لے کر کر سکتے ہیں۔

میناکشی اور سندرم کا کھیل جاری رہتا ہے!

میناکشی : ایک دوسرے 2 ہندسی عدد کے بارے میں سوچو، لیکن مجھے نہیں بتانا کہ تم نے کیا سوچا ہے۔

سندرم : ٹھیک ہے۔

میناکشی : اب ہندسوں کو پلٹ دو اور بڑے عدد میں سے چھوٹے عدد کو گھٹا دو۔

سندرم : میں نے گھٹا لیا۔ اب آگے کیا کرنا ہے؟

میناکشی : اب اپنے جواب کو 9 سے تقسیم کرو، میرا دعویٰ ہے کہ کچھ بھی باقی نہیں بچے ہوگا۔

سندرم : ہاں تم صحیح کہہ رہی ہو، حقیقت میں کچھ باقی صفر نہیں ہے۔ لیکن اس بارے میں میں جانتا ہوں کہ تم اتنی پُر امید کیوں ہو!

حقیقت میں سندرم نے عدد 29 سوچا تھا اس کے ہندسوں کو پلٹ کر اس نے عدد 92 حاصل کیا۔ پھر اس نے $92 - 29 = 63$

حاصل کیا اور آخر میں اس نے $(63 \div 9)$ حاصل کیا جو حاصل تقسیم 7 دیتا ہے اور کچھ باقی نہیں ہے۔

کوشش کیجیے

جانچ کیجیے اگر سندرم نے اوپر کے لیے مندرجہ ذیل اعداد منتخب کیے ہوتے، تو کیا نتیجہ حاصل ہوتا۔

1. 17   2. 21   3. 96   4. 37

آیئے دیکھیں کہ سندرم میناکشی کی دوسری ترکیب کو کس طرح معلوم کرتا ہے (اب وہ ایسا کرنے میں خود اعتمادی محسوس کرتا ہے!)

مان لیجیے وہ 2 ہندسی عدد ab یعنی $ab = 10a + b$ منتخب کرتا ہے۔ ہندسوں کو پلٹنے پر وہ عدد $ba = 10b + a$ حاصل ہوتا ہے اس لیے میناکشی اسے بڑے عدد میں سے چھوٹا عدد گھٹانے کو کہتی ہے۔

- اگر دہائی کا ہندسہ اکائی کے ہندسہ سے بڑا ہے (یعنی $a > b$ ہے) تو وہ اس طرح گھٹاتا ہے:

$$(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a$$
$$= 9a - 9b = 9(a - b)$$

- اگر اکائی کا ہندسہ دہائی کے ہندسے سے بڑا ہے (یعنی $b > a$) تو وہ اس طرح کرتا ہے:

$$(10b + a) - (10a + b) = 9(b - a)$$

- اور بے شک جب $a = b$ ہے تو وہ 0 حاصل ہوتا ہے۔

ہر ایک حالت میں حاصل شدہ عدد 9 سے تقسیم ہو جاتا ہے۔ اس لیے باقی 0 ہے۔ غور کیجیے کہ اگر ہم گھٹانے پر حاصل شدہ نتیجہ میں ملے عدد کو 9 سے تقسیم کریں تو ہمیں $a > b$ یا $a < b$ کے مطابق $a - b$ یا $b - a$ حاصل ہوتا ہے۔ آپ کسی دوسرے دو ہندسی عدد کو لے کر اوپر دی گئی حقیقت کی جانچ کر سکتے ہیں۔

(ii) ہندسوں کا پلٹنا – تین ہندسی عدد

اب سندرم کی باری ہے کہ وہ کچھ ترکیب ظاہر کرے:

سندرم : ایک تین ہندسوں کا عدد سوچیے لیکن اس کے بارے میں مجھے نہ بتائیں۔

میناکشی : ٹھیک ہے۔

سندرم : اب ان کو الٹی ترتیب (پلٹتے ہوئے) میں لے کر ایک نیا عدد بنایئے اور بڑے عدد میں سے چھوٹا عدد گھٹایئے۔

میناکشی : ٹھیک ہے میں نے گھٹا لیا ہے۔ آگے کیا کرنا ہے؟

سندرم : اپنے جواب کو 99 سے تقسیم کیجیے میں یقینی طور پر کہہ سکتا ہوں کہ باقی صفر ہوگا!

حقیقت میں، میناکشی نے تین ہندسی عدد 349 کا انتخاب کیا۔ اس لیے، اسے حاصل ہوا:

• ہندسہ پلٹنے پر ملنے والا عدد: 943 • فرق: $594 = 943 - 349$

• تقسیم: $594 \div 99 = 6$، باقی صفر

کوشش کیجیے

جانچ کیجیے کہ اگر میناکشی نے مندرجہ ذیل اعداد کا انتخاب کیا ہوتا تو کیا نتیجہ حاصل ہوتا؟

ہر حالت میں آخر میں حاصل ہوئے خارج قسمت کا ایک ریکارڈ دیکھیے۔

1. 132 2. 469 3. 737 4. 901

آیئے دیکھیں کہ یہ ترکیب کیسے کام کرتی ہے۔

مان لیجیے میناکشی کے ذریعہ منتخب کیا گیا تین ہندسوں کا عدد $abc = 100a + 10b + c$ ہے۔

ہندسوں کو پلٹنے پر وہ عدد $cba = 100c + 10b + a$ حاصل کرتی ہے۔ گھٹانے پر حاصل ہوگا:

• اگر $a > c$ ہے تو اعداد کا فرق ہے

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$
$$= 99a - 99c = 99(a - c)$$

• اگر $c > a$ ہے تو اعداد کا فرق ہے

$$(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99(c - a)$$

• بے شک اگر $a = c$ ہے تو فرق صفر ہے۔

ہر ایک حالت میں اس نتیجہ سے ملا عدد 99 سے تقسیم ہوتا ہے۔ اس لیے باقی 0 حاصل ہوتا ہے۔ غور کیجیے کہ خارج قسمت $a - c$ یا $c - a$ ہوگا، آپ تین ہندسوں کے دوسرے اعداد لے کر اس حقیقت کی جانچ کر سکتے ہیں۔

(ii) دیے ہوئے تین ہندسوں سے تین ہندسی عدد بنانا۔

اب ایک بار پھر میناکشی کی باری ہے۔

میناکشی : تین ہندسوں کا کوئی عدد سوچیے۔

سندرم : ٹھیک ہے میں نے ایسا کرلیا ہے۔

میناکشی : اب اس عدد کا استعمال دوسرے تین ہندسوں کے عدد بنانے میں اس طرح کرو، اگر تم نے عدد $a\,b\,c$ کو منتخب کیا ہے تو

• پہلا عدد cab (یعنی اکائی کا ہندسہ اس عدد کے سب سے ''بائیں سرے'' پر پہنچ گیا ہے)؛

• دوسرا عدد bca (یعنی سیکڑے کا ہندسہ اس عدد کے سب سے ''دائیں سرے'' پر پہنچ گیا ہے)۔

اب ان اعداد کو جمع کیجیے۔ نتیجہ میں حاصل ہوئے عدد کو 37 سے تقسیم کیجیے۔ میرا دعویٰ ہے کہ باقی صفر ہوگا۔

سندرم : ہاں، تم صحیح ہو!

دراصل سندرم نے تین ہندسوں کا عدد 237 سوچا تھا۔ جیسا میناکشی نے کرنے کو کہا تھا ویسا کرنے کے بعد اسے اعداد 723 اور 372 حاصل ہوئے۔ اس لیے اس نے یہ کیا:

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 7 \\ +\ \ 7\ 2\ 3 \\ +\ \ 3\ 7\ 2 \\ \hline 1\ 3\ 3\ 2 \\ \hline \end{array}$$

تین ہندسوں 2، 3 اور 7 کا استعمال کر کے تین ہندسوں والے سبھی ممکنہ اعداد بنائیے اور ان کے حاصل جمع حاصل کیجیے۔ جانچ کیجیے کہ کیا حاصل جمع 37 سے تقسیم ہو جاتا ہے! کیا یہ عدد abc کے تینوں ہندسوں a، b اور c، یعنی سبھی اعداد کے حاصل جمع کے لیے صحیح ہے؟

پھر اس نے نتیجہ میں حاصل ہوئے عدد 1332 کو 37 سے تقسیم دی۔

$1332 \div 37 = 36$ باقی کچھ نہیں ہے۔

کوشش کیجیے

جانچ کیجیے کہ اگر سندرم کے سوچے ہوئے اعداد مندرجہ ذیل ہوتے تو کیا نتیجہ حاصل ہوتا؟

1. 417
2. 632
3. 117
4. 937

کیا یہ ترکیب ہمیشہ کام کرتی ہے؟

آیئے دیکھیں

$$abc = 100a + 10b + c$$

$$cab = 100c + 10a + b$$

$$bca = 100b + 10c + a$$

$$abc + cab + bca = 111\,(a + b + c)$$

$$= 37 \times 3(a + b + c)$$ جو کہ 37 سے تقسیم ہوتا ہے

16.4 ہندسوں کے لیے حروف

یہاں کچھ پہیلیاں ہیں جن میں ایک ریاضی کے 'مجموعہ' کے سوال میں ہندسوں کے مقام پر حروف ہیں اور یہ معلوم کرنا ہے کہ کون سا حرف کن ہندسوں کو ظاہر کرتا ہے اس لیے یہ ایک قسم کے کوڈ کو حل کرنے جیسی صورت ہے۔ یہاں ہم جمع اور ضرب کے مسئلوں تک ہی محدود رہیں گے۔

ایسی پہیلیوں کو حل کرتے وقت اپنائے جانے والے دو اصول اس طرح ہیں۔

1. پہیلی میں، ہر حرف صرف ایک ہی ہندسہ سے ظاہر کرنا چاہیے۔ ہر ہندسہ صرف ایک ہی حرف سے ظاہر کیا جانا چاہیے۔
2. عدد کا پہلا ہندسہ صفر نہیں ہو سکتا۔ اس طرح، ہم عدد ''تریسٹھ'' کو 63 لکھتے ہیں، 063، یا 0063 بھی نہیں۔ ایک اصول یہ ہے کہ ایک پہیلی کا صرف ایک ہی جواب ہونا چاہیے۔

مثال 1 : مندرجہ ذیل جمع میں Q معلوم کیجیے۔

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ Q \\ +\ 1\ Q\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

حل :

یہاں صرف ایک حرف Q ہے جس کی ہمیں قدر معلوم کرنی ہے۔

اکائی کے کالم میں اوپر دیے گئے جمع کا مطالعہ کیجیے: $Q + 3$ سے ہمیں '1' حاصل ہوتا ہے، یعنی ایک عدد جس کی اکائی کا ہندسہ 1 ہے۔ ایسا ہونے کے لیے Q ہندسہ 8 ہونا چاہیے۔ اس لیے اس پہیلی کو ذیل میں دکھائے گئے طریقہ سے حل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{array}{r} 3\ 1\ 8 \\ +\ 1\ 8\ 3 \\ \hline 5\ 0\ 1 \\ \hline \end{array}$$

یعنی، $Q = 8$ ہے۔

مثال 2 : مندرجہ ذیل جمع میں A اور B معلوم کیجیے۔

$$\begin{array}{r} A \\ +\ \ A \\ +\ \ A \\ \hline B\ \ A \\ \hline \end{array}$$

حل : اس میں دو حروف A اور B ہیں جن کی قدر معلوم کرنی ہے۔

اکائی کے کالم میں جمع پر غور کیجیے: تین A کا حاصل جمع ایک ایسا عدد ہونا چاہیے جس کی اکائی کا ہندسہ A ہو، یہ تبھی ہوگا جب $A = 0$ ہو اور $A = 5$ ہو۔

اگر $A = 0$ ہے، حاصل جمع $0 = 0 + 0 + 0$ ہوگا، جس سے $B = 0$ ہو جائے گا۔ ہم یہ نہیں چاہتے (کیوں کہ اس سے $A = B$ ہو جائے گا اور BA کی دہائی کا ہندسہ بھی 0 ہو جائے گا)، لہٰذا ہم ان ممکنات میں سے اسے ترک کر دیتے ہیں۔ اس لیے، $A = 5$ ہے۔ یہ پہیلی نیچے دکھائے گئے طریقہ سے حل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{array}{rr} & 5 \\ + & 5 \\ + & 5 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

یعنی $A = 5$ اور $B = 1$ ہے۔

مثال 3 : A اور B ہندسوں کو معلوم کیجیے۔

$$\begin{array}{rrr} & B & A \\ \times & B & 3 \\ \hline 5 & 7 & A \\ \hline \end{array}$$

حل :

یہاں بھی دو حروف A اور B ہیں جن کی قدریں معلوم کرنی ہیں۔

کیوں کہ $3 \times A$ کا اکائی کا ہندسہ A ہے تو $A = 0$ یا $A = 5$ ہونا چاہیے۔

اب B کو دیکھیے۔ اگر $B = 1$ ہو تو $BA \times B3$ کی قدر زیادہ سے زیادہ 19×19 ہونی چاہیے؛ یعنی 361 کے مساوی ہوگی۔ لیکن یہاں حاصل ضرب 57A ہے جو 500 سے زیادہ ہے۔ اس لیے ہمارے پاس $B = 1$ نہیں ہو سکتا۔

ہمارے پاس اگر $B = 3$ ہو تو $BA \times B3$ کا حاصل ضرب 30×30 سے زیادہ ہوگا۔ یعنی یہ 900 سے زیادہ ہوگا۔ لیکن 57A کی قدر 600 سے کم ہے۔ اس لیے B، 3 کے برابر نہیں ہو سکتا۔

اوپر دونوں حقیقتوں کو نظر میں رکھتے ہوئے $B = 2$ ہو سکتا ہے۔ اس لیے دی ہوئی ضرب یا تو 20×23 ہوگی یا 25×23 ہوگی۔

پہلی ممکنہ صورت نہیں ہو سکتی کیوں کہ $20 \times 23 = 460$ ہے۔ لیکن دوسری ممکنہ بات صحیح ہے، کیوں کہ $25 \times 23 = 575$ ہے۔ اس لیے جواب $A = 5$ اور $B = 2$ ہے۔

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 5 \\ \times & 2 & 3 \\ \hline 5 & 7 & 5 \\ \hline \end{array}$$

اسے کیجیے

2 ہندسوں کا ایک عدد *ab* لکھیے اور اس کے ہندسوں کو پلٹنے پر حاصل شدہ عدد *ba* لکھیے۔ ان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔ مان لیجیے یہ

مجموعہ ایک تین ہندسوں کا عدد *dad* ہے

یعنی $ab + ba = dad$

$$(10a + b) + (10b + a) = dad$$

$$11(a + b) = dad$$

حاصل جمع $a+b$ عدد 18 سے زیادہ نہیں ہوسکتا (کیوں؟)۔

کیا *dad*، 11 کا ایک ضعف ہے؟

کیا *dad*، 198 سے کم ہے؟

198 تک تین ہندسوں کے ایسی سبھی اعداد لکھیے جو 11 کے اضعاف ہیں؟

a اور *d* کی قدریں معلوم کیجیے۔

مشق 16.1

مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک میں حروف کی قدریں معلوم کیجیے اور اس میں شامل اقدام کی وجوہات بھی بتائیے۔

.1
$$\begin{array}{rrr} & 3 & A \\ + & 2 & 5 \\ \hline & B & 2 \\ \hline \end{array}$$

.2
$$\begin{array}{rrr} & 4 & A \\ & 9 & 8 \\ \hline C & B & 3 \\ \hline \end{array}$$

.3
$$\begin{array}{rr} 1 & A \\ \times & A \\ \hline 9 & A \\ \hline \end{array}$$

.4
$$\begin{array}{rrr} & A & B \\ + & 3 & 7 \\ \hline & 6 & A \\ \hline \end{array}$$

.5
$$\begin{array}{rrr} & A & B \\ & \times & 3 \\ \hline C & A & B \\ \hline \end{array}$$

.6
$$\begin{array}{rrr} & A & B \\ & \times & 5 \\ \hline C & A & B \\ \hline \end{array}$$

.7
$$\begin{array}{rrr} & A & B \\ & \times & 6 \\ \hline B & B & B \\ \hline \end{array}$$

.8
$$\begin{array}{rrr} & A & 1 \\ + & 1 & B \\ \hline & B & 0 \\ \hline \end{array}$$

.9
$$\begin{array}{rrrr} & 2 & A & B \\ + & A & B & 1 \\ \hline & B & 1 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$
\begin{array}{rccc}
\textbf{.10} & A & 2 & 1 \\
& B & A & +6 \\
\hline
& 9 & 0 & A \\
\hline
\end{array}
$$

16.5 تقسیم کی جانچ

چھٹی جماعت میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ مندرجہ ذیل قاسموں سے تقسیم کی جانچ کس طرح کی جاتی ہے۔

10, 5, 2, 3, 6, 4, 8, 9,11.

آپ کو ان کی جانچ کرنے کے قاعدے آسان لگے ہوں گے لیکن ساتھ ہی حیرانی بھی ہوئی ہوگی کہ یہ کیوں کام کرتے ہیں۔
اس باب ہم میں ان کے'' کیوں'' والے پہلو پر غور کریں گے۔

16.5.1 10 سے تقسیم پذیری

یہ حقیقت میں سب سے آسان جانچ ہے۔ ہم پہلے 10 کے کچھ اضعاف کو دیکھتے ہیں۔

10, 20, 30, 40, 50, 60, ...,

اس کے ساتھ 10 کے کچھ غیر اضعاف کو دیکھتے ہیں۔

13, 27, 32, 48, 55, 69,

ان اعداد سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ ایسے اعداد جن کے اکائی کا ہندسہ 0 ہے 10 کے اضعاف ہیں اور وہ اعداد جن کے اکائی کا ہندسہ 0 نہیں ہے 10 کا ضعف نہیں ہے۔ اس سے ہمیں 10 سے تقسیم پذیری کی جانچ کا ایک اصول حاصل ہوتا ہے۔

بے شک ہمیں صرف جانچ کا اصول دے کر ہی نہیں ٹھہر جانا چاہیے بلکہ ہمیں یہ بھی معلوم کرنا چاہیے کہ جانچ کا یہ اصول کس طرح کام کرتا ہے۔ یہ مشکل نہیں ہے۔ ہمیں صرف مقامی قدر کے اصولوں کو یاد رکھنا چاہیے۔

کوئی عدد cba لیجیے۔ یہ مندرجہ ذیل عدد کی مختصر شکل ہے

$$... cab = ... + 100\,c + 10\,b + a$$

یہاں a اکائی کا ہندسہ ہے، b دہائی کا ہندسہ ہے، c سیکڑے کا ہندسہ ہے وغیرہ وغیرہ۔ یہاں تین نقطے یہ دکھاتے ہیں کہ c کے بائیں طرف اور ہندسے ہو سکتے ہیں۔

کیوں کہ ...100,1000، 10 سے تقسیم ہو جاتے ہیں۔ اس لیے ....$10\,b, 100\,c$ بھی 10 سے تقسیم ہوں گے۔ جہاں تک عدد کا سوال ہے اگر دیا ہوا عدد 10 سے تقسیم ہوتا ہے تو a کو بھی 10 سے تقسیم ہونا چاہیے۔ یہ تبھی ممکن ہے جب $a = 0$ ہے۔

اس لیے، کوئی عدد 10 سے تب تقسیم ہوسکتا ہے جب اس کا اکائی کا ہندسہ 0 ہو۔

16.5.2 5 سے تقسیم پذیری

5 کے اضعاف کو دیکھیے۔

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

ہم دیکھتے ہیں کہ اکائی کا ھندسہ 5 اور 0 ایک عدد چھوڑ کر آرھے ھیں اور ان کے علاوہ اکائی کے مقام پر کوئی اور ھندسہ نہیں آ رھا ھے۔

اس لیے، ہمیں 5 سے تقسیم ہونے کا یہ اصول حاصل ہوتا ہے۔

اگر کسی عدد کی اکائی کا ھندسہ 5 یا 0 ھے تو وہ عدد 5 سے تقسیم ھوتا ھے۔

آیئے اس اصول کی تشریح کریں۔ کسی عدد ...cba کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے:

$$...cba = ... + 100c + 10b + a$$

چوں کہ 10 اور 100، 10 سے تقسیم ہوتے ہیں اس لیے $10b$، $100c$، ... بھی 10 سے تقسیم ہوجائیں گے اور یہی بعد میں 5 سے بھی تقسیم ہوں گے کیوں کہ $10=2\times5$ ہے۔ جہاں تک عدد a کا سوال ہے تو اگر یہ عدد 5 سے تقسیم ہوتا ہے تو اسے بھی 5 سے تقسیم ہونا چاہیے۔ اس لیے a کو یا تو 0 یا 5 ہونا چاہیے۔

کوشش کیجیے

(پہلا سوال آپ کی مدد کے لیے حل کیا گیا ہے)

1. اگر تقسیم $N \div 5$ سے باقی 3 حاصل ہوتا ہے تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہوسکتا ہے؟ (اکائی کے ہندسے کو 5 سے تقسیم دینے پر باقی 3 آنا چاہیے۔ اس لیے اکائی کا ہندسہ 3 یا 8 ہوگا۔)
2. اگر تقسیم $N \div 5$ سے باقی 1 حاصل ہوتا ہے تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہوسکتا ہے؟
3. اگر تقسیم $N \div 5$ سے باقی 4 حاصل ہوتا ہے تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہوسکتا ہے؟

16.5.3 2 سے تقسیم پذیری

یہ سبھی جفت اعداد ہیں۔

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22...

اور یہ طاق اعداد ہیں۔

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21...

ہم دیکھتے ہیں کہ ایک طبعی عدد جفت ہوتا ہے اگر اس کا اکائی کا ہندسہ

$2, 4, 6, 8$ یا 0 ہو

ایک عدد طاق ہوتا ہے اگر اس کا اکائی کا ہندسہ

$1, 3, 5, 7$ یا 9 ہو

چھٹی جماعت میں پڑھ چکے 2 سے تقسیم پذیری کی جانچ کے اصولوں کو یاد کیجیے۔ یہ اصول اس طرح ہیں

اگر کسی عدد کا اکائی کا ہندسہ $0, 2, 4, 6$ یا 8 ہو تو وہ عدد 2 سے تقسیم ہوتا ہے۔

اس کی تشریح اس طرح ہے۔

کسی بھی عدد cba کو $100c + 10b + a$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

اس کے پہلے دو ارکان $100c$ اور $10b$ عدد 2 سے تقسیم ہوتے ہیں کیوں کہ عدد 10 اور 100 عدد 2 سے تقسیم ہوتے ہیں۔ جہاں تک a کا سوال ہے اگر دیا ہوا عدد 2 سے تقسیم ہوتا ہے تو اسے بھی 2 سے تقسیم ہونا چاہیے۔ یہ اسی وقت ممکن ہے جب $a = 0, 2, 4, 6, 8$ ہو۔

کوشش کیجیے

(پہلا سوال آپ کی مدد کے لیے حل کیا گیا ہے۔)

1. اگر تقسیم $N \div 2$ سے باقی 1 حاصل ہوتا ہے تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہو سکتا ہے؟

(N طاق ہے، اس لیے اس کی اکائی کا ہندسہ طاق ہوگا۔ اس لیے N کی اکائی کا ہندسہ $1, 3, 5, 7$ یا 9 ہوگا۔)

2. اگر تقسیم $N \div 2$ سے کوئی باقی حاصل نہیں ہوتا ہے (یعنی باقی 0 ہے) تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہو سکتا ہے؟

3. مان لیجیے تقسیم $N \div 5$ سے باقی 4 اور تقسیم $N \div 2$ سے باقی 1 حاصل ہوتا ہے۔ تو N کی اکائی کا ہندسہ کیا ہونا چاہیے؟

16.5.4 9 اور 3 سے تقسیم پذیری

اب تک معلوم کیے گئے تقسیم پذیری کی جانچ کے 3 اصولوں کو غور سے دیکھیے جو $10, 5,$ اور 2 سے تقسیم کی جانچ کے لیے تھے۔ ہمیں ان میں ایک بات یکساں نظر آتی ہے: ان میں دیے ہوئے عدد کے صرف اکائی کے ہندسہ کا استعمال ہوتا ہے اور دوسرے ہندسوں سے ان پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ اس طرح سے تقسیم پذیری کا فیصلہ صرف اکائی کے ہندسہ سے ہی ہو جاتا ہے۔ $10, 5, 2$ عدد 10 کے قاسم ہیں جو ہمارے مقامی قدر کے نظام میں ایک اہم عدد ہے۔

لیکن 9 سے تقسیم پذیری کی جانچ میں یہ اصول کارگر نہیں ہے۔ آیئے کوئی عدد جیسے 3573 کو لیجیے۔

اس کی پھیلی ہوئی شکل، $3573 \;=\; 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3$

یہ یکساں ہے $3 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 3$

$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3) \qquad ....(1)$

ہم دیکھتے ہیں کہ عدد 9 یا 3 سے اسی وقت تقسیم ہوگا جب (3+5+7+3) عدد 9 یا 3 سے تقسیم ہو جائے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ 18= (3+5+7+3) عدد 9 اور 3 سے تقسیم ہوتا ہے اس لیے عدد 3573، 9 اور 3 سے تقسیم ہو جائے گا۔

آیئے اب عدد 3576 پر غور کریں۔ جیسا کہ ہم اوپر دیکھ چکے ہیں یہاں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$3576 = 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6) \qquad ....(2)$

21=(3+5+7+6) ، 9 سے تقسیم نہیں ہوتا لیکن 3 سے تقسیم ہو جاتا ہے۔

اس لیے 3576 عدد 9 سے تقسیم نہیں ہوتا لیکن یہ 3 سے تقسیم ہو جاتا ہے۔ اس لیے:

(i) عدد N عدد '9' سے تقسیم ہو جائے گا اگر ہندسوں کا حاصل جمع 9 سے تقسیم ہو ورنہ وہ 9 سے تقسیم نہیں ہوگا۔

(ii) عدد N عدد '3' سے تقسیم ہو جائے اگر ہندسوں کا حاصل جمع 3 سے تقسیم ہوتا ہو ورنہ یہ 3 سے تقسیم نہیں ہوگا۔

اگر عدد $'cba'$ ہے تو $100c + 10b + a = 99c + 9b + (a + b + c)$

$$= \underbrace{9(11c + b)}_{\text{3 اور 9 سے تقسیم پذیر ہے}} + (a + b + c)$$

اس لیے، 9 اور 3 کی تقسیم پذیری اس وقت ممکن ہے جب $a + b + c$ ، 9(یا 3) سے تقسیم ہو۔

مثال 4 : 21436587 کی 9 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

حل : 21436587 کے ہندسوں کا حاصل جمع 36=7+ 8 + 5 + 6+3+4 + 1 + 2 ہے۔ یہ حاصل جمع (4 = 9 ÷ 36) 9 سے تقسیم ہوتا ہے۔

اس لیے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ 21436587 عدد 9 سے تقسیم ہو جائے گا۔ ہم دوبارہ جانچ کر سکتے ہیں:

$\dfrac{21436587}{9} = 2381843$ (تقسیم صحیح ہے)

مثال 5 : 152875 کی 9 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

حل : 152875 کے ہندسوں کا حاصل جمع 28=5+7+8+2+5+1 ہے۔ یہ عدد 9 سے تقسیم نہیں ہوتا۔ ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ 152875 عدد 9 سے تقسیم نہیں ہوتا ہے۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل اعداد کی 9 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

1. 108
2. 616
3. 294
4. 432
5. 927

مثال 6 : اگر تین ہندسوں کا عدد $24x$ ، 9 سے تقسیم ہوتا ہے تو x کی قدر کیا ہے؟

حل : چوں کہ $24x$ ، عدد 9 سے تقسیم ہوتا ہے۔ اس لیے اس کے ہندسوں کا حاصل جمع $2 + 4 + x$ ، 9 سے تقسیم ہونا چاہیے، یعنی $6 + x$ ، 9 سے تقسیم ہونا چاہیے۔

یہ اسی وقت ممکن ہے جب $6 + x = 9$ ہو یا 18۔ کیوں کہ x ایک ہندسہ ہے اس لیے $6 + x = 9$ ہوگا، یعنی $x = 3$ ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1. آپ دیکھ چکے ہیں کہ 450 کو 10 سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ اسے 2 اور 5 سے بھی تقسیم کیا جاسکتا ہے جو 10 کے اجزائے ضربی ہیں۔ اسی طرح عدد 135 کو 9 سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ اسے 3 سے بھی تقسیم کیا جاسکتا ہے جو 9 کا ایک جز وضربی ہے۔
کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ اگر کوئی عدد x ، m سے تقسیم ہوتا ہو تو وہ m کے ہر ایک جز وضربی سے بھی تقسیم ہوگا۔

2. تین ہندسوں کے ایک عدد abc کو $100a + 10b + c$ کی شکل میں لکھیے۔

$$= 99a + 11b + (a - b + c)$$

$$= 11(9a + b) + (a - b + c)$$

اگر عدد abc، 11 سے تقسیم ہو تو آپ $(a - b + c)$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

کیا یہ ضروری ہے کہ $(a + c - b)$، 11 سے تقسیم ہو؟

(ii) ایک چار ہندسوں کے عدد $abcd$ کو اس طرح لکھیے $1000a + 100b + 10c + d$

$$= (1001a + 99b + 11c) - (a - b + c - d)$$

$$= 11(91a + 9b + c) + [(b + d) - (a + c)]$$

اگر عدد $abcd$، 11 سے تقسیم ہو تو $[(b + d) - (a + c)]$ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

(iii) اوپر دیے گئے (i) اور (ii) سے، آپ کیا کہہ سکتے ہیں کہ کوئی عدد 11 سے تقسیم ہوگا اگر اس کے طاق مقاموں کے ہندسوں کا حاصل جمع اور جفت مقاموں کے ہندسوں کا حاصل جمع کا فرق 11 سے تقسیم ہوتا ہے؟

مثال 7 : 2146587 کی 3 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

حل: 2146587 کے ہندسوں کا حاصل جمع $2 + 1 + 4 + 6 + 5 + 8 + 7 = 33$ ہے۔ یہ 3 سے تقسیم ہو جاتا ہے یعنی

(11 = 3 ÷ 33)۔ اس لیے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ 2146587، عدد 3 سے تقسیم ہوگا۔

مثال 8 : 15287 کی 3 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

حل : 15287 کے ہندسوں کا حاصل جمع $1 + 5 + 2 + 8 + 7 = 23$ ہے۔ یہ 3 سے تقسیم نہیں ہوتا ہے۔ اس لیے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ 15287 عدد 3 سے تقسیم نہیں ہوگا۔

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل اعداد کی 3 سے تقسیم پذیری کی جانچ کیجیے۔

1. 108   2. 616   3. 294   4. 432   5. 927

مشق 16.2

1. اگر 9 کا ایک ضعف $21y5$ ہے جہاں y ایک ہندسہ ہے تو y کی قدر کیا ہے؟
2. اگر 9 کا ایک ضعف $31z5$ ہے جہاں z ایک ہندسہ ہے تو z کی قدر کیا ہے؟

   آپ دیکھیں گے کہ اس کے دو جواب ہیں۔ ایسا کیوں ہے؟
3. اگر $24x$، 3 کا ایک ضعف ہے جہاں x ایک ہندسہ ہے تو x کی قدر کیا ہے؟ (کیوں کہ $24x$، 3 کا ایک ضعف ہے اس لیے اس کے ہندسوں کا حاصل جمع $6 + x$، 3 کا ایک ضعف ہے۔ یعنی $6 + x$ مندرجہ ذیل میں سے کوئی ایک عدد ہوگا۔ $0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$ یعنی x ایک ہندسہ ہے اس لیے $x + 6 = 6$ یا 9 یا 12 یا 15 ہو سکتے ہیں۔ اس لیے $x = 0$ یا $x = 3$ یا $x = 6$ یا $x = 9$ ہو سکتا ہے۔ اس لیے x کی قدر ان چاروں مختلف قدروں میں سے ایک ہو سکتی ہے۔
4. اگر $31z5$، 3 کا ایک ضعف ہے جہاں z ایک ہندسہ ہے تو z کی قدر کیا ہو سکتی ہے؟

ہم نے کیا سیکھا؟

1. اعداد کو ہم عمومی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح ایک دو ہندسی عدد ab کو $ab = 10a + b$ لکھا جائے گا۔
2. اعداد کی عمومی شکلیں عددی کھیل اور پہیلیوں کو حل کرنے میں مددگار رہوتی ہیں۔
3. اگر اعداد کو عمومی شکل میں لکھا جائے تو اعداد 9، 2، 5، 10 یا 3 کے ذریعے تقسیم پزیری کی وجہ بتائی جا سکتی ہے۔

نوٹ

جوابات

مشق 1.1

.1 (i) 2 (ii) $\frac{-11}{28}$

.2 (i) $\frac{-2}{8}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{5}$ (iv) $\frac{2}{9}$ (v) $\frac{19}{6}$

.4 (i) $\frac{-1}{13}$ (ii) $\frac{-19}{13}$ (iii) 5 (iv) $\frac{56}{15}$ (v) $\frac{5}{2}$ (vi) -1

.5 (i) 1 ضربی تماثل ہے (iii) ضربی معکوس

(ii) تقلیبیت

.6 $\frac{-96}{91}$ .7 تلازمیت .8 نہیں، کیوں کہ حاصل ضرب 1 نہیں ہے۔

.9 ہاں، کیوں کہ $0.3 \times 3\frac{1}{3} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{3} = 1$

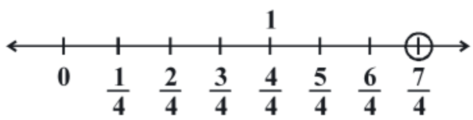
.10 (i) 0 (ii) 1 اور (-1) (iii) 0

.11 (i) نہیں (ii) 1، -1 (iii) $\frac{-1}{5}$ (iv) x (v) ناطق عدد

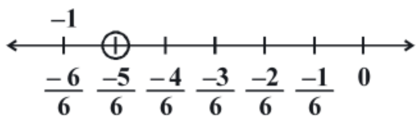
(vi) مثبت

مشق 1.2

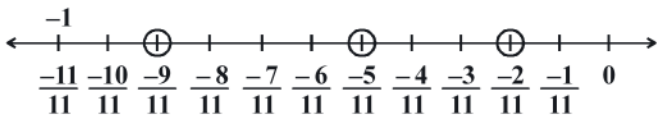
.1 (i)



(ii)



.2



.3 ان میں سے کچھ ہیں: $\frac{-1}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$

.4 $\frac{-7}{20}, \frac{-6}{20}, \frac{-5}{20}, \frac{-4}{20}, \frac{-3}{20}, \frac{-2}{20}, \frac{-1}{20}, 0, \ldots, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}$ (ایسے ہی اور بھی بہت سے ناطق اعداد ہو سکتے ہیں)

.5 (i) $\frac{41}{60}, \frac{42}{60}, \frac{43}{60}, \frac{44}{60}, \frac{45}{60}$ (ii) $\frac{-8}{6}, \frac{-7}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}$ (iii) $\frac{9}{32}, \frac{10}{32}, \frac{11}{32}, \frac{12}{32}, \frac{13}{32}$

(ایسے ہی اور بہت سے ناطق اعداد ہو سکتے ہیں)

.6 $-\frac{3}{2}, -1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (ایسے ہی اور بہت سے ناطق اعداد ہو سکتے ہیں)

.7 $\frac{97}{160}, \frac{98}{160}, \frac{99}{160}, \frac{100}{160}, \frac{101}{160}, \frac{102}{160}, \frac{103}{160}, \frac{104}{160}, \frac{105}{160}, \frac{106}{160}$

(ایسے ہی اور بہت سے ناطق اعداد ہو سکتے ہیں)

مشق 2.1

.1 $x=9$ .2 $y=7$ .3 $z=4$ .4 $x=2$ .5 $x=2$ .6 $t=50$

.7 $x=27$ .8 $y=2.4$ .9 $x=\frac{25}{7}$ .10 $y=\frac{3}{2}$ .11 $p=-\frac{4}{3}$ .12 $x=-\frac{8}{5}$

مشق 2.2

.1 $\frac{3}{4}$ .2 لمبائی = 52 میٹر، چوڑائی = 25 میٹر .3 $1\frac{2}{5}$ سینٹی میٹر .4 40 اور 55

.5 45, 27 .6 16, 17, 18 .7 288, 296 اور 304 .8 7, 8, 9

.9 راہل کی عمر : 20 سال؛ ہارون کی عمر : 28 سال؛ .10 48 طلبا

.11 بھرت کی عمر : 17 سال؛ بائی چنگ کے والد کی عمر : 46 سال؛

بھرت کے دادا کی عمر = 72 سال .12 5 سال .13 $-\frac{1}{2}$

.14 100 روپے کے ← 2000 نوٹ؛ 50 روپے کے ← 3000 نوٹ؛ 10 روپے کے ← 5000 نوٹ

.15 1 روپے کے سکوں کی تعداد = 80؛ 2 روپے کے سکوں کی تعداد = 60؛ 5 روپے کے سکوں کی تعداد = 20

.16 19

مشق 2.3

.1 $x=18$ .2 $t=-1$ .3 $x=-2$ .4 $z=\frac{3}{2}$ .5 $x=5$ .6 $x=0$

.7 $x=40$ .8 $x=10$ .9 $y=\frac{7}{3}$ .10 $m=\frac{4}{5}$

مشق 2.4

.1 4 .2 7,35 .3 36 .4 26 (یا 62)

.5 سروج کی عمر ؛ 5 سال؛ سروج کی ماں کی عمر ؛ 30 سال

.6 لمبائی = 275 میٹر، چوڑائی = 100 میٹر .7 200 میٹر .8 72

.9 پوتی کی عمر : 6 سال؛ دادا کی عمر : 60 سال

.10 امن کی عمر : 60 سال؛ امن کے بیٹے کی عمر : 20 سال

مشق 2.5

.1 $x=\frac{27}{10}$ .2 $n=36$ .3 $x=-5$ .4 $x=8$ .5 $t=2$

.6 $m=\frac{7}{5}$ .7 $t=-2$ .8 $y=\frac{2}{3}$ .9 $z=2$ .10 $f=0.6$

مشق 2.6

.1 $x=\frac{3}{2}$ .2 $x=\frac{35}{33}$ .3 $z=12$ .4 $y=-8$ .5 $y=-\frac{4}{5}$

.6 ہری کی عمر = 20 سال؛ ہیری کی عمر = 28 سال .7 $\frac{13}{21}$

مشق 3.1

.1 (a) 1, 2, 5, 6, 7 (b) 1, 2, 5, 6, 7 (c) 1, 2

(d) 2 (e) 1

.2 (a) 2 (b) 9 (c) 0 .3 ہاں ؛ 360°

.4 (a) 900° (b) 1080° (c) 1440° (d) $(n-2)180°$

.5 مساوی ضلعوں اور مساوی زاویوں والا ایک کثیر ضلعی۔

(i) مساوی ضلعی مثلث (ii) مربع (iii) منظّم کثیر ضلعی

.6 (a) 60° (b) 140° (c) 140° (d) 108°

.7 (a) $x+y+z=360°$ (b) $x+y+z+w=360°$

مشق 3.2

.1 (a) $360°-250°=110°$ (b) $360°-310°=50°$

.2 (i) $\frac{360°}{9}=40°$ (ii) $\frac{360°}{15}=24°$

.3 (اضلاع) $\frac{360}{24}=15$ .4 اضلاع کی تعداد = 24

.5 (i) نہیں؛ (کیوں کہ 360 کو 22 تقسیم نہیں کرتا ہے)

(ii) نہیں؛ (کیوں کہ ہر ایک بیرونی زاویہ $180°-22°=158°$ ہے جو 360° کو تقسیم نہیں کرتا)

.6 (a) کیوں کہ مساوی ضلعی مثلث تین اضلاع کا ایک منظّم کثیر ضلع ہے، اس لیے اس کے ہر ایک داخلی زاویہ کی کم سے کم پیمائش 60° ہے۔

(b) (a) سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ سب سے بڑا بیرونی (باہری) زاویہ 120° ہوگا۔

مشق 3.3

.1 (i) BC (مقابل اضلاع برابر ہوتے ہیں) (ii) $\angle$DAB (مقابل زاویہ برابر ہوتے ہیں)

(iii) OA (وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں)۔

(iv) 180° (داخلی مقابل زاویہ، کیوں کہ $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$)

.2 (i) $x=80°; y=100°; z=80°$ (ii) $x=130°; y=130°; z=130°$

(iii) $x=90°;\ y=60°;\ z=60°$ (iv) $x=100°;\ y=80°;\ z=80°$

(v) $y=112°; x=28°; z=28°$

3. (i) ہوسکتا ہے،لیکن ضروری نہیں ہے۔

(ii) (نہیں:ایک متوازی الاضلاع میں مقابل اضلاع برابر ہوتے ہیں؛لیکن یہاں $AD \neq BC$ ہے)

(iii) نہیں،(ایک متوازی الاضلاع میں مقابل زاویہ برابر ہوتے ہیں؛لیکن یہاں $\angle A \neq \angle C$ ہے)

4. مثال کے طور پر ایک پتنگ
5. $108°; 72°;$
6. ہر ایک زاویہ قائمہ ہے۔

7. $x = 110°;\ y = 40°;\ z = 30°$

8. (i) $x = 6;\ y = 9$ (ii) $x = 3;\ y = 13;$
9. $x = 50°$

10. $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$ (مخالف داخلی زاویوں کا حاصل جمع $180°$ ہے)۔اس لیے KLMN ایک منحرف ہے۔

11. $60°$
12. $\angle P = 50°; \angle S = 90°$

مشق 3.4

1. (b), (c), (f), (g), (h) صحیح ہیں؛باقی غلط ہیں۔

2. (a) معیّن؛مربع (b) مربع؛مستطیل

3. (i) ایک مربع میں چار اضلاع ہوتے ہیں؛اس لیے یہ ایک چار ضلعی ہے۔

(ii) ایک مربع کے مقابل اضلاع متوازی ہوتے ہیں؛اس لیے یہ ایک متوازی الاضلاع ہیں۔

(iii) مربع ایک ایسا متوازی الاضلاع ہوتا ہے جس کے تمام اضلاع برابر ہوتے ہیں؛اس لیے یہ ایک معین ہے۔

(iv) مربع ایک ایسا متوازی الاضلاع ہوتا ہے جس کے سبھی زاویہ قائمہ ہوتے ہیں؛اس لیے یہ ایک مستطیل ہے۔

4. (i) متوازی الاضلاع؛معین؛مربع؛مستطیل

(ii) معین؛مربع (iii) مربع؛مستطیل

5. اس کے دونوں وتر اس کے اندرون میں واقع ہوتے ہیں۔

6. $\overline{AD} \parallel \overline{BC};\ \overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ہے۔اس لیے متوازی الاضلاع ABCD میں وتر $\overline{AC}$ کا وسطی نقطہ O ہے۔

مشق 5.1

1. (b) ، (d) ان سبھی مرحلوں میں ڈاٹا کو کلاس کے وقفے سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

.2

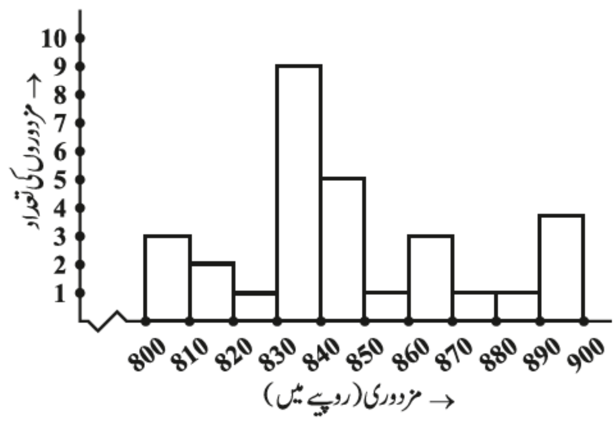
خریدنے والا	ٹیلی مارکس	تعداد
W	III 卌 卌 卌 卌 卌	28
M	卌 卌 卌	15
B	卌	5
G	II 卌 卌	12

.3

وقفہ	ٹیلی مارکس	تعداد
800-810	III	3
810-820	II	2
820-830	I	1
830-840	IIII 卌	9
840-850	卌	5
850-860	I	1
860-870	III	3
870-880	I	1
880-890	I	1
890-900	IIII	4
	کل	**30**

.4 (i) 830-840 (ii) 10

(iii) 20



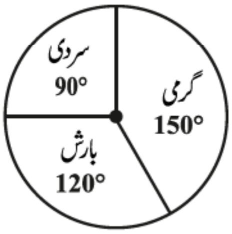
.5 (i) 4 - 5 گھنٹے (ii) 34

(iii) 14

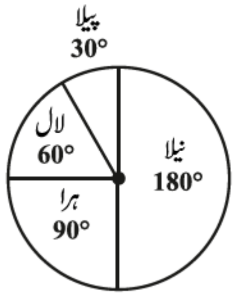
مشق 5.2

.1 (i) 200 (ii) ہلکی موسیقی (iii) کلاسیکی-100، نیم کلاسیکی-200، ہلکی-400، لوک گیت-300

.2 (i) سردی (ii) سردی-150°، بارش-120°، گرمی-90° (iii)

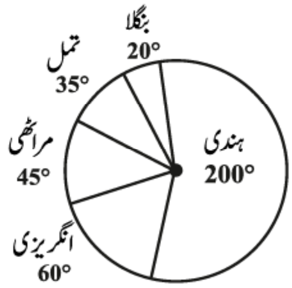


.3



.4 (i) ہندی (ii) 30 نمبر (iii) ہاں

.5



مشق 5.3

.1 (a) نتیجہ ← A, B, C, D

(b) HT, HH, TH, TT (یہاں HT کا مطلب ہے کہ پہلے سکّے پر چت یا ہیڈ (Head) اور دوسرے پر پَٹ یا ٹیل (Tail) وغیرہ)

.2 مندرجہ ذیل حاصل کرنے کے وقوعہ کا نتیجہ

(i) (a) 2, 3, 5 (b) 1, 4, 6

(ii) (a) 6 (b) 1, 2, 3, 4, 5

.3 (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{13}$ (c) $\frac{4}{7}$

.4 (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}$ (iv) $\frac{9}{10}$

.5 ہر اسیکٹر حاصل کرنے کا احتمال $= \frac{3}{5}$ ؛ ایسا سیکٹر حاصل کرنے کا احتمال جو نیلا نہیں ہے $= \frac{4}{5}$

.6 ایک مفرد عدد حاصل کرنے کا احتمال $= \frac{1}{2}$ ؛ ایک ایسا عدد حاصل کرنے کا احتمال جو مفرد نہیں ہے $= \frac{1}{2}$

5 سے بڑا عدد حاصل کرنے کا احتمال $= \frac{1}{6}$

5 سے بڑا عدد نہ حاصل کرنے کا احتمال $= \frac{5}{6}$

مشق 6.1

.1 (i) 1 (ii) 4 (iii) 1 (iv) 9 (v) 6 (vi) 9

(vii) 4 (viii) 0 (ix) 6 (x) 5

.2 یہ اعداد مندرجہ ذیل پر ختم ہوتے ہیں۔

(i) 7 (ii) 3 (iii) 8 (iv) 2 (v) 0 (vi) 2

(vii) 0 (viii) 0

.3 (i)، (iii) **4.** 10000200001، 100000020000001

.5 1020304030201، 101010101^2 **6.** 20, 6, 42, 43

.7 (i) 25 (ii) 100 (iii) 144

.8 (i) $1+3+5+7+9+11+13$

(ii) $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21$

.9 (i) 24 (ii) 50 (iii) 198

مشق 6.2

.1 (i) 1024 (ii) 1225 (iii) 7396 (iv) 8649 (v) 5041 (vi) 2116

.2 (i) 6,8,10 (ii) 14,48,50 (iii) 16,63,65 (iv) 18,80,82

مشق 6.3

.1 (i) 1, 9 (ii) 4, 6 (iii) 1, 9 (iv) 5

.2 (i) ، (ii) ، (iii) .3 13, 10

.4 (i) 27 (ii) 20 (iii) 42 (iv) 64 (v) 88 (vi) 98
(vii) 77 (viii) 96 (ix) 23 (x) 90

.5 (i) 7;42 (ii) 5;30 (iii) 7, 84 (iv) 3;78 (v) 2;54 (vi) 3;48

.6 (i) 7;6 (ii) 13;15 (iii) 11;6 (iv) 5;23 (v) 7;20 (vi) 5;18

.7 49 .8 45 قطاریں اور ہر ایک قطار میں 45 پودے .9 900 .10 3600

مشق 6.4

.1 (i) 48 (ii) 67 (iii) 59 (iv) 23 (v) 57 (vi) 37
(vii) 76 (viii) 89 (ix) 24 (x) 32 (xi) 56 (xii) 30

.2 (i) 1 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 3 (v) 3

.3 (i) 1.6 (ii) 2.7 (iii) 7.2 (iv) 6.5 (v) 5.6

.4 (i) 2;20 (ii) 53;44 (iii) 1;57 (iv) 41;28 (v) 31;63

.5 (i) 4;23 (ii) 14;42 (iii) 4;16 (iv) 24;43 (v) 149;81

.6 21 میٹر .7 (a) 10 سینٹی میٹر (b) 12 سینٹی میٹر

.8 24 پودے .9 16 بچے

مشق 7.1

.1 (ii) اور (iv)

.2 (i) 3 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 5 (v) 10

.3 (i) 3 (ii) 2 (iii) 5 (iv) 3 (v) 11

.4 20 مکعب

مشق 7.2

.1 (i) 4 (ii) 8 (iii) 22 (iv) 30 (v) 25 (vi) 24
(vii) 48 (viii) 36 (ix) 56

.2 (i) غلط (ii) صحیح (iii) غلط (iv) غلط (v) غلط (vi) غلط
(vii) صحیح

.3 11, 17, 23, 32

مشق 8.1

.1 (a) 1 : 2 (b) 1 : 2000 (c) 1 : 10

.2 (a) 75% (b) $66\frac{2}{3}$% .3 28% طلبا .4 25 میچ .5 2400 روپے

.6 10%, کرکٹ ← 30 لاکھ؛ فٹ بال ← 15 لاکھ؛ دوسرے کھیل ← 5 لاکھ

مشق 8.2

.1 ₹ 1,40,000 .2 80% .3 ₹ 34.80 .4 ₹18,342.5

.5 2% کا فائدہ .6 ₹ 2,835 .7 ₹ 1,269.84 کا نقصان

.8 ₹ 14,560 .9 ₹ 2,000 .10 ₹ 5,000 .11 ₹ 1050

مشق 8.3

.1 (a) کل زر = ₹15,377.34؛ سود مرکب = ₹4577.34
(b) کل زر = ₹ 22869 ؛ سود = ₹ 4869 (c) کل زر = ₹ 70,304 ؛ سود = ₹ 7804
(d) کل زر = ₹ 8736.20 ؛ سود = ₹ 736.20
(e) کل زر = ₹ 10,816 ؛ سود = ₹ 816

.2 ₹36,659.70 .3 کملا ₹ 362.50 زیادہ دیتی ہے .4 ₹ 43.20

.5 (ii) ₹ 63,600 (ii) ₹ 67,416 .6 (ii) ₹ 92,400 (ii) ₹ 92,610

.7 (i) ₹ 8,820 (ii) ₹ 441

.8 کل زر = ₹ 11,576.25 ، سود = ₹ 1,576.25 ، ہاں

.9 ₹ 4,913 .10 (i) تقریباً 48,980 (ii) 59,535 .11 5,31,616 (تقریباً)

.12 ₹ 38,640

مشق 9.1

.1

	رکن	ضریب
(i)	$5xyz^2$ $-3zy$	5 -3
(ii)	1 x x^2	1 1 1
(iii)	$4x^2y^2$ $-4x^2y^2z^2$ z^2	4 -4 1
(iv)	3 $-pq$ qr $-rp$	3 -1 1 -1
(v)	$\frac{x}{2}$ $\frac{y}{2}$ $-xy$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1
(vi)	$0.3a$ $-0.6ab$ $0.5b$	0.3 -0.6 0.5

.2 یک رکنی pqr, 1000

دو رکنی: $x+y,\ 2y-3y^2,\ 4z-15z^2,\ p^2q+pq^2,\ 2p+2q$

سہ رکنی: $7+y+5x,\ 2y-3y^2+4y^3,\ 5x-4y+3xy$

وہ کثیر رکنی جو اوپر کے زمروں میں نہیں آتی ہیں: $x+x^2+x^3+x^4,\ ab+bc+cd+da$

.3 (i) 0 (ii) $ab+bc+ac$ (iii) $-p^2q^2+4pq+9$

(iv) $2(l^2+m^2+n^2+lm+mn+nl)$

.4 (a) $8a-2ab+2b-15$ (b) $2xy-7yz+5zx+10xyz$

(c) $p^2q-7pq^2+8pq-18q+5p+28$

مشق 9.2

.1 (i) $28p$ (ii) $-28p^2$ (iii) $-28p^2q$ (iv) $-12p^4$ (v) 0

.2 $pq; 50\,mn; 100\,x^2y^2; 12x^3; 12mn^2p$

.3

پہلا یک رقمی ← دوسرا یک رقمی ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2y$	$-9x^2y^2$
$2x$	$4x^2$	$-10xy$	$6x^3$	$-8x^2y$	$14x^3y$	$-18x^3y^2$
$-5y$	$-10xy$	$25y^2$	$-15x^2y$	$20xy^2$	$-35x^2y^2$	$45x^2y^3$
$3x^2$	$6x^3$	$-15x^2y$	$9x^4$	$-12x^3y$	$21x^4y$	$-27x^4y^2$
$-4xy$	$-8x^2y$	$20xy^2$	$-12x^3y$	$16x^2y^2$	$-28x^3y^2$	$36x^3y^3$
$7x^2y$	$14x^3y$	$-35x^2y^2$	$21x^4y$	$-28x^3y^2$	$49x^4y^2$	$-63x^4y^3$
$-9x^2y^2$	$-18x^3y^2$	$45x^2y^3$	$-27x^4y^2$	$36x^3y^3$	$-63x^4y^3$	$81x^4y^4$

.4 (i) $105a^7$ (ii) $64pqr$ (iii) $4x^4y^4$ (iv) $6abc$

.5 (i) $x^2y^2z^2$ (ii) $-a^6$ (iii) $1024y^6$ (iv) $36a^2b^2c^2$ (v) $-m^3n^2p$

مشق 9.3

.1 (i) $4pq+4pr$ (ii) a^2b-ab^2 (iii) $7a^3b^2+7a^2b^3$

(iv) $4a^3-36a$ (v) 0

.2 (i) $ab+ac+ad$ (ii) $5x^2y+5xy^2-25xy$ (iii) $6p^3-7p^2+5p$

(iv) $4p^4q^2-4p^2q^4$ (v) $a^2bc+ab^2c+abc^2$

3. (i) $8a^{50}$ (ii) $-\frac{3}{5}x^3y^3$ (iii) $-4p^4q^4$ (iv) x^{10}

4. (a) $12x^2-15x+3;$ (i) 66 (ii) $\frac{-3}{2}$

(b) $a^3+a^2+a+5;$ (i) 5 (ii) 8 (iii) 4

5. (a) $p^2+q^2+r^2-pq-qr-pr$ (b) $-2x^2-2y^2-4xy+2yz+2zx$

(c) $5l^2+25ln$ (d) $-3a^2-2b^2+4c^2-ab+6bc-7ac$

مشق 9.4

1. (i) $8x^2+14x-15$ (ii) $3y^2-28y+32$ (iii) $6.25l^2-0.25m^2$

(iv) $ax+5a+3bx+15b$ (v) $6p^2q^2+5pq^3-6q^4$ (vi) $3a^4+10a^2b^2-8b^4$

2. (i) $15-x-2x^2$ (ii) $7x^2+48xy-7y^2$ (iii) $a^3+a^2b^2+ab+b^3$

(iv) $2p^3+p^2q-2pq^2-q^3$

3. (i) x^3+5x^2-5x (ii) $a^2b^3+3a^2+5b^3+20$ (iii) $t^3-st+s^2t^2-s^3$

(iv) $4ac$ (v) $3x^2+4xy-y^2$ (vi) x^3+y^3

(vii) $2.25x^2-16y^2$ (viii) $a^2+b^2-c^2+2ab$

مشق 9.5

1. (i) x^2+6x+9 (ii) $4y^2+20y+25$ (iii) $4a^2-28a+49$

(iv) $9a^2-3a+\frac{1}{4}$ (v) $1.21m^2-0.16$ (vi) b^4-a^4

(vii) $36x^2-49$ (viii) $a^2-2ac+c^2$ (ix) $\frac{x^2}{4}+\frac{3xy}{4}+\frac{9y^2}{16}$

(x) $49a^2-126ab+81b^2$

2. (i) $x^2+10x+21$ (ii) $16x^2+24x+5$ (iii) $16x^2-24x+5$

(iv) $16x^2+16x-5$ (v) $4x^2+16xy+15y^2$ (vi) $4a^4+28a^2+45$

(vii) $x^2y^2z^2-6xyz+8$

.3 (i) $b^2-14b+49$ (ii) $x^2y^2+6xyz+9z^2$ (iii) $36x^4-60x^2y+25y^2$

(iv) $\frac{4}{9}m^2+2mn+\frac{9}{4}n^2$ (v) $0.16p^2+0.04pq+0.25q^2$ (vi) $4x^2y^2+20xy^2+25y^2$

.4 (i) $a^4-2a^2b^2+b^4$ (ii) $40x$ (iii) $98m^2+128n^2$

(iv) $41m^2+80mn+41n^2$ (v) $4p^2-4q^2$ (vi) $a^2b^2+b^2c^2$ (vii) $m^4+n^4m^2$

.6 (i) 5041 (ii) 9801 (iii) 10404 (iv) 996004 (v) 27.04

(vi) 89991 (vii) 6396 (viii) 79.21 (ix) 99.75

.7 (i) 200 (ii) 0.08 (iii) 1800 (iv) 84

.8 (i) 10712 (ii) 26.52 (iii) 10094 (iv) 95.06

مشق 10.1

.1 (a) ← (iii) ← (iv) (b) ← (i) ← (v) (c) ← (iv) ← (ii)

(d) ← (v) ← (iii) (e) ← (ii) ← (i)

.2 (a) (i) ← سامنے (ii) ← پہلو (iii) ← اوپر (b) (i) ← پہلو (ii) ← سامنے (iii) ← اوپر

(c) (i) ← سامنے (ii) ← پہلو (iii) ← اوپر (d) (i) ← سامنے (ii) ← پہلو (iii) ← اوپر

.3 (a) (i) ← اوپر (ii) ← سامنے (iii) ← پہلو (b) (i) ← پہلو (ii) ← سامنے (iii) ← اوپر

(c) (i) ← اوپر (ii) ← پہلو (iii) ← سامنے (d) (i) ← پہلو (ii) ← سامنے (iii) ← اوپر

(e) (i) ← سامنے (ii) ← اوپر (iii) ← پہلو

مشق 10.3

.1 (i) نہیں (ii) ہاں (iii) ہاں .2 یہ تب ہی ممکن ہے جب رخوں کی تعداد 4 کے برابر یا اس سے زیادہ ہو۔

.3 صرف (ii) اور (iv)

.4 (i) ایک پرزم اسطوانہ بن جاتا ہے جب اس کے قاعدے کے اضلاع کی تعداد زیادہ سے زیادہ ہو جاتی ہے۔

(ii) ایک اہرام ایک مخروط بن جاتا ہے جب اس کے قاعدے کے اضلاع کی تعداد زیادہ سے زیادہ ہو جاتی ہے۔

.5 نہیں، یہ ایک مکعب نما بھی ہوسکتا ہے۔ .7 رخ←8، راس←6، کنارے←30

.8 نہیں

مشق 11.1

.1 (a) 17,875.2 روپے .3 رقبہ = 129.5 مربع میٹر، احاطہ = 48 میٹر

.4 45000 ٹائلز .5 (b)

مشق 11.2

.1 0.88 مربع میٹر .2 7 سینٹی میٹر .3 660 مربع میٹر .4 252 مربع میٹر

.5 45 مربع سینٹی میٹر .6 6 سینٹی میٹر، 24 مربع سینٹی میٹر .7 810 روپے .8 140 میٹر

.9 119 مربع میٹر .10 جیوتی کا طریقہ استعمال کرنے پر رقبہ = 337.5 مربع میٹر = $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} \times (30+15)$ مربع میٹر

کویتا کا طریقہ استعمال کرنے پر رقبہ = 337.5 مربع میٹر = $\frac{1}{2} \times 15 \times 15 + 15 \times 15$

.11 96 مربع سینٹی میٹر، 80 مربع سینٹی میٹر، 96 مربع سینٹی میٹر، 80 مربع سینٹی میٹر

مشق 11.3

.1 (a) .2 144 میٹر .3 10 سینٹی میٹر .4 11 مربع میٹر

.5 5 کین

.6 مشابہت← دونوں کی اونچائیاں یکساں ہیں۔ فرق← ایک، ایک اسطوانہ ہے، دوسرا مکعب۔ مکعب کی خمیدہ سطح کا رقبہ زیادہ ہے۔

.7 440 مربع میٹر .8 322 سینٹی میٹر .9 1980 مربع میٹر .10 704 مربع سینٹی میٹر

مشق 11.4

.1 (a) حجم (b) سطحی رقبہ (c) حجم

.2 اسطوانہ B کا حجم زیادہ ہے، اسطوانہ B کا وسطی رقبہ زیادہ ہے۔

.3 5 سینٹی میٹر   .4 450   .5 1 میٹر   .6 49500 لیٹر

.7 (i) 4 گنا   (ii) 8 گنا   .8 30 گھنٹے

مشق 12.1

.1 (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) 32

.2 (i) $\frac{1}{(-4)^3}$ (ii) $\frac{1}{2^6}$ (iii) $(5)^4$ (iv) $\frac{1}{(3)^2}$ (v) $\frac{1}{(-14)^3}$

.3 (i) 5   (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) 29   (iv) 1   (v) $\frac{81}{16}$

.4 (i) 250   (ii) $\frac{1}{60}$ .5 $m = 2$ .6 (i) -1 (ii) $\frac{512}{125}$

.7 (i) $\frac{625t^4}{2}$ (ii) 5^5

مشق 12.2

.1 (i) 8.5×10^{-12} (ii) 9.42×10^{-12} (iii) 6.02×10^{15}

(iv) 8.37×10^{-9} (v) 3.186×10^{10}

.2 (i) 0.00000302   (ii) 45000   (iii) 0.00000003

(iv) 1000100000   (v) 5800000000000   (vi) 3614920

.3 (i) 1×10^{-6} (ii) 1.6×10^{-19} (iii) 5×10^{-7}

(iv) 1.275×10^{-5} (v) 7×10^{-2}

.4 1.0008×10^{2}

مشق 13.1

.1 نہیں

.2

لال پگمنٹ کے حصے	1	4	7	12	20
اساس کے حصے	8	32	56	96	160

3. 24 حصے　4. 700 بوتلیں　5. 2 سینٹی میٹر، 10^{-2} سینٹی میٹر　6. 21 میٹر

7. (i) 2.25×10^{7} کرسٹل　(ii) 5.4×10^{6} کرسٹل　8. 4 سینٹی میٹر

9. (i) 6 میٹر　(ii) 8 میٹر 75 سینٹی میٹر　10. 168 کلومیٹر

مشق 13.2

1. (i), (iv), (v)　2. $4 \rightarrow 25{,}000;\ 5 \rightarrow 20{,}000;\ 8 \rightarrow 12{,}500;\ 10 \rightarrow 10{,}000;\ 20 \rightarrow 5{,}000$

ایک جیتنے والے شخص کو دی گئی رقم جیتنے والے اشخاص کی تعداد کا بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

3. $8 \rightarrow 45°,\ 10 \rightarrow 36°,\ 12 \rightarrow 30°$　(i) ہاں　(ii) 24°　(iii) 9

4. 56. 4　6. 3 دن　7. 15 ڈبے

8. 49 مشینیں　9. $1\frac{1}{2}$ گھنٹے　10. (i) 6 دن　(ii) 6 اشخاص　11. 40 منٹ

مشق 14.1

1. (i) 12　(ii) 2y　(iii) $14pq$　(iv) 1　(v) $6ab$　(vi) $4x$

(vii) 10　(viii) x^2y^2

2. (i) $7(x-6)$　(ii) $6(p-2q)$　(iii) $7a(a+2)$　(iv) $4z(-4+5z^2)$

(v) $10\,lm(2l+3a)$　(vi) $5xy(x-3y)$　(vii) $5(2a^2-3b^2+4c^2)$

(viii) $4a(-a+b-c)$　(ix) $xyz(x+y+z)$　(x) $xy(ax+by+cz)$

3. (i) $(x+8)(x+y)$　(ii) $(3x+1)(5y-2)$

(iii) $(a+b)(x-y)$　(iv) $(5p+3)(3q+5)$　(v) $(z-7)(1-xy)$

مشق 14.2

1. (i) $(a+4)^2$　(ii) $(p-5)^2$　(iii) $(5m+3)^2$　(iv) $(7y+6z)^2$

(v) $4(x-1)^2$　(vi) $(11b-4c)^2$　(vii) $(l-m)^2$　(viii) $(a^2+b^2)^2$

.2 (i) $(2p-3q)(2p+3q)$ (ii) $7(3a-4b)(3a+4b)$ (iii) $(7x-6)(7x+6)$
(iv) $16x^3(x-3)(x+3)$ (v) $4lm$ (vi) $(3xy-4)(3xy+4)$
(vii) $(x-y-z)(x-y+z)$ (viii) $(5a-2b+7c)(5a+2b-7c)$

.3 (i) $x(ax+b)$ (ii) $7(p^2+3q^2)$ (iii) $2x(x^2+y^2+z^2)$
(iv) $(m^2+n^2)(a+b)$ (v) $(l+1)(m+1)$ (vi) $(y+9)(y+z)$
(vii) $(5y+2z)(y-4)$ (viii) $(2a+1)(5b+2)$ (ix) $(3x-2)(2y-3)$

.4 (i) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ (ii) $(p-3)(p+3)(p^2+9)$
(iii) $(x-y-z)(x+y+z)[x^2+(y+z)^2]$ (iv) $z(2x-z)(2x^2-2xz+z^2)$
(v) $(a-b)^2(a+b)^2$

.5 (i) $(p+2)(p+4)$ (ii) $(q-3)(q-7)$ (iii) $(p+8)(p-2)$

مشق 14.3

.1 (i) $\frac{x^3}{2}$ (ii) $-4y$ (iii) $6pqr$ (iv) $\frac{2}{3}x^2y$ (v) $-2a^2b^4$

.2 (i) $\frac{1}{3}(5x-6)$ (ii) $3y^4-4y^2+5$ (iii) $2(x+y+z)$
(iv) $\frac{1}{2}(x^2+2x+3)$ (v) q^3-p^3

.3 (i) $2x-5$ (ii) 5 (iii) $6y$ (iv) xy (v) $10abc$

.4 (i) $5(3x+5)$ (ii) $2y(x+5)$ (iii) $\frac{1}{2}r(p+q)$
(iv) $4(y^2+5y+3)$ (v) $(x+2)(x+3)$

.5 (i) $y+2$ (ii) $m-16$ (iii) $5(p-4)$ (iv) $2z(z-2)$ (v) $\frac{5}{2}q(p-q)$
(vi) $3(3x-4y)$ (vii) $3y(5y-7)$

مشق 14.4

.1 $4(x-5)=4x-20$

.2 $x(3x+2)=3x^2+2x$

.3 $2x+3y=2x+3y$

.4 $x+2x+3x=6x$

.5 $5y+2y+y-7y=y$

.6 $3x+2x=5x$

.7 $(2x)^2+4(2x)+7=4x^2+8x+7$

.8 $(2x)^2+5x=4x^2+5x$

.9 $(3x+2)^2=9x^2+12x+4$

.10 (a) $(-3)^2+5(-3)+4=9-15+4=-2$ (b) $(-3)^2-5(-3)+4=9+15+4=28$

(c) $(-3)^2+5(-3)=9-15=-6$

.11 $(y-3)^2=y^2-6y+9$

.12 $(z+5)^2=z^2+10z+25$

.13 $(2a+3b)(a-b)=2a^2+ab-3b^2$

.14 $(a+4)(a+2)=a^2+6a+8$

.15 $(a-4)(a-2)=a^2-6a+8$

.16 $\dfrac{3x^2}{3x^2}=1$

.17 $\dfrac{3x^2+1}{3x^2}=\dfrac{3x^2}{3x^2}+\dfrac{1}{3x^2}=1+\dfrac{1}{3x^2}$

.18 $\dfrac{3x}{3x+2}=\dfrac{3x}{3x+2}$

.19 $\dfrac{3}{4x+3}=\dfrac{3}{4x+3}$

.20 $\dfrac{4x+5}{4x}=\dfrac{4x}{4x}+\dfrac{5}{4x}=1+\dfrac{5}{4x}$

.21 $\dfrac{7x+5}{5}=\dfrac{7x}{5}+\dfrac{5}{5}=\dfrac{7x}{5}+1$

مشق 15.1

.1 (a) 36.5°C (b) دوپہر کے 12 بجے (c) دوپہر کے 1 بجے، دوپہر کے 2 بجے

(d) 36.5° C؛ دوپہر 1 بجے اور دوپہر 2 بجے تک کے درمیان x-محور پر واقع نقطہ دوپہر 1 بجے اور دوپہر 2 بجے کو دکھانے والے نقطوں سے متعلق ہے۔ اس لیے یہ دوپہر 1 بج کر 30 منٹ کا وقت دکھائے گا۔ اسی طرح y محور پر 36°C اور 37°C کے درمیان کا نقطہ 36.5°C کو دکھائے گا۔

(e) صبح 9 بجے سے صبح 10 تک، صبح 10 بجے سے صبح 11 بجے تک، دوپہر 2 بجے سے، دوپہر 3 بجے تک۔

.2 (i) (a) 4 کروڑ ₹ (ii) 8 کروڑ ₹

(i) (b) 7 کروڑ ₹ (ii) 8.5 کروڑ ₹ (تقریباً)

(c) 4 کروڑ ₹ (d) 2005

.3 (a) (i) 7 سینٹی میٹر (ii) 9 سینٹی میٹر

(b) (i) 7 سینٹی میٹر (ii) 10 سینٹی میٹر

(c) 2 سینٹی میٹر (d) 3 سینٹی میٹر (e) دوسرا ہفتہ (f) پہلا ہفتہ

(g) دوسرے ہفتہ کے آخر میں

.4 (a) منگل، جمعہ، اتوار (b) 35°C (c) 15°C (d) جمعرات

.6 (a) 4 اکائی=1 گھنٹہ (b) $3\frac{1}{2}$ گھنٹے (c) 22 کلومیٹر

(d) ہاں، یہ گراف کے افقی حصہ سے ظاہر ہوتا ہے (صبح 10 بجے سے صبح 10.30 بجے تک)

(e) صبح 8 بجے اور صبح 9 بجے کے درمیان

.7 (iii) ممکن نہیں ہے

مشق 15.2

.1 (a) اور (b) میں نقاط ایک خط پر واقع ہیں، (c) میں نقاط ایک خط پر واقع نہیں ہیں۔

.2 یہ خط x– محور کو (5,0) اور y– محور کو (0,5) پر قطع کرے گا

.3 O(0, 0), A(2, 0), B(2, 3), C(0, 3), P(4, 3), Q(6, 1), R(6, 5), S(4, 7), K(10, 5), L(7, 7), M(10, 8)

.4 (i) صحیح (ii) غلط (iii) صحیح

مشق 15.3

.1 (b) (i) 20 کلومیٹر (ii) صبح 7.30 (c) (i) ہاں (ii) ₹200 (iii) ₹3500

.2 (a) ہاں (b) نہیں

مشق 16.1

.1 A = 7, B = 6 .2 A = 5, B = 4, C = 1 .3 A = 6

.4 A = 2, B = 5 .5 A = 5, B = 0, C = 1 .6 A = 5, B = 0, C = 2

.7 A = 7, B = 4 .8 A = 7, B = 9 .9 A = 4, B = 7

.10 A = 8, B = 1

مشق 16.2

.1 $y = 1$ .2 $z = 0$ یا 9 .3 $z = 0, 3, 6$ یا 9

.4 0, 3, 6 یا 9

دلچسپی کے لیے

.1 فیثاغورین کے بارے میں کچھ اور

ہم فیثاغورین ثلاثہ کو لکھنے کا ایک طریقہ دیکھ چکے ہیں جو اس طرح ہے $2m, m^2 - 1, m^2 + 1$

ایک فیثاغورین ثلاثہ a,b,c کا مطلب $a^2 + b^2 = c^2$ ہے۔ اگر ہم دو طبعی اعداد m اور n کا استعمال کریں $(m > n)$ اور $a = m^2 - n^2, b = 2mn$ لیں

تو ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $c^2 = a^2 + b^2$ ہے۔

اس طرح $m > n$ کے ساتھ ہم m اور n کی مختلف قدروں کے لیے طبعی اعداد a,b,c ایسے بنا سکتے ہیں کہ وہ فیثاغورین ثلاثہ بنائیں۔

مثال کے طور پر : $m = 2, n = 1$ لیجیے۔

تب، $a = m^2 - n^2 = 3, b = 2mn = 4, c = m^2 + n^2 = 5$ ایک فیثاغورین ثلاثہ ہے (اس کی جانچ کیجیے!)

$m = 3, n = 2$ کے لیے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$a = 5, b = 12, c = 13$ جو دوبارہ ایک فیثاغورین ثلاثہ ہے،

m اور n کی کچھ اور قدریں لیجیے اور اس طرح کے اور زیادہ ثلاثے بنائیے۔

.2 جب پانی جمتا ہے تو اس کے حجم میں 4% کا اضافہ ہو جاتا ہے۔ 221 مکعب سینٹی میٹر برف بنانے کے لیے کتنے پانی کی ضرورت ہوگی؟

.3 اگر چائے کی قیمت 20% بڑھ جائے تو اس کی کھپت میں کتنے فی صد کمی کی جائے کہ اس پر ہونے والے خرچ میں کوئی اضافہ نہ ہو؟

.4 تقریبی اعزاز دینے کی شروعات 1958 میں ہوئی۔ اس وقت انعام جیتنے کے لیے 28 زمرے تھے۔ 1993 میں 81 زمرے ہو گئے۔

(i) 1958 میں دیے گئے انعاموں کی تعداد 1993 کے انعاموں کی تعداد کا کتنے فی صد ہے؟

(ii) 1993 میں دیے گئے انعاموں کی تعداد 1958 کے انعاموں کی تعداد کا کتنے فی صد ہے؟

5. بھنوروں کے جھنڈ میں $\frac{1}{15}$ حصہ کدنب کے پھول پر جا بیٹھا، $\frac{1}{3}$ سلندھری کے پھول پر اور ان دو اعداد کے فرق کا 3 گنا اڑ کر کٹج کے پھول پر جا بیٹھا۔ تب جھنڈ میں صرف دس بھنورے ہی رہ گئے۔ جھنڈ میں شروع میں کتنے بھنورے تھے؟ (دھیان دیجیے کہ کدنبہ سلندھری اور کٹج پھولوں کے پیڑ ہیں یہ سلسلہ ہندوستان میں الجبرہ کی پرانی کتاب سے لیا گیا ہے)۔

6. کسی مربع کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے شیکھر نے مربع کے رقبہ کا فارمولہ استعمال کیا، جب کہ اس کے دوست نے مربع کی پیائش کا فارمولہ استعمال کیا۔ دلچسپ بات یہ ہوئی کہ عددی اعتبار سے دونوں کے جوابات ایک ہی تھے۔ جس مربع کا رقبہ انھوں نے معلوم کیا اس کے ضلع کی اکائیوں کی تعداد بتائیے۔

7. ایک مربع کا رقبہ عددی طور پر اپنے ضلع کے 6 گنے سے کم ہے۔ ایسے کچھ مربعوں کی فہرست بنائیے جن میں ایسا ہوتا ہے۔

8. کیا یہ ممکن ہے کہ ایک قائم دائری اسطوانہ کا حجم عددی طور پر اس کی خمیدہ سطح کے رقبہ کے برابر ہوگا؟ اگر ہاں، تو بتائیے کب؟

9. لیلا نے اپنی یوم پیدائش پر کچھ دوستوں کو چائے پر مدعو کیا۔ اس کی ماں نے کھانے کی میز پر کچھ پلیٹیں اور کچھ پوریاں رکھ دیں۔ اگر لیلا ہر پلیٹ میں 4 پوریاں رکھتی ہے تو ایک پلیٹ خالی رہ جاتی ہے۔ اگر وہ ہر پلیٹ میں 3 پوریاں رکھتی ہے تو 1 پوری بچ جاتی ہے۔ میز پر رکھی ہوئی پلیٹوں اور پوریوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

10. کیا کوئی ایسا عدد ہے جو اپنے مکعب کے برابر ہے لیکن اپنے مربع کے برابر نہیں ہے؟ اگر ہاں، تو وہ عدد معلوم کیجیے۔

11. 1 سے 20 تک کے اعداد کو ایک قطار میں اس طرح لکھیے کہ کوئی دو متصل اعداد کا حاصل جمع ایک کامل مربع ہو۔

جواب

2. $212\frac{1}{2}$ کعب سینٹی میٹر

3. $16\frac{2}{3}\%$

4. (i) 34.5% (ii) 289%

5. 150

6. 4 اکائیاں

7. ضلع = 1, 2, 3, 4, 5 اکائیاں

8. ہاں جب نصف قطر = 2 اکائیاں

9. پوریوں کی تعداد =16، پلیٹوں کی تعداد = 5

10. -1

11. ایک طریقہ یہ ہے 8 ,17 ,19 ,6 ,3 ,1 (1+3=4، 3+6=9 وغیرہ)۔ اسی طرح کچھ اور طریقوں کا استعمال کر کے کوشش کیجیے۔