ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ / 1219 / 981 / છ, તા. 31-01-2020–થી મંજૂર

ગણિત
નમૂનારૂપ પ્રશ્નો

ધોરણ XII

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

કિંમત : ₹ 160.00

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
શ્રી રાજીવ એસ. ચોક્સી
શ્રી મૃગેશ બી. પારેખ
શ્રી ભદ્રેશ જે. ભટ્ટ

સમીક્ષા

શ્રી નવરોજ બી. ગાંગાણી
શ્રી પ્રદિપ એન. જોષી
શ્રી પરિમલ બી. પુરોહિત
શ્રી પોપટલાલ પી. પટેલ
શ્રી ભાવેશ એ. પાઠક
શ્રી બિરેનકુમાર ટી. ટેલર

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી વિજય ટી. પારેખ

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-સંયોજન

શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા તા. 25-10-2017ના ઠરાવ ક્રમાંક મશભ/1217/1036/છ થી શાળા કક્ષાએ NCERTના પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્લી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ XII**ના **ગણિત** વિષયના **Exemplar Problems** પુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ **નમૂનારૂપ પ્રશ્નો** વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ નમૂનારૂપ પ્રશ્નોનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પુસ્તકને પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલા આ પુસ્તકની મંજૂરી માટે એક રાજ્ય સ્તરની સમિતિની રચના કરવામાં આવી. આ સમિતિની સાથે NCERTના પ્રતિનિધિ તરીકે RIE, ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની સાથે એક દ્વિદિવસીય કાર્યશિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું, જેમાં ડૉ. એ. પી. શાહ, શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ, શ્રી રાજીવ ચોક્સી, શ્રી મૃગેશ પારેખ, શ્રી ભદ્રેશ ભટ્ટ, શ્રી પ્રદિપ એન. જોષી, શ્રી નવરોજ ગાંગાણી, શ્રી ભાવેશ પાઠક, ડૉ. અશ્વનીકુમાર ગર્ગ (RIE, ભોપાલ), ડૉ. સુરેશ મકવાણા (RIE, ભોપાલ)એ ઉપસ્થિત રહી પોતાના કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરા પાડ્યા છે. પ્રસ્તુત પુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવામાં આવી છે. તેમ છતાં, શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્લીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

પી. ભારતી (IAS)
નિયામક
તા. 28-05-2020

કાર્યવાહક પ્રમુખ
ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2020

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી પી. ભારતી, નિયામક

મુદ્રક :

ભારતનું બંધારણ

ભાગ IV A (કલમ 51 A)

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજો નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની, તેના આદર્શો અને સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો તથા રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતના સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓનાં ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને તેની સુધારણા કરવાની અને જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની;

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવાની.

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF) – 2005 initiated a new phase of development of syllabi and textbooks for all stages of school education. Conscious effort has been made to discourage rote learning and to diffuse sharp boundaries between different subject areas. This is well in tune with the NPE – 1986 and Learning Without Burden- 1993 that recommend child centred system of education. The textbooks for Classes IX and XI were released in 2006 and for Classes X and XII in 2007. Overall the books have been well received by students and teachers.

NCF–2005 notes that treating the prescribed textbooks as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. It further reiterates that the methods used for teaching and evaluation will also determine how effective these textbooks proves for making children's life at school a happy experience, rather than source of stress or boredom. It calls for reform in examination system currently prevailing in the country.

The position papers of the National Focus Groups on Teaching of Science, Teaching of Mathematics and Examination Reform envisage that the mathematics question papers, set in annual examinations conducted by the various Boards do not really assess genuine understanding of the subjects. The quality of question papers is often not up to the mark. They usually seek mere information based on rote memorization, and fail to test higher-order skills like reasoning and analysis, let along lateral thinking, creativity, and judgment. Good unconventional questions, challenging problems and experiment-based problems rarely find a place in question papers. In order to address to the issue, and also to provide additional learning material, the Department of Education in Science and Mathematics (DESM) has made an attempt to develop resource book of exemplar problems in different subjects at secondary and higher-secondary stages. Each resource book contains different types of questions of varying difficulty level. Some questions would require the students to apply simultaneously understanding of more than one chapters/units. These problems are not meant to serve merely as question bank for examinations but are primarily meant to improve the quality of teaching/learning process in schools. It is expected that these problems would encourage teachers to design quality questions on their own. Students and teachers should always keep in mind that examination and assessment should test comprehension, information recall, analytical thinking and problem-solving ability, creativity and speculative ability.

A team of experts and teachers with an understanding of the subject and a proper role of examination worked hard to accomplish this task. The material was discussed, edited and finally included in this source book.

NCERT will welcome suggestions from students, teachers and parents which would help us to further improve the quality of material in subsequent editions.

Professor Yash Pal
Chairperson
National Steering Committee
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
21 May 2008

Preface

The Department of Education in Science and Mathematics (DESM), National Council of Educational Research and Training (NCERT), initiated the development of 'Exemplar Problems' in science and mathematics for secondary and higher secondary stages after completing the preparation of textbooks based on National Curriculum Framework–2005.

The main objective of the book on 'Exemplar Problems in Mathematics' is to provide the teachers and students a large number of quality problems with varying cognitive levels to facilitate teaching learning of concepts in mathematics that are presented through the textbook for Class XII. It is envisaged that the problems included in this volume would help the teachers to design tasks to assess effectiveness of their teaching and to know about the achievement of their students besides facilitating preparation of balanced question papers for unit and terminal tests. The feedback based on the analysis of students' responses may help the teachers in further improving the quality of classroom instructions. In addition, the problems given in this book are also expected to help the teachers to perceive the basic characteristics of good quality questions and motivate them to frame similar questions on their own. Students can benefit themselves by attempting the exercises given in the book for self assessment and also in mastering the basic techniques of problem solving. Some of the questions given in the book are expected to challenge the understanding of the concepts of mathematics of the students and their ability to applying them in novel situations.

The problems included in this book were prepared through a series of workshops organised by the DESM for their development and refinement involving practicing teachers, subject experts from universities and institutes of higher learning, and the members of the mathematics group of the DESM whose names appear separately. We gratefully acknowledge their efforts and thank them for their valuable contribution in our endeavour to provide good quality instructional material for the school system.

I express my gratitude to Professor Krishna Kumar, Director and Professor

G. Ravindra, Joint Director, NCERT for their valuable motivation and guidiance from time to time. Special thanks are also due to Dr. V. P. Singh, Reader in Mathematics, DESM for coordinating the programme, taking pains in editing and refinement of problems and for making the manuscript pressworthy.

We look forward to feedback from students, teachers and parents for further improvement of the contents of this book.

Hukum Singh
Professor and Head
DESM, NCERT
New Delhi

Development Team
Exemplar Problems – Mathematics

Members

D.R. Sharma, *Vice Principal*, J.N.V. Mouli, Panchkula, Chandigarh

Hukum Singh, *Professor and Head,* DESM, NCERT, New Delhi

J.C. Nijhawan, *Principal* (*Retd.*), Directorate of Education, Delhi

P. K. Jain, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics Delhi University, Delhi

P.K. Chaurasia, *Lecturer*, DESM, NCERT, New Delhi

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT, New Delhi

R.P. Maurya, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

Rahul Sofat, *Lecturer*, Airforce Golden Jubilee Institute, Subroto Park, New Delhi

Reeta Oze, *H.O.D*, Mathematics Section, Army Public School, Dhaula Kuan, New Delhi

Sangeet Arora, *P.G.T.* Apeejay School, Saket, New Delhi

Sunil Bajaj, *Head Mathematics Section,* SCERT, Haryana, Gurgaon,

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, DESM, NCERT, New Delhi

Member - Coordinator

V.P. Singh, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

Acknowledgement

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Exemplar Problems Workshop:

Ashok Kumar.V, PGT, Kendriya Vidyalaya No. 1, Panambur Mangalore, Karnataka; T.Sudha Rani, PGT, J.N.V. Pedavegi, West Godavari District (A.P.); Dinesh Dhingra, PGT, Delhi Public School Vasundhara Ghaziabad (U.P.); Rajpal Singh, Lecturer, Rajkiya Pratibha Vikas Vidyalaya, Gandhi Nagar, Delhi; Dinesh Sharma, PGT, Navyug School, Lodhi Road, New Delhi; Anil Kumar Mishra, Lecturer, S.S.B.L. Inter College Deoria (U.P.); C.Gurumurthy, Director Academic Rouse Avenue CBSE, New Delhi, Quddus Khan, Lecturer, Shibli National College, Azamgarh (U.P.); G.D. Dhall, Reader (Retd.) DESM, NCERT, New Delhi and S.N.Yadav, PGT (Retd.), K.V. Andrewsganj, New Delhi.

Special thanks are due to Professor Hukum Singh, Head, DESM, NCERT for his support during the development of this book.

The Council also acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, Incharge, Computer Station; Rakesh Kumar, Surender Kumar and Mrs. Praveen, DTP Operators; Abhimanyu Mohanty, Proof Reader.

The contribution of APC Office, Administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

અનુક્રમણિકા

પ્રકરણ **1**

સંબંધ અને વિધેય

1.1 વિહંગાવલોકન

1.1.1 સંબંધ

શૂન્યેતર ગણ A થી શૂન્યેતર ગણ B ના કાર્તેઝિય ગુણાકાર $A \times B$ ના કોઈ પણ ઉપગણને સંબંધ R કહે છે. ગણ A થી ગણ B પરના સંબંધ R ની ક્રમયુક્ત જોડના બધા જ પ્રથમ ઘટકોના ગણને સંબંધ R નો પ્રદેશ કહે છે તથા ગણ A થી ગણ B ના સંબંધ R ની ક્રમયુક્ત જોડના તમામ બીજા ઘટકોના ગણને R નો વિસ્તાર કહેવામાં આવે છે. ગણ B ને સંબંધ R નો સહપ્રદેશ કહે છે. વિસ્તાર એ હંમેશાં સહપ્રદેશનો ઉપગણ છે તેવું આપણે નોંધીશું.

1.1.2 સંબંધોના પ્રકાર

ગણ A પરનો સંબંધ R એ $A \times A$ નો ઉપગણ છે. તેથી ખાલીગણ ϕ અને $A \times A$ આત્યંતિક સંબંધો છે.

(i) જો A નો કોઈ પણ ઘટક A ના કોઈ પણ ઘટક સાથે સંબંધિત ન હોય, તો ગણ A પરના સંબંધ R ને **ખાલી સંબંધ** કહેવાય છે. અર્થાત્ $R = \phi \subset (A \times A)$ ખાલી સંબંધ છે.

(ii) જો A નો પ્રત્યેક ઘટક A ના પ્રત્યેક ઘટક સાથે સંબંધિત હોય, તો ગણ A પરના સંબંધ R ને **સાર્વત્રિક સંબંધ** કહેવાય છે. અર્થાત્ $R = A \times A$ સાર્વત્રિક સંબંધ છે.

(iii) જો પ્રત્યેક $a \in A$ માટે aRa થાય, તો A પરનો સંબંધ R **સ્વવાચક સંબંધ** છે તેમ કહેવાય.

જો $\forall a, b \in A$, $aRb \Rightarrow bRa$ તો R ને **સંમિત સંબંધ** કહેવામાં આવે છે અને

$\forall a, b, c \in A$, aRb અને $bRc \Rightarrow aRc$ તો સંબંધ R **પરંપરિત સંબંધ** છે તેમ કહેવાય.

જો કોઈ પણ સંબંધ સ્વવાચક, સંમિત તથા પરંપરિત હોય, તો તેને **સામ્ય સંબંધ** કહે છે.

નોંધ : સામ્ય સંબંધનો અગત્યનો ગુણધર્મ એ છે કે, તે ગણને સામ્યવર્ગ તરીકે ઓળખાતા જોડયુક્ત અલગ ઉપગણોમાં વિભાજિત કરે છે. પ્રત્યેક સમૂહને ગણનો ભાગ કહેવાય છે. નોંધીએ કે તમામ સામ્યવર્ગોનો યોગગણ સંપૂર્ણ ગણ દર્શાવે છે. સામ્યગણનો પ્રત્યેક ઘટક તે સામ્યગણના કોઈ પણ ઘટક સાથે સંબંધ R ધરાવે છે અને અન્ય કોઈ પણ સામ્યગણના કોઈ પણ ઘટક સાથે સંબંધ R ધરાવતો નથી.

1.1.3 વિધેયોના પ્રકારો

(i) જો X ના ભિન્ન ઘટકોનાં f આધારિત પ્રતિબિંબો ભિન્ન હોય, તો વિધેય $f : X \to Y$ ને **એક-એક વિધેય** કહેવાય છે. અર્થાત્ જો $\forall x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ તો $f : X \to Y$ એક-એક વિધેય છે.

(ii) જો Y નો પ્રત્યેક ઘટક એ X ના કોઈક ઘટકનું f આધારિત પ્રતિબિંબ હોય અર્થાત્ પ્રત્યેક $y \in Y$ ને અનુરૂપ કોઈક $x \in X$ એવો મળે કે જેથી $f(x) = y$ થાય, તો વિધેય $f : X \to Y$ ને **વ્યાપ્ત વિધેય** કહેવાય.

(iii) જો વિધેય $f : X \to Y$ એક-એક અને વ્યાપ્ત બંને વિધેય હોય, તો તેને એક-એક વ્યાપ્ત વિધેય કહેવાય.

1.1.4 સંયોજિત વિધેય

(i) ધારો કે $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ બે વિધેયો છે. f અને g નું **સંયોજિત વિધેય** gof દ્વારા દર્શાવાય છે. તેને $gof : A \to C$ દ્વારા દર્શાવાય છે અને તે $(gof)(x) = g(f(x)), \forall x \in A$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરાય છે.

(ii) જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ એક-એક વિધેય હોય, તો $gof : A \to C$ પણ એક-એક વિધેય છે.

(iii) જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો $gof : A \to C$ પણ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ઉપરનાં વિધાનોનું પ્રતીપ સત્ય ના પણ હોય. જોકે આ દિશામાં નીચેનાં પરિણામો મળે છે.

(iv) જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ આપેલ વિધેયો હોય અને gof એક-એક વિધેય હોય, તો f પણ એક-એક વિધેય છે.

(v) જો $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ આપેલ વિધેયો હોય અને gof વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો g પણ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

1.1.5 પ્રતિવિધેય

(i) $f : X \to Y$ વિધેય છે. જો કોઈ વિધેય $g : Y \to X$ એવું અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $gof = I_X$ અને $fog = I_Y$ થાય, તો વિધેય f ને **વ્યસ્તસંપન્ન વિધેય** કહેવાય. g ને f નું **પ્રતિવિધેય** કહેવાય છે અને તેને f^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

(ii) જો f એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય હોય, તો અને તો જ $f : X \to Y$ નું પ્રતિવિધેય વિધેય મળે.

(iii) જો $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ અને $h : Z \to S$ વિધેયો હોય, તો $ho(gof) = (hog)of$.

(iv) જો $f : X \to Y$ અને $g : Y \to Z$ વ્યસ્તસંપન્ન વિધેયો હોય, તો gof પણ વ્યસ્તસંપન્ન વિધેય છે. $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

1.1.6 દ્વિક્ક્રિયાઓ

(i) વિધેય $* : A \times A \to A$ એ A પરની દ્વિક્ક્રિયા સૂચવે છે. આપણે $*(a, b)$ ને $a * b$ દ્વારા દર્શાવીએ છીએ.

(ii) જો પ્રત્યેક $a, b \in X$ માટે, $a * b = b * a$ હોય, તો ગણ X પરની દ્વિક્ક્રિયા $*$ ને **સમક્રમી દ્વિક્ક્રિયા** કહે છે.

(iii) પ્રત્યેક $a, b, c \in A$ માટે જો $(a * b) * c = a * (b * c)$ હોય, તો દ્વિક્ક્રિયા $* : A \times A \to A$ **જૂથના નિયમ**નું પાલન કરે છે એમ કહેવાય.

(iv) આપેલ દ્વિક્ક્રિયા $* : A \times A \to A$ માટે એવો ઘટક $e \in A$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $a * e = a = e * a$, $\forall a \in A$ તો e ને $*$ નો **તટસ્થ ઘટક** કહેવાય છે.

(v) આપેલ દ્વિક્ક્રિયા $* : A \times A \to A$ તથા A ના તટસ્થ ઘટક e માટે, જો A માં કોઈક ઘટક b એવો અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $a * b = e = b * a$ તો b ને $*$ ને સાપેક્ષ a નો વ્યસ્ત ઘટક કહે છે અને તેને a^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

1.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : $A = \{0, 1, 2, 3\}$ અને A પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R નીચે પ્રમાણે છે :

$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$.

શું R સ્વવાચક છે ? સંમિત છે ? પરંપરિત છે ?

ઉકેલ : R સ્વવાચક અને સંમિત છે, પરંતુ પરંપરિત નથી. કારણ કે $(1, 0) \in R$ અને $(0, 3) \in R$ પરંતુ $(1, 3) \notin R$.

ઉદાહરણ 2 : ગણ A = {1, 2, 3} પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R નીચે પ્રમાણે છે :

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)}.

R ને સમાવતો એવો સામ્ય સંબંધ શોધો જે નાનામાં નાનો હોય એટલે કે R ને સમાવતા કોઈ પણ સામ્યસંબંધનો ઉપગણ હોય.

ઉકેલ : એકાકી ક્રમયુક્ત જોડ (3, 1) ને R માં ઉમેરતાં ફલિત સંબંધ સૌથી નાનો સામ્ય સંબંધ બને.

ઉદાહરણ 3 : R = {(a, b) : $a - b$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.} **Z** પરનો સામ્ય સંબંધ છે.

[0] નો સામ્ય વર્ગ લખો.

ઉકેલ : [0] = {0, ± 2, ± 4, ± 6,...}

ઉદાહરણ 4 : વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 4x - 1, \forall x \in \mathbf{R}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, દર્શાવો કે f એક-એક છે.

ઉકેલ : કોઈ પણ બે ઘટકો $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ માટે,

$$
\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 4x_1 - 1 = 4x_2 - 1 \\
&\Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \\
&\Rightarrow x_1 = x_2
\end{aligned}
$$

તેથી, f એક-એક છે.

ઉદાહરણ 5 : જો f = {(5, 2), (6, 3)}, g = {(2, 5), (3, 6)} હોય, તો fog લખો.

ઉકેલ : fog = {(2, 2), (3, 3)}

ઉદાહરણ 6 : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 4x - 3 \ \forall x \in \mathbf{R}$ વિધેય છે, તો f^{-1} શોધો.

ઉકેલ : આપેલ $f(x) = 4x - 3 = y$ (ધારીએ). હવે,

$$
\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 4x_1 - 3 = 4x_2 - 3 \\
&\Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \\
&\Rightarrow x_1 = x_2
\end{aligned}
$$

આથી, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એક-એક વિધેય છે.

ધારો કે, $x = \frac{y+3}{4}$, તો પ્રત્યેક $y \in \mathbf{R}$ માટે $x \in \mathbf{R}$ મળે.

જેથી, $f(x) = 4\left(\frac{y+3}{4}\right) - 3 = y$

$\therefore$ f વ્યાપ્ત પણ છે.

આથી, $y = f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}$

ઉદાહરણ 7 : **Z** પર વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા $*$ માટે $m * n = m - n + mn, \forall m, n \in \mathbf{Z}$ સમક્રમી છે ?

ઉકેલ : ના, $1, 2 \in \mathbf{Z}$ છે.

$1 * 2 = 1 - 2 + 1 \cdot 2 = 1$

જ્યારે $2 * 1 = 2 - 1 + 2 \cdot 1 = 3$

આથી, $1 * 2 \neq 2 * 1$.

ઉદાહરણ 8 : જો f = {(5, 2), (6, 3)} અને g = {(2, 5), (3, 6)} હોય, તો f અને g નો વિસ્તાર લખો.

ઉકેલ : f નો વિસ્તાર = {2, 3} અને g નો વિસ્તાર = {5, 6}.

ઉદાહરણ 9 : જો A = {1, 2, 3} અને નીચે દર્શાવેલ f અને g એ ઉપગણ A × A ના સંબંધો દર્શાવે છે. f તથા g પૈકી કોઈ વિધેય છે ? શા માટે ?

$f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$

$g = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$

ઉકેલ : f વિધેય છે. કારણ કે fની ક્રમયુક્ત જોડમાં આવેલ પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડનો પ્રથમ સ્થાનનો ઘટક એક અને માત્ર એક વખત A ના કોઈક ઘટક સાથે સંકળાય છે.

જ્યારે g એ વિધેય નથી. કારણ કે, 1 એ A ના એક કરતાં વધુ ઘટક 2 અને 3 સાથે સંગત છે.

ઉદાહરણ 10 : A = $\{a, b, c, d\}$ અને $f = \{a, b), (b, d), (c, a), (d, c)\}$. દર્શાવો કે f એ A થી A પર એક-એક છે. f^{-1} શોધો.

ઉકેલ : f એક-એક છે. કારણ કે, $f(a), f(b), f(c), f(d)$ ચારેય b, d, a, c ભિન્ન છે. વધુમાં, f વ્યાપ્ત છે. $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$. ઉપરાંત, $f^{-1} = \{(b, a), (d, b), (a, c), (c, d)\}$.

ઉદાહરણ 11 : પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણ **N** પર વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા $*$ માટે $m * n = g.c.d\ (m, n)$, $m, n \in \mathbf{N}$. $*$ સમક્રમી છે અને જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ?

ઉકેલ : $*$ સ્પષ્ટ રીતે સમક્રમી છે.

$$m * n = g.c.d.\ (m, n) = g.c.d.\ (n, m) = n * m, \quad \forall m, n \in \mathbf{N}.$$

તે જૂથના નિયમનું પણ પાલન કરે છે. કારણ કે, આપણી પાસે $l, m, n \in \mathbf{N}$ માટે,

$$\begin{aligned} l * (m * n) &= g.c.d.\ (l, g.c.d.\ (m, n)) \\ &= g.c.d.\ (g.c.d.\ (l, m), n) \\ &= (l * m) * n. \end{aligned}$$

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 12 : પ્રાકૃતિક સંખ્યાના ગણ **N** પર સંબંધ R નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

જો પૂર્ણાંકો n અને m ને 5 વડે ભાગતાં મળતી શેષ 5 થી ઓછી અને અનૃણ અને સમાન હોય, તો $\forall n, m \in \mathbf{N}$, $n\mathrm{R}m$ (અર્થાત્ 0, 1, 2, 3 અને 4 નંબરો પૈકી કોઈ એક.) દર્શાવો કે R એ સામ્ય સંબંધ છે તથા R દ્વારા નિર્ધારિત જોડયુક્ત પરસ્પર અલગ ઉપગણો મેળવો.

ઉકેલ : ભાગ પ્રમેય દ્વારા $r = 0, 1, 2, 3, 4$ પૈકી અનન્ય પૂર્ણાંક માટે $n = 5k + r$. આપણે કહીએ છીએ કે, $n \equiv r \pmod 5$, $m \equiv r \pmod 5$

R સ્વવાચક છે. પ્રત્યેક $a \in \mathbf{N}$ માટે $a\mathrm{R}a$, કારણ કે $a - a = 0$ એ 5 વડે વિભાજ્ય છે.

R સંમિત છે. જો $a\mathrm{R}b$, તો $b\mathrm{R}a$, $a, b \in \mathbf{N}$, કારણ કે $a - b$ એ 5 વડે વિભાજ્ય હોય, તો $b - a$ પણ 5 વડે વિભાજ્ય છે.

વળી, R પરંપરિત છે. $a, b, c \in \mathbf{N}$ માટે જો $a\mathrm{R}b$ અને $b\mathrm{R}c$, તો $a\mathrm{R}c$.

5 વડે $a - b$ તથા $b - c$ વિભાજ્ય હોય, તો $a - b + b - c = a - c$ પણ 5 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, R એ **N** માં સામ્ય સંબંધ છે. તેને જોડયુક્ત ભિન્ન ઉપગણોમાં વિભાજિત કરી શકાય છે. સામ્ય વર્ગો નીચે પ્રમાણે છે :

$A_0 = \{5, 10, 15, 20, ...\}$

$A_1 = \{1, 6, 11, 16, 21, ...\}$

$A_2 = \{2, 7, 12, 17, 22, ...\}$

$A_3 = \{3, 8, 13, 18, 23, ...\}$

$A_4 = \{4, 9, 14, 19, 24, ...\}$

અહીં સ્પષ્ટ છે કે ઉપર્યુક્ત 5 ગણ જોડયુક્ત પરસ્પર અલગ છે અને

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \bigcup_{i=0}^{4} A_i = \mathbf{N}.$$

ઉદાહરણ 13 : દર્શાવો કે $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય, એક-એક નથી તથા વ્યાપ્ત પણ નથી.

ઉકેલ : $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ માટે,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2+1} = \frac{x_2}{x_2^2+1}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2^2 + x_1 = x_2 x_1^2 + x_2$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 (x_2 - x_1) = x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ અથવા } x_1 x_2 = 1$$

આપણે નોંધીએ કે $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$ અને $f(x_1) = f(x_2)$ શક્ય છે.

ઉદાહરણ તરીકે જો આપણે $x_1 = 2$ અને $x_2 = \dfrac{1}{2}$ લઈએ, તો આપણને $f(x_1) = \dfrac{2}{5}$ અને $f(x_2) = \dfrac{2}{5}$ મળે. પરંતુ, $2 \neq \dfrac{1}{2}$.

આથી, f એક-એક નથી. વળી, f વ્યાપ્ત નથી. જો $1 \in \mathbf{R}$ ને સંગત $\exists\, x \in \mathbf{R}$, જેથી, $f(x) = 1$, તો $\dfrac{x}{x^2+1} = 1$.

પરંતુ, પ્રદેશ $\mathbf{R}$ માંથી એવો કોઈ પણ x ન મળે કે જેથી $x^2 - x + 1 = 0$ નું વાસ્તવિક મૂલ્ય મળે.

ઉદાહરણ 14 : $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x| + x$ અને $g(x) = |x| - x$, $\forall x \in \mathbf{R}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત બે વિધેયો છે, તો fog અને gof શોધો.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = |x| + x$ ને પુનઃવ્યાખ્યાયિત કરતાં,

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{જો } x \geq 0 \\ 0 & \text{જો } x < 0 \end{cases}$$

$g(x) = |x| - x$ ને પુનઃવ્યાખ્યાયિત કરતાં,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{જો } x \geq 0 \\ -2x & \text{જો } x < 0 \end{cases}$$

gof નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય.

જો $x \geq 0$, તો $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 0$ અને

જો $x < 0$, તો $(gof)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$.

પરિણામે, આપણને $\forall x \in \mathbf{R}$, $(gof)(x) = 0$ મળે.

આ જ પ્રમાણે, fog વ્યાખ્યાયિત થાય.

જો $x \geq 0$, તો $(fog)(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$ અને

જો $x < 0$, તો $(fog)(x) = f(g(x)) = f(-2x) = -4x$.

અર્થાત્ $(fog)(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -4x, & x < 0 \end{cases}$

ઉદાહરણ 15 : $\mathbf{R}$ વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ છે. વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x + 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે, f નો વ્યસ્ત મળશે. f^{-1} શોધો.

ઉકેલ : અહીં વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x + 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

ધારો કે, $f(x) = 4x + 5 = y$

એટલે કે, $4x = y - 5$ અથવા $x = \frac{y-5}{4}$.

અહીં, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(y) = \frac{y-5}{4}$ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

આથી, $(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(4x + 5)$

$= \frac{4x+5-5}{4} = x$

અથવા $gof = I_{\mathbf{R}}$

તે જ પ્રમાણે, $(fog)(y) = f(g(y))$

$= f\left(\frac{y-5}{4}\right)$

$= 4\left(\frac{y-5}{4}\right) + 5 = y$

અથવા $fog = I_{\mathbf{R}}$.

આથી, f નો વ્યસ્ત મળે છે અને $f^{-1} = g$ લેતાં,

$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{4}$ દ્વારા દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ 16 : નીચે પ્રત્યેકમાં $*$ એ $\mathbf{Q}$ પર વ્યાખ્યાયિત એક દ્વિક્રિયા છે. નીચે આપેલ પૈકી કઈ દ્વિક્રિયા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ?

(i) $a * b = a - b$, $a, b \in \mathbf{Q}$.

(ii) $a * b = \frac{ab}{4}$, $a, b \in \mathbf{Q}$.

(iii) $a * b = a - b + ab$, $a, b \in \mathbf{Q}$.

(iv) $a * b = ab^2$, $a, b \in \mathbf{Q}$.

ઉકેલ :

(i) જો આપણે $a = 1$, $b = 2$ અને $c = 3$ લઈએ, તો $*$ દ્વારા જૂથના નિયમનું પાલન થતું નથી તેમ સિદ્ધ થાય. જેમ કે, $(a * b) * c = (1 * 2) * 3 = (1 - 2) * 3 = -1 - 3 = -4$ અને $a * (b * c) = 1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3) = 1 - (-1) = 2$.

આથી, $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ અને તેથી $*$ દ્વારા જૂથના નિયમનું પાલન થતું નથી.

(ii) ગુણાકાર માટે $\mathbf{Q}$ માં જૂથના નિયમનું પાલન થતું હોવાથી, $*$ જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

(iii) $*$ દ્વારા જૂથના નિયમનું પાલન થતું નથી, કારણ કે, જો $a = 2$, $b = 3$ અને $c = 4$ હોય, તો

$$
\begin{aligned}
(a * b) * c &= (2 * 3) * 4 \\
&= (2 - 3 + 6) * 4 \\
&= 5 * 4 \\
&= 5 - 4 + 20 \\
&= 21 \\
a * (b * c) &= 2 * (3 * 4) \\
&= 2 * (3 - 4 + 12) \\
&= 2 * 11 \\
&= 2 - 11 + 22 \\
&= 13
\end{aligned}
$$

આથી, $(a * b) * c \neq a * (b * c)$

(iv) $*$ દ્વારા જૂથના નિયમનું પાલન થતું નથી, કારણ કે, જો $a = 1$, $b = 2$ અને $c = 3$, તો

$(a * b) * c = (1 * 2) * 3 = 4 * 3 = 4 \times 9 = 36$ અને

$a * (b * c) = 1 * (2 * 3) = 1 * 18 = 1 \times 18^2 = 324.$

આથી, $(a * b) * c \neq a * (b * c)$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 17 થી 24 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 17 : પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણ $\mathbf{N}$ પર સંબંધ R આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે. જો m એ n વડે વિભાજ્ય હોય, તો nRm દ્વારા વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R ....

(A) સ્વવાચક અને સંમિત (B) પરંપરિત અને સંમિત

(C) સામ્ય સંબંધ (D) સ્વવાચક, પરંપરિત પરંતુ સંમિત નહિ.

ઉકેલ : n એ n વડે વિભાજ્ય છે, $\forall n \in \mathbf{N}$. આથી R સ્વવાચક છે. 3, 6 $\in \mathbf{N}$ તથા 3 વડે 6 વિભાજ્ય છે. પરંતુ 3 એ 6 વડે વિભાજ્ય નથી. આથી, ${}_6R_3$ સત્ય નથી. આથી, R સંમિત નથી. (ઉત્તર D નક્કી થઈ ગયો!) $n, m, r \in \mathbf{N}$, $n | m$ અને $m | r \Rightarrow n | r$, તેથી R પરંપરિત છે. અર્થાત્ n એ m વડે વિભાજ્ય હોય અને m એ r વડે વિભાજ્ય હોય, તો n એ r વડે વિભાજ્ય હોય જ.

સાચો વિકલ્પ (D) છે.

ઉદાહરણ 18 : L સમતલમાં આવેલી રેખાઓનો ગણ દર્શાવે છે. R પરનો સંબંધ આ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે. જો l એ m ને લંબ હોય, તો ${}_lR_m$. આ સંબંધ ....

(A) સ્વવાચક છે. (B) સંમિત છે.

(C) પરંપરિત છે. (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : આ સંબંધ સ્વવાચક નથી, કારણ કે, $l \perp l$ નથી. $l \perp m$ તો $m \perp l$ છે. આથી, તે સંમિત છે. $l \perp m$ તથા $m \perp p$, તો $l = p$ અથવા $l \parallel p$. આથી, પરંપરિત નથી.

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 19 : $\mathbf{N}$ પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણ છે અને વિધેય $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = 2n + 3$, $\forall n \in \mathbf{N}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. આથી, f એ ....

(A) વ્યાપ્ત છે. (B) એક-એક છે.

(C) એક-એક અને વ્યાપ્ત છે. (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 + 3 = 2n_2 + 3 \Rightarrow n_1 = n_2$. આથી f એક-એક છે. તેનો વિસ્તાર $\{5, 7, 9, 11...\} \neq$ N. આથી તે વ્યાપ્ત નથી.

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 20 : ગણ A માં 3 સભ્યો છે. ગણ B માં 4 સભ્યો છે. A થી B પર વ્યાખ્યાયિત એક-એક વિધેયની સંખ્યા .... છે.

(A) 144 (B) 12 (C) 24 (D) 64

ઉકેલ : A માં 3 સભ્યો તથા B માં 4 સભ્યો હોય, તો A થી B પર વ્યાખ્યાયિત એક-એક વિધેયોની સંખ્યા $^4P_3 = 4! = 24$.

સાચો વિકલ્પ (C) છે.

ઉદાહરણ 21 : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$ અને $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો fog = ...

(A) $x^2 \sin x$ (B) $(\sin x)^2$ (C) $\sin x^2$ (D) $\frac{\sin x}{x^2}$

ઉકેલ : $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin x^2$

સાચો વિકલ્પ (C) છે.

ઉદાહરણ 22 : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 4$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો $f^{-1}(x)$ = ...

(A) $\frac{x+4}{3}$ (B) $\frac{x}{3} - 4$

(C) $3x + 4$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $y = 3x - 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$ (f એક-એક તથા વ્યાપ્ત છે.)

સાચો વિકલ્પ (A) છે.

ઉદાહરણ 23 : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. 17 અને –3 ના પૂર્વ પ્રતિબિંબના ગણ અનુક્રમે .... છે.

(A) $\phi, \{4, -4\}$ (B) $\{3, -3\}, \phi$ (C) $\{4, -4\}, \phi$ (D) $\{4, -4\}, \{2, -2\}$

ઉકેલ : $f^{-1}(17) = x \Rightarrow f(x) = 17$

$\Rightarrow x^2 + 1 = 17$

$\Rightarrow x = \pm 4$

$\therefore f^{-1}(17) = \{4, -4\}$ અને

$f^{-1}(-3) = x \Rightarrow f(x) = -3$

$\Rightarrow x^2 + 1 = -3$

$\Rightarrow x^2 = -4$, જે અશક્ય છે.

આથી, $f^{-1}(-3) = \phi$

સાચો વિકલ્પ (C) છે.

ઉદાહરણ 24 : જો વાસ્તવિક સંખ્યા x, y માટે સંબંધ xRy વ્યાખ્યાયિત હોય, તો અને તો જ $x - y + \sqrt{2}$ અસંમેય છે. તો R ....

(A) સ્વવાચક (B) સંમિત

(C) પરંપરિત (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $x - x + \sqrt{2} = \sqrt{2}$ અસંમેય છે.

સાચો વિકલ્પ (A) છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 25 થી 29 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 25 : ગણ A = {1, 2, 3} નો વિચાર કરો અને R એ A પર સૌથી નાનો સામ્ય સંબંધ છે. R = ...

ઉકેલ : R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}.

ઉદાહરણ 26 : f : **R** → **R**, $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેયનો શક્ય મહત્તમ પ્રદેશ .... છે. (i.e. એવો પ્રદેશ કે જેથી અન્ય શક્ય પ્રદેશ તેનો ઉપગણ થાય.)

ઉકેલ : અહીં, $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ આવશ્યક હોવાથી,

$$(x - 1)(x - 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x \leq 1 \text{ અથવા } x \geq 2$$

તેથી f નો પ્રદેશ = $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

ઉદાહરણ 27 : n ઘટકોવાળા ગણ A નો વિચાર કરો તો, A થી A પર વ્યાખ્યાયિત એક-એક વિધેયોની કુલ સંખ્યા .... છે.

ઉકેલ : $n!$

ઉદાહરણ 28 : **Z** પૂર્ણાંકોનો ગણ છે અને **Z** પરના સંબંધ R માટે, જો $a - b$ એ 3 દ્વારા વિભાજ્ય હોય, તો aRb છે. હવે **R** એ **Z** ને .... જોડયુક્ત અલગ-અલગ ઉપગણોમાં વિભાજિત કરે.

ઉકેલ : {0, ±3, ±6,...}, {±1, ±4,...}, {±2, ±5,...}, ત્રણ

ઉદાહરણ 29 : **R** એ વાસ્તવિક સંખ્યાનો ગણ છે અને * એ **R** પર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા છે $a * b = a + b - ab \quad \forall a, b \in$ **R** તો દ્વિક્રિયા * ને અનુલક્ષીને તટસ્થ ઘટક .... છે.

ઉકેલ : * ને સંગત તટસ્થ ઘટક 0 છે. $(a * 0 = a + 0 - 0 = a)$

નીચેનાં 30 થી 34 ક્રમાંકવાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

ઉદાહરણ 30 : ગણ A = {1, 2, 3}નો વિચાર કરો. R = {(1, 2), (1, 3)} હોય, તો R એ પરંપરિત સંબંધ છે.

ઉકેલ : સત્ય છે.

ઉદાહરણ 31 : A સાંત ગણ છે. A થી A પરનું પ્રત્યેક એક-એક વિધેય વ્યાપ્ત હોય તે જરૂરી નથી.

ઉકેલ : અસત્ય છે.

ઉદાહરણ 32 : જો ગણ A, B અને C માટે $f : A \to B$, $g : B \to C$ વિધેયો હોય કે જેથી gof એક-એક થાય, તો f અને g બંને એક-એક વિધેયો છે.

ઉકેલ : ધારો કે A = N, B = Z તથા C = R છે.

∴ $f : N \to Z$ તેમજ $g : Z \to R$ માટે, $f(x) = x + 1$ અને $g(x) = x^2$ લેતાં,

$R_f \subset Z = D_g$ આથી, $R_f \subset D_g$ મળે.

∴ $gof : N \to R$ પરનું વ્યાખ્યાયિત વિધેય મળે.

હવે, $gof(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$ એક-એક વિધેય છે.

પરંતુ, અહીં જોઈ શકાય છે કે, f સુરેખ વિધેય હોવાથી એક-એક વિધેય છે, જ્યારે g નો પ્રદેશગણ Z તથા તે દ્વિઘાત પદાવલિ સ્વરૂપે હોવાથી, એક-એક વિધેય નથી. આથી, વિધાન અસત્ય છે. $(g(-1) = g(1) = 1)$

ઉદાહરણ 33 : જો ગણ A, B અને C માટે $f : A \to B$, $g : B \to C$ વિધેયો છે કે જેથી gof વ્યાપ્ત થાય, તો g વ્યાપ્ત છે.

ઉકેલ : $gof : A \to C$ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

ધારો કે, $z \in C$. આથી, $\exists x \in A$ જેથી $(gof)(x) = z$ એટલે કે,

$g(f(x)) = z$. $f : A \to B$ પરના વિધેય માટે, $x \in A \Rightarrow f(x) \in B$

ધારો કે, $y = f(x)$ આથી, $g(y) = z$, જ્યાં $y \in B$.

$\therefore$ $Z \in C$ માટે, કોઈ $y \in B$ એવો મળે કે જેથી $g(y) = Z$

$\therefore$ $g : B \to C$ પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય છે.

આથી આ વિધાન સત્ય છે.

ઉદાહરણ 34 : $\mathbf{N}$ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો ગણ છે. $\mathbf{N}$ પરની દ્વિક્રિયા $*$, $a * b = a + b$, $\forall\ a, b \in \mathbf{N}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે તે એકમ ઘટક ધરાવે છે.

ઉકેલ : અસત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. $A = \{a, b, c\}$ પર સંબંધ R નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે.

$R = \{(a, a), (b, c), (a, b)\}$.

R ને સ્વવાચક અને પરંપરિત બનાવવા માટે R માં ઉમેરવામાં આવતી ન્યૂનતમ સંખ્યાઓમાં ક્રમયુક્ત જોડ લખો.

2. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય f નો મહત્તમ પ્રદેશ D છે. જેથી f વાસ્તવિક વિધેય બને, D લખો.

3. $\mathbf{R}$ થી $\mathbf{R}$ પરનાં વ્યાખ્યાયિત વિધેયો $f(x) = 2x + 1$ અને $g(x) = x^2 - 2$, હોય, તો gof શોધો.

4. વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. f^{-1} લખો.

5. $A = \{a, b, c, d\}$ અને વિધેય $f = \{(a, b), (b, d), (c, a), (d, c)\}$ હોય, તો f^{-1} લખો.

6. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. $f(f(x))$ લખો.

7. $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ વિધેય છે ? જો g દ્વારા દર્શાવેલ વિધેય $g(x) = \alpha x + \beta$, હોય, તો α અને β ની કિંમત મેળવો.

8. નીચેના ક્રમયુક્ત જોડના ગણ વિધેય છે ? જો હોય, તો પરીક્ષણ કરો કે તે એક-એક અથવા વ્યાપ્ત છે ?

(i) $\{(x, y)$: x કોઈ વ્યક્તિ છે, y એ x ની માતા છે$\}$.

(ii) $\{(a, b)$: a કોઈ વ્યક્તિ છે, b એ a ના પૂર્વજ છે$\}$.

9. વિધેયો f અને g

$f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ અને $g = \{(2, 3), (5, 1), (1, 3)\}$, આપેલ છે. fog શોધો.

10. $\mathbf{C}$ એ સંકર સંખ્યાનો ગણ છે. સાબિત કરો કે આપેલ વિધેય $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $f(z) = |z|$, $\forall z \in \mathbf{C}$ એક-એક નથી તથા વ્યાપ્ત પણ નથી.

11. વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે f એક-એક નથી તથા વ્યાપ્ત પણ નથી.

12. $X = \{1, 2, 3\}$ અને $Y = \{4, 5\}$. નીચેના $X \times Y$ ના ઉપગણો X થી Y નાં વિધેયો છે કે નહિ તે શોધો :

(i) $f = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 5)\}$ (ii) $g = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(iii) $h = \{(1,4), (2, 5), (3, 5)\}$ (iv) $k = \{(1,4), (2, 5)\}$

13. વિધેયો $f : A \to B$ અને $g : B \to A$, $gof = I_A$ નું સમાધાન કરે છે, તો દર્શાવો કે f એક-એક અને g વ્યાપ્ત છે.

14. વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2 - \cos x}$ $\forall x \in \mathbf{R}$, તો f નો વિસ્તાર શોધો.

15. n એ ચોક્કસ ધન પૂર્ણાંક છે. $\mathbf{Z}$ પરનો સંબંધ R નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે.

$\forall a, b \in \mathbf{Z}$, $a - b$ એ n દ્વારા વિભાજ્ય હોય, તો અને તો જ $a\text{R}b$. સાબિત કરો કે R સામ્ય સંબંધ છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

16. A = {1, 2, 3, 4 }. નીચે દર્શાવેલા ગુણધર્મો પ્રમાણેના સંબંધો A પર વ્યાખ્યાયિત કરો.

(a) સ્વવાચક, પરંપરિત પરંતુ સંમિત નથી.

(b) સંમિત છે, પરંતુ સ્વવાચક તથા પરંપરિત નથી.

(c) સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત છે.

17. પૂર્ણાંક સંખ્યા ગણ **N** પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R નીચે પ્રમાણે છે :

$R = \{(x, y) : x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}, 2x + y = 41\}$. સંબંધ R ના પ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો. એ પણ ચકાસો કે R સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત છે.

18. આપેલ A = {2, 3, 4}, B = {2, 5, 6, 7} માટે નીચેના દરેકના ઉદાહરણનું નિર્માણ કરો.

(a) A થી B નાં એક-એક વિધેય

(b) A થી B નાં એક-એક ન હોય તેવાં વિધેય

(c) B થી A નાં વિધેય

19. એવાં વિધેયનાં ઉદાહરણ આપો, કે જે

(i) એક-એક હોય, પરંતુ વ્યાપ્ત ન હોય.

(ii) એક-એક ન હોય, પરંતુ વ્યાપ્ત હોય.

(iii) એક-એક પણ ન હોય તથા વ્યાપ્ત પણ ન હોય.

20. $A = \mathbf{R} - \{3\}$, $B = \mathbf{R} - \{1\}$, $f : A \to B$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$, તો સાબિત કરો કે f એક-એક તથા વ્યાપ્ત છે.

21. $A = [-1, 1]$ તો નીચે આપેલ A પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય એક-એક, વ્યાપ્ત અથવા બંને છે તેનું પરીક્ષણ કરો :

(i) $f(x) = \frac{x}{2}$ (ii) $g(x) = |x|$ (iii) $h(x) = x|x|$ (iv) $k(x) = x^2$

22. નીચેના દરેક **N** પર સંબંધ વ્યાખ્યાયિત કરે છે :

(i) x એ y કરતાં મોટો છે, $x, y \in \mathbf{N}$

(ii) $x + y = 10$, $x, y \in \mathbf{N}$

(iii) xy એ પૂર્ણાંકનો વર્ગ છે. $x, y \in \mathbf{N}$

(iv) $x + 4y = 10$ $x, y \in \mathbf{N}$.

ઉપર્યુક્ત પૈકી કયા સંબંધો સ્વવાચક, સંમિત, પરંપરિત છે, તે નક્કી કરો.

23. A = {1, 2, 3, ... 9} અને સંબંધ R એ $A \times A$ પર નીચે પ્રમાણે છે.

જો $a + d = b + c$, તો (a, b) R (c, d). (a, b), (c, d) એ $A \times A$ માં છે.

સાબિત કરો કે R એ સામ્ય સંબંધ છે અને સામ્ય વર્ગ [(2, 5)] પણ મેળવો.

24. વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે, વિધેય $f : A \to B$ વ્યસ્ત સંપન્ન હોય, તો અને તો જ f એ એક-એક અને વ્યાપ્ત બંને છે.

25. વિધેયો $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ અનુક્રમે $f(x) = x^2 + 3x + 1$ અને $g(x) = 2x - 3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો (i) fog (ii) gof (iii) fof અને (iv) gog શોધો.

26. $*$ એ **Q** પર વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા છે. નીચે આપેલ પૈકી કઈ દ્વિક્રિયા સમક્રમી છે તે શોધો :

(i) $a * b = a - b, \forall a, b \in \mathbf{Q}$ (ii) $a * b = a^2 + b^2, \forall a, b \in \mathbf{Q}$

(iii) $a * b = a + ab, \forall a, b \in \mathbf{Q}$ (iv) $a * b = (a - b)^2, \forall a, b \in \mathbf{Q}$

27. **R** પરની દ્વિક્રિયા $*$ એ $a * b = 1 + ab, \forall a, b \in \mathbf{R}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો દ્વિક્રિયા $*$ માટે નીચેના પૈકી શું સત્ય છે ?

(i) સમક્રમી છે પરંતુ જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી.

(ii) જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે, પરંતુ સમક્રમી નથી.

(iii) સમક્રમી નથી તથા જૂથના નિયમનું પાલન કરતી નથી.

(iv) સમક્રમી છે તથા જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 28 થી 47 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

28. T એ યુક્લિડિયન સમતલમાં આવેલા બધા ત્રિકોણોનો ગણ હોય અને $\forall a, b \in$ T, a તથા b એકરૂપ હોય, તો aRb દ્વારા વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R ....

(A) સ્વવાચક છે પરંતુ પરંપરિત નથી. (B) પરંપરિત છે પરંતુ સંમિત નથી.

(C) સામ્ય સંબંધ છે. (D) આપેલ પૈકી એક પણ નથી.

29. શૂન્યેતર બાળકોની સંખ્યા ધરાવતાં કુટુંબોના ગણ વિશે વિચારો. જો a એ b નો ભાઈ હોય, તો aRb દ્વારા વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R,

(A) સંમિત છે પરંતુ પરંપરિત નથી. (B) પરંપરિત છે, પરંતુ સંમિત નથી.

(C) સંમિત નથી અને પરંપરિત નથી. (D) સંમિત અને પરંપરિત છે.

30. ગણ A = {1, 2, 3} પર સામ્ય સંબંધોની મહત્તમ સંખ્યા .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

31. જો ગણ {1, 2, 3} પરનો સંબંધ R = {(1, 2)} દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે, તો R

(A) સ્વવાચક છે. (B) પરંપરિત છે.

(C) સંમિત છે. (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

32. જો $a \geq b$, તો aRb દ્વારા R પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R

(A) સામ્ય સંબંધ છે. (B) સ્વવાચક, પરંપરિત છે પરંતુ સંમિત નથી.

(C) સંમિત, પરંપરિત છે પરંતુ સ્વવાચક નથી. (D) પરંપરિત તથા સ્વવાચક નથી પરંતુ સંમિત છે.

33. A = {1, 2, 3} અને સંબંધ R નો વિચાર કરો.

R = {1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1,3)}, તો R

(A) સ્વવાચક છે પરંતુ સંમિત નથી. (B) સ્વવાચક છે પરંતુ પરંપરિત નથી.

(C) સંમિત અને પરંપરિત છે. (D) સંમિત નથી અને પરંપરિત નથી.

34. Q − {0} પર $a * b = \frac{ab}{2}, \forall a, b \in$ Q − {0} દ્વારા વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્રિયા $*$ નો તટસ્થ ઘટક .... છે.

(A) 1 (B) 0

(C) 2 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

35. જો ગણ A માં 5 સભ્યો હોય અને ગણ B માં 6 સભ્યો હોય, તો A થી B નાં કેટલાં એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેયો મળે ?

(A) 720 (B) 120

(C) 0 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

36. A = {1, 2, 3, ...n} અને B = {a, b} તો A થી B નાં વ્યાપ્ત વિધેયોની સંખ્યા .... છે.

(A) ${}^nP_2$ (B) $2^n - 2$

(C) $2^n - 1$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

37. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in \mathbf{R}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો f ....

(A) એક-એક વિધેય છે (B) વ્યાપ્ત વિધેય છે

(C) એક-એક અને વ્યાપ્ત વિધેય છે (D) f વિધેય જ નથી.

38. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^2 - 5$ અને $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો $(gof)(x) =$ ....

(A) $\frac{3x^2-5}{9x^4-30x^2+26}$ (B) $\frac{3x^2-5}{9x^4-6x^2+26}$ (C) $\frac{3x^2}{x^4+2x^2-4}$ (D) $\frac{3x^2}{9x^4+30x^2-2}$

39. નીચે આપેલા પૈકી **Z** થી **Z** પરનું એક-એક તથા વ્યાપ્ત હોય, તેવું વિધેય ....

(A) $f(x) = x^3$ (B) $f(x) = x + 2$ (C) $f(x) = 2x + 1$ (D) $f(x) = x^2 + 1$

40. વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો $f^{-1}(x) =$ ....

(A) $(x+5)^{\frac{1}{3}}$ (B) $(x-5)^{\frac{1}{3}}$ (C) $(5-x)^{\frac{1}{3}}$ (D) $5 - x$

41. વિધેય $f : A \to B$ અને $g : B \to C$ એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેયો છે, તો $(gof)^{-1} =$ ....

(A) $f^{-1}og^{-1}$ (B) fog (C) $g^{-1}of^{-1}$ (D) gof

42. $f : \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{3x+2}{5x-3}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો ....

(A) $f^{-1}(x) = f(x)$ (B) $f^{-1}(x) = -f(x)$

(C) $(fof)x = -x$ (D) $f^{-1}(x) = \frac{1}{19} f(x)$

43. $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ સંમેય} \\ 1-x, & x \text{ અસંમેય} \end{cases}$, તો $(fof)(x) =$ ....

(A) અચળ (B) $1 + x$

(C) x (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

44. $f : [2, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો f નો વિસ્તાર .... છે.

(A) $\mathbf{R}$ (B) $[1, \infty)$ (C) $[4, \infty)$ (D) $[5, \infty)$

45. $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{2}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે અને બીજું વિધેય $g : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + 2$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો $(gof)\left(\frac{3}{2}\right) =$ ....

(A) 1 (B) -1

(C) $\frac{7}{2}$ (B) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

46. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$f(x) = \begin{cases} 3x & x \le 1 \\ x^2 & 1 < x \le 3 \\ 2x & x > 3 \end{cases}$, તો $f(-1) + f(2) + f(4) =$ ....

(A) 9 (B) 14

(C) 5 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

47. $f : \mathbf{R} - \{(2n-1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = tan\ x$ આપેલ હોય, તો $f^{-1}(1) =$ ....

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\{n\pi + \frac{\pi}{4} : n \in Z\}$

(C) અસ્તિત્વમાં નથી. (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 48 થી 52 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

48. જો $2a + 3b = 30$, તો aRb દ્વારા N પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R = ...

49. ગણ A = {1, 2, 3, 4, 5} પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ R માટે,

R = $\{(a, b) : |a^2 - b^2| < 8$, તો R .... દ્વારા આપવામાં આવે છે.

50. $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ અને $g = \{(2, 3), (5, 1), (1, 3)\}$, તો $gof =$ .... અને $fog =$ ....

51. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે, તો $(fofof)(x) =$ ....

52. જો $f(x) = (4 - (x-7)^3)$, તો $f^{-1}(x) =$ ....

નીચેનાં ક્રમાંક 53 થી 62 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

53. R = {(3, 1), (1, 3), (3, 3)} એ ગણ A = {1, 2, 3} પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ છે, તો R સંમિત, પરંપરિત છે, પરંતુ સ્વવાચક નથી.

54. વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = sin(3x + 2)\ \forall x \in$ R દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો f નું પ્રતિવિધેય મળી શકે છે.

55. જે સંમિત અને પરંપરિત હોય તે સંબંધ સ્વવાચક પણ છે.

56. જો m એ n નો પૂર્ણાંક ગુણિત હોય, તો પૂર્ણાંક m એ અન્ય પૂર્ણાંક n સાથે સંબંધિત છે, તો **Z** પરનો આ સંબંધ સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત છે.

57. A = {0, 1} અને **N** પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ગણ છે. વિધેય $f : \mathbf{N} \to A$, $f(2n-1) = 0$, $f(2n) = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો f વ્યાપ્ત છે.

58. ગણ A = {1, 2, 3} પરનો સંબંધ R એ R = {{1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3)} દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો R સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત છે.

59. વિધેયો f અને g માટે fog તથા gof વ્યાખ્યાયિત હોય, તો $fog = gof$.

60. વિધેયોનું સંયોજન જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

61. દરેક વિધેય વ્યસ્તસંપન્ન છે.

62. ગણ પરની દ્વિક્ક્રિયા હંમેશાં તટસ્થ ઘટક ધરાવે છે.

પ્રકરણ 2

ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો

2.1 વિહંગાવલોકન

2.1.1 પ્રતિવિધેયો

જો વિધેય 'f' એક-એક અને વ્યાપ્ત હોય, તો અને તો જ તેનું પ્રતિવિધેય મળે. બધાં જ ત્રિકોણમિતીય વિધેયો તેમના પ્રદેશ પર અનેક-એક સંગતતાવાળાં વિધેયો છે અને તેથી તેમના પ્રદેશગણ અને સહપ્રદેશગણ મર્યાદિત કરીશું, જેથી આ મર્યાદિત પ્રદેશગણમાં અને સહપ્રદેશગણમાં તે એક-એક અને વ્યાપ્ત થાય અને તેમનાં પ્રતિવિધેય અસ્તિત્વ ધરાવે. ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં પ્રતિવિધેયો માટેના મર્યાદિત પ્રદેશ અને વિસ્તાર નીચે પ્રમાણે છે :

વિધેય	પ્રદેશ	વિસ્તાર
$y = sin^{-1}x$	$[-1,1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = cos^{-1}x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$y = cosec^{-1}x$	$\mathbf{R} - (-1,1)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$y = sec^{-1}x$	$\mathbf{R} - (-1,1)$	$[0,\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$y = tan^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = cot^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$(0,\pi)$

નોંધ :

(i) સંકેતો $sin^{-1}x$ અને $(sinx)^{-1}$ માં ગેરસમજ ન થવી જોઈએ. વાસ્તવમાં $sin^{-1}x$ એ એક ખૂણો છે જેનું *sine* વિધેય માટેનું મૂલ્ય વાસ્તવિક સંખ્યા x છે અને $(sinx)^{-1} = \frac{1}{sin\,x}$. તે જ રીતે અન્ય ત્રિકોણમિતીય વિધેયો માટે પણ સમજી શકાય.

(ii) θ નું નાનામાં નાનું ધન કે ઋણ મૂલ્ય એ આપેલ વિધેયની મુખ્ય કિંમત કહેવાય છે. (ન્યૂનતમ $|\theta|$)

(iii) જ્યારે ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય માટે કોઈ અંતરાલનો ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય ત્યારે મુખ્ય મર્યાદિત સહપ્રદેશવાળો અંતરાલ લેવો. ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનું મૂલ્ય મુખ્ય મર્યાદિત સહપ્રદેશવાળા અંતરાલમાં હોય તેને મુખ્ય કિંમત કહે છે.

2.1.2 ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના આલેખ :

ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનો આલેખ મૂળ વિધેયના આલેખમાં x-અક્ષ અને y-અક્ષની અદલા-બદલી કરીને મેળવી શકાય. એટલે કે જો બિંદુ (a, b) એ ત્રિકોણમિતીય વિધેયના આલેખ પરનું બિંદુ હોય, તો (b, a) એ આપેલ ત્રિકોણમિતીય વિધેયના પ્રતિવિધેયના આલેખ પરનું અનુરૂપ બિંદુ થશે.

આમ, ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયનો આલેખ એ ત્રિકોણમિતીય વિધેયના આલેખનું રેખા $y = x$ માં પ્રતિબિંબ મેળવવાથી પણ મળી શકે છે.

2.1.3 ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયોના ગુણધર્મો

1. $sin^{-1}(sin\ x) = x \quad : \quad x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$cos^{-1}(cos\ x) = x \quad : \quad x \in [0, \pi]$

$tan^{-1}(tan\ x) = x \quad : \quad x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$cot^{-1}(cot\ x) = x \quad : \quad x \in (0, \pi)$

$sec^{-1}(sec\ x) = x \quad : \quad x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$cosec^{-1}(cosec\ x) = x \quad : \quad x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

2. $sin\ (sin^{-1}\ x) = x \quad : \quad x \in [-1, 1]$

$cos\ (cos^{-1}\ x) = x \quad : \quad x \in [-1, 1]$

$tan\ (tan^{-1}\ x) = x \quad : \quad x \in \mathbf{R}$

$cot\ (cot^{-1}\ x) = x \quad : \quad x \in \mathbf{R}$

$sec\ (sec^{-1}\ x) = x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

$cosec\ (cosec^{-1}\ x) = x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

3. $sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = cosec^{-1}x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

$cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = sec^{-1}x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

$tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = cot^{-1}x \quad : \quad x > 0$

$= -\pi + cot^{-1}x \quad : \quad x < 0$

4. $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}x \quad : \quad x \in [-1, 1]$

$cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}x \quad : \quad x \in [-1, 1]$

$tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}x \quad : \quad x \in \mathbf{R}$

$cot^{-1}(-x) = \pi - cot^{-1}x \quad : \quad x \in \mathbf{R}$

$sec^{-1}(-x) = \pi - sec^{-1}x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

$cosec^{-1}(-x) = -cosec^{-1}x \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

5. $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} \quad : \quad x \in [-1, 1]$

$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} \quad : \quad x \in \mathbf{R}$

$\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2} \quad : \quad x \in \mathbf{R} - (-1, 1)$

6. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \quad : \quad xy < 1$

$\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) \quad : \quad xy > -1$

7. $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} \quad : \quad -1 \le x \le 1$

$2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} \quad : \quad x \ge 0$

$2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} \quad : \quad -1 < x < 1$

2.2 ઉદાહરણો :

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ માટે $\cos^{-1}x$ ની મુખ્ય કિંમત શોધો.

ઉકેલ : જો $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$, તો $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

અહીં, આપણે મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા લઈશું. તેથી, $\theta \in [0, \pi]$. વળી, $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ હોવાથી, θ પ્રથમ ચરણમાં મળશે. તેથી, $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

ઉદાહરણ 2 : કિંમત શોધો : $\tan^{-1}\left(\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$.

ઉકેલ : $\tan^{-1}\left(\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \tan^{-1}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

ઉદાહરણ 3 : કિંમત શોધો : $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$.

ઉકેલ : $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

ઉદાહરણ 4 : કિંમત શોધો : $\tan^{-1}\left(\tan\frac{9\pi}{8}\right)$.

ઉકેલ : $\tan^{-1}\left(\tan\frac{9\pi}{8}\right) = \tan^{-1}\tan\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{\pi}{8}$

ઉદાહરણ 5 : કિંમત શોધો : $tan\ (tan^{-1}(-\ 4))$.

ઉકેલ : $tan\ (tan^{-1}x) = x,\ \forall x \in R$ હોવાથી, $tan\ (tan^{-1}(-\ 4)) = -4$.

ઉદાહરણ 6 : કિંમત શોધો : $tan^{-1}\sqrt{3} - sec^{-1}(-2)$.

ઉકેલ : $tan^{-1}\sqrt{3} - sec^{-1}(-2) = tan^{-1}\sqrt{3} - [\pi - sec^{-1}2]$

$$= \frac{\pi}{3} - \pi + cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

ઉદાહરણ 7 : કિંમત શોધો : $sin^{-1}\left[cos\left(sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$.

ઉકેલ : $sin^{-1}\left[cos\left(sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = sin^{-1}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે, $tan(cot^{-1}x) = cot\ (tan^{-1}x)$. શું આ સમતા પ્રત્યેક વાસ્તવિક x માટે સત્ય છે ? કારણ આપો.

ઉકેલ : ધારો કે, $cot^{-1}x = \theta$. આથી $cot\ \theta = x$ $\qquad$ **$\theta \in (0, \pi)$**

$\therefore\ 0 < \theta < \pi \Rightarrow -\pi < -\theta < 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x \Rightarrow tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta$

હવે, $tan(cot^{-1}x) = tan\theta = cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cot\left(\frac{\pi}{2} - cot^{-1}x\right) = cot(tan^{-1}x)$

આ સમતા પ્રત્યેક x માટે સત્ય છે કારણ કે, $tan^{-1}x$ અને $cot^{-1}x$ પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે વ્યાખ્યાયિત છે.

ઉદાહરણ 9 : $sec\left(tan^{-1}\frac{y}{2}\right)$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $tan^{-1}\frac{y}{2} = \theta$, જ્યાં, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. તો $tan\,\theta = \frac{y}{2}$.

તેથી, $sec\theta = \frac{\sqrt{4+y^2}}{2}$ મળે. $\qquad \left(sec\,\theta > 0,\right.$ કારણ કે $\left.\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$sec\left(tan^{-1}\frac{y}{2}\right) = sec\,\theta = \frac{\sqrt{4+y^2}}{2}$.

ઉદાહરણ 10 : $tan\ (cos^{-1}x)$ નું મૂલ્ય મેળવો અને તે પરથી $tan\left(cos^{-1}\frac{8}{17}\right)$ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $cos^{-1}x = \theta$. આથી $cos\,\theta = x$, જ્યાં, $\theta \in [0,\pi]$

$\therefore\ tan(cos^{-1}x) = tan\theta = \frac{\sqrt{1-cos^2\theta}}{cos\theta} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

$\left(\theta \in [0, \pi]\right.$ હોવાથી $sin\theta \geq 0 \Rightarrow sin\theta = \left.\sqrt{1-cos^2\theta}\right)$

હવે, $tan\left(cos^{-1}\frac{8}{17}\right) = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$.

ઉદાહરણ 11 : $sin\left[2cot^{-1}\left(\frac{-5}{12}\right)\right]$નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $cot^{-1}\left(\frac{-5}{12}\right) = y$, તો $cot\ y = \frac{-5}{12}$.

$$\therefore \quad sin\left[2cot^{-1}\left(\frac{-5}{12}\right)\right] = sin\ 2y$$

$$= 2sin\ y\ cos\ y$$

$$= 2\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) \qquad \left(cot\ y < 0 \text{ હોવાથી, } y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ થાય.}\right)$$

$$= \frac{-120}{169}$$

ઉદાહરણ 12 : $cos\left[sin^{-1}\frac{1}{4} + sec^{-1}\frac{4}{3}\right]$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $cos\left[sin^{-1}\frac{1}{4} + sec^{-1}\frac{4}{3}\right] = cos\left[sin^{-1}\frac{1}{4} + cos^{-1}\frac{3}{4}\right]$

$$= cos\left(sin^{-1}\frac{1}{4}\right)cos\left(cos^{-1}\frac{3}{4}\right) - sin\left(sin^{-1}\frac{1}{4}\right)sin\left(cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} \qquad \text{(કેમ ?)}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{15}-\sqrt{7}}{16}$$

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 13 : સાબિત કરો કે, $2sin^{-1}\frac{3}{5} - tan^{-1}\frac{17}{31} = \frac{\pi}{4}$.

ઉકેલ : ધારો કે, $sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta$. આથી, $sin\ \theta = \frac{3}{5}$, જ્યાં, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ કારણ કે, $sin\ \theta > 0$

$\therefore\ tan\ \theta = \frac{3}{4}$, તેથી, $\theta = tan^{-1}\frac{3}{4}$.

હવે, $2sin^{-1}\frac{3}{5} - tan^{-1}\frac{17}{31} = 2\theta - tan^{-1}\frac{17}{31}$

$$= 2\ tan^{-1}\frac{3}{4} - tan^{-1}\frac{17}{31}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}\right) - tan^{-1}\frac{17}{31} \qquad \left(xy = \frac{9}{16} < 1\right)$$

$$= tan^{-1}\frac{24}{7} - tan^{-1}\frac{17}{31}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{24}{7}-\frac{17}{31}}{1+\frac{24}{7}.\frac{17}{31}}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad (xy > -1)$$

ઉદાહરણ 14 : સાબિત કરો કે, $cot^{-1}7 + cot^{-1}8 + cot^{-1}18 = cot^{-1}3$

ઉકેલ : અહીં, $cot^{-1}7 + cot^{-1}8 + cot^{-1}18$

$$= tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{8} + tan^{-1}\frac{1}{18} \qquad \left(\text{જો } x > 0, \text{ તો } cot^{-1} x = tan^{-1}\frac{1}{x}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}}\right) + tan^{-1}\frac{1}{18} \qquad \left(x \cdot y = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8} < 1\right)$$

$$= tan^{-1}\frac{3}{11} + tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{11}+\frac{1}{18}}{1-\frac{3}{11}\times\frac{1}{18}}\right) \qquad (xy < 1)$$

$$= tan^{-1}\frac{65}{195}$$

$$= tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$= cot^{-1} 3 \qquad \left(\frac{1}{3} > 0 \text{ હોવાથી}\right)$$

ઉદાહરણ 15 : $tan\, 1$ અને $tan^{-1} 1$ માંથી કોની કિંમત વધુ છે ?

ઉકેલ : આકૃતિ 2.1 માં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

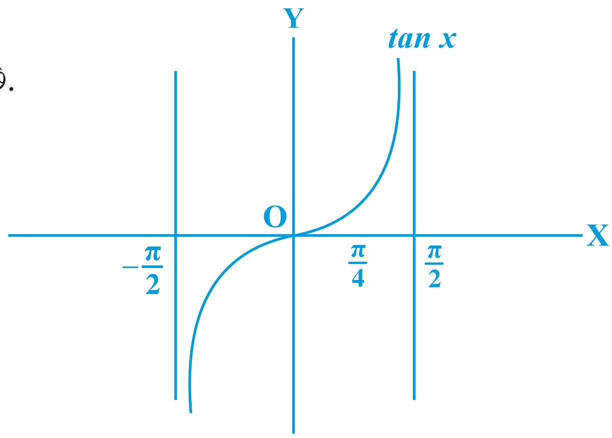
$tan\ x$ એ અંતરાલ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વધતું વિધેય છે.

વળી, $1 > \frac{\pi}{4} \Rightarrow tan\ 1 > tan\ \frac{\pi}{4}$

$\therefore\ tan\ 1 > 1$

હવે, $tan\ 1 > 1 > \frac{\pi}{4}$

$\therefore\ tan\ 1 > 1 > tan^{-1}(1)$



આકૃતિ 2.1

ઉદાહરણ 16 : $sin\left(2tan^{-1}\frac{2}{3}\right) + cos(tan^{-1}\sqrt{3})$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $tan^{-1}\frac{2}{3} = x$ અને $tan^{-1}\sqrt{3} = y$. $\qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ tan\ x = \frac{2}{3}$ અને $tan\ y = \sqrt{3}$

$0 < x, y < \frac{\pi}{2}$

હવે, $sin\left(2tan^{-1}\frac{2}{3}\right) + cos(tan^{-1}\sqrt{3})$

$= sin(2x) + cos\ y$

$= \frac{2tan\,x}{1+tan^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1+tan^2 y}}$

$= \frac{2\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{4}{9}} + \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}$

$= \frac{12}{13} + \frac{1}{2} = \frac{37}{26}$

બીજી રીત :

$tan\ y = \sqrt{3},\ 0 < y < \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ y = \frac{\pi}{3}$

$\therefore\ sin\left(2tan^{-1}\frac{2}{3}\right) + cos(tan^{-1}\sqrt{3})$

$= \frac{2tan\,x}{1+tan^2 x} + cos\frac{\pi}{3}$

$= \frac{2\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{4}{9}} + \frac{1}{2}$

$= \frac{37}{36}$

ઉદાહરણ 17 : ઉકેલો $tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}tan^{-1}x,\ x > 0.$

ઉકેલ : અહીં, $2tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = tan^{-1}x$

$\therefore\ 2\left[tan^{-1}1 - tan^{-1}x\right] = tan^{-1}x$ **$(1 \cdot x > -1),\ (x > 0)$**

$\therefore\ 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3tan^{-1}x$

$\therefore\ \frac{\pi}{6} = tan^{-1}x$

$\therefore\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ઉદાહરણ 18 : સમીકરણ $sin^{-1} x + sin^{-1}(1 - x) = cos^{-1} x$ નું સમાધાન કરતી x ની કિંમતો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, આપેલ સમીકરણ $sin^{-1} x + sin^{-1}(1 - x) = cos^{-1} x$ પરથી,

$sin(sin^{-1} x + sin^{-1}(1 - x)) = sin(cos^{-1}x)$ મળશે.

$\therefore\ sin(sin^{-1} x)\ cos(sin^{-1}(1 - x)) + cos(sin^{-1} x)\ sin(sin^{-1}(1 - x)) = sin(cos^{-1} x)$

$\therefore\ x\sqrt{1-(1-x)^2} + (1-x)\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$

$\therefore\ x\sqrt{2x-x^2} + \sqrt{1-x^2}\,(1-x-1) = 0$

$\therefore\ x\left(\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) = 0$

$\therefore\ x = 0$ અથવા $2x - x^2 = 1 - x^2$

$\therefore\ x = 0$ અથવા $x = \frac{1}{2}$.

ચકાસણી : $x = 0$ માટે ડા.બા. $= 0 + sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2} = cos^{-1}0$

$x = \frac{1}{2}$ માટે ડા.બા. $= 2sin^{-1}\frac{1}{2} = 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} = cos^{-1}\frac{1}{2}$

ઉદાહરણ 19 : સમીકરણ ઉકેલો : $sin^{-1}6x + sin^{-1} 6\sqrt{3}x = -\frac{\pi}{2}$.

ઉકેલ : અહીં, $sin^{-1} 6x = -\frac{\pi}{2} - sin^{-1}6\sqrt{3}x$

$\therefore \quad sin (sin^{-1} 6x) = sin \left(-\frac{\pi}{2} - sin^{-1}6\sqrt{3}x\right)$

$\therefore \quad 6x = - cos (sin^{-1} 6\sqrt{3}x)$

$\therefore \quad 6x = -\sqrt{1-108x^2}$. (અહીં સ્પષ્ટ છે કે x ઋણ જ હોય.) $\left(sin^{-1}(6\sqrt{3}x) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

વર્ગ કરતાં, $36x^2 = 1 - 108x^2$

$\therefore \quad 144x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{12}$

$x = -\frac{1}{12}$ કારણ કે, $x < 0$ છે.

નોંધ : જો $x > 0$ તો $sin^{-1}6x + sin^{-1} 6\sqrt{3}x$ = ધન + ધન = ધન = $-\frac{\pi}{2}$ ન બને.

$x = -\frac{1}{12}$ લેતાં, ડા.બા. $= sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$

ઉદાહરણ 20 : સાબિત કરો કે, $2\ tan^{-1}\left\{tan\frac{\alpha}{2} . tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\right\} = tan^{-1}\frac{sin\alpha\, cos\beta}{cos\alpha + sin\beta}$

ઉકેલ : ડા.બા. $= tan^{-1}\dfrac{2tan\frac{\alpha}{2}.tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{1-tan^2\frac{\alpha}{2}tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}$ $\left(2tan^{-1}\ x = tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)$

$\left(\text{અત્રે સ્વીકાર્યું છે કે, } tan\frac{\alpha}{2} \cdot tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) < 1\right)$

$$= tan^{-1}\frac{2tan\frac{\alpha}{2}\ \dfrac{1-tan\frac{\beta}{2}}{1+tan\frac{\beta}{2}}}{1-tan^2\frac{\alpha}{2}\left(\dfrac{1-tan\frac{\beta}{2}}{1+tan\frac{\beta}{2}}\right)^2}$$

$$= tan^{-1}\frac{2tan\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1-tan^2\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1+tan\frac{\beta}{2}\right)^2 - tan^2\frac{\alpha}{2}\left(1-tan\frac{\beta}{2}\right)^2}$$

$$= tan^{-1}\frac{2tan\frac{\alpha}{2}\left(1-tan^2\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1+tan^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1-tan^2\frac{\alpha}{2}\right)+2tan\frac{\beta}{2}\left(1+tan^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= tan^{-1}\frac{\dfrac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{1-tan^2\frac{\beta}{2}}{1+tan^2\frac{\beta}{2}}}{\dfrac{1-tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{2tan\frac{\beta}{2}}{1+tan^2\frac{\beta}{2}}}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{sin\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha + sin\,\beta}\right) = \text{જ.બા.}$$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના 21 થી 41 ક્રમાંકવાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 21 : tan^{-1} ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા .... છે.

(A) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (C) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ (D) $(0, \pi)$

ઉકેલ : સાચો ઉકેલ (A) છે.

ઉદાહરણ 22 : sec^{-1} ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા .... છે.

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ (B) $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (C) $(0, \pi)$ (D) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ઉકેલ : સાચો ઉકેલ (B) છે.

ઉદાહરણ 23 : cos^{-1} ની મુખ્ય કિંમત સિવાયની શાખાવાળો cos^{-1} નો આલેખ ....માં વ્યાખ્યાયિત છે.

(A) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (B) $[\pi, 2\pi] - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ (C) $(0, \pi)$ (D) $[2\pi, 3\pi]$

ઉકેલ : સાચો ઉકેલ (D) છે.

ઉદાહરણ 24 : $sin^{-1}\left(cos\left(\frac{43\pi}{5}\right)\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{3\pi}{5}$ (B) $\frac{-7\pi}{5}$ (C) $\frac{\pi}{10}$ (D) $-\frac{\pi}{10}$

ઉકેલ : $sin^{-1}\left(cos\,\frac{40\pi+3\pi}{5}\right) = sin^{-1}\left(cos\left(8\pi + \frac{3\pi}{5}\right)\right)$

$$= sin^{-1}\left(cos\,\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$= sin^{-1}\left(sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}\right)\right)$$

$$= sin^{-1}\left(sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right) = -\frac{\pi}{10}$$

સાચો ઉકેલ (D) છે.

ઉદાહરણ 25 : cos^{-1} $[cos\ (-\ 680°)]$ ની કિંમત .... છે.

(A) $\frac{2\pi}{9}$ (B) $\frac{-2\pi}{9}$ (C) $\frac{34\pi}{9}$ (D) $\frac{\pi}{9}$

ઉકેલ : $cos^{-1}\ (cos\ (-680°)) = cos^{-1}\ (cos\ (680°)) = cos^{-1}\ [cos\ (720° - 40°)]$

$$= cos^{-1}\ [cos\ (-\ 40°)]$$

$$= cos^{-1}\ [cos\ (40°)]$$

$$= cos^{-1}\left(cos\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{9}$$

સાચો ઉકેલ (A) છે.

ઉદાહરણ 26 : $cot\ (sin^{-1}x)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ (B) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (C) $\frac{1}{x}$ (D) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

ઉકેલ : ધારો કે, $sin^{-1}\ x = \theta$, તો $sin\,\theta = x$ $\qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\therefore\ cosec\ \theta = \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ cosec^2\theta = \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore\ 1 + cot^2\ \theta = \frac{1}{x^2}$$

$\therefore\ cot\ \theta = \pm\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. આ પૈકી એક ઉકેલ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ છે.

સાચો ઉકેલ (D) છે.

ઉદાહરણ 27 : જો $tan^{-1}x = \frac{\pi}{10}$, $x \in \mathbf{R}$, તો $cot^{-1}x$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{2\pi}{5}$ (C) $\frac{3\pi}{5}$ (D) $\frac{4\pi}{5}$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore\ cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$$

$$\therefore\ cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}.$$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

ઉદાહરણ 28 : $sin^{-1}\ 2x$ નો પ્રદેશગણ .... છે.

(A) $[0, 1]$ (B) $[-1, 1]$ (C) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (D) $[-2, 2]$

ઉકેલ : ધારો કે, $sin^{-1}2x = \theta$, તો $2x = sin\ \theta$.

હવે, $-1 \le sin\ \theta \le 1$

$\therefore\ -1 \le 2x \le 1$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$.

સાચો વિકલ્પ (C) છે.

ઉદાહરણ 29 : $sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ની કિંમત .... છે.

(A) $-\frac{2\pi}{3}$ (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{3}$

ઉકેલ : $sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = sin^{-1}\left(-sin\frac{\pi}{3}\right) = -sin^{-1}\left(sin\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 30 : $(sin^{-1}x)^2 + (cos^{-1}x)^2$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો અનુક્રમે .... છે.

(A) $\frac{5\pi^2}{4}$ અને $\frac{\pi^2}{8}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ અને $\frac{-\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi^2}{4}$ અને $\frac{-\pi^2}{4}$ (D) $\frac{\pi^2}{4}$ અને 0

ઉકેલ : $(sin^{-1}x)^2 + (cos^{-1}x)^2 = (sin^{-1}x + cos^{-1}x)^2 - 2sin^{-1}x\ cos^{-1}\ x$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\,sin^{-1}x\left(\frac{\pi}{2} - sin^{-1}x\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \pi\,sin^{-1}x + 2\left(sin^{-1}x\right)^2$$

$$= 2\left[\left(sin^{-1}x\right)^2 - \frac{\pi}{2}sin^{-1}x + \frac{\pi^2}{8}\right]$$

$$= 2\left[\left(sin^{-1}x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}\right]$$

તેથી, ન્યૂનતમ કિંમત $= 2\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{\pi^2}{8}$ અને મહત્તમ કિંમત $2\left[\left(\frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}\right] = \frac{5\pi^2}{4}$.

સાચો ઉકેલ (A) છે.

નોંધ : $\left(sin^{-1}x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \ge 0$. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ માટે $sin^{-1}x - \frac{\pi}{4} = 0$, $x = -1$ માટે મહત્તમ મૂલ્ય મળે.

ઉદાહરણ 31 : જો $\theta = sin^{-1}\ (sin\ (-600°))$ હોય, તો θ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{-2\pi}{3}$

ઉકેલ : $sin^{-1}\left(sin\left(-600\times\frac{\pi}{180}\right)\right) = sin^{-1}\left(sin\left(\frac{-10\pi}{3}\right)\right)$

$$= sin^{-1}\left[-\,sin\left(4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= sin^{-1}\left(sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= sin^{-1}\left(sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= sin^{-1}\left(sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

સાચો ઉકેલ (A) છે.

ઉદાહરણ 32 : $y = sin^{-1}(-x^2)$ નો પ્રદેશગણ .... છે.

(A) [0, 1] (B) (0, 1) (C) [–1, 1] (D) ϕ

ઉકેલ : $y = sin^{-1}(-x^2) \Rightarrow sin y = -x^2$

હવે, $-1 \le -x^2 \le 1$ $(-1 \le sin\ y \le 1)$

$\therefore\ 1 \ge x^2 \ge -1$

$\therefore\ 0 \le x^2 \le 1$

$\therefore\ |x| \le 1$ એટલે $-1 \le x \le 1$

સાચો ઉકેલ (C) છે.

ઉદાહરણ 33 : $y = cos^{-1}(x^2 - 4)$ નો પ્રદેશગણ .... છે.

(A) [3, 5] (B) [0, π]

(C) $\left[-\sqrt{5},-\sqrt{3}\right]\cap\left[-\sqrt{5},\sqrt{3}\right]$ (D) $\left[-\sqrt{5},-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},\sqrt{5}\right]$

ઉકેલ : $y = cos^{-1}(x^2 - 4) \Rightarrow cos\ y = x^2 - 4$

હવે, $-1 \le x^2 - 4 \le 1$ આવશ્યક છે. $(-1 \le cos\ y \le 1)$

$\therefore\ 3 \le x^2 \le 5$

$\therefore\ \sqrt{3} \le |x| \le \sqrt{5}$

$\therefore\ x \in \left[-\sqrt{5},-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3},\sqrt{5}\right]$

સાચો ઉકેલ (D) છે.

ઉદાહરણ 34 : $f(x) = sin^{-1}x + cos\,x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો પ્રદેશગણ .... છે.

(A) [–1, 1] (B) [–1, π + 1] (C) $(-\infty,\infty)$ (D) ϕ

ઉકેલ : cos વિધેયનો પ્રદેશ **R** છે અને sin^{-1} વિધેયનો પ્રદેશ [–1, 1] છે. તેથી, $cos\,x + sin^{-1}x$ નો પ્રદેશ $= \mathbf{R} \cap [-1, 1] = [-1, 1]$ થાય.

સાચો ઉકેલ (A) છે.

ઉદાહરણ 35 : $\sin(2\sin^{-1}(0.6))$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0.48 (B) 0.96 (C) 1.2 (D) $\sin 1.2$

ઉકેલ : જો $\sin^{-1}(0.6) = \theta$, તો $\sin\theta = 0.6$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ **$(\cos\theta > 0)$**

હવે, $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = 2(0.6)(0.8) = 0.96$

સાચો ઉકેલ (B) છે,

ઉદાહરણ 36 : જો $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$, તો $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y =$ ....

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 0 (D) $\frac{2\pi}{3}$

ઉકેલ : અહીં, $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$.

$\therefore \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}x\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}y\right) = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2}$

સાચો ઉકેલ (A) છે.

ઉદાહરણ 37 : $\tan\left(\cos^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{19}{8}$ (B) $\frac{8}{19}$ (C) $\frac{19}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$

ઉકેલ : $\tan\left(\cos^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4}\right) = \tan\left(\tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$

$= \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}}\right)\right)$ **$\left(xy = \frac{1}{3} < 1\right)$**

$= \tan\left(\tan^{-1}\frac{19}{8}\right)$

$= \frac{19}{8}$

સાચો ઉકેલ (A) છે.

ઉદાહરણ 38 : $\sin[\cot^{-1}(\cos(\tan^{-1}1))]$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

ઉકેલ : $\sin\left[\cot^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sin\left[\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \sin\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}\right] = \sqrt{\frac{2}{3}}$

સાચો ઉકેલ (D) છે.

નોંધ : $\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \theta$, તો $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. આથી $\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$

ઉદાહરણ 39 : $\tan^{-1}x - \cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ સમીકરણનો ઉકેલ ....

(A) ϕ (B) એકાકી

(C) અનંત ગણ છે (D) બે ઘટકોનો બનેલો ગણ છે

ઉકેલ : $tan^{-1}x - cot^{-1}x = \frac{\pi}{6}$ અને $tan^{-1}x + cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

સમીકરણોનો સરવાળો કરતાં, $2tan^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \quad tan^{-1}x = \frac{\pi}{3}$ i.e., $x = \sqrt{3}$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

ઉદાહરણ 40 : $\alpha \le 2sin^{-1}x + cos^{-1}x \le \beta$, તો ....

(A) $\alpha = \frac{-\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2}$ (B) $\alpha = 0, \beta = \pi$

(C) $\alpha = \frac{-\pi}{2}, \beta = \frac{3\pi}{2}$ (D) $\alpha = 0, \beta = 2\pi$

ઉકેલ : $\frac{-\pi}{2} \le sin^{-1}\ x \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \le sin^{-1}x + \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 \le sin^{-1}x + (sin^{-1}x + cos^{-1}x) \le \pi$

$\Rightarrow 0 \le 2sin^{-1}x + cos^{-1}x \le \pi$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

નોંધ : α મહત્તમ શક્ય અને β ન્યૂનતમ શક્ય સંખ્યા છે.

ઉદાહરણ 41 : $tan^2 (sec^{-1}2) + cot^2 (cosec^{-1}3)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 5 (B) 11 (C) 13 (D) 15

ઉકેલ : $tan^2 (sec^{-1}2) + cot^2 (cosec^{-1}3) = sec^2 (sec^{-1}2) - 1 + cosec^2 (cosec^{-1}3) - 1$

$= 2^2 - 1 + 3^2 - 1 = 11$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

સ્વાધ્યાય 2.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. $tan^{-1}\left(tan\frac{5\pi}{6}\right) + cos^{-1}\left(cos\frac{13\pi}{6}\right)$ નું મૂલ્ય શોધો.

2. કિંમત શોધો : $cos\left[cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{6}\right]$

3. સાબિત કરો : $cot\left(\frac{\pi}{4} - 2cot^{-1}3\right) = 7$

4. $tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + tan^{-1}\left(sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$ નું મૂલ્ય શોધો.

5. $tan^{-1}\left(tan\frac{2\pi}{3}\right)$ નું મૂલ્ય શોધો.

6. સાબિત કરો : $2tan^{-1}(-3) = \frac{-\pi}{2} + tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$

7. સમીકરણ $tan^{-1}\sqrt{x(x+1)} + sin^{-1}\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}$ નો વાસ્તવિક ઉકેલ મેળવો.

8. $sin\left(2tan^{-1}\frac{1}{3}\right) + cos\left(tan^{-1}2\sqrt{2}\right)$ નું મૂલ્ય શોધો.

9. જો $2tan^{-1}(cos\,\theta) = tan^{-1}(2\,cosec\,\theta)$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$

n એ કોઈ પૂર્ણાંક છે.

10. સાબિત કરો : $cos\left(2tan^{-1}\frac{1}{7}\right) = sin\left(4tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$

11. ઉકેલો : $cos\left(tan^{-1}x\right) = sin\left(cot^{-1}\frac{3}{4}\right)$

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

12. સાબિત કરો : $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}cos^{-1}x^2$

13. સરળ સ્વરૂપમાં ફેરવો : $cos^{-1}\left(\frac{3}{5}cos\,x+\frac{4}{5}sin\,x\right)$, જ્યાં, $x \in \left[\frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

14. સાબિત કરો : $sin^{-1}\frac{8}{17} + sin^{-1}\frac{3}{5} = sin^{-1}\frac{77}{85}$

15. સાબિત કરો : $sin^{-1}\frac{5}{13} + cos^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{63}{16}$

16. સાબિત કરો : $tan^{-1}\frac{1}{4} + tan^{-1}\frac{2}{9} = sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

17. $4tan^{-1}\frac{1}{5} - tan^{-1}\frac{1}{239}$ નું મૂલ્ય શોધો.

18. $tan\left(\frac{1}{2}sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ સાબિત કરો અને દર્શાવો તેનું મૂલ્ય $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ કેમ નથી ?

19. જો સમાંતર શ્રેણી a_1, a_2, a_3,...,a_n ના બે ક્રમિક પદો વચ્ચેનો તફાવત d હોય, તો નીચેની પદાવલિનું મૂલ્ય મેળવો :

$$tan\left[tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right) + tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right) + tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_3a_4}\right) +...+ tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_{n-1}a_n}\right)\right]$$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલ ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 20 થી 37 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

20. નીચેના પૈકી $cos^{-1}x$ ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા કઈ છે ?

(A) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $(0, \pi)$ (C) $[0, \pi]$ (D) $(0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

21. નીચેના પૈકી $cosec^{-1}x$ ની મુખ્ય કિંમતવાળી શાખા કઈ છે ?

(A) $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (C) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

22. જો $3tan^{-1} x + cot^{-1} x = \pi$ હોય, તો x = ...

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $\frac{1}{2}$

23. $sin^{-1}\left(cos\left(\frac{33\pi}{5}\right)\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{3\pi}{5}$ (B) $\frac{-7\pi}{5}$ (C) $\frac{\pi}{10}$ (D) $\frac{-\pi}{10}$

24. $cos^{-1}(2x - 1)$ નો પ્રદેશગણ .... છે.

(A) $[0, 1]$ (B) $[-1, 1]$ (C) $(-1, 1)$ (D) $[0, \pi]$

25. $f(x) = sin^{-1}\sqrt{x-1}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયનો પ્રદેશગણ .... છે.

(A) $[1, 2]$ (B) $[-1, 1]$ (C) $[0, 1]$ (D) આ પૈકી એક પણ નહિ.

26. જો $cos\left(sin^{-1}\frac{2}{5} + cos^{-1}x\right) = 0$ હોય, તો x = ...

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) 0 (D) 1

27. $sin(2tan^{-1}(0.75))$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0.75 (B) 1.5 (C) 0.96 (D) $sin\ 1.5$

28. $cos^{-1}\left(cos\frac{3\pi}{2}\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{3\pi}{2}$ (C) $\frac{5\pi}{2}$ (D) $\frac{7\pi}{2}$

29. $2\ sec^{-1} 2 + sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{7\pi}{6}$ (D) 1

30. જો $tan^{-1} x + tan^{-1}y = \frac{4\pi}{5}$ હોય, તો $cot^{-1} x + cot^{-1} y$ = ...

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{2\pi}{5}$ (C) $\frac{3\pi}{5}$ (D) π

31. જો $sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ હોય, તો જ્યાં, $a, x \in (0, 1)$, તો x નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0 (B) $\frac{a}{2}$ (C) a (D) $\frac{2a}{1-a^2}$

32. $cot\left[cos^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)\right]$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{25}{24}$ (B) $\frac{25}{7}$ (C) $\frac{24}{25}$ (D) $\frac{7}{24}$

33. $tan\left(\frac{1}{2}cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $2+\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{5}-2$ (C) $\frac{\sqrt{5}+2}{2}$ (D) $5+\sqrt{2}$

$\left[\right.$ **સૂચન** : $tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\,\theta}{1+cos\,\theta}}\left.\right]$ $\left(tan\,\frac{\theta}{2} > 0\ ?\right)$

34. જો $|\,x\,| \le 1$ હોય, તો $2\ tan^{-1}\ x + sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) =$ ....

(A) $4\ tan^{-1}\ x$ (B) 0 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

35. જો $cos^{-1}\ \alpha + cos^{-1}\ \beta + cos^{-1}\ \gamma = 3\pi$ હોય, તો $\alpha\,(\beta + \gamma) + \beta\,(\gamma + \alpha) + \gamma\,(\alpha + \beta) =$ ....

(A) 0 (B) 1 (C) 6 (D) 12

36. સમીકરણ $\sqrt{1 + cos\,2x} = \sqrt{2}\,cos^{-1}(cos\,x)$ ના $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ માં આવેલા ઉકેલોની સંખ્યા .... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) અનંત

37. જો $cos^{-1}x > sin^{-1}x$ હોય, તો

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \le 1$ (B) $-1 \le x \le 1$ (C) $-1 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $x > 0$

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 38 થી 48 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

38. $cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ની કિંમત .... છે.

39. $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

40. જો $cos\ (tan^{-1}\ x + cot^{-1}\sqrt{3}) = 0$ હોય, તો x નું મૂલ્ય .... છે.

41. $sec^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ નાં મૂલ્યોનો ગણ .... છે.

42. $tan^{-1}\sqrt{3}$ ની કિંમત .... છે.

43. $cos^{-1}\left(cos\frac{14\pi}{3}\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

44. $cos\ (sin^{-1}\ x + cos^{-1}\ x),\ |x| \le 1$ નું મૂલ્ય .... છે.

45. $tan\left(\dfrac{sin^{-1}x + cos^{-1}x}{2}\right)$ નું મૂલ્ય $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ માટે .... છે.

46. જો પ્રત્યેક x માટે $y = 2tan^{-1}x + sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ હોય, તો .... $< y <$ ....

(મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ શક્ય મૂલ્યો)

47. પરિણામ $tan^{-1}x - tan^{-1}y = tan^{-1}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$ એ xy ની .... કિંમત માટે સત્ય છે.

48. પ્રત્યેક $x \in \mathbf{R}$ માટે $cot^{-1}(-x)$ નું મૂલ્ય $cot^{-1}x$ ના સ્વરૂપમાં .... છે.

નીચેના ક્રમાંક 49 થી 55 નાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે નક્કી કરો :

49. દરેક ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનું પ્રતિવિધેય તેના પ્રદેશગણ પર મળે છે.

50. પદાવલિ $(cos^{-1}x)^2$ નું મૂલ્ય $sec^2 x$ બરાબર છે.

51. ત્રિકોણમિતીય વિધેયનું પ્રતિવિધેય વ્યાખ્યાયિત કરવા મર્યાદિત પ્રદેશગણ તરીકે તેની શાખાઓ પૈકી (મુખ્ય શાખા સિવાયની) કોઈ પણ શાખા લઈ શકાય.

52. θ ના નાનામાં નાના ધન કે ઋણ મૂલ્યને તે ત્રિકોણમિતીય વિધેયની મુખ્ય કિંમત કહે છે.

53. આપેલ ત્રિકોણમિતીય વિધેયના આલેખ પરથી તેના પ્રતિવિધેયનો આલેખ x-અક્ષ અને y-અક્ષની અદલાબદલી કરી મેળવી શકાય.

54. n નું નાનામાં નાનું મૂલ્ય કે જેથી, $tan^{-1}\dfrac{n}{\pi} > \dfrac{\pi}{4}$, $n \in \mathbf{N}$ થાય, તે 5 છે.

55. $sin^{-1}\left[cos\left(sin^{-1}\dfrac{1}{2}\right)\right]$ ની મુખ્ય કિંમત $\dfrac{\pi}{3}$ છે.

પ્રકરણ 3

શ્રેણિક

3.1 વિહંગાવલોકન

3.1.1 સંખ્યાઓની (અથવા વિધેયોની) લંબચોરસ ગોઠવણીને શ્રેણિક કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે, x સંખ્યા હોય કે વિધેય દર્શાવે, તો

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 & 3 \\ 4 & 3 & x \\ 3 & x & 4 \end{bmatrix}$$

સંખ્યાઓને (અથવા વિધેયોને) શ્રેણિકના ઘટકો કહે છે.

સમક્ષિતિજ રેખામાં આવતા ઘટકો શ્રેણિકની હાર બનાવે છે અને શિરોલંબ રેખામાં આવતા ઘટકો શ્રેણિકનો સ્તંભ બનાવે છે.

3.1.2 શ્રેણિકની કક્ષા

m હાર અને n સ્તંભવાળા શ્રેણિકની કક્ષા $m \times n$ છે. આ શ્રેણિકને $m \times n$ શ્રેણિક કહે છે (m બાય n શ્રેણિક એમ વાંચીશું).

ઉપરના ઉદાહરણના શ્રેણિક A ની કક્ષા 3×3 છે અર્થાત્, A એ 3×3 શ્રેણિક છે.

વ્યાપક સ્વરૂપે, $m \times n$ શ્રેણિકની લંબચોરસ સ્વરૂપે ગોઠવણી નીચે પ્રમાણે છે :

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \quad i, j \in \mathbf{N}.$$

ઘટક a_{ij} એ i મી હાર અને j મા સ્તંભનો ઘટક છે અને આ ઘટકને શ્રેણિક A નો (i, j) મો ઘટક કહે છે. $m \times n$ શ્રેણિકની સભ્યસંખ્યા mn છે.

3.1.3 શ્રેણિકના પ્રકાર

(i) જો શ્રેણિકને માત્ર એક હાર હોય, તો તે શ્રેણિકને **હાર શ્રેણિક** કહે છે. તેને $1 \times n$ શ્રેણિક કહેવાય.

(ii) જો શ્રેણિકને માત્ર એક સ્તંભ હોય, તો તે શ્રેણિકને **સ્તંભ શ્રેણિક** કહે છે. તેને $m \times 1$ શ્રેણિક કહેવાય.

(iii) જો શ્રેણિકની હારની સંખ્યા અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય, તો તે શ્રેણિકને **ચોરસ શ્રેણિક** કહે છે. આમ, જો $m \times n$ શ્રેણિક માટે $m = n$ હોય, તો તે શ્રેણિક ચોરસ શ્રેણિક કહેવાય અને તે 'n' કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક કહેવાય.

(iv) જો ચોરસ શ્રેણિકના વિકર્ણ ઘટકો સિવાયના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય, તો તે ચોરસ શ્રેણિક $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ને **વિકર્ણ શ્રેણિક** કહે છે એટલે કે, શ્રેણિક $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ માં $i \ne j$ માટે $b_{ij} = 0$ હોય, તો શ્રેણિક B વિકર્ણ શ્રેણિક છે.

(v) જો વિકર્ણ શ્રેણિકના બધા વિકર્ણઘટકો સમાન હોય, તો તે શ્રેણિકને **અદિશ શ્રેણિક** કહે છે એટલે કે, જો ચોરસ શ્રેણિક B = $[b_{ij}]_{n \times n}$ માં $i \neq j$ માટે $b_{ij} = 0$ અને $i = j$ માટે $b_{ij} = k$, જ્યાં k અચળ હોય, તો B અદિશ શ્રેણિક છે.

(vi) જો ચોરસ શ્રેણિકના બધા વિકર્ણ ઘટકો 1 હોય અને તે સિવાયના ઘટકો શૂન્ય હોય, તો તે શ્રેણિકને **એકમ શ્રેણિક** કહે છે.

બીજા શબ્દોમાં કહીએ, તો જો ચોરસ શ્રેણિક A = $[a_{ij}]_{n \times n}$ માં $i = j$ માટે $a_{ij} = 1$ અને $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 0$, તો A એકમ શ્રેણિક છે.

(vii) જો શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય, તો તે શ્રેણિકને **શૂન્ય શ્રેણિક** કહે છે. આપણે શૂન્ય શ્રેણિકને O વડે દર્શાવીશું.

(viii) જો શ્રેણિકો A = $[a_{ij}]$ અને B = $[b_{ij}]$ માટે

(a) તેમની કક્ષા સમાન હોય અને

(b) A નો પ્રત્યેક ઘટક B ના અનુરૂપ ઘટકને સમાન એટલે કે, પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = b_{ij}$ હોય, તો A અને B સમાન શ્રેણિકો કહેવાય.

3.1.4 શ્રેણિકોનો સરવાળો

જો બે શ્રેણિકોની કક્ષા સમાન હોય, તો તે બે શ્રેણિકોનો સરવાળો શક્ય છે.

જો સમાન કક્ષા $m \times n$ વાળા બે શ્રેણિક A = $[a_{ij}]$ અને B = $[b_{ij}]$ આપેલ હોય, તો A અને B ના સરવાળાનો શ્રેણિક પ્રત્યેક શક્ય કિંમતો i અને j માટે $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ દ્વારા શ્રેણિક C = $[c_{ij}]_{m \times n}$ તરીકે વ્યાખ્યાયિત થાય.

3.1.5 શ્રેણિકનો અદિશ વડે ગુણાકાર

જો A = $[a_{ij}]_{m \times n}$ શ્રેણિક હોય અને k કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો A ના પ્રત્યેક ઘટકને k વડે ગુણતાં બીજો શ્રેણિક kA મળે છે અર્થાત્ kA = $[ka_{ij}]_{m \times n}$ થાય.

3.1.6 વિરોધી શ્રેણિક

A ના વિરોધી શ્રેણિકને –A વડે દર્શાવાય છે. આપણે વિરોધી શ્રેણિક –A = (–1)A વડે દર્શાવીશું.

3.1.7 શ્રેણિકોના ગુણાકાર

જો શ્રેણિક A ના સ્તંભની સંખ્યા અને શ્રેણિક B ની હારની સંખ્યા સમાન હોય, તો શ્રેણિકો A અને B નો ગુણાકાર શ્રેણિક વ્યાખ્યાયિત થાય.

ધારો કે, A = $[a_{ij}]$ એ $m \times n$ શ્રેણિક અને B = $[b_{jk}]$ એ $n \times p$ શ્રેણિક છે. શ્રેણિકો A અને B ના ગુણાકાર શ્રેણિક C ની કક્ષા $m \times p$ થશે. શ્રેણિક C નો (i, k) મો ઘટક c_{ik} મેળવવા માટે, આપણે A ની i મી હાર અને B નો k મો સ્તંભ લઈ, તેમના અનુરૂપ ઘટકોનો ગુણાકાર કરી આ બધા જ ગુણાકારોનો સરવાળો કરીશું અર્થાત્

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + a_{i3}\, b_{3k} + \ldots + a_{in}\, b_{nk}$$

શ્રેણિકો A અને B નો ગુણાકાર શ્રેણિક C = $[c_{ik}]_{m \times p}$ મળે.

નોંધ :

1. AB વ્યાખ્યાયિત હોય, તો BA વ્યાખ્યાયિત થાય તે આવશ્યક નથી.
2. A અને B અનુક્રમે $m \times n$ અને $k \times l$ શ્રેણિકો છે. જો $n = k$ અને $l = m$ હોય, તો અને તો જ AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત છે.
3. જો AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત હોય, તો એ આવશ્યક નથી કે AB = BA થાય.
4. જો બે શ્રેણિકોનો ગુણાકાર શૂન્ય શ્રેણિક હોય, તો બેમાંથી કોઈ પણ શ્રેણિક શૂન્ય શ્રેણિક હોય તે આવશ્યક નથી.

5. જો સમાન કક્ષાવાળા ત્રણ શ્રેણિકો A, B અને C માટે, A = B હોય, તો AC = BC થાય, પરંતુ આથી ઊલટું સત્ય નથી.

6. $A \cdot A = A^2$, $A \cdot A \cdot A = A^3$ અને આ રીતે આગળ.

3.1.8 પરિવર્ત શ્રેણિક

1. જો શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ની બધી જ હારને અનુરૂપ સ્તંભમાં પરિવર્તિત કરવામાં આવે અને તેથી જે શ્રેણિક પ્રાપ્ત થાય તેને શ્રેણિક A નો પરિવર્ત શ્રેણિક કહે છે.

   શ્રેણિક A ના પરિવર્ત શ્રેણિકને A' અથવા (A^T) વડે દર્શાવાય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, જો $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, તો $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ થાય.

2. **પરિવર્ત શ્રેણિકના ગુણધર્મો :**

   યોગ્ય કક્ષાવાળા શ્રેણિકો A અને B માટે,

   (i) $(A^T)^T = A$

   (ii) $(kA)^T = kA^T$ (k કોઈ પણ અચળ છે.)

   (iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

   (iv) $(AB)^T = B^T A^T$

3.1.9 સંમિત શ્રેણિક અને વિસંમિત શ્રેણિક

(i) ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ માટે, જો $A^T = A$ તો A સંમિત શ્રેણિક છે, અર્થાત્ i અને j ની બધી જ શક્ય કિંમતો માટે $a_{ij} = a_{ji}$ થાય, તો A સંમિત છે.

(ii) ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ માટે, જો $A^T = -A$, એટલે કે i અને j ની બધી જ શક્ય કિંમતો માટે $a_{ji} = -a_{ij}$ થાય, તો A ને વિસંમિત શ્રેણિક કહેવાય.

નોંધ : વિસંમિત શ્રેણિકના વિકર્ણ ઘટકો શૂન્ય હોય છે.

(iii) **પ્રમેય 1 :** જેના ઘટકો વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તેવા ચોરસ શ્રેણિક A માટે, $A + A^T$ સંમિત શ્રેણિક છે અને $A - A^T$ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

(iv) **પ્રમેય 2:** કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A ને એક સંમિત શ્રેણિક અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય, એટલે કે

$$A = \frac{(A+A^T)}{2} + \frac{(A-A^T)}{2}$$ અને એ રીતે સંમિત શ્રેણિક B તથા વિસંમિત શ્રેણિક C માટે

$A = B + C$ તો $B = \frac{A+A^T}{2}$, $C = \frac{A-A^T}{2}$

3.1.10 વ્યસ્ત સંપન્ન શ્રેણિક

(i) જો A એ $m \times m$ કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક હોય અને જો સમાન કક્ષા $m \times m$ વાળો બીજો ચોરસ શ્રેણિક B અસ્તિત્વ ધરાવે, કે જેથી $AB = BA = I_m$ થાય, તો A એ વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક છે અને શ્રેણિક B ને શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક કહે છે તથા તેને A^{-1} વડે દર્શાવાય છે.

નોંધ :

1. લંબચોરસ શ્રેણિક માટે, જો ગુણાકાર શ્રેણિક AB અને BA વ્યાખ્યાયિત થાય અને તેઓ સમાન થાય, તેમ છતાંય તે શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ ન હોય તે શક્ય છે. બંને શ્રેણિકો A અને B સમાન કક્ષાના ચોરસ શ્રેણિક હોવા જરૂરી છે.
2. જો શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક B હોય, તો B નો વ્યસ્ત શ્રેણિક A છે.

(ii) **પ્રમેય 3 : (વ્યસ્ત શ્રેણિકની અનન્યતા)** જો ચોરસ શ્રેણિકના વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે અનન્ય છે.

(iii) **પ્રમેય 4 :** જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોય, તો $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.1.11 હાર સંક્ષેપન અથવા સ્તંભ સંક્ષેપનના ઉપયોગથી વ્યસ્ત શ્રેણિક

હાર સંક્ષેપનના ઉપયોગથી A^{-1} શોધવા માટે, A = IA લખી અને તેના પર હાર સંક્ષેપનની પ્રાથમિક ક્રિયાઓ કરતાં I = BA ન મળે ત્યાં સુધી હાર સંક્ષેપનની એક શ્રેણીનું પ્રયોજન કરીએ. શ્રેણિક B એ શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક થશે. તે જ પ્રમાણે, જો સ્તંભ સંક્ષેપનના ઉપયોગથી A^{-1} શોધવું હોય, તો A = AI લખી અને તેના પર I = AB ન મળે ત્યાં સુધી સ્તંભ સંક્ષેપનની એક શ્રેણીનું પ્રયોજન કરીશું.

નોંધ : આપણે A = IA (અથવા A = AI) પર એક અથવા વધારે હાર (સ્તંભ) સંક્ષેપનનું પ્રયોજન કરતાં કોઈક વખત, જો ડાબી બાજુના પરિવર્તિત શ્રેણિકની એક અથવા વધારે હારમાં બધા જ શૂન્ય મળે, તો A^{-1} નું અસ્તિત્વ નથી.

3.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : જેના ઘટકો $a_{ij} = e^{2ix} \sin jx$ થી મળતા હોય, તેવો શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{2\times2}$ રચો.

ઉકેલ : $i = 1, j = 1,$ માટે $a_{11} = e^{2x} \sin x$

$i = 1, j = 2,$ માટે $a_{12} = e^{2x} \sin 2x$

$i = 2, j = 1,$ માટે $a_{21} = e^{4x} \sin x$

$i = 2, j = 2,$ માટે $a_{22} = e^{4x} \sin 2x$

આમ, $A = \begin{bmatrix} e^{2x}\sin x & e^{2x}\sin 2x \\ e^{4x}\sin x & e^{4x}\sin 2x \end{bmatrix}$

ઉદાહરણ 2 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ હોય, તો

A + B, B + C, C + D અને B + D માંથી કયો સરવાળો વ્યાખ્યાયિત છે ?

ઉકેલ : સમાન કક્ષા ધરાવતા શ્રેણિકોનો સરવાળો શક્ય હોવાથી, માત્ર B + D જ વ્યાખ્યાયિત છે.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે, જો કોઈ શ્રેણિક સંમિત અને વિસંમિત બંને હોય, તો તે શ્રેણિક શૂન્ય શ્રેણિક છે.

ઉકેલ : ધારો કે શ્રેણિક $A = [a_{ij}]$ સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિક બંને છે.

શ્રેણિક A વિસંમિત શ્રેણિક હોવાથી, $A' = -A$.

આમ, પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = -a_{ji}$ થાય. (1)

ફરીથી, A સંમિત શ્રેણિક હોવાથી, $A' = A$.

આમ, પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ji} = a_{ij}$ (2)

(1) અને (2) પરથી, પ્રત્યેક i અને j માટે $a_{ij} = -a_{ij}$ મળે.

અથવા $2a_{ij} = 0$,

તેથી પ્રત્યેક i અને j માટે, $a_{ij} = 0$. આથી A શૂન્ય શ્રેણિક છે.

બીજી રીત :

$A' = -A$ તથા

$A' = A$ હોવાથી

$A = -A$

$\therefore \quad 2A = 0$

$\therefore \quad A = 0$

ઉદાહરણ 4 : જો $[2x \quad 3]\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 8\end{bmatrix} = O$ હોય, તો x શોધો.

ઉકેલ : $[2x \quad 3]\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 8\end{bmatrix} = O \Rightarrow [2x-9 \quad 4x]\begin{bmatrix}x\\ 8\end{bmatrix} = [0]$

$\therefore\ [2x^2 - 9x + 32x] = [0]$. આથી, $2x^2 + 23x = 0$

$\therefore\ x(2x + 23) = 0$

$\therefore\ x = 0$ અથવા $x = \dfrac{-23}{2}$

ઉદાહરણ 5 : જો 3×3 શ્રેણિક A એ વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોય અને k કોઈ પણ શૂન્યેતર અચળ હોય, તો સાબિત કરો કે kA વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક છે અને $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$.

ઉકેલ : $(kA)\left(\dfrac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k\cdot\dfrac{1}{k}\right)(A \cdot A^{-1}) = 1\ (I) = I$. તે જ રીતે, $\left(\dfrac{1}{k}A^{-1}\right)(kA) = I$

આથી, (kA) નો વ્યસ્ત શ્રેણિક $\left(\dfrac{1}{k}A^{-1}\right)$ છે અથવા $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 6 : જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\ 7 & 3 & 5\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}$ હોય, તો A ને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : જો $A = \begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\ 7 & 3 & 5\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}$, તો $A' = \begin{bmatrix}2 & 7 & 1\\ 4 & 3 & -2\\ -6 & 5 & 4\end{bmatrix}$ થાય.

આથી, $$\frac{A+A'}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 11 & -5\\ 11 & 6 & 3\\ -5 & 3 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & \frac{11}{2} & \frac{-5}{2}\\ \frac{11}{2} & 3 & \frac{3}{2}\\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 4\end{bmatrix}$$

અને $$\frac{A-A'}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -3 & -7\\ 3 & 0 & 7\\ 7 & -7 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{2}\\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2}\\ \frac{7}{2} & \frac{-7}{2} & 0\end{bmatrix}$$

માટે, $$\frac{A+A'}{2} + \frac{A-A'}{2} = \begin{bmatrix}2 & \frac{11}{2} & \frac{-5}{2}\\ \frac{11}{2} & 3 & \frac{3}{2}\\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{2}\\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2}\\ \frac{7}{2} & \frac{-7}{2} & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\ 7 & 3 & 5\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix} = A$$

ઉદાહરણ 7 : જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, તો શ્રેણિક A એ $A^3 - 4A^2 - 3A + 11I = O$ સમીકરણનું સમાધાન કરે તેમ દર્શાવો. (આને Cayley Hamilton પ્રમેયનું પરિણામ કહે છે.)

ઉકેલ : $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+6+2 & 3+0+4 & 2-3+6 \\ 2+0-1 & 6+0-2 & 4+0-3 \\ 1+4+3 & 3+0+6 & 2-2+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

અને $A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9+14+5 & 27+0+10 & 18-7+15 \\ 1+8+1 & 3+0+2 & 2-4+3 \\ 8+18+9 & 24+0+18 & 16-9+27 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 37 & 26 \\ 10 & 5 & 1 \\ 35 & 42 & 34 \end{bmatrix}$$

હવે, $A^3 - 4A^2 - 3A + 11(I)$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 37 & 26 \\ 10 & 5 & 1 \\ 35 & 42 & 34 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28-36-3+11 & 37-28-9+0 & 26-20-6+0 \\ 10-4-6+0 & 5-16+0+11 & 1-4+3+0 \\ 35-32-3+0 & 42-36-6+0 & 34-36-9+11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

ઉદાહરણ 8 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 - 4A + 7I = O$ સાબિત કરો. આ પરિણામનો ઉપયોગ કરી A^5 ની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ $-4A = \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$ અને $7I = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

આથી, $A^2 - 4A + 7I = \begin{bmatrix} 1-8+7 & 12-12+0 \\ -4+4+0 & 1-8+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

$\therefore \quad A^2 = 4A - 7I = O$

આમ, $A^3 = A \cdot A^2 = A\,(4A - 7I) = 4\,(4A - 7I) - 7A = 16A - 28I - 7A = 9A - 28I$

અને તેથી, $A^5 = A^3A^2$

$= (9A - 28I)\,(4A - 7I)$

$= 36A^2 - 63A - 112A + 196I$

$= 36\,(4A - 7I) - 175A + 196I$

$= -31A - 56I$

$= -31\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 56\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -118 & -93 \\ 31 & -118 \end{bmatrix}$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી 9 થી 12 ક્રમાંકવાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 9 : જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $(A + B)\,(A - B) =$ ....

(A) $A^2 - B^2$ (B) $A^2 - BA - AB - B^2$

(C) $A^2 - B^2 + BA - AB$ (D) $A^2 - BA + B^2 + AB$

ઉકેલ : $(A + B)\,(A - B) = A\,(A - B) + B\,(A - B)$

$= A^2 - AB + BA - B^2$

સાચો જવાબ (C) છે.

ઉદાહરણ 10 : જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ હોય, તો...

(A) માત્ર AB વ્યાખ્યાયિત છે. (B) માત્ર BA વ્યાખ્યાયિત છે.

(C) AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત છે. (D) AB અને BA બંને પૈકી કોઈ પણ વ્યાખ્યાયિત નથી.

ઉકેલ : શ્રેણિકો $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$ અને $B = [b_{ij}]_{3\times 2}$ છે, આથી, AB અને BA બંને વ્યાખ્યાયિત છે.

સાચો જવાબ (C) છે.

ઉદાહરણ 11 : શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો A .... છે.

(A) અદિશ શ્રેણિક (B) વિકર્ણ શ્રેણિક (C) એકમ શ્રેણિક (D) ચોરસ શ્રેણિક

ઉકેલ : સાચો જવાબ (D) છે.

ઉદાહરણ 12 : જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા સંમિત શ્રેણિકો હોય, તો $(AB' - BA')$ .... છે.

(A) વિસંમિત શ્રેણિક (B) શૂન્ય શ્રેણિક

(C) સંમિત શ્રેણિક (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $(AB' - BA')' = (AB')' - (BA')'$

$= (BA' - AB')$

$= -(AB' - BA')$

સાચો જવાબ (A) છે.

નીચેનાં વિધાન ક્રમાંક 13 થી 15 વાળા સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 13 : A અને B બંને સમાન કક્ષાવાળા વિસંમિત શ્રેણિકો છે. જો .... હોય, તો AB સંમિત શ્રેણિક છે.

ઉકેલ : $AB = BA$

$(AB)' = B'A' = (-B)(-A) = BA$

$\therefore$ AB સંમિત હોવા માટે $(AB)' = AB \Leftrightarrow AB = BA$

ઉદાહરણ 14 : જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા શ્રેણિકો હોય, તો $(3A - 2B)' =$ ....

ઉકેલ : $3A' - 2B'$

ઉદાહરણ 15 : જો શ્રેણિકોની કક્ષા .... હોય, તો શ્રેણિકોનો સરવાળો વ્યાખ્યાયિત છે.

ઉકેલ : સમાન

નીચેના ક્રમાંક 16 થી 19 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

ઉદાહરણ 16 : જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા શ્રેણિકો હોય, તો $2A + B = B + 2A$.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 17 : શ્રેણિકોની બાદબાકી જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે.

ઉકેલ : અસત્ય

ઉદાહરણ 18 : સામાન્ય શ્રેણિક A માટે, $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

ઉકેલ : સત્ય. $AA^{-1} = I$. આથી, $(A^{-1})'A' = I$. આથી $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

ઉદાહરણ 19 : સમાન કક્ષાવાળા કોઈ પણ ત્રણ શ્રેણિકો માટે, $AB = AC \Rightarrow B = C$.

ઉકેલ : અસત્ય

સ્વાધ્યાય 3.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. જો શ્રેણિકને 28 ઘટકો હોય, તો શ્રેણિક માટે કેટલી કક્ષાઓ શક્ય છે ? જો 13 ઘટકો હોય, તો કેટલી કક્ષા થાય ?

2. જો શ્રેણિક A = $\begin{bmatrix} a & 1 & x \\ 2 & \sqrt{3} & x^2 - y \\ 0 & 5 & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) શ્રેણિક A ની કક્ષા જણાવો.

(ii) શ્રેણિક A ના ઘટકોની સંખ્યા જણાવો.

(iii) ઘટકો a_{23}, a_{31}, a_{12} લખો.

3. એવો શ્રેણિક A = $[a_{ij}]_{2 \times 2}$ રચો, જ્યાં,

(i) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$

(ii) $a_{ij} = |-2i + 3j|$ હોય.

4. જેના સભ્યો $a_{ij} = e^{i.x} sin\, jx$ થી મળે તેવો 3×2 શ્રેણિક રચો.

5. જો A = $\begin{bmatrix} a+4 & 3b \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2a+2 & b^2+2 \\ 8 & b^2-5b \end{bmatrix}$ માટે A = B હોય, તો a અને b નાં મૂલ્ય શોધો.

6. જો શ્રેણિકો A = $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ અને B = $\begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & 6 \end{bmatrix}$નો સરવાળો શક્ય હોય, તો શોધો.

7. જો X = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ અને Y = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) X +Y (ii) 2X – 3Y અને

(iii) X + Y + Z શૂન્ય શ્રેણિક થાય તેવો શ્રેણિક Z શોધો.

8. સમીકરણ $x\begin{bmatrix} 2x & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 8 & 5x \\ 4 & 4x \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} (x^2+8) & 24 \\ 10 & 6x \end{bmatrix}$નું સમાધાન કરે તેવો શૂન્યેતર x શોધો.

9. જો A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ અને B = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો દર્શાવો કે $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$.

10. જો $[1 \;\; x \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$ હોય, તો x નું મૂલ્ય શોધો.

11. સાબિત કરો કે A = $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ સમીકરણ $A^2 - 3A - 7I = O$ નું સમાધાન કરે છે અને તે પરથી A^{-1} શોધો.

12. સમીકરણ$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$નું સમાધાન કરે તેવો શ્રેણિક A શોધો.

13. જો $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો A શોધો.

14. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો $(BA)^2 \neq B^2A^2$ ચકાસો.

15. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ માટે શક્ય હોય, તો BA અને AB શોધો.

16. $A \neq O$, $B \neq O$ પરંતુ, $AB = O$ થાય તેવું એક ઉદાહરણ આપો.

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો $(AB)' = B'A'$ થશે ?

18. x અને y માટે ઉકેલો :

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -11 \end{bmatrix} = O.$$

19. સમીકરણ $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $3X + 2Y = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ નો ઉકેલ મેળવી 2×2 શ્રેણિકો X અને Y શોધો.

20. જો $A = [3 \quad 5]$, $B = [7 \quad 3]$, હોય, તો $AC = BC$ થાય તેવો શૂન્યેતર શ્રેણિક C શોધો.

21. શ્રેણિકો A, B અને C નાં એવાં ઉદાહરણો આપો કે જેથી $AB = AC$ થાય, પરંતુ $B \neq C$ અને A શૂન્યેતર શ્રેણિક હોય.

22. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો ચકાસો કે,

(i) $(AB)C = A(BC)$ (ii) $A(B + C) = AB + AC$.

23. જો $P = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ અને $Q = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$PQ = \begin{bmatrix} xa & 0 & 0 \\ 0 & yb & 0 \\ 0 & 0 & zc \end{bmatrix} = QP.$$

24. જો $[2 \quad 1 \quad 3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = A$ હોય, તો A શોધો.

25. જો $A = [2 \quad 1]$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A(B + C) = (AB + AC)$ ચકાસો.

26. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 + A = A(A + I)$ ચકાસો, જ્યાં I એ 3×3 એકમ શ્રેણિક છે.

27. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) $(A')' = A$

(ii) $(AB)' = B'A'$

(iii) $(kA)' = (kA')$ ચકાસો.

28. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો

(i) $(2A + B)' = 2A' + B'$

(ii) $(A - B)' = A' - B'$ ચકાસો.

29. કોઈ પણ શ્રેણિક A માટે સાબિત કરો કે $A'A$ અને AA' સંમિત શ્રેણિક છે.

30. 3×3 કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે $(AB)^2 = A^2B^2$ થઈ શકે ? કારણ આપો.

31. $AB = BA$ થાય તેવા ચોરસ શ્રેણિકો A અને B હોય, તો $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ સાબિત કરો.

32. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ અને $a = 4$, $b = -2$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $A(BC) = (AB)C$

(c) $(a + b)B = aB + bB$

(d) $a(C-A) = aC - aA$

(e) $(A^T)^T = A$

(f) $(bA)^T = b\,A^T$

(g) $(AB)^T = B^T A^T$

(h) $(A - B)C = AC - BC$

(i) $(A - B)^T = A^T - B^T$

33. જો $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ સાબિત કરો.

34. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ અને $x^2 = -1$ હોય, તો $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ સાબિત કરો.

35. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ હોય, તો ચકાસો કે, $A^2 = I$.

36. જો $n \in \mathbf{N}$ હોય, તો કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી $(A')^n = (A^n)'$ સાબિત કરો.

37. જો શક્ય હોય, તો હાર સંક્ષેપન પદ્ધતિથી નીચેના શ્રેણિકોના વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

38. જો $\begin{bmatrix} xy & 4 \\ z+6 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & w \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ હોય, તો x, y, z અને w નાં મૂલ્ય શોધો.

39. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ હોય, તો $3A + 5B + 2C$ શૂન્ય શ્રેણિક બને તેવો શ્રેણિક C મેળવો.

40. જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 - 5A - 14I$ શોધો. તે પરથી A^3 મેળવો.

41. જો $3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો a, b, c અને d નાં મૂલ્ય શોધો.

42. જો $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$ હોય, તો શ્રેણિક A શોધો.

43. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 + 2A + 7I$ શોધો.

44. જો $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ અને $A^{-1} = A'$ હોય, તો α નું મૂલ્ય શોધો.

45. જો શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 0 & a & 3 \\ 2 & b & -1 \\ c & 1 & 0 \end{bmatrix}$ વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો a, b અને c શોધો.

46. જો $P(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

$P(x) \cdot P(y) = P(x + y) = P(y) \cdot P(x)$.

47. જો $A^2 = A$ થાય, તેવો ચોરસ શ્રેણિક A હોય, તો $(I + A)^3 = 7A + I$ સાબિત કરો.

48. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક તથા B વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો સાબિત કરો કે $A'BA$ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

49. કોઈ પણ બે ચોરસ શ્રેણિક માટે $AB = BA$ હોય, તો ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી $(AB)^n = A^n B^n$ સાબિત કરો.

50. જો $A=\begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ એ $A' = A^{-1}$ નું સમાધાન કરે, તો x, y, z શોધો.

51. જો શક્ય હોય, તો હાર સંક્ષેપન પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી નીચેના શ્રેણિકોના વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો :

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

52. શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

નીચેનાં ક્રમાંક 53 થી 67 વાળા વિધાન સત્ય બને તે રીતે ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ઉત્તર આપો :

53. શ્રેણિક $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ એ .... છે.

(A) ચોરસ શ્રેણિક (B) વિકર્ણ શ્રેણિક

(C) એકમ શ્રેણિક (D) $m \times n$ શ્રેણિક છે, જ્યાં $m \neq n$

54. પ્રત્યેક ઘટક 2 અથવા 0 હોય તેવા 3×3 કક્ષાવાળા શક્ય શ્રેણિકોની સંખ્યા .... છે.

(A) 9 (B) 27 (C) 81 (D) 512

55. જો $\begin{bmatrix} 2x+y & 4x \\ 5x-7 & 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7y-13 \\ y & x+6 \end{bmatrix}$ હોય, તો x; y ની કિંમત શોધો.

(A) $x = 3$, $y = 1$ (B) $x = 2$, $y = 3$ (C) $x = 2$, $y = 4$ (D) $x = 3$, $y = 3$

56. જો $A = \frac{1}{\pi}\begin{bmatrix} sin^{-1}(x\pi) & tan^{-1}\left(\frac{x}{\pi}\right) \\ sin^{-1}\left(\frac{x}{\pi}\right) & cot^{-1}(\pi x) \end{bmatrix}$, $B = \frac{1}{\pi}\begin{bmatrix} -cos^{-1}(x\pi) & tan^{-1}\left(\frac{x}{\pi}\right) \\ sin^{-1}\left(\frac{x}{\pi}\right) & -tan^{-1}(\pi x) \end{bmatrix}$ હોય, તો $A - B =$ ....

(A) I (B) O (C) 2I (D) $\frac{1}{2}$I

57. જો A અને B અનુક્રમે $3 \times m$ અને $3 \times n$ કક્ષાવાળા શ્રેણિક હોય તથા $m = n$ હોય, તો શ્રેણિક $(5A - 2B)$ ની કક્ષા .... થાય.

(A) $m \times 3$ (B) 3×3 (C) $m \times n$ (D) $3 \times n$

58. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો $A^2 =$ ....

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

59. જો શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, $i \neq j$ માટે $a_{ij} = 1$ અને $i = j$ માટે $a_{ij} = 0$ હોય, તો $A^2 =$ ....

(A) I (B) A (C) 0 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

60. શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ એ .... છે.

(A) એકમ શ્રેણિક (B) સંમિત શ્રેણિક (C) વિસંમિત શ્રેણિક (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

61. શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 8 \\ 5 & 0 & 12 \\ -8 & -12 & 0 \end{bmatrix}$ એ .... છે.

(A) વિકર્ણ શ્રેણિક (B) સંમિત શ્રેણિક (C) વિસંમિત શ્રેણિક (D) અદિશ શ્રેણિક

62. જો $m \times n$ કક્ષાવાળા શ્રેણિક A અને કોઈક શ્રેણિક B માટે AB' અને $B'A$ બંને વ્યાખ્યાયિત હોય, તો B ની કક્ષા .... છે.

(A) $m \times m$ (B) $n \times n$ (C) $n \times m$ (D) $m \times n$

63. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા શ્રેણિકો હોય, તો $(AB'-BA')$ એ .... છે.

(A) વિસંમિત શ્રેણિક (B) શૂન્ય શ્રેણિક (C) સંમિત શ્રેણિક (D) એકમ શ્રેણિક

64. જો $A^2 = I$ થાય તેવો ચોરસ શ્રેણિક A હોય, તો $(A - I)^3 + (A + I)^3 - 7A =$ ....

(A) A (B) $I - A$ (C) $I + A$ (D) 3A

65. કોઈ પણ જો શ્રેણિકો A અને B માટે ....

(A) $AB = BA$ (B) $AB \neq BA$ (C) $AB = O$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

66. શ્રેણિક સમીકરણ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ માં સ્તંભ સંક્ષેપન ક્રિયા $C_2 \to C_2 - 2C_1$ નો ઉપયોગ કરતાં .... મળે.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

67. શ્રેણિક સમીકરણ $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ માં હાર સંક્ષેપન ક્રિયા $R_1 \to R_1 - 3R_2$ નો ઉપયોગ કરતાં .... મળે.

(A) $\begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

નીચેનાં ક્રમાંક 68 થી 81 વાળા વિધાન સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

68. .... શ્રેણિક સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિક છે.

69. બે વિસંમિત શ્રેણિકનો સરવાળો હંમેશાં .... શ્રેણિક હોય છે.

70. શ્રેણિકને .... વડે ગુણવાથી તેનો વિરોધી શ્રેણિક મળે છે.

71. કોઈ પણ શ્રેણિકને .... અદિશ વડે ગુણવાથી શૂન્ય શ્રેણિક મળે છે.

72. જે શ્રેણિક ચોરસ શ્રેણિક નથી, તે શ્રેણિકને .... શ્રેણિક કહે છે.

73. શ્રેણિકોનો ગુણાકાર એ સરવાળા પરત્વે .... ના નિયમનું પાલન કરે છે.

74. જો A સંમિત શ્રેણિક હોય, તો A^3 .... શ્રેણિક છે.

75. જો A વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો A^2 .... શ્રેણિક છે.

76. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો

(i) $(AB)' =$ ....

(ii) $(kA)' =$ .... (k કોઈ પણ અચળ છે.)

(iii) $[k(A - B)]' =$ ....

77. જો A વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો kA .... છે. (k કોઈ પણ અચળ છે.)

78. જો A અને B સંમિત શ્રેણિક હોય, તો

(i) $AB - BA$ ....

(ii) $BA - 2AB$ ....

79. જો A સંમિત હોય, તો $B'AB$ .... છે.

80. A અને B સમાન કક્ષાવાળા સંમિત શ્રેણિક છે. જો .... તો અને તો જ AB સંમિત છે.

81. હાર સંક્ષેપનથી A^{-1} શોધવા માટે એક અથવા વધારે હાર-પ્રક્રિયાઓ પ્રયોજતાં, આપણને એક અથવા વધારે હારમાં બધાં જ શૂન્ય મળે, તો A^{-1} ....

નીચેના ક્રમાંક 82 થી 101 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

82. શ્રેણિક એ સંખ્યા દર્શાવે છે.

83. કોઈ પણ કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો સરવાળો શક્ય છે.

84. જો બે શ્રેણિકોની હારની સંખ્યા સમાન હોય તથા સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય, તો તે બે શ્રેણિક સમાન છે.

85. ભિન્ન કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો તફાવત શક્ય નથી.

86. શ્રેણિકો સરવાળા વિશેના જૂથના નિયમ તેમજ ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.

87. શ્રેણિક ગુણાકાર ક્રમના નિયમનું પાલન કરે છે.

88. જે ચોરસ શ્રેણિકના બધા જ ઘટકો 1 હોય તે શ્રેણિકને એકમ શ્રેણિક કહે છે.

89. જો બે શ્રેણિકો A અને B ની કક્ષા સમાન હોય, તો $A + B = B + A$.

90. જો બે શ્રેણિકો A અને B ની કક્ષા સમાન હોય, તો $A - B = B - A$.

91. જો શ્રેણિક AB = O, તો A = O અથવા B = O અથવા A અને B બંને શૂન્ય શ્રેણિક છે.

92. સ્તંભ શ્રેણિકનો પરિવર્ત શ્રેણિક સ્તંભ શ્રેણિક છે.

93. જો A અને B સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો AB = BA.

94. જો સમાન કક્ષાવાળા ત્રણેય શ્રેણિકો સંમિત શ્રેણિક હોય, તો તેમના સરવાળાનો શ્રેણિક સંમિત શ્રેણિક છે.

95. સમાન કક્ષાવાળા કોઈ પણ બે શ્રેણિક માટે $(AB)' = A'B'$.

96. ચોરસ શ્રેણિક ન હોય તેવા બે શ્રેણિકો A અને B માટે જો $(AB)' = B'A'$ હોય, તો A ની હારની સંખ્યા એ B ના સ્તંભની સંખ્યાને સમાન છે અને A ના સ્તંભની સંખ્યા એ B ની હારની સંખ્યાને સમાન છે.

97. જો A, B અને C સમાન કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો AB = AC પરથી હંમેશાં B = C મળે.

98. કોઈ પણ શ્રેણિક A માટે AA' હંમેશાં સંમિત શ્રેણિક છે.

99. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો AB અને BA વ્યાખ્યાયિત તથા સમાન છે.

100. જો A વિસંમિત શ્રેણિક હોય, તો A^2 સંમિત શ્રેણિક છે.

101. A અને B વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોય તથા તે ગુણાકાર પરત્વે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન કરતા હોય, તો $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

પ્રકરણ 4

નિશ્ચાયક

4.1 વિહંગાવલોકન

n કક્ષાવાળા પ્રત્યેક ચોરસ શ્રેણિક A = $[a_{ij}]$ ને નિશ્ચિત રીતે એક સંખ્યા (વાસ્તવિક અથવા સંકર સંખ્યા) સાથે આપણે સાંકળી શકીએ. આ સંખ્યાને શ્રેણિક A નો નિશ્ચાયક કહે છે. તેને det A વડે દર્શાવીએ છીએ. શ્રેણિક A નો (i, j) મો ઘટક a_{ij} છે.

જો $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ હોય, તો શ્રેણિક A ના | A | (અથવા det A) વડે દર્શાવાતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$ થાય.

નોંધ :

(i) માત્ર ચોરસ શ્રેણિકને જ નિશ્ચાયક હોય છે.

(ii) શ્રેણિક A માટે, | A | ને A નો નિશ્ચાયક વાંચીશું. તેને માનાંક A વાંચીશું નહિ.

4.1.1 એક કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

એક કક્ષાવાળા શ્રેણિક A = $[a]$ માટે A ના નિશ્ચાયકને a વડે વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

4.1.2 બે કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

જો બે કક્ષાવાળો શ્રેણિક $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ આપેલ હોય, તો A નો નિશ્ચાયક det (A) = | A | = $ad - bc$ વડે વ્યાખ્યાયિત છે.

4.1.3 ત્રણ કક્ષાવાળા શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક

ત્રણ કક્ષાવાળા શ્રેણિકના નિશ્ચાયકને બે કક્ષાવાળા નિશ્ચાયકમાં દર્શાવીને તેનું મૂલ્ય મેળવવામાં આવે છે. આ પદ્ધતિ હાર (અથવા સ્તંભ)થી નિશ્ચાયકના વિસ્તરણ તરીકે જાણીતી છે. 3 કક્ષાવાળા નિશ્ચાયકનું વિસ્તરણ ત્રણ હાર (R_1, R_2 અને R_3) અને ત્રણ સ્તંભ (C_1, C_2 અને C_3) એમ છ પ્રકારે કરી શકાય છે તથા દરેક પ્રકારમાં સમાન મૂલ્ય મળે છે.

ચોરસ શ્રેણિક $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ નો નિશ્ચાયક

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ લઈ

| A | નું C_1 થી વિસ્તરણ કરતાં,

$$|A| = a_{11}\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) - a_{21}\,(a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{32}) + a_{31}\,(a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22})$$

નોંધ : વ્યાપક રીતે, n કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે, જો $A = kB$ હોય, તો $|A| = k^n |B|$ થાય, $n = 1, 2, 3$.

4.1.4 નિશ્ચાયકના ગુણધર્મો

કોઈ પણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે $|A|$ નીચેના ગુણધર્મોનું સમાધાન કરે છે :

(i) A ના પરિવર્ત શ્રેણિક A′ માટે, $|A'| = |A|$.

(ii) જો આપણે કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ)ની અદલબદલ કરીએ, તો નિશ્ચાયકના મૂલ્યનું ચિહ્ન બદલાય છે.

(iii) જો નિશ્ચાયકની કોઈ પણ બે હાર (સ્તંભ) સમાન (અથવા પ્રમાણમાં) હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

(iv) નિશ્ચાયકને સંખ્યા k વડે ગુણવો એટલે કે કોઈ પણ એક હાર (અથવા એક સ્તંભ)ના ઘટકોને k વડે ગુણવા.

(v) જો આપણે નિશ્ચાયકની કોઈ એક હાર (અથવા સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકને અચળ k વડે ગુણીએ, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય k ગણું થશે.

(vi) જો નિશ્ચાયકની હાર (અથવા સ્તંભ)ના ઘટકોને બે અથવા વધારે સંખ્યાના સરવાળા તરીકે દર્શાવેલ હોય, તો આપેલા નિશ્ચાયકને બે અથવા વધારે નિશ્ચાયકના સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય છે.

(vii) જો નિશ્ચાયકની એક હાર (અથવા એક સ્તંભ)ના પ્રત્યેક ઘટકમાં અન્ય હાર (અથવા સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોને સમાન ગુણક વડે ગુણીને ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય સમાન રહે છે.

નોંધ :

(i) જો નિશ્ચાયકની કોઈ એક હાર (અથવા સ્તંભ)ના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

(ii) જો નિશ્ચાયકમાં $x = \alpha$ મૂકતાં નિશ્ચાયક 'Δ' નું મૂલ્ય શૂન્ય થાય, તો 'Δ' નો એક અવયવ $x - \alpha$ છે.

(iii) જો નિશ્ચાયકમાં વિકર્ણની ઉપરના અને વિકર્ણની નીચેના બધા જ ઘટકો શૂન્ય હોય, તો નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય એ વિકર્ણના ઘટકોનો ગુણાકાર થશે.

4.1.5 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

(x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ નો માનાંક છે.

4.1.6 ઉપનિશ્ચાયક અને સહઅવયવો

(i) શ્રેણિક A ના નિશ્ચાયકની i મી હાર અને j મા સ્તંભને દૂર કરતાં મળતા નિશ્ચાયકને ઘટક a_{ij} નો ઉપનિશ્ચાયક કહે છે. તેને M_{ij} વડે દર્શાવાય છે.

(ii) $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ને ઘટક a_{ij} નો સહઅવયવ કહે છે.

(iii) શ્રેણિક A ના નિશ્ચાયકની કોઈ પણ એક હાર (અથવા એક સ્તંભ)ના ઘટકોને તેમના અનુરૂપ ઘટકોના સહઅવયવ વડે ગુણીને ઉમેરતાં નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે,

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}.$$

(iv) કોઈ એક હાર (અથવા સ્તંભ)ના ઘટકોને બીજી કોઈ પણ હાર (અથવા સ્તંભ)ના અનુરૂપ ઘટકોના સહઅવયવ વડે ગુણીને ઉમેરતાં તેમનો સરવાળો શૂન્ય થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે,

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0.$$

4.1.7 શ્રેણિકનો સહઅવયવજ શ્રેણિક અને વ્યસ્ત શ્રેણિક

(i) ચોરસ શ્રેણિક A = $[a_{ij}]_{n\times n}$ ના ઘટકો a_{ij} ના સહઅવયવો A_{ij} થી બનતા શ્રેણિક $[A_{ij}]_{n\times n}$ ના પરિવર્ત શ્રેણિકને A નો સહઅવયવજ શ્રેણિક કહે છે. તેને *adj* A વડે દર્શાવાય છે.

જો $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ હોય, તો $adj\ A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$ થાય, જ્યાં ઘટક a_{ij} નો સહઅવયવ A_{ij} છે.

(ii) n કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિક A માટે $A(adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\ I$.

(iii) ચોરસ શ્રેણિક A માટે, જો $|A| = 0$ અથવા $|A| \neq 0$ હોય, તદ્નુસાર શ્રેણિક A ને અસામાન્ય અથવા સામાન્ય શ્રેણિક કહેવાય.

(iv) જો સામાન્ય ચોરસ શ્રેણિક A ની કક્ષા n હોય, તો $|adj\ A| = |A|^{n-1}$ થાય.

(v) જો સમાન કક્ષાવાળા શ્રેણિક A અને B સામાન્ય હોય, તો AB અને BA પણ સમાન કક્ષાવાળા સામાન્ય શ્રેણિક છે.

(vi) બે શ્રેણિકના ગુણાકારનો નિશ્ચાયક એ તેમના અનુરૂપ શ્રેણિકના નિશ્ચાયકના ગુણાકારને સમાન છે, એટલે કે, $|AB| = |A||B|$.

(vii) ચોરસ શ્રેણિકો A અને B માટે, જો AB = BA = I થાય, તો શ્રેણિક B ને શ્રેણિક A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક કહે છે અને તેને $B = A^{-1}$ વડે લખાય છે. વળી, $B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$ થાય.

(viii) જો ચોરસ શ્રેણિક A સામાન્ય શ્રેણિક હોય, તો અને તો જ શ્રેણિક A વ્યસ્તસંપન્ન છે.

(ix) જો શ્રેણિક A વ્યસ્તસંપન્ન હોય, તો $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A)$.

4.1.8 સુરેખ સમીકરણની સંહતિ

(i) સમીકરણ સંહતિ

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \text{ માટે,}$$

$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ લઈએ, તો ઉપરનાં સમીકરણોને શ્રેણિક સ્વરૂપમાં AX = B થી દર્શાવાય છે.

(ii) જો $|A| \neq 0$ હોય, તો સમીકરણ AX = B નો અનન્ય ઉકેલ $X = A^{-1}B$ છે.

(iii) સમીકરણ સંહતિનો ઉકેલ મળે છે અથવા મળતો નથી, તેને અનુરૂપ સમીકરણ સંહતિ સુસંગત છે અથવા સુસંગત નથી તે કહી શકાય.

(iv) શ્રેણિક સમીકરણ AX = B ના ચોરસ શ્રેણિક A માટે,

(a) જો $|A| \neq 0$, તો સમીકરણના અનન્ય ઉકેલનું અસ્તિત્વ છે.

(b) જો $|A| = 0$ અને $(adj\ A)\ B \neq O$, તો સમીકરણનો ઉકેલ મળશે નહિ.

(c) જો $|A| = 0$ અને $(adj\ A)\ B = O$, તો સમીકરણ સંહતિ સુસંગત હોય કે ન પણ હોય.

4.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : જો $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$ હોય, તો x શોધો.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$

$\therefore \quad 2x^2 - 40 = 18 - 40 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\ 3$

ઉદાહરણ 2 : જો $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\Delta + \Delta_1 = 0$.

ઉકેલ : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & zx & xy \\ x & y & z \end{vmatrix}$

હાર અને સ્તંભની અદલબદલ કરતાં,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & yz & x \\ 1 & zx & y \\ 1 & xy & z \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x & xyz & x^2 \\ y & xyz & y^2 \\ z & xyz & z^2 \end{vmatrix} \qquad (R_1(x),\ R_2(y),\ R_3(z) \text{ કરતાં})$$

$$= \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ y & 1 & y^2 \\ z & 1 & z^2 \end{vmatrix} \qquad (C_2 \text{ માંથી } xyz \text{ સામાન્ય લેતાં})$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \qquad (C_1 \text{ અને } C_2\text{ની અદલબદલ કરતાં})$$

$$= -\Delta$$

$\therefore \quad \Delta_1 + \Delta = 0$

નોંધ : જો x, y, z પૈકી એક કે વધુ શૂન્ય હોય તો ?

ઉદાહરણ 3 : વિસ્તરણ કર્યા સિવાય, સાબિત કરો કે, $\Delta = \begin{vmatrix} cosec^2\theta & cot^2\theta & 1 \\ cot^2\theta & cosec^2\theta & -1 \\ 42 & 40 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

ઉકેલ : $C_1 \rightarrow C_1 - C_2 - C_3$ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} cosec^2\theta - cot^2\theta - 1 & cot^2\theta & 1 \\ cot^2\theta - cosec^2\theta + 1 & cosec^2\theta & -1 \\ 0 & 40 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & cot^2\theta & 1 \\ 0 & cosec^2\theta & -1 \\ 0 & 40 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે, $\Delta = \begin{vmatrix} x & p & q \\ p & x & q \\ q & q & x \end{vmatrix} = (x - p)\ (x^2 + px - 2q^2)$

ઉકેલ : $C_1 \to C_1 - C_2$ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-p & p & q \\ p-x & x & q \\ 0 & q & x \end{vmatrix} = (x-p)\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ -1 & x & q \\ 0 & q & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-p)\begin{vmatrix} 0 & p+x & 2q \\ -1 & x & q \\ 0 & q & x \end{vmatrix}$$ **$R_1 \to R_1 + R_2$ કરતાં,**

C_1 થી વિસ્તરણ કરતાં, $\Delta = (x-p)(px + x^2 - 2q^2) = (x-p)(x^2 + px - 2q^2)$

ઉદાહરણ 5 : જો $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix}$ હોય, તો દર્શાવો કે $\Delta = 0$.

ઉકેલ : હાર અને સ્તંભની અદલબદલ કરતાં, $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a-c \\ b-a & 0 & b-c \\ c-a & c-b & 0 \end{vmatrix}$

R_1, R_2 અને R_3 માંથી -1 સામાન્ય લેતાં,

$$\Delta = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix} = -\Delta$$

$\therefore\ 2\Delta = 0$ અથવા $\Delta = 0$

નોંધ : અયુગ્મ કક્ષાના વિસંમિત શ્રેણિકનો નિશ્ચાયક શૂન્ય છે તેમ આ રીતે સાબિત કરી શકાય.

ઉદાહરણ 6 : જો A વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોય, તો સાબિત કરો કે $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

ઉકેલ : A વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોવાથી, A સામાન્ય શ્રેણિક છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $|A| = |A'|$.

પરંતુ, $|A| \neq 0$. આથી, $|A'| \neq 0$ અર્થાત્ A' વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક છે.

હવે આપણે જાણીએ છીએ કે, $AA^{-1} = A^{-1} A = I$.

બંને તરફ પરિવર્ત શ્રેણિક લેતાં, $(A^{-1})' A' = A'(A^{-1})' = (I)' = I$

આથી, A' નો વ્યસ્ત શ્રેણિક $(A^{-1})'$ છે, અર્થાત્ $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 7 : જો $\Delta = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ નું એક બીજ -4 હોય, તો બીજાં બે બીજ શોધો.

ઉકેલ : $R_1 \to (R_1 + R_2 + R_3)$ પ્રયોજતાં,

$$\begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x+4 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix}$$

R_1 માંથી $(x + 4)$ સામાન્ય લેતાં,

$$\Delta = (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$ પ્રયોજતાં,

$$\Delta = (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

R_1 થી વિસ્તરણ કરતાં,

$\Delta = (x + 4)\ [(x - 1)\ (x - 3) - 0]$.

હવે, $\Delta = 0$

$\therefore$ $x = -4$ અથવા 1 અથવા 3

$\therefore$ અન્ય બીજ 1 તથા 3 છે.

ઉદાહરણ 8 : જો ત્રિકોણ ABC માં $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ \sin A+\sin^2 A & \sin B+\sin^2 B & \sin C+\sin^2 C \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે, Δ ABC સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ છે.

ઉકેલ : ધારો કે, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ \sin A+\sin^2 A & \sin B+\sin^2 B & \sin C+\sin^2 C \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ -\cos^2 A & -\cos^2 B & -\cos^2 C \end{vmatrix} \qquad \mathbf{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+\sin A & \sin B-\sin A & \sin C-\sin B \\ -\cos^2 A & \cos^2 A-\cos^2 B & \cos^2 B-\cos^2 C \end{vmatrix} \qquad \mathbf{(C_3 \to C_3 - C_2 \text{ અને } C_2 \to C_2 - C_1)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+\sin A & \sin B-\sin A & \sin C-\sin B \\ -\cos^2 A & \sin^2 B-\sin^2 A & \sin^2 C-\sin^2 B \end{vmatrix}$$

$$= (\sin B - \sin A)(\sin C - \sin B)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+\sin A & 1 & 1 \\ -\cos^2 A & \sin B+\sin A & \sin C+\sin B \end{vmatrix}$$

[**અન્ય રીત :** R_1 થી વિસ્તરણ કરતાં,

$\Delta = (\sin B - \sin A)(\sin^2 C - \sin^2 B) - (\sin C - \sin B)(\sin^2 B - \sin^2 A)$]

$= (\sin B - \sin A)(\sin C - \sin B)(\sin C - \sin A)$

હવે, $\Delta = 0$

$\Rightarrow \sin B - \sin A = 0$ અથવા $\sin C - \sin B = 0$ અથવા $\sin C - \sin A = 0$

$\therefore$ A = B અથવા B = C અથવા C = A

$\Rightarrow$ A = B અથવા B = C અથવા C = A

અર્થાત્ ત્રિકોણ ABC સમદ્વિભુજ છે.

નોંધ : $A = \pi - B$ એટલે કે $A + B = \pi$ જેવા વિકલ્પો સંભવિત નથી.

ઉદાહરણ 9 : જો $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & \sin 3\theta \\ -7 & 8 & \cos 2\theta \\ -11 & 14 & 2 \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\sin\theta = 0$ અથવા $\frac{1}{2}$.

ઉકેલ : $R_2 \to R_2 + 4R_1$ અને $R_3 \to R_3 + 7R_1$ નું પ્રયોજન કરતાં,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & \sin 3\theta \\ 5 & 0 & \cos 2\theta + 4\sin 3\theta \\ 10 & 0 & 2+7\sin 3\theta \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\ 2\,[5\,(2 + 7\sin 3\theta) - 10\,(\cos 2\theta + 4\sin 3\theta)] = 0$

$\therefore\ 2 + 7\sin 3\theta - 2\cos 2\theta - 8\sin 3\theta = 0$

$\therefore\ 2 - 2\cos 2\theta - \sin 3\theta = 0$

$\therefore\ 2\,(2\sin^2\theta) - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta) = 0$

$\therefore\ \sin\theta\ (4\sin^2\theta + 4\sin\theta - 3) = 0$

$\therefore\ \sin\theta = 0$ અથવા $(2\sin\theta - 1) = 0$ અથવા $(2\sin\theta + 3) = 0$

$\therefore\ \sin\theta = 0$ અથવા $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (શા માટે ?)

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિકલ્પ સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 10 અને 11 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 10 : જો $\Delta = \begin{vmatrix} Ax & x^2 & 1 \\ By & y^2 & 1 \\ Cz & z^2 & 1 \end{vmatrix}$ અને $\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ zy & zx & xy \end{vmatrix}$ હોય, તો...

(A) $\Delta_1 = -\Delta$ (B) $\Delta \neq \Delta_1$

(C) $\Delta - \Delta_1 = 0$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ x & y & z \\ zy & zx & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & x & yz \\ B & y & zx \\ C & z & xy \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} Ax & x^2 & xyz \\ By & y^2 & xyz \\ Cz & z^2 & xyz \end{vmatrix}$$

$$= \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} Ax & x^2 & 1 \\ By & y^2 & 1 \\ Cz & z^2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

સાચો જવાબ (C) છે.

નોંધ : જો x, y, z પૈકી એક કે વધુ શૂન્ય હોય તો ?

ઉદાહરણ 11 : જો $x, y \in \mathbf{R}$ હોય, તો નિશ્ચાયક $\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x & 1 \\ \sin x & \cos x & 1 \\ \cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \end{vmatrix}$ નો વિસ્તાર .... છે.

(A) $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ (B) $[-1, 1]$ (C) $\left[-\sqrt{2}, 1\right]$ (D) $\left[-1, -\sqrt{2}\right]$

ઉકેલ : $R_3 \to R_3 - \cos y\, R_1 + \sin y\, R_2$ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x & 1 \\ \sin x & \cos x & 1 \\ 0 & 0 & \sin y - \cos y \end{vmatrix}$$

R_3 થી વિસ્તરણ કરતાં,

$$\begin{aligned} \Delta &= (\sin y - \cos y)\,(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= (\sin y - \cos y) \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin y - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos y\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\sin y - \sin\frac{\pi}{4}\cos y\right] \\ &= \sqrt{2}\sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

આથી, $-\sqrt{2} \le \Delta \le \sqrt{2}$.

$\sin y - \cos y = a\cos y + b\sin y$

$a = -1,\ b = 1$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

$\therefore$ વિસ્તાર $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

સાચો જવાબ (A) છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 12 થી 14 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 12 : જો A, B, C ત્રિકોણના ખૂણા હોય, તો $\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 B & \cot B & 1 \\ \sin^2 C & \cot C & 1 \end{vmatrix} = ...$

ઉકેલ : $R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$ કરતાં,

$$= \begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin^2 B - \sin^2 A & \cot B - \cot A & 0 \\ \sin^2 C - \sin^2 A & \cot C - \cot A & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sin(B - A)\,\sin(C - A)\begin{vmatrix} \sin^2 A & \cot A & 1 \\ \sin C & \frac{-1}{\sin A \sin B} & 0 \\ \sin B & \frac{-1}{\sin A \sin C} & 0 \end{vmatrix}$$

$(\sin(B + A) = \sin(\pi - C) = \sin C)$ અને $\sin(C + A) = \sin B$

$= 0$

ઉદાહરણ 13 : નિશ્ચાયક $\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{23}+\sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{15}+\sqrt{46} & 5 & \sqrt{10} \\ 3+\sqrt{115} & \sqrt{15} & 5 \end{vmatrix}$ = ...

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{15} & \sqrt{25} & \sqrt{10} \\ \sqrt{9} & \sqrt{15} & \sqrt{25} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sqrt{23} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{46} & \sqrt{25} & \sqrt{10} \\ \sqrt{115} & \sqrt{15} & \sqrt{25} \end{vmatrix}$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{vmatrix} + \sqrt{23}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{5} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{vmatrix} \qquad (C_1 = C_3)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

જવાબ 0 છે.

ઉદાહરણ 14 : નિશ્ચાયક $\Delta = \begin{vmatrix} sin^2 23^\circ & sin^2 67^\circ & cos 180^\circ \\ -sin^2 67^\circ & -sin^2 23^\circ & cos^2 180^\circ \\ cos 180^\circ & sin^2 23^\circ & sin^2 67^\circ \end{vmatrix}$ = ...

ઉકેલ : $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$

$$\begin{vmatrix} sin^2 23^\circ + sin^2 67^\circ + cos 180^\circ & sin^2 67^\circ & cos 180^\circ \\ -sin^2 67^\circ - sin^2 23^\circ + cos^2 180^\circ & -sin^2 23^\circ & cos^2 180^\circ \\ cos 180^\circ + sin^2 23^\circ + sin^2 67^\circ & sin^2 23^\circ & sin^2 67^\circ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & sin^2 67^\circ & cos 180^\circ \\ 0 & -sin^2 23^\circ & cos^2 180^\circ \\ 0 & sin^2 23^\circ & sin^2 67^\circ \end{vmatrix} = 0$$

કારણ કે, $sin^2 23^o + sin^2 67^o + cos\,180^o$

$= sin^2 23^o + cos^2 23^o + cos\,180^o$

$= 1 - 1 = 0$ તે જ રીતે અન્ય માટે.

નીચેના ક્રમાંક 15 થી 18 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

ઉદાહરણ 15 : નિશ્ચાયક $\Delta = \begin{vmatrix} cos(x+y) & -sin(x+y) & cos 2y \\ sin x & cos x & sin y \\ -cos x & sin x & cos y \end{vmatrix}$ માત્ર x થી સ્વતંત્ર છે.

ઉકેલ : $R_1 \to R_1 + sin\,y\,R_2 + cos\,y\,R_3$ કરીને વિસ્તરણ કરતાં, $\Delta = 2cos^2 y$, જે x થી સ્વતંત્ર છે. વિધાન સત્ય છે.

ઉદાહરણ 16 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^nC_1 & {}^{n+2}C_1 & {}^{n+4}C_1 \\ {}^nC_2 & {}^{n+2}C_2 & {}^{n+4}C_2 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય 8 છે.

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n & n+2 & n+4 \\ \frac{n(n-1)}{2} & \frac{(n+2)(n+1)}{2} & \frac{(n+4)(n+3)}{2} \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 2 & 2 \\ n(n-1) & 2(2n+1) & 2(2n+5) \end{vmatrix} \quad C_3 \to C_3 - C_2;\ C_2 \to C_2 - C_1$$

$$= \frac{1}{2}[4(2n + 5) - 4(2n + 1)]$$

$$= 8$$

વિધાન સત્ય છે.

ઉદાહરણ 17 : જો $A=\begin{bmatrix} x & 5 & 2 \\ 2 & y & 3 \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix}$, $xyz = 80$, $3x + 2y + 10z = 20$ હોય, તો

$$A \; adj\, A = \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}$$

ઉકેલ : અસત્ય

કારણ કે, $A \; adj \; A = |A| \; I$, હવે $|A| = x(yz - 3) - 5(2z - 3) + 2(2 - y)$

$$= xyz - 3x - 2y - 10z + 19$$

$$= 80 - 20 + 19 = 79$$

$\therefore \quad A[adj \; A] = 791$

ઉદાહરણ 18 : જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & y & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ હોય, તો $x = 1$, $y = -1$.

ઉકેલ : $A \cdot A^{-1} = I$, જ્યાં $|A| = 2x - 4$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & y & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 1 & 3+3y & 0 \\ \frac{x-1}{2} & 2+xy & \frac{x-1}{2} \\ 0 & y+1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad x = 1, \; y = -1$

વિધાન સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

પ્રશ્નો 1 થી 6 માં નિશ્ચાયકના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરી નિશ્ચાયકનાં મૂલ્ય મેળવો :

1. $\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 0 & xy^2 & xz^2 \\ x^2y & 0 & yz^2 \\ x^2z & zy^2 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 3x & -x+y & -x+z \\ x-y & 3y & z-y \\ x-z & y-z & 3z \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} x+4 & x & x \\ x & x+4 & x \\ x & x & x+4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

પ્રશ્નો 7 થી 9 માં નિશ્ચાયકના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો :

7. $\begin{vmatrix} y^2z^2 & yz & y+z \\ z^2x^2 & zx & z+x \\ x^2y^2 & xy & x+y \end{vmatrix} = 0$

8. $\begin{vmatrix} y+z & z & y \\ z & z+x & x \\ y & x & x+y \end{vmatrix} = 4xyz$

9. $\begin{vmatrix} a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3$

10. જો A + B + C = 0 હોય, તો સાબિત કરો કે, $\begin{vmatrix} 1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & 1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix} = 0$

11. 'a' લંબાઈની બાજુવાળા સમભુજ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) હોય, તો $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \dfrac{3a^4}{4}$.

12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \sin 3\theta \\ -4 & 3 & \cos 2\theta \\ 7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = 0$ નું સમાધાન કરે તેવું θ નું મૂલ્ય શોધો.

13. જો $\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો x શોધો.

14. જો $a_1, a_2, a_3, ..., a_r$ સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો સાબિત કરો કે નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} a_{r+1} & a_{r+5} & a_{r+9} \\ a_{r+7} & a_{r+11} & a_{r+15} \\ a_{r+11} & a_{r+17} & a_{r+21} \end{vmatrix}$ r થી સ્વતંત્ર છે.

15. સાબિત કરો કે a ની કોઈ પણ કિંમત માટે બિંદુઓ $(a + 5, a - 4)$, $(a - 2, a + 3)$ અને (a, a) એક રેખા પર આવેલાં નથી.

16. જો $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\cos A & 1+\cos B & 1+\cos C \\ \cos^2 A+\cos A & \cos^2 B+\cos B & \cos^2 C+\cos C \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો ΔABC સમદ્વિભુજ છે.

17. જો $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ હોય, તો A^{-1} શોધો તથા સાબિત કરો કે, $A^{-1} = \dfrac{A^2-3I}{2}$.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

18. જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો A^{-1} શોધો.

A^{-1} નો ઉપયોગ કરી સુરેખ સમીકરણ સંહતિ $x - 2y = 10$, $2x - y - z = 8$, $-2y + z = 7$ નો ઉકેલ મેળવો.

19. શ્રેણિક પદ્ધતિના ઉપયોગથી સમીકરણ સંહતિ $3x + 2y - 2z = 3$, $x + 2y + 3z = 6$, $2x - y + z = 2$ નો ઉકેલ મેળવો.

20. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો BA શોધો અને તેનો ઉપયોગ કરી સમીકરણ સંહતિ $y + 2z = 7$, $x - y = 3$, $2x + 3y + 4z = 17$ નો ઉકેલ મેળવો.

21. જો $a + b + c \neq 0$ અને $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $a = b = c$.

22. સાબિત કરો કે $\begin{vmatrix} bc-a^2 & ca-b^2 & ab-c^2 \\ ca-b^2 & ab-c^2 & bc-a^2 \\ ab-c^2 & bc-a^2 & ca-b^2 \end{vmatrix}$ એ $a + b + c$ થી વિભાજ્ય છે તથા ભાગફળ શોધો.

23. જો $x + y + z = 0$ હોય, તો $\begin{vmatrix} xa & yb & zc \\ yc & za & xb \\ zb & xc & ya \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ સાબિત કરો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 24 થી 37 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

24. જો $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ હોય, તો x નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 3 (B) $\pm$ 3 (C) $\pm$ 6 (D) 6

25. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} a-b & b+c & a \\ b-c & c+a & b \\ c-a & a+b & c \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $a^3 + b^3 + c^3$ (B) $3\ bc$

(C) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

26. જો $(-3, 0)$, $(3, 0)$ અને $(0, k)$ શિરોબિંદુવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 9 ચોરસ એકમ હોય, તો k નું મૂલ્ય .... હશે.

(A) 9 (B) 3 (C) -9 (D) 6

27. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} b^2-ab & b-c & bc-ac \\ ab-a^2 & a-b & b^2-ab \\ bc-ac & c-a & ab-a^2 \end{vmatrix} =$ ....

(A) $abc\ (b-c)\ (c-a)\ (a-b)$ (B) $(b-c)\ (c-a)\ (a-b)$

(C) $(a+b+c)\ (b-c)\ (c-a)\ (a-b)$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

28. અંતરાલ $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ માં $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \cos x \\ \cos x & \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0$ નાં ભિન્ન વાસ્તવિક બીજની સંખ્યા .... છે.

(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 3

29. જો A, B અને C એ ત્રિકોણના ખૂણા હોય, તો નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} =$ ....

(A) 0 (B) -1

(C) 1 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

30. ધારો કે, $f(t) = \begin{vmatrix} \cos t & t & 1 \\ 2\sin t & t & 2t \\ \sin t & t & t \end{vmatrix}$ હોય, તો $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)}{t^2} =$ ....

(A) 0 (B) -1 (C) 2 (D) 3

31. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta & 1 \\ 1+\cos\theta & 1 & 1 \end{vmatrix}$ નું મહત્તમ મૂલ્ય .... છે. (θ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.)

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{4}$

32. જો $f(x) = \begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix}$ હોય, તો ....

(A) $f(a) = 0$ (B) $f(b) = 0$ (C) $f(0) = 0$ (D) $f(1) = 0$

33. જો $A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ હોય, તો .... માટે A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

(A) $\lambda = 2$ (B) $\lambda \ne 2$

(C) $\lambda \ne -2$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

34. જો A અને B વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોય, તો નીચેનામાંથી કયું અસત્ય છે ?

(A) $adj\ A = |A|.\ A^{-1}$ (B) $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$

(C) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (D) $(A+B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$

35. જો x, y, z શૂન્યેતર હોય અને $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = 0$ હોય, તો $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $x\ y\ z$ (B) $x^{-1}\ y^{-1}\ z^{-1}$ (C) $-x - y - z$ (D) -1

36. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} x & x+y & x+2y \\ x+2y & x & x+y \\ x+y & x+2y & x \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $9x^2\ (x + y)$ (B) $9y^2\ (x + y)$ (C) $3y^2\ (x + y)$ (D) $7x^2\ (x + y)$

37. નિશ્ચાયક $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 4 & 2a \end{vmatrix} = 86$ થાય તેવી a ની બે કિંમતોનો સરવાળો .... છે.

(A) 4 (B) 5 (C) –4 (D) 9

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 38 થી 47 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

38. જો શ્રેણિક A ની કક્ષા 3×3 હોય, તો $|3A|$ = ...

39. 3×3 કક્ષાવાળો શ્રેણિક A વ્યસ્તસંપન્ન શ્રેણિક હોય, તો $|A^{-1}|$ = ...

40. જો $x, y, z \in R$ હોય, તો નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} (2^x+2^{-x})^2 & (2^x-2^{-x})^2 & 1 \\ (3^x+3^{-x})^2 & (3^x-3^{-x})^2 & 1 \\ (4^x+4^{-x})^2 & (4^x-4^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix}$ = ...

41. જો $\cos 2\theta = 0$ હોય, તો $\begin{vmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}^2$ = ...

42. જો શ્રેણિક A ની કક્ષા 3×3 હોય, તો $(A^2)^{-1}$ = ...

43. જો શ્રેણિક A ની કક્ષા 3×3 હોય, તો A ના નિશ્ચાયકના ઉપનિશ્ચાયકની સંખ્યા .... છે.

44. નિશ્ચાયકની કોઈ પણ હારના ઘટકોનો તેમના અનુરૂપ ઘટકોના સહઅવયવો સાથેના ગુણાકારના સરવાળાનું મૂલ્ય .... થાય.

45. જો $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$ નું એક બીજ $x = -9$ હોય, તો બીજાં બે બીજ .... છે.

46. $\begin{vmatrix} 0 & xyz & x-z \\ y-x & 0 & y-z \\ z-x & z-y & 0 \end{vmatrix}$ = ...

47. જો $f(x) = \begin{vmatrix} (1+x)^{17} & (1+x)^{19} & (1+x)^{23} \\ (1+x)^{23} & (1+x)^{29} & (1+x)^{34} \\ (1+x)^{41} & (1+x)^{43} & (1+x)^{47} \end{vmatrix} = \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \ldots$ હોય, તો A = ...

નીચેના ક્રમાંક 48 થી 58 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

48. જો A ચોરસ શ્રેણિક હોય અને $|\mathrm{A}| \neq 0$, તો $\left(\mathrm{A}^3\right)^{-1} = \left(\mathrm{A}^{-1}\right)^3$.

49. a વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને A ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $(a\mathrm{A})^{-1} = \frac{1}{a}\mathrm{A}^{-1}$.

50. $|\mathrm{A}^{-1}| \neq |\mathrm{A}|^{-1}$ જ્યાં, A સામાન્ય શ્રેણિક છે.

51. જો A અને B 3 કક્ષાવાળા શ્રેણિક હોય અને $|\mathrm{A}| = 5$, $|\mathrm{B}| = 3$ હોય, તો

$|3\mathrm{AB}| = 27 \times 5 \times 3 = 405$.

52. જો 3 કક્ષાવાળા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય 12 હોય, તો નિશ્ચાયકના દરેક ઘટકની જગ્યાએ તેમના અનુરૂપ સહઅવયવો મૂકવાથી બનતા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય 144 થશે.

53. જો a, b, c સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix} = 0$.

54. A બે કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક હોય, તો $|adj\,\mathrm{A}| = |\mathrm{A}|^2$.

55. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} \sin\mathrm{A} & \cos\mathrm{A} & \sin\mathrm{A}+\cos\mathrm{B} \\ \sin\mathrm{B} & \cos\mathrm{A} & \sin\mathrm{B}+\cos\mathrm{B} \\ \sin\mathrm{C} & \cos\mathrm{A} & \sin\mathrm{C}+\cos\mathrm{B} \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શૂન્ય છે.

56. પ્રત્યેક ઘટક ફક્ત એક જ પદનું હોય, તેવા બરાબર 3 કક્ષાવાળા k નિશ્ચાયકોમાં $\begin{vmatrix} x+a & p+u & l+f \\ y+b & q+v & m+g \\ z+c & r+w & n+h \end{vmatrix}$ નિશ્ચાયકનું વિભાજન કરવામાં આવે, તો k નું મૂલ્ય 8 છે.

57. જો $\Delta = \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = 16$ હોય, તો $\Delta_1 = \begin{vmatrix} p+x & a+x & a+p \\ q+y & b+y & b+q \\ r+z & c+z & c+r \end{vmatrix} = 32$ થાય.

58. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1+\sin\theta) & 1 \\ 1 & 1 & 1+\cos\theta \end{vmatrix}$ નું મહત્તમ મૂલ્ય $\frac{1}{2}$ છે.

પ્રકરણ **5**

સાતત્ય અને વિકલનીયતા

5.1 વિહંગાવલોકન

5.1.1 કોઈ બિંદુ આગળ વિધેયનું સાતત્ય

ધારો કે વાસ્તવિક વિધેય f એ c ને સમાવતા વાસ્તવિક સંખ્યાઓના અંતરાલ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત છે. $c \in R$. જો $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય અને તે $f(c)$ ની બરાબર હોય એટલે કે, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ હોય, તો f એ $x = c$ આગળ સતત છે તેમ કહેવાય.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

એટલે કે વિસ્તૃત રીતે કહીએ, તો જો વિધેયના ડાબી બાજુના લક્ષ અને જમણી બાજુના લક્ષનું અસ્તિત્વ હોય અને તે બંને $f(c)$ ની બરાબર હોય, તો f એ $x = c$ આગળ સતત છે તેમ કહેવાય.

5.1.2 અંતરાલમાં સાતત્ય

(i) જો વિધેય f એ અંતરાલ (a, b) ના પ્રત્યેક બિંદુએ સતત હોય, તો તે (a, b) માં સતત છે એમ કહેવાય.

(ii) જો f એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત હોય અને

- (a, b) પરનાં બધાં જ બિંદુએ સતત હોય.
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ તો f એ $[a, b]$ માં સતત છે એમ કહેવાય.

5.1.3 સાતત્યનું ભૌમિતિક અર્થઘટન

(i) જો વિધેયનો આલેખ બિંદુ $(c, f(c))$ આગળ તૂટે નહિ, તો વિધેય f એ $x = c$ આગળ સતત છે.

(ii) જો વિધેયનો આલેખ અંતરાલના કોઈ પણ બિંદુ આગળ તૂટે નહિ, તો વિધેય તે અંતરાલમાં સતત છે તેમ કહેવાય.

5.1.4 અસતત હોવું

નીચેના કિસ્સાઓમાં વિધેય f એ $x = a$ આગળ અસતત છે તેમ કહીશું.

(i) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ અને $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ નાં અસ્તિત્વ હોય પરંતુ તેઓ સમાન ન હોય.

(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ અને $\lim_{x \to a^+} f(x)$ નાં અસ્તિત્વ હોય તથા સમાન હોય પરંતુ તે $f(a)$ ની બરાબર ન હોય.

(iii) $f(a)$ વ્યાખ્યાયિત ન હોય. (iv) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ અથવા $\lim_{x \to a^+} f(x)$ નું અસ્તિત્વ ના હોય.

5.1.5 કેટલાંક પ્રચલિત વિધેયોનું સાતત્ય

વિધેય $f(x)$	જ્યાં વિધેય f સતત હોય તે પ્રદેશ અથવા D_f
1. અચળ વિધેય, એટલે કે $f(x) = c$	
2. તદેવ વિધેય, એટલે કે $f(x) = x$	**R**
3. બહુપદી વિધેય એટલે કે, $a_0 \neq 0$ તથા $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$	
4. $\lvert x - a \rvert$	**R**
5. x^{-n}, n ધન પૂર્ણાંક	$\mathbf{R} - \{0\}$
6. $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, જ્યાં, $p(x)$ અને $q(x)$ એ x ની બહુપદીઓ હોય.	$\mathbf{R} - \{x : q(x) = 0\}$
7. $sin\ x$, $cos\ x$	**R**
8. $tan\ x$, $sec\ x$	$\mathbf{R} - \{ (2n + 1)\dfrac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\}$
9. $cot\ x$, $cosec\ x$	$\mathbf{R} - \{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$
10. e^x	**R**
11. $\log x$	$(0, \infty)$
12. ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો એટલે કે, $sin^{-1} x$, $cos^{-1} x$ વગેરે.	તેમના પ્રદેશમાં

5.1.6 સંયોજિત વિધેયનું સાતત્ય

ધારો કે વાસ્તવિક વિધેયો f અને g માટે વિધેય (fog) એ $x = a$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે. જો વિધેય g એ $x = a$ આગળ અને વિધેય f એ $g(a)$ આગળ સતત હોય, તો વિધેય (fog) એ a આગળ સતત છે.

5.1.7 વિકલનીયતા

જો $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો આ લક્ષને વિધેય f નું x આગળનું વિકલિત કહે છે તેને $f'(x)$ વડે દર્શાવાય. એટલે કે, $\lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ અને $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ નાં અસ્તિત્વ હોય અને સમાન હોય, તો વિધેય f એ તેના પ્રદેશના બિંદુ c આગળ વિકલનીય છે તેમ કહેવાય છે. આ વિકલિતોને અનુક્રમે ડાબી બાજુનું વિકલિત તથા જમણી બાજુનું વિકલિત કહીશું. તેમને અનુક્રમે $Lf'(c)$ તથા $Rf'(c)$ વડે દર્શાવાય.

(i) જો $\forall x \in (a, b)$, વિધેય f એ વિકલનીય હોય, તો વિધેય $y = f(x)$ એ (a, b) પર વિકલનીય છે.

(ii) જો $Rf'(a)$ તથા $Lf'(b)$ નાં અસ્તિત્વ હોય તથા $x \in (a, b)$ માટે, f વિકલનીય હોય, તો વિધેય $y = f(x)$ એ $[a, b]$ પર વિકલનીય છે.

(iii) પ્રત્યેક વિકલનીય વિધેય સતત છે, પરંતુ તેનું પ્રતીપ સત્ય નથી.

5.1.8 વિકલિતોનું બીજગણિત

જો u અને v એ x નાં વિધેયો હોય, તો

(i) $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

(ii) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

5.1.9 સાંકળ નિયમ એ સંયોજિત વિધેયના વિકલન માટેનો નિયમ છે.

ધારો કે, $f = vou$ માટે $t = u(x)$ લઈએ તથા $\frac{dt}{dx}$ અને $\frac{dv}{dt}$ નાં અસ્તિત્વ હોય, તો $\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$.

5.1.10 યોગ્ય પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત હોય તેવાં કેટલાંક વિધેયોનાં પ્રમાણિત વિકલિતો નીચે પ્રમાણે છે :

1. $\frac{d}{dx}(sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

2. $\frac{d}{dx}(cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

3. $\frac{d}{dx}(tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$

4. $\frac{d}{dx}(cot^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}$

5. $\frac{d}{dx}(sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

6. $\frac{d}{dx}(cosec^{-1}x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$

5.1.11 ઘાતાંકીય અને લઘુગણકીય વિધેય

(i) આધાર $b > 1$ હોય તેવું ઘાતાંકીય વિધેય $y = f(x) = b^x$ છે. તેનો પ્રદેશ **R** તથા વિસ્તાર $\mathbf{R}^+$ (બધી જ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ) છે. જેનો આધાર 10 હોય તેવા ઘાતાંકીય વિધેયને **સામાન્ય ઘાતાંકીય વિધેય** કહે છે અને જેનો આધાર e હોય તેવા ઘાતાંકીય વિધેયને **પ્રાકૃતિક ઘાતાંકીય વિધેય** કહે છે.

(ii) જો $b > 1$ હોય તેવી કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા માટે, $b^x = a$ હોય, તો x ને આધાર b સાથે a નો લઘુગણક કહે છે. આધાર b હોય, તેવા a ના લઘુગણકને $\log_b a$ વડે દર્શાવાય. જો આધાર $b = 10$ હોય તો તેને **સામાન્ય લઘુગણક** અને જો આધાર $b = e$ હોય, તો તેને **પ્રાકૃતિક લઘુગણક** કહે છે. log એ

આધાર e સાથેનું લઘુગણકીય વિધેય છે. લઘુગણકીય વિધેયનો પ્રદેશ $\mathbf{R}^+$ (બધી જ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ) તથા વિસ્તાર બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

(iii) $b > 1$ હોય તેવા કોઈ પણ આધાર b માટે લઘુગણકીય વિધેયના ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે : $b \in (0, 1)$ પણ લઈ શકાય.

1. $\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$

2. $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

3. $\log_b x^n = n \log_b x$

4. $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$, જ્યાં, $c \neq 1$, $c \in \mathrm{R}^+$

5. $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$

6. $\log_b b = 1$ અને $\log_b 1 = 0$

(iv) e^x નું x ની સાપેક્ષે વિકલિત e^x છે એટલે કે, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

$\log x$ નું x ની સાપેક્ષે વિકલિત $\frac{1}{x}$ છે એટલે કે, $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$.

5.1.12 $f(x) = (u(x))^{v(x)}$ પ્રકારનાં વિધેયોના વિકલન માટે, લઘુગણકીય વિકલન ખૂબ જ ઉપયોગી પ્રયુક્તિ છે. u ધન વિધેય હોય તે જરૂરી છે.

5.1.13 એક વિધેયનું બીજા વિધેયની સાપેક્ષે વિકલન

જો $u = f(x)$ અને $v = g(x)$ એ x નાં બે વિધેયો હોય, તો $f(x)$ નું $g(x)$ ની સાપેક્ષે વિકલન, એટલે કે $\frac{du}{dv}$ શોધવા માટે, આપણે $\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.

5.1.14 દ્વિતીય વિકલિત

જો $y = f(x)$ હોય, તો $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ ને y નું x ની સાપેક્ષે દ્વિતીય વિકલિત કહે છે. તેને, y'' અથવા y_2 વડે દર્શાવાય છે.

5.1.15 રોલનું પ્રમેય

જો $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ એ $[a, b]$ પર સતત હોય અને (a, b) પર વિકલનીય હોય તથા $a, b \in \mathrm{R}$ માટે $f(a) = f(b)$ થાય, તો કોઈ $c \in (a, b)$ મળે કે જેથી $f'(c) = 0$ થાય.

ભૌમિતિક રીતે, રોલના પ્રમેય પરથી કહી શકાય કે, $[a, b]$ પર સતત વક્રના પ્રત્યેક (a, b) પરના બિંદુએ સ્પર્શકનું અસ્તિત્વ હોય, તો (a, b) માં સમાવિષ્ટ કોઈક c માટે $(c, f(c))$ આગળનો સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર અથવા સંપાતી થાય.

5.1.16 મધ્યકમાન પ્રમેય

જો $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ એ $[a, b]$ માં સતત અને (a, b) માં વિકલનીય હોય, તો કોઈક $c \in (a, b)$ મળે કે જેથી, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

ભૌમિતિક રીતે, મધ્યકમાન પ્રમેય પરથી કહી શકાય કે, $[a, b]$ પર સતત વક્રના પ્રત્યેક (a, b) પરના બિંદુએ સ્પર્શકનું અસ્તિત્વ હોય, તો (a, b) માં સમાવિષ્ટ કોઈક c માટે બિંદુ $(c, f(c))$ આગળનો સ્પર્શક એ બિંદુઓ $A(a, f(a))$ અને $B(b, f(b))$ ને જોડતી છેદિકાને સમાંતર હોય.

5.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત હોય, તો અચળ k ની કિંમત શોધો.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 4x}{8x^2}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

ઉકેલ : વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત છે તેમ આપેલ છે. આથી, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{8x^2} = k$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 2x}{8x^2} = k$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = k$$

$$\therefore \quad k = 1$$

આમ, જો $k = 1$ હોય, તો વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

ઉદાહરણ 2 : વિધેય $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ નું સાતત્ય ચર્ચો.

ઉકેલ : $\sin x$ અને $\cos x$ સતત વિધેયો છે અને બે સતત વિધેયોનો ગુણાકાર સતત વિધેય હોવાથી, $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ સતત વિધેય છે.

ઉદાહરણ 3 : જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$ એ $x = 2$ આગળ સતત હોય, તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $f(2) = k$ આપેલ છે. f સતત હોવાથી,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+5)(x-2)^2}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} (x+5) = 7$$

f એ $x = 2$ આગળ સતત હોવાથી, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

આથી, $k = 7$.

ઉદાહરણ 4 : $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f

એ $x = 0$ આગળ સતત છે તેમ બતાવો.

ઉકેલ : $x = 0$ આગળ ડાબી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x \sin\frac{1}{x} = 0 \text{ છે.} \qquad [\text{કારણ કે, } -1 < \sin\frac{1}{x} < 1]$$

આ જ રીતે, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \sin\frac{1}{x} = 0$. વધુમાં, $f(0) = 0$.

આમ, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$. આથી, f એ $x = 0$ આગળ સતત છે.

નોંધ : આપેલ પ્રશ્નની સાબિતી નીચે પ્રમાણે આપવી જોઈએ.

સેન્ડવિચ પ્રમેય : સમાન પ્રદેશમાં વ્યાખ્યાયિત વિધેયો માટે, $g(x) < f(x) < h(x)$; $\forall x$ માટે

જો $\lim_{x \to a} g(x)$ અને $\lim_{x \to a} h(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય અને બંને l હોય, તો $\lim_{x \to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય અને તે પણ l થાય.

હવે, $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

$\therefore \quad -x \leq x \sin\frac{1}{x} \leq x \qquad (x > 0)$

$$\lim_{x \to 0^+} (-x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$\therefore$ સેન્ડવિચ પ્રમેય પરથી, $\lim_{x \to 0^+} x \sin\frac{1}{x} = 0$

તે જ પ્રમાણે, $\lim_{x \to 0^-} x \sin\frac{1}{x} = 0$

$\therefore \quad \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

ઉદાહરણ 5 : $f(x) = \frac{1}{x-1}$ આપેલ હોય, તો સંયોજિત વિધેય $y = f[f(x)]$ જે બિંદુઓ આગળ અસતત હોય, તે બિંદુઓ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $f(x) = \frac{1}{x-1}$ એ $x = 1$ આગળ અસતત છે.

હવે, $x \neq 1$ માટે,

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 1} = \frac{x-1}{2-x}$$

આ વિધેય $x = 2$ આગળ અસતત છે.

આથી, $f(f(x))$ એ $x = 1$ અને $x = 2$ આગળ અસતત છે.

ઉદાહરણ 6 : ધારો કે, $f(x) = x|x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$ છે. $f(x)$ ની $x = 0$ આગળ વિકલનીયતા ચર્ચો.

ઉકેલ : આપણે f ને $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ તરીકે લખી શકીએ.

હવે, $Lf'(0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h^2 - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} -h = 0$

હવે, $Rf'(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2 - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} h = 0$

આમ, ડાબી બાજુનું વિકલિત અને જમણી બાજુનું વિકલિત સમાન છે. આથી, f એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય છે.

બીજી રીત : $Lf'(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0$

$$Rf'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

ઉદાહરણ 7 : $\sqrt{tan\sqrt{x}}$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, $y = \sqrt{tan\sqrt{x}}$.

સાંકળ નિયમનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{tan\sqrt{x}}} \cdot \frac{d}{dx}(tan\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{tan\sqrt{x}}} \cdot sec^2\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{tan\sqrt{x}}}(sec^2\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{(sec^2\sqrt{x})}{4\sqrt{x}\sqrt{tan\sqrt{x}}}$$

ઉદાહરણ 8 : જો $y = tan(x + y)$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $y = tan(x + y)$ આપેલ છે. બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = sec^2(x+y)\frac{d}{dx}(x+y)$$

$$= sec^2(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$\therefore$ $[1 - sec^2(x + y)]\dfrac{dy}{dx} = sec^2(x + y)$

આથી, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{sec^2(x+y)}{1 - sec^2(x+y)} = -cosec^2(x + y)$.

ઉદાહરણ 9 : જો $e^x + e^y = e^{x+y}$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{dy}{dx} = -e^{y-x}$.

ઉકેલ : $e^x + e^y = e^{x+y}$ આપેલ છે.

બંને બાજુ x-પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$e^x + e^y\frac{dy}{dx} = e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

અથવા $(e^y - e^{x+y})\frac{dy}{dx} = e^{x+y} - e^x$,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y} - e^x}{e^y - e^{x+y}} = \frac{e^x + e^y - e^x}{e^y - (e^x + e^y)} = -e^{y-x}$$

બીજી રીત : $e^x + e^y = e^{x+y}$

$\therefore \; e^{-y} + e^{-x} = 1$

$\therefore \; -e^{-y}\frac{dy}{dx} - e^{-x} = 0$

$\therefore \; \frac{dy}{dx} = -e^{y-x}$

ઉદાહરણ 10 : જો $y = tan^{-1}\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$, $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $tan^{-1}x = \theta$ લેતાં, $\frac{-\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$ કારણ કે, $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

આથી, $y = tan^{-1}\left(\frac{3tan\theta - tan^3\theta}{1 - 3tan^2\theta}\right)$

$= tan^{-1}(tan3\theta)$

$= 3\theta$ $\qquad \left(\frac{-\pi}{2} < 3\theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$= 3\,tan^{-1}x$

આથી, $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{1 + x^2}$.

ઉદાહરણ 11 : જો $y = sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\right\}$; $0 < x < 1$, હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $y = sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\right\}$, $0 < x < 1$ આપેલ છે.

ધારો કે, $x = sin$A અને $\sqrt{x} = sin$B

$0 < x < 1$ હોવાથી $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < B < \frac{\pi}{2}$

$y = sin^{-1}\left\{sin\,A\sqrt{1 - sin^2 B} - sin\,B\sqrt{1 - sin^2 A}\right\}$

$= sin^{-1}\{sin\,A\,cos\,B - sin\,B\,cos\,A\}$

$= sin^{-1}\{sin\,(A - B)\}$ $\qquad -\frac{\pi}{2} < A - B < \frac{\pi}{2}$

$= A - B$

આમ, $y = sin^{-1}x - sin^{-1}\sqrt{x}$

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{(x)}^2}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

ઉદાહરણ 12 : જો $x = a\ sec^3\theta$ અને $y = a\ tan^3\theta$ હોય, તો $\theta = \frac{\pi}{3}$ આગળ $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

ઉકેલ : $x = a\ sec^3\theta$ અને $y = a\ tan^3\theta$ નું θ પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dx}{d\theta} = 3a\,sec^2\theta\,\frac{d}{d\theta}(sec\,\theta) = 3a\,sec^3\theta\,tan\,\theta$$

અને $\frac{dy}{d\theta} = 3a\,tan^2\theta\,\frac{d}{d\theta}(tan\,\theta) = 3a\,tan^2\theta\,sec^2\theta$.

આમ, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\,tan^2\theta\,sec^2\theta}{3a\,sec^3\theta\,tan\,\theta} = \frac{tan\,\theta}{sec\,\theta} = sin\,\theta$.

આથી, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{3}} = sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ઉદાહરણ 13 : જો $x^y = e^{x-y}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$.

ઉકેલ : $x^y = e^{x-y}$ ની બંને બાજુએ log લેતાં, આપણને

$y \log x = x - y$

$\Rightarrow y(1 + \log x) = x$

એટલે કે, $y = \frac{x}{1+\log x}$.

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x)\cdot 1 - x\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

ઉદાહરણ 14 : જો $y = tan\,x + sec\,x$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{cos\,x}{(1-sin\,x)^2}$.

ઉકેલ : $y = tan\,x + sec\,x$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરતાં, આપણને

$$\frac{dy}{dx} = sec^2x + sec\,x\ tan\,x$$

$$= \frac{1}{cos^2x} + \frac{sin\,x}{cos^2x} = \frac{1+sin\,x}{cos^2x} = \frac{1+sin\,x}{(1+sin\,x)(1-sin\,x)}.$$

આમ, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \sin x}$.

હવે, પુનઃ x-પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

ઉદાહરણ 15 : જો $f(x) = |\cos x|$ હોય, તો $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ શોધો.

ઉકેલ : જો $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ હોય, તો $\cos x < 0$. આથી, $|\cos x| = -\cos x$.

એટલે કે, $f(x) = -\cos x$

$\therefore \; f'(x) = \sin x$.

આથી, $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ઉદાહરણ 16 : જો $f(x) = |\cos x - \sin x|$ હોય, તો $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ શોધો.

ઉકેલ : જો $0 < x < \frac{\pi}{4}$ હોય, તો $\cos x > \sin x$, આથી, $\cos x - \sin x > 0$.

$f(x) = \cos x - \sin x$

$\therefore \; f'(x) = -\sin x - \cos x$

આથી, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$.

ઉદાહરણ 17 : વિધેય $f(x) = \sin 2x$ માટે, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં રોલનું પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : $f(x) = \sin 2x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માટે નોંધીશું કે,

(i) f એ *sine* વિધેય હોવાથી, f એ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં સતત છે. કારણ કે, *sine* વિધેય $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં સતત છે.

(ii) $f'(x) = 2\cos 2x$ એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં અસ્તિત્વ ધરાવે છે. આથી, f એ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં વિકલનીય છે.

(iii) $f(0) = \sin 0 = 0$ અને $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0$. આથી, $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

આમ, રોલના પ્રમેયની ત્રણેય શરતોનું પાલન થાય છે. આથી ઓછામાં ઓછો કોઈ એક $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ એવો મળે કે જેથી, $f'(c) = 0$ થાય. આમ,

$$2 \cos 2c = 0 \Rightarrow 2c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}.$$

ઉદાહરણ 18 : વિધેય $f(x) = (x - 3)(x - 6)(x - 9)$ માટે, $[3, 5]$ માં મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો.

ઉકેલ : (i) બહુપદી વિધેયોનો ગુણાકાર બહુપદી વિધેય જ મળે અને તે સતત હોવાથી, વિધેય f એ $[3, 5]$ માં સતત છે.

(ii) $f(x) = x^3 - 18x^2 + 99x - 162$

$\therefore$ $f'(x) = 3x^2 - 36x + 99$ એ $(3, 5)$ માં અસ્તિત્વ ધરાવે છે. આથી, f એ $(3, 5)$ માં વિકલનીય છે.

આમ, મધ્યકમાન પ્રમેયની શરતોનું પાલન થાય છે. આથી, ઓછામાં ઓછો એક $c \in (3, 5)$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી,

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3}$$

$$\therefore\ 3c^2 - 36c + 99 = \frac{8 - 0}{2} = 4$$

$$\therefore\ c = 6 \pm \sqrt{\frac{13}{3}}.$$

આથી, $c = 6 - \sqrt{\frac{13}{3}}$ (કારણ કે, c ની બીજી કિંમત $(3, 5)$ માં શક્ય નથી).

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 19 : જો $f(x) = \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\cot x - 1}$, $x \neq \frac{\pi}{4}$ હોય, તો $f(x)$ એ $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સતત બને તે રીતે $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $f(x) = \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\cot x - 1}$, $x \neq \frac{\pi}{4}$

આથી, $$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\cot x - 1}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)\sin x}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)}{\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right)}{\left(\cos x - \sin x\right)} \cdot \frac{\left(\cos x + \sin x\right)}{\left(\cos x + \sin x\right)} \cdot \sin x$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}\cos x + 1} \cdot (\sin x)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos 2x} \cdot \left(\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right) \cdot (\sin x)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\cos x + \sin x\right)}{\sqrt{2}\cos x + 1} \sin x = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

આમ, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{1}{2}$

જો આપણે $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ, તો $f(x)$ એ $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સતત બને.

આથી, f એ $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સતત બને તે માટે, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

ઉદાહરણ 20 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એ $x = 0$ આગળ અસતત છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : વિધેય f નું $x = 0$ આગળ ડાબી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \qquad \left(\frac{1}{x} \to -\infty,\ e^{\frac{1}{x}} \to 0\right)$$

આ જ રીતે, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{1 + \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^{\frac{-1}{x}}}{1 + e^{\frac{-1}{x}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \qquad \left(\frac{1}{x} \to \infty,\ e^{-\frac{1}{x}} \to 0\right)$$

આમ, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. આથી $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$નું અસ્તિત્વ નથી. આથી, વિધેય f એ $x = 0$ આગળ અસતત છે.

ઉદાહરણ 21 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 4x}{x^2}, & x < 0 \\ a\ , & x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{16 + \sqrt{x}} - 4}, & x > 0 \end{cases}$

હોય, તો f એ a ની કઈ કિંમત માટે, $x = 0$ આગળ સતત બને ?

ઉકેલ : અહીં, $f(0) = a$ છે.

વિધેય f નું $x = 0$ આગળ ડાબી બાજુનું લક્ષ શોધીએ.

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1-\cos 4x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0^-} \frac{2\sin^2 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{2x\to0^-} 8\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = 8\ (1)^2 = 8.$$

અને વિધેય f નું $x = 0$ આગળ જમણી બાજુનું લક્ષ

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{16+\sqrt{x}}-4}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{16+\sqrt{x}}+4)}{(\sqrt{16+\sqrt{x}}+4)(\sqrt{16+\sqrt{x}}-4)}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{16+\sqrt{x}}+4)}{16+\sqrt{x}-16} = \lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{16+\sqrt{x}}+4\right) = 8$$

આમ, $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 8$. આથી, $a = 8$ માટે વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત બને.

ઉદાહરણ 22 : $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & -3 \le x < -2 \\ x+1\ , & -2 \le x < 0 \\ x+2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય fની વિકલનીયતા ચકાસો.

ઉકેલ : $f(x)$ ની વિકલનીયતા માટે શંકા ઉદ્ભવે તેવી માત્ર બે જ કિંમતો છે, $x = -2$ અને $x = 0$.

$x = -2$ આગળ વિકલનીયતા :

હવે, $Lf'(-2) = \lim_{h\to0^-} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$$= \lim_{h\to0^-} \frac{2(-2+h)+3-(-2+1)}{h} = \lim_{h\to0^-} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to0^-} 2 = 2.$$

અને $Rf'(-2) = \lim_{h\to0^+} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$$= \lim_{h\to0^+} \frac{-2+h+1-(-2+1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0^+} \frac{h}{h} = 1$$

આમ, $Rf'(-2) \neq Lf'(-2)$. આથી, f એ $x = -2$ આગળ વિકલનીય નથી.

આ જ રીતે, $x = 0$ આગળની વિકલનીયતા માટે,

$$L(f'(0)) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{0+h+1-(0+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{h-1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \left(1 - \frac{1}{h}\right)$$

અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી. આથી, f એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

ઉદાહરણ 23 : $tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ નું $cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ ની સાપેક્ષે વિકલન કરો; $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

ઉકેલ : ધારો કે, $u = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ અને $v = cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

આપણે $\frac{du}{dv}$ શોધવું છે. આથી, $\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$

હવે, $u = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ માં $sin^{-1}x = \theta$ લેતાં, $x = sin\,\theta$. $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$ હોવાથી $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$u = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-sin^2\theta}}{sin\theta}\right)$$

$$= tan^{-1}(cot\,\theta) \qquad \left[\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{1-sin^2\theta} = cos\theta\right]$$

$$= tan^{-1}\left\{tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - sin^{-1}x \qquad \left[-\frac{\pi}{2} < -\theta < -\frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{4}\right]$$

આથી, $\frac{du}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

હવે, $v = cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

$$= \frac{\pi}{2} - sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - sin^{-1}\left(2sin\theta\sqrt{1-sin^2\theta}\right) = \frac{\pi}{2} - sin^{-1}(sin\,2\theta)$$

$$= \frac{\pi}{2} - sin^{-1}\{sin\ (\pi - 2\theta)\}$$

$$\left[\frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi \Rightarrow -\pi < -2\theta < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \pi - 2\theta < \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - (\pi - 2\theta) = \frac{-\pi}{2} + 2\theta$$

$$\therefore\ v = \frac{-\pi}{2} + 2sin^{-1}x$$

$$\therefore\ \frac{dv}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

આથી, $\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{-1}{2}$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 24 થી 35 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 24 : વિધેય $f(x) = \begin{cases} \frac{sin\ x}{x} + cos\ x, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$

એ $x = 0$ આગળ સતત હોય, તો $k =$ ....

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 1.5

ઉકેલ : $\lim_{x \to 0}\left(\frac{sin\ x}{x} + cos\ x\right) = 1 + 1 = 2$. સાતત્ય માટે $k = 2$

વિકલ્પ (B) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 25 : વિધેય $f(x) = [x]$ એ $x =$ .... આગળ સતત છે, જ્યાં $[x]$ એ મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય દર્શાવે છે.

(A) 4 (B) –2 (C) 1 (D) 1.5

ઉકેલ : મહત્તમ પૂર્ણાંક વિધેય $[x]$ એ x ની તમામ પૂર્ણાંક કિંમતો આગળ અસતત છે.

વિકલ્પ (D) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 26 : વિધેય $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$ એ x ની .... કિંમતો માટે સતત નથી.

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : જ્યારે x, પૂર્ણાંક હોય ત્યારે $x - [x] = 0$ મળે. આથી, $f(x)$ એ $\forall x \in \mathbf{Z}$ અસતત છે.

વિકલ્પ (D) સાચો જવાબ છે.

નોંધ : ખરેખર તો f એ Z ઉપર વ્યાખ્યાયિત જ નથી. $D_f = R - Z$ લેવો પડે.

ઉદાહરણ 27 : વિધેય $f(x) = tan\, x$ એ .... પર અસતત છે.

(A) $\{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$ (B) $\{2n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$

(C) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\right\}$ (D) $\left\{\frac{n\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\right\}$

ઉકેલ : $tan\, x$ એ $(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}$ માટે અવ્યાખ્યાયિત અને અસતત છે.

વિકલ્પ (C) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 28 : $f(x) = |\, cos\, x\, |$ હોય, તો

(A) f એ xની દરેક કિંમત માટે વિકલનીય છે.

(B) f એ xની દરેક કિંમત માટે સતત હોય, પરંતુ $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ આગળ વિકલનીય નથી.

(C) f એ xની દરેક કિંમત માટે સતત હોય, પરંતુ $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ આગળ વિકલનીય નથી.

(D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $f(x) = \begin{cases} cos\, x & cos\, x \geq 0 \\ -cos\, x & cos\, x < 0 \end{cases}$

$cos\, x$ તથા $|\, x\, |$ સતત હોવાથી સંયોજિત વિધેય $|\, cos\, x\, |$ સતત છે.

$L'\, |(cos\, x)| \to -1, \quad x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$R'\, |(cos\, x)| \to 1$

વિકલ્પ (C) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 29 : વિધેય $f(x) = |\, x\, | + |\, x - 1\, |$ એ ....

(A) $x = 0$ અને $x = 1$ આગળ સતત છે.

(B) $x = 1$ આગળ સતત છે, પરંતુ $x = 0$ આગળ સતત નથી.

(C) $x = 0$ અને $x = 1$ આગળ અસતત છે.

(D) $x = 0$ આગળ સતત છે, પરંતુ $x = 1$ આગળ સતત નથી.

ઉકેલ : $|\, x - a\, |$ એ $x = a$ આગળ સતત છે. (ખરેખર તો R પર)

વિકલ્પ (A) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 30 : $f(x) = \begin{cases} sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ k\ \ , & x = 0 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એ $x = 0$ આગળ સતત બને તો $k =$ ....

(A) 8 (B) 1

(C) -1 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : ખરેખર તો, $\lim\limits_{x \to 0} sin\frac{1}{x}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

વિકલ્પ (D) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 31 : $f(x) = |x - 3| \cos x$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f .... બિંદુગણ આગળ વિકલનીય છે.

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\mathbf{R} - \{3\}$

(C) $(0, \infty)$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : માત્ર $x = 3$ જ વિચારણાની કિંમત છે.

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x - 3| \cos x}{x - 3}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

વિકલ્પ (B) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 32 : $\sec(\tan^{-1}x)$ નો x ની સાપેક્ષે વિકલ સહગુણક .... છે. $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(A) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (B) $\dfrac{x}{1+x^2}$ (C) $x\sqrt{1+x^2}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

ઉકેલ : $y = \sec(\tan^{-1}x) = \sqrt{1+(\tan(\tan^{-1}x))^2} = \sqrt{1+x^2}$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

વિકલ્પ (A) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 33 : જો $u = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ અને $v = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ હોય, તો $\dfrac{du}{dv}$ = ..., જ્યાં $0 < x < 1$

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) x (C) $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ (D) 1

ઉકેલ : $\tan^{-1}x = \theta$ લેતાં, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

$0 < x = \tan\theta < 1$ હોવાથી $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \quad 0 < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$

$u = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta, \quad v = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta$

$\therefore \quad u = v$

$\therefore \quad \dfrac{du}{dv} = 1$

વિકલ્પ (D) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 34 : વિધેય $f(x) = e^x \sin x$, $x \in [0, \pi]$ માટે, મધ્યકમાનનું પ્રમેય લગાડતાં મળતી c ની કિંમત .... હોય.

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) $\dfrac{3\pi}{4}$

ઉકેલ : $\dfrac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0} = \dfrac{e^{\pi}\sin\pi - e^{0}\sin 0}{\pi} = 0 = f'(x)$

$\therefore \quad e^x \cos x + e^x \sin x = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 0$

$\Rightarrow \tan x = -1$

$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

વિકલ્પ (D) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 35 : $f(x) = (x-1)(x-2),\ x \in [1, 2]$ માટે, રોલનું પ્રમેય લગાડતાં મળતી c ની કિંમત .... હોય.

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

ઉકેલ : $f(x) = (x-1)(x-2)$ એ $[1, 2]$ પર સતત અને $(1, 2)$ પર વિકલનીય છે.

$f(1) = f(2) = 0$

$f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f'(c) = 2c - 3 = 0 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (1, 2)$

વિકલ્પ (A) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 36 : વિભાગ I ની અભિવ્યક્તિને વિભાગ II ની અભિવ્યક્તિ સાથે એવી રીતે જોડો કે જેથી વિધાન સત્ય બને :

વિભાગ I	વિભાગ II
(A) જો $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{k}{2}, & x = 0 \end{cases}$ એ $x = 0$ આગળ સતત હોય, તો $k =$	(a) $\lvert x \rvert$
(B) પ્રત્યેક સતત વિધેય વિકલનીય છે.	(b) સત્ય
(C) x ની દરેક કિંમત માટે સતત હોય પરંતુ x ની બરાબર કોઈ એક જ કિંમત માટે વિકલનીય ન હોય તેવું વિધેય દર્શાવતું એક ઉદાહરણ.	(c) 6
(D) તદેવ વિધેય એટલે કે, $f(x) = x,\ \forall x \in R$ સતત વિધેય છે.	(d) અસત્ય

ઉકેલ : A $\rightarrow$ c, B $\rightarrow$ d, C $\rightarrow$ a, D $\rightarrow$ b

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 6$

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 37 થી 41 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 37 : વિધેય $f(x) = \dfrac{1}{\log\lvert x\rvert}$ એ x ની .... કિંમતો માટે અસતત છે.

ઉકેલ : આપેલ વિધેય $x = 0, \pm 1$ આગળ અસતત છે અને તેથી x ની 3 કિંમતો આગળ વિધેય અસતત છે.

ઉદાહરણ 38 : જો $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x \geq 1 \\ x + 2 & x < 1 \end{cases}$

એ સતત વિધેય હોય, તો a = ...

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} f(x) \Rightarrow a + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$

જવાબ : $a = 2$

ઉદાહરણ 39 : $\log_{10} x$ નું x પ્રત્યે વિકલિત .... છે.

ઉકેલ : $f(x) = \dfrac{\log x}{\log 10} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \log 10}$

જવાબ : $(\log_{10} e)\dfrac{1}{x}$

ઉદાહરણ 40 : જો $y = sec^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx}$ = ...

ઉકેલ : $y = cos^{-1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + sin^{-1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$

જવાબ : 0

ઉદાહરણ 41 : $sin\ x$ નું $cos\ x$ ની સાપેક્ષે વિકલિત .... છે.

ઉકેલ : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{cos\ x}{-sin\ x} = -cot\ x$

જવાબ : $-cot\ x$

નીચેનાં ક્રમાંક 42 થી 46 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

ઉદાહરણ 42 : $x = a$ આગળ સતત હોય માટે, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ અને $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય અને એ $f(a)$ ની બરાબર હોવા જોઈએ.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 43 : $y = |x - 1|$ એ સતત વિધેય છે.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 44 : કોઈ પણ સતત વિધેય $y = f(x)$ નું x ની કેટલીક કિંમતો આગળ લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

ઉકેલ : અસત્ય

ઉદાહરણ 45 : x ની પ્રત્યેક કિંમત માટે, વિધેય $|sin\, x|$ એ વિકલનીય વિધેય છે.

ઉકેલ : અસત્ય, $x = 0$ માટે વિકલનીય નથી.

ઉદાહરણ 46 : x ની પ્રત્યેક કિંમત માટે, $cos\ |x|$ વિકલનીય છે.

ઉકેલ : સત્ય, $x \geq 0 \Rightarrow cos|x| = cos\, x$ અને $x < 0$ માટે $cos|x| = cos\, x$ વિકલનીય છે.

$\therefore \quad \forall x \in R$ માટે $cos|x| = cos\, x$

સ્વાધ્યાય 5.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. વિધેય $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ નું $x = 1$ આગળ સાતત્ય ચકાસો.

પ્રશ્ન 2 થી 10 માં આપેલ વિધેયો, x ની દર્શાવેલ કિંમતો આગળ સતત છે કે અસતત તે નક્કી કરો :

2. $f(x) = \begin{cases} 3x+5, & x \ge 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}$

$x = 2$ આગળ

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}, & x \ne 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ આગળ

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}, & x \ne 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$

$x = 2$ આગળ

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-4|}{2(x-4)}, & x \ne 4 \\ 0, & x = 4 \end{cases}$

$x = 4$ આગળ

6. $f(x) = \begin{cases} |x|\cos\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ આગળ

7. $f(x) = \begin{cases} |x-a|\sin\dfrac{1}{x-a}, & x \ne a \\ 0, & x = a \end{cases}$

$x = a$ આગળ

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ આગળ

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ 2x^2-3x+\dfrac{3}{2}, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

$x = 1$ આગળ

10. $f(x) = |x| + |x - 1|$, $x = 1$ આગળ

પ્રશ્ન 11 થી 14 માં આપેલ વિધેય f એ x ની દર્શાવેલ કિંમતો આગળ સતત હોય, તો k ની કિંમત શોધો :

11. $f(x) = \begin{cases} 3x-8, & x \le 5 \\ 2k, & x > 5 \end{cases}$; $x = 5$ આગળ

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-16}, & x \ne 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$; $x = 2$ આગળ

13. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+kx} - \sqrt{1-kx}}{x}, & -1 \le x < 0 \\ \dfrac{2x+1}{x-1}, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$; $x = 0$ આગળ

14. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos kx}{x\sin x}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$; $x = 0$ આગળ

15. k ની કોઈ પણ કિંમત માટે, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|+2x^2}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એ $x = 0$ આગળ અસતત છે તેમ સાબિત કરો.

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{|x-4|} + a, & x < 4 \\ a+b, & x = 4 \\ \dfrac{x-4}{|x-4|} + b, & x > 4 \end{cases}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એ $x = 4$ આગળ સતત હોય, તો a અને b ની કિંમતો શોધો.

17. આપેલ વિધેય $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ હોય, તો સંયોજિત વિધેય $y = f(f(x))$ એ x ની કઈ કિંમતો આગળ અસતત છે તે નક્કી કરો.

18. વિધેય $f(t) = \dfrac{1}{t^2+t-2}$ જ્યાં, $t = \dfrac{1}{x-1}$ એ x ની જે કિંમતો આગળ અસતત હોય, તે કિંમતો શોધો.

19. દર્શાવો કે, વિધેય $f(x) = |\sin x + \cos x|$ એ $x = \pi$ આગળ સતત છે.

પ્રશ્ન નં. 20 થી 22 પ્રત્યેકમાં x ની દર્શાવેલ કિંમતો આગળ વિધેય f ની વિકલનીયતા ચકાસો :

20. $f(x) = \begin{cases} x[x], & 0 \le x < 2 \\ (x-1)x, & 2 \le x < 3 \end{cases}$

$x = 2$ આગળ

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ આગળ

22. $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \le 2 \\ 5-x, & x > 2 \end{cases}$

$x = 2$ આગળ

23. સાબિત કરો કે, $f(x) = |x - 5|$ એ $x = 5$ આગળ સતત છે, પરંતુ વિકલનીય નથી.

24. વિધેય $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ એ સમીકરણ $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$; $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $f(x) \neq 0$ નું સમાધાન કરે છે. જો, વિધેય f એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય હોય અને $f'(0) = 2$ હોય, તો સાબિત કરો કે $f'(x) = 2f(x)$.

પ્રશ્ન નં. 25 થી 43 પ્રત્યેકમાં x પ્રત્યે વિકલન કરો :

25. $2^{cos^2 x}$ **26.** $\dfrac{8^x}{x^8}$ **27.** $\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

28. $\log\left[\log\left(\log x^5\right)\right]$ **29.** $sin\sqrt{x} + cos^2\sqrt{x}$ **30.** $sin^n\,(ax^2+bx+c)$

31. $cos\left(tan\sqrt{x+1}\right)$ **32.** $sin\,x^2 + sin^2 x + sin^2(x^2)$ **33.** $sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

34. $(sin\,x)^{cos\,x}$ **35.** $sin^m x \cdot cos^n x$ **36.** $(x+1)^2\,(x+2)^3\,(x+3)^4$

37. $cos^{-1}\left(\dfrac{sin\,x+cos\,x}{\sqrt{2}}\right),\ \dfrac{-\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ **38.** $tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}\right),\ -\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}$

39. $tan^{-1}(sec\,x + tan\,x),\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

40. $tan^{-1}\left(\dfrac{a\,cos\,x - b\,sin\,x}{b\,cos\,x + a\,sin\,x}\right),\ -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ અને $\dfrac{a}{b}tan\,x > -1$

41. $sec^{-1}\left(\dfrac{1}{4x^3-3x}\right),\ 0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **42.** $tan^{-1}\left(\dfrac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right),\ \dfrac{-1}{\sqrt{3}}<\dfrac{x}{a}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

43. $tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right),\ -1<x<1,\ x\neq 0$

પ્રશ્ન નં. 44 થી 48 પૈકી પ્રત્યેકમાં પ્રચલ સ્વરૂપમાં આપેલાં વિધેયો માટે $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો :

44. $x = t + \dfrac{1}{t},\quad y = t - \dfrac{1}{t}$ **45.** $x = e^{\theta}\left(\theta+\dfrac{1}{\theta}\right),\ y=e^{-\theta}\left(\theta-\dfrac{1}{\theta}\right)$

46. $x = 3cos\theta - 2cos^3\theta,\quad y = 3sin\theta - 2sin^3\theta$

47. $sin\,x = \dfrac{2t}{1+t^2},\quad tan\,y = \dfrac{2t}{1-t^2}$

48. $x = \dfrac{1+log\,t}{t^2},\quad y = \dfrac{3+2\,log\,t}{t}$

49. જો $x = e^{cos2t}$ અને $y = e^{sin2t}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y\,log\,x}{x\,log\,y}$.

50. જો $x = a\,sin\,2t\,(1 + cos2t)$ અને $y = bcos2t\,(1 - cos2t)$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{b}{a}$.

51. જો $x = 3sin\,t - sin\,3t,\ y = 3cos\,t - cos\,3t$, હોય, તો $t = \dfrac{\pi}{3}$ આગળ $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો.

52. $\dfrac{x}{\sin x}$ નું $sinx$ ની સાપેક્ષે વિકલન શોધો.

53. $tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ નું $tan^{-1}x$ ની સાપેક્ષે વિકલન મેળવો. $x \neq 0$.

પ્રશ્ન નં. 54 થી 57 પ્રત્યેકમાં x અને y કોઈ સંબંધ દ્વારા સંકળાયેલા છે, તો $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો :
(y એ x નું ગૂઢ વિધેય છે.)

54. $sin\,(xy) + \dfrac{x}{y} = x^2 - y$

55. $sec\,(x + y) = xy$

56. $tan^{-1}(x^2 + y^2) = a$

57. $(x^2 + y^2)^2 = xy$

58. જો $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ હોય, તો દર્શાવો કે, $\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy} = 1$.

59. જો $x = e^{\frac{x}{y}}$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x\log x}$.

60. જો $y^x = e^{y-x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+\log y)^2}{\log y}$.

61. જો $y = (cos\,x)^{(cos\,x)^{(cos\,x)\ldots\infty}}$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2\,tan\,x}{y\log cos\,x - 1}$.

62. જો $x\,sin\,(a + y) + sin\,a\,cos\,(a + y) = 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{sin^2(a+y)}{sin\,a}$.

63. જો $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a\,(x - y)$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$, $|x| < 1$, $|y| < 1$.

64. જો $y = tan^{-1}x$ હોય, તો y ના સ્વરૂપમાં $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો.

પ્રશ્ન નં. 65 થી 69 પ્રત્યેક માટે, રોલનું પ્રમેય ચકાસો :

65. $f(x) = x(x - 1)^2;\ x \in [0, 1]$

66. $f(x) = sin^4x + cos^4x;\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

67. $f(x) = \log\,(x^2 + 2) - \log 3;\ x \in [-1, 1]$

68. $f(x) = x(x+3)e^{-\frac{x}{2}};\ x \in [-3, 0]$

69. $f(x) = \sqrt{4-x^2};\ x \in [-2, 2]$

70. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & 0 \le x \le 1 \\ 3-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય પર રોલનું પ્રમેય લગાડી શકાય કે નહિ તે અંગે ચર્ચા કરો.

71. જે બિંદુ પરના વક્ર $y = (\cos x - 1)$, $x \in [0, 2\pi]$ પરના સ્પર્શક x-અક્ષને સમાંતર હોય એવાં બિંદુઓ શોધો.

72. રોલના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, વક્ર $y = x(x - 4)$, $x \in [0, 4]$ પરનું એવું બિંદુ શોધો. જ્યાં, સ્પર્શક x-અક્ષને સમાંતર હોય.

પ્રશ્ન નં. 73 થી 76 પ્રત્યેક માટે મધ્યકમાન પ્રમેય ચકાસો :

73. $f(x) = \dfrac{1}{4x-1}$, $x \in [1, 4]$

74. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$; $x \in [0, 1]$

75. $f(x) = \sin x - \sin 2x$; $x \in [0, \pi]$

76. $f(x) = \sqrt{25-x^2}$; $x \in [1, 5]$

77. વક્ર $y = (x - 3)^2$ પર એવું બિંદુ શોધો. જ્યાં સ્પર્શક બિંદુઓ $(3, 0)$ અને $(4, 1)$ જોડતી જીવાને સમાંતર હોય.

78. મધ્યકમાન પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી વક્ર $y = 2x^2 - 5x + 3$ પરનું સ્પર્શક એ જીવા AB ને સમાંતર હોય તેવું બિંદુ શોધો અને સાબિત કરો કે, તે બિંદુઓ $A(1, 0)$ અને $B(2, 1)$ ની વચ્ચે છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

79. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + p, & x \le 1 \\ qx+2 \quad , & x > 1 \end{cases}$

દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય હોય, તો p અને q ની કિંમતો શોધો.

80. જો $x^m.y^n = (x + y)^{m+n}$ હોય, તો સાબિત કરો કે,

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ અને (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$.

81. જો $x = \sin t$ અને $y = \sin pt$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + p^2y = 0$.

82. જો $y = x^{\tan x} + \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2}}$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 83 થી 96 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

83. જો $f(x) = 2x$ અને $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$ હોય, તો નીચેનામાંથી કયું વિધેય અસતત બની શકે ?

(A) $f(x) + g(x)$ (B) $f(x) - g(x)$ (C) $f(x) \cdot g(x)$ (D) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

84. વિધેય $f(x) = \dfrac{4-x^2}{4x-x^3}$ એ ....

(A) માત્ર એક બિંદુ આગળ અસતત છે. (B) બરાબર બે બિંદુઓ આગળ અસતત છે.
(C) બરાબર ત્રણ બિંદુઓ આગળ અસતત છે. (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

85. $f(x) = |2x-1| sinx$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય f .... બિંદુગણમાં વિકલનીય છે.

(A) $\mathbf{R}$

(B) $\mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(C) $(0, \infty)$

(D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

86. વિધેય $f(x) = cot\,x$ .... ગણ પર અસતત છે.

(A) $\{x = n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$

(B) $\{x = 2n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$

(C) $\left\{x = (2n+1)\frac{\pi}{2}\,;\; n \in \mathbf{Z}\right\}$

(D) $\left\{x = \frac{n\pi}{2}\,;\; n \in \mathbf{Z}\right\}$

87. વિધેય $f(x) = e^{|x|}$ એ ....

(A) દરેક બિંદુએ સતત છે, પરંતુ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

(B) દરેક બિંદુએ સતત અને વિકલનીય છે.

(C) $x = 0$ આગળ સતત નથી.

(D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

88. $f(x) = x^2 sin\frac{1}{x}$; $x \neq 0$ એ $x = 0$ આગળ સતત હોય, તો વિધેય fની $x = 0$ આગળની કિંમત .... છે.

(A) 0

(B) -1

(C) 1

(D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

89. જો $f(x) = \begin{cases} mx+1\;, & x \le \frac{\pi}{2} \\ sinx+n\,, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

એ $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ સતત હોય, તો

(A) $m = 1,\ n = 0$

(B) $m = \frac{n\pi}{2} + 1$

(C) $n = \frac{m\pi}{2}$

(D) $m = n = \frac{\pi}{2}$

90. ધારો કે, $f(x) = |sin\ x|$ હોય, તો...

(A) f દરેક બિંદુએ વિકલનીય છે.

(B) f દરેક બિંદુએ સતત છે, પરંતુ $x = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$ આગળ વિકલનીય નથી.

(C) f દરેક બિંદુએ સતત છે, પરંતુ $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z}$ આગળ વિકલનીય નથી.

(D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

91. જો $y = \log\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ = ...

(A) $\frac{4x^3}{1-x^4}$

(B) $\frac{-4x}{1-x^4}$

(C) $\frac{1}{4-x^4}$

(D) $\frac{-4x^3}{1-x^4}$

92. જો $y = \sqrt{\sin x + y}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ = ...

(A) $\frac{\cos x}{2y-1}$ (B) $\frac{\cos x}{1-2y}$ (C) $\frac{\sin x}{1-2y}$ (D) $\frac{\sin x}{2y-1}$

93. $\cos^{-1}(2x^2 - 1)$ નું $\cos^{-1}x$ ની સાપેક્ષે વિકલિત .... છે.

(A) 2 (B) $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{2}{x}$ (D) $1 - x^2$

94. જો $x = t^2$, $y = t^3$ હોય, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ = ...

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{4t}$ (C) $\frac{3}{2t}$ (D) $\frac{3}{4}$

95. $f(x) = x^3 - 3x$ માટે, $[0, \sqrt{3}]$ માં રોલનું પ્રમેય લાગુ કરવામાં આવે, તો c ની મળતી કિંમત .... હોય.

(A) 1 (B) -1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

96. વિધેય $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in [1, 3]$ માટે, મધ્યકમાન પ્રમેય લાગુ કરવામાં આવે, તો c ની કિંમત .... મળે.

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$

(C) 2 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

ક્રમાંક 97 થી 101 વાળા પ્રશ્નોમાં વિધાન સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

97. દરેક બિંદુએ સતત હોય, પરંતુ બરાબર બે જ બિંદુઓ આગળ વિકલનીય ન હોય તેવા વિધેયનું ઉદાહરણ .... છે. (જવાબ અનન્ય નથી.)

98. x^2 નું x^3 ની સાપેક્ષે વિકલિત .... છે.

99. જો $f(x) = |\cos x|$ હોય, તો $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = ...

100. જો $f(x) = |\cos x - \sin x|$ હોય, તો $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ = ...

101. વક્ર $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ માટે, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}$ = ...

નીચેના ક્રમાંક 102 થી 106 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

102. વિધેય $f(x) = |x - 1|$, $x \in [0, 2]$ માટે રોલનું પ્રમેય લાગુ પાડી શકાય છે.

103. જો વિધેય f એ તેના પ્રદેશ પર સતત હોય, તો $|f|$ પણ તેના પ્રદેશ પર સતત હોય.

104. બે સતત વિધેયોનું સંયોજિત વિધેય પણ સતત વિધેય જ હોય.

105. ત્રિકોણમિતીય વિધેયો અને ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો તેમના પ્રદેશમાં વિકલનીય છે.

106. જો $f \cdot g$ એ $x = a$ આગળ સતત હોય, તો f અને g પ્રત્યેક $x = a$ આગળ સતત હોય.

પ્રકરણ 6

વિકલિતના ઉપયોગો

6.1 વિહંગાવલોકન

6.1.1 રાશિમાં થતા ફેરફારનો દર

વિધેય $y = f(x)$ માટે $\frac{d}{dx}(f(x))$ એ x ની સાપેક્ષે y માં થતા ફેરફારનો દર દર્શાવે છે.

આમ, જો અંતરને 's' વડે અને સમયને 't' વડે દર્શાવીએ, તો $v = \frac{ds}{dt}$ એ સમયની સાપેક્ષે અંતરમાં થતા ફેરફારનો દર એટલે કે વેગ. આ જ રીતે $\frac{dv}{dt}$ તાત્ક્ષણિક પ્રવેગ દર્શાવે છે.

6.1.2 સ્પર્શક અને અભિલંબ

વક્ર $y = f(x)$ ને બિંદુ (x_1, y_1) આગળ સ્પર્શતી રેખાને વક્રનો તે બિંદુ આગળનો સ્પર્શક કહે છે અને તેનું સમીકરણ $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}(x - x_1)$ છે.

વક્રના સ્પર્શબિંદુ આગળના સ્પર્શકને લંબ હોય તેવી રેખાને વક્રનો અભિલંબ કહે છે અને તેનું સમીકરણ

$$y - y_1 = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}(x - x_1) \text{ દ્વારા મળે છે.} \quad \left(\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} \neq 0\right)$$

બે વક્રો વચ્ચેનો ખૂણો એ વક્રોના છેદબિંદુ આગળના સ્પર્શકો વચ્ચનો ખૂણો છે.

6.1.3 આસન્ન મૂલ્ય

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, પરથી આપણે કહી શકીએ કે $f'(x)$ લગભગ $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ની બરાબર છે.

આથી, fનું આસન્ન મૂલ્ય $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x$ દ્વારા મળે.

6.1.4 વધતાં/ઘટતાં વિધેયો

(a, b) પરના સતત વિધેય f માટે,

(i) જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ અથવા $f'(x) > 0$; $\forall x \in (a, b)$ હોય, તો f ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

(ii) જો $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ અથવા $f'(x) < 0$; $\forall x \in (a, b)$ હોય, તો f ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

6.1.5 પ્રમેય : ધારો કે વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત અને (a, b) માં વિકલનીય છે.

(i) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, $f'(x) > 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં વધતું વિધેય છે.

(ii) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, $f'(x) < 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં ઘટતું વિધેય છે.

(iii) જો પ્રત્યેક $x \in (a, b)$ માટે, $f'(x) = 0$ હોય, તો f એ $[a, b]$ માં અચળ વિધેય છે.

6.1.6 મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો

વાસ્તવિક વિધેય f માટે સ્થાનીય મહત્તમ/સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો :

વાસ્તવિક વિધેય f ના પ્રદેશમાં આવેલ સંખ્યા c છે.

(i) જો કોઈ $h > 0$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\forall x \in (c - h, c + h)$, $f(c) \geq f(x)$ થાય તો, f ને c આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય. $f(c)$ ને fનું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય કહે છે. અહીં, $(c - h, c + h) \subset D_f$

(ii) જો કોઈ $h > 0$ અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $\forall\ x \in (c - h, c + h)$, $f(c) \leq f(x)$ થાય, તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય. $f(c)$ ને fનું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કહે છે. અહીં, $(c - h, c + h) \subset D_f$

$[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે, જો $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(c)$ હોય, તો f ને $x = c$, $c \in [a, b]$, આગળ વૈશ્વિક મહત્તમ (અથવા નિરપેક્ષ મહત્તમ) મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય.

આ જ રીતે, $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય f માટે, જો $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq f(d)$ હોય, તો f ને $x = d$, $d \in [a, b]$, આગળ વૈશ્વિક ન્યૂનતમ (અથવા નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ) મૂલ્ય છે તેમ કહેવાય.

6.1.7 fની નિર્ણાયક સંખ્યા (fનું નિર્ણાયક બિંદુ)

વિધેય f ના પ્રદેશમાં આવેલી કોઈ સંખ્યા c આગળ $f'(c) = 0$ અથવા વિધેય f વિકલનીય ન હોય, તો c ને fની નિર્ણાયક સંખ્યા (નિર્ણાયક બિંદુ) કહે છે.

સ્થાનીય મહત્તમ અથવા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનાં બિંદુઓ (અથવા xની કિંમતો) શોધવા માટેના કાર્યનિયમો :

(a) પ્રથમ વિકલિત કસોટી :

(i) c ને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં જેમ x વધે તેમ જો $f'(x)$ તેની નિશાની ધનમાંથી ઋણમાં બદલે, તો f ને c આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) c ને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં જેમ x વધે તેમ જો $f'(x)$ તેની નિશાની ઋણમાંથી ધનમાં બદલે, તો f ને c આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે તથા $f(c)$ એ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) c ને સમાવતા કોઈક અંતરાલમાં x વધે પરંતુ જો $f'(x)$ તેની નિશાની ન બદલે, તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી. આવા બિંદુને નતિબિંદુ કહે છે.

જો $h > 0$ માટે કોઈક અંતરાલ $(c - h, c + h) \subset D_f$ મળે કે જેથી $\forall x \in (c - h, c)$, $f'(x) > 0$ તથા $\forall x \in (c, c + h)$, $f'(x) < 0$ તો f એ $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ છે. તે જ રીતે, $\forall x \in (c - h, c)$, $f'(x) < 0$ તથા $\forall x \in (c, c + h)$, $f'(x) > 0$ તો fને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(b) દ્વિતીય વિકલિત કસોટી : ધારો કે વિધેય f એ અંતરાલ I પર વ્યાખ્યાયિત છે તથા $c \in$ I. ધારો કે, $f''(c)$ નું અસ્તિત્વ છે.

(i) જો $f''(c) < 0$ તથા $f'(c) = 0$ હોય, તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ એ fનું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

(ii) જો $f''(c) > 0$ તથા $f'(c) = 0$ હોય, તો f ને $x = c$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે. $f(c)$ એ fનું સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

(iii) જો $f''(c) = f'(c) = 0$ હોય, તો કસોટી કોઈ પણ તારણ આપવામાં નિષ્ફળ જાય છે. આવા સંજોગોમાં, આપણે પ્રથમ વિકલિત કસોટી પર પાછા ફરીશું.

6.1.8 સંવૃત અંતરાલમાં વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ અને/અથવા વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્યો નક્કી કરવા માટેના કાર્યનિયમો :

સોપાન 1 : વિધેય f નાં તમામ નિર્ણાયક બિંદુઓ (નિર્ણાયક સંખ્યાઓ) આપેલ અંતરાલમાં શોધવાં.

સોપાન 2 : આ તમામ બિંદુઓએ તથા અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓએ વિધેય f ની કિંમતો શોધવી.

સોપાન 3 : સોપાન 2 માં, વિધેય f ની મેળવેલ તમામ કિંમતોમાંથી મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધી કાઢો. આ મહત્તમ કિંમત એ વિધેય f નું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) મહત્તમ મૂલ્ય તથા ન્યૂનતમ કિંમત એ વિધેય fનું વૈશ્વિક (નિરપેક્ષ) ન્યૂનતમ મૂલ્ય હશે.

6.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : વક્ર $y = 5x - 2x^3$ માટે, જો x પ્રતિસેકન્ડ 2 એકમના દરે વધે, તો $x = 3$ હોય ત્યારે વક્રના ઢાળમાં કેટલી ઝડપથી ફેરફાર થાય તે શોધો.

ઉકેલ : વક્રનો ઢાળ $= \dfrac{dy}{dx} = 5 - 6x^2$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -12x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= -12 \cdot (3) \cdot (2)$$

$$= -72 \text{ એકમ/સેકન્ડ}$$

આમ, જ્યારે x પ્રતિસેકન્ડ 2 એકમના દરે વધે તો વક્રનો ઢાળ પ્રતિસેકન્ડ 72 એકમના દરે ઘટે છે.

ઉદાહરણ 2 : શંકુ આકારની ગરણીની નીચેના છિદ્રમાંથી સતત પાણી ટપકી રહ્યું છે અને તેના વક્ર સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં 2 સેમી^{2}/સેકન્ડનો ઘટાડો થાય છે. શંકુની તિર્યક ઊંચાઈ 4 સેમી હોય, ત્યારે પાણીથી બનતા શંકુની તિર્યક ઊંચાઈ ઘટવાનો દર શોધો. અર્ધશિરઃકોણનું માપ $\dfrac{\pi}{4}$ છે.

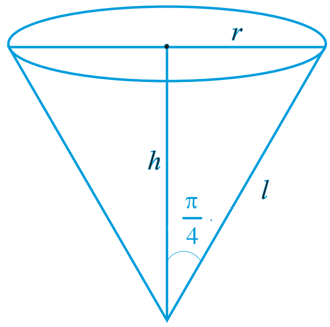
ઉકેલ : જો શંકુના વક્ર સપાટીના ક્ષેત્રફળને s વડે દર્શાવીએ, તો $\dfrac{ds}{dt} = -2$ સેમી^{2}/સેકન્ડ

હવે, $s = \pi r l = \pi l \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} \cdot l = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} l^2$

આથી, $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2}} l \cdot \dfrac{dl}{dt} = \sqrt{2}\pi l \cdot \dfrac{dl}{dt}$

હવે, જ્યારે $l = 4$ સેમી હોય, ત્યારે

$$\frac{dl}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{2}\pi \cdot 4} \cdot 2 = \frac{-1}{2\sqrt{2}\pi} = \frac{-\sqrt{2}}{4\pi} \text{ સેમી/સેકન્ડ}$$



આકૃતિ 6.1

પરિવર્તનનો દર $-\dfrac{\sqrt{2}}{4\pi}$ સેમી/સેકન્ડ છે, એટલે કે, તિર્યક ઊંચાઈ ઘટવાનો દર $\dfrac{\sqrt{2}}{4\pi}$ સેમી/સેકન્ડ છે.

ઉદાહરણ 3 : વક્રો $y^2 = x$ અને $x^2 = y$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણો $y^2 = x$ અને $x^2 = y$ ને ઉકેલતાં, $x^4 = x$ અથવા $x^4 - x = 0$ મળે.

$\therefore \quad x\,(x^3 - 1) = 0$

$\therefore \quad x = 0$ અથવા $x = 1$

આથી, $y = 0, \quad y = 1$

એટલે કે, વક્રોનાં છેદબિંદુઓ (0, 0) અને (1, 1) છે.

વળી, $y^2 = x \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

અને $x^2 = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x.$

$\therefore$ બિંદુ (0, 0) આગળ, વક્ર $y^2 = x$ નો સ્પર્શક y-અક્ષને સમાંતર છે અને વક્ર $x^2 = y$ નો સ્પર્શક x-અક્ષને સમાંતર છે.

$\therefore$ વક્રો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $= \frac{\pi}{2}$

બિંદુ (1, 1) આગળ, વક્ર $y^2 = x$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{1}{2}$ અને વક્ર $x^2 = y$ ના સ્પર્શકનો ઢાળ $= 2.$

$$\therefore \quad tan\,\theta = \left|\frac{2-\frac{1}{2}}{1+1}\right| = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

નોંધ : બે વક્રો વચ્ચેનો ખૂણો θ શોધવા માટે, સૂત્ર $tan\,\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ નો ઉપયોગ કરીશું.

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો કે, $f(x) = tan\,x - 4x$ એ $\left(\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

ઉકેલ : $f(x) = tan\,x - 4x \Rightarrow f'(x) = sec^2 x - 4$

હવે જ્યારે, $\frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$, sec યુગ્મ વિધેય હોવાથી $0 < x < \frac{\pi}{3}$ લઈ શકીએ.

આથી, $1 < sec\,x < 2$

આથી, $1 < sec^2 x < 4$. આથી $-3 < (sec^2 x - 4) < 0$

આમ, $\frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow f'(x) < 0$

આથી, f એ $\left(\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ પર ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 5 : વિધેય $y = x^4 - \frac{4x^3}{3}$ કયા અંતરાલમાં વધે છે અને કયા અંતરાલમાં ઘટે છે તે નક્કી કરો.

ઉકેલ : $y = x^4 - \frac{4x^3}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2\,(x - 1)$

હવે, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0$ અથવા $x = 1$.

વળી, $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ અને f એ $(-\infty, 0]$ અને $[0, 1]$ માં સતત છે. વળી, $f'(x) > 0, \forall x > 1$ આથી, વિધેય f એ $(-\infty, 1]$ માં ઘટતું અને $[1, \infty)$ માં વધતું વિધેય છે.

નોંધ : અહીં, વિધેય f એ $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ માં ચુસ્ત ઘટતું અને $(1, \infty)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે, વિધેય $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$ ને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો નથી.

ઉકેલ : $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$

$f'(x) = 12x^2 - 36x + 27 = 3(4x^2 - 12x + 9) = 3(2x - 3)^2 \geq 0$ (f' ચિહ્ન ના બદલે.)

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (નિર્ણાયક સંખ્યા)

વળી, $f'(x) > 0, \forall x < \frac{3}{2}$ અને $f'(x) > 0, \forall x > \frac{3}{2}$

આથી, $x = \frac{3}{2}$ એ નતિબિંદુ છે એટલે કે f ને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો નથી.

માત્ર, $x = \frac{3}{2}$ નિર્ણાયક સંખ્યા છે અને વિધેય f ને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો નથી.

નોંધ : f એ વધતું વિધેય છે. મહત્તમ કે ન્યૂનતમનો પ્રશ્ન જ નથી.

ઉદાહરણ 7 : વિકલના ઉપયોગથી, $\sqrt{0.082}$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $f(x) = \sqrt{x}$

હવે, $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$ માં $x = 0.09$ અને $\Delta x = -0.008$ લેતાં,

આપણને $f(0.09 - 0.008) = f(0.09) + (-0.008) f'(0.09)$ મળે.

$$\therefore \sqrt{0.082} = \sqrt{0.09} - 0.008 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{0.09}}\right) = 0.3 - \frac{0.008}{0.6} = 0.3 - 0.0133 = 0.2867.$$

ઉદાહરણ 8 : વક્રો $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ અને $xy = c^2$ લંબચ્છેદી બને તે માટેની શરત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલ વક્રો (x_1, y_1) બિંદુએ છેદે છે. આથી,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$\therefore$ છેદબિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ $(m_1) = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

વળી, $xy = c^2 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \Rightarrow m_2 = \frac{-y_1}{x_1}$.

વક્રો લંબચ્છેદી બને તે માટે, $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1$ અથવા $a^2 - b^2 = 0$.

(**નોંધ :** આનો અર્થ $a = b$ એટલે કે, $x^2 - y^2 = a^2$ લંબાતિવલય છે. અત્રે વક્રો છેદે છે તે સ્વીકારી લીધું છે.)

ઉદાહરણ 9 : વિધેય $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - 8x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 105$; x ની કઈ કિંમતો આગળ સ્થાનીય મહત્તમ અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવે તે શોધો.

ઉકેલ : $f'(x) = -3x^3 - 24x^2 - 45x$

$= -3x(x^2 + 8x + 15)$

$= -3x(x + 5)(x + 3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -5$ અથવા $x = -3$ અથવા $x = 0$

$f''(x) = -9x^2 - 48x - 45$

$= -3(3x^2 + 16x + 15)$

$f''(0) = -45 < 0$. આથી, f એ $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે.

$f''(-3) = 18 > 0$. આથી, f એ $x = -3$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરે.

$f''(-5) = -30 < 0$. આથી, f એ $x = -5$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે.

ઉદાહરણ 10 : સાબિત કરો કે, $x+\frac{1}{x}$ નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય તેના સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય કરતાં નાનું છે.

ઉકેલ : ધારો કે, $y = x+\frac{1}{x}$. આથી $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$,

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$. આથી, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1} = 2 > 0$ અને $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-1} = -2 < 0$.

આથી, y એ $x = -1$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે અને સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય -2 છે. તેમ જ y એ $x = 1$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધારણ કરે અને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય 2 છે. આથી, સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય (-2) એ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય 2 કરતાં ઓછું છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 11 : શિરોલંબ અક્ષ ધરાવતા શંકુ આકારના વાસણમાંથી 1 સેમી^{3}/સેકન્ડના સ્થિત દરે પાણી ટપકી રહ્યું છે. જ્યારે વાસણમાં પાણીની તિર્યક ઊંચાઈ 4 સેમી હોય ત્યારે તિર્યક ઊંચાઈના ઘટવાનો દર શોધો. શંકુ આકારના વાસણના અર્ધ શિરઃકોણનું માપ $\frac{\pi}{6}$ છે.

ઉકેલ : $\frac{dV}{dt} = -1$ સેમી^{3}/સેકન્ડ આપેલ છે, જ્યાં V એ શંકુ આકારના વાસણમાં રહેલ પાણીનું ઘનફળ છે.

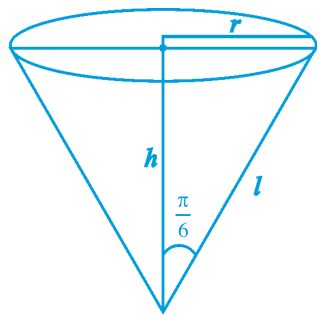
આકૃતિ 6.2 પરથી, $l = 4$ સેમી, $h = l\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ અને $r = l\sin\frac{\pi}{6} = \frac{l}{2}$.

આથી, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\frac{l^2}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}\pi}{24}l^3$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}l^2\frac{dl}{dt}$$

આથી, $-1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}16\cdot\frac{dl}{dt}$

$\therefore \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{3}\pi}$ સેમી/સે.



આકૃતિ 6.2

આથી, તિર્યક ઊંચાઈના ઘટવાનો દર $= \frac{1}{2\sqrt{3}\pi}$ સેમી/સે.

ઉદાહરણ 12 : વક્ર $y = \cos(x + y)$, $-2\pi \le x \le 2\pi$ ના રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર હોય તેવા તમામ સ્પર્શકોનાં સમીકરણો શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $y = \cos(x + y)$. આથી $\frac{dy}{dx} = -\sin(x + y)\left[1+\frac{dy}{dx}\right]$ ...(i)

અથવા $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{sin(x+y)}{1+sin(x+y)}$

વળી, સ્પર્શક એ રેખા $x + 2y = 0$ ને સમાંતર છે. આથી, સ્પર્શકનો ઢાળ $= -\dfrac{1}{2}$

આથી, $-\dfrac{sin(x+y)}{1+sin(x+y)} = -\dfrac{1}{2}$ પરથી $sin\,(x + y) = 1$ ....(ii)

વળી, $cos(x + y) = y$ અને $sin\,(x + y) = 1 \Rightarrow cos^2\,(x + y) + sin^2\,(x + y) = y^2 + 1$

$\Rightarrow\ 1 = y^2 + 1$ અથવા $y = 0$.

આથી, $cos\,x = 0$. $(cos\,(x + y) = y)$

$\therefore\ x = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2},\ n = 0, \pm 1, \pm 2...$

આમ, $x = \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{2}$ પરંતુ, $x = \dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{-3\pi}{2}$ સમીકરણ (ii)નું સમાધાન કરે છે.

$(\because\ sin\,x = 1,\ y = 0)$

આથી, બિંદુઓ $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right), \left(\dfrac{-3\pi}{2}, 0\right)$ મળે.

આથી, બિંદુ $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = -\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ અથવા $2x + 4y - \pi = 0$ અને

બિંદુ $\left(\dfrac{-3\pi}{2}, 0\right)$ આગળ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y = -\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ અથવા $2x + 4y + 3\pi = 0$ છે.

ઉદાહરણ 13 : વક્રો $y^2 = 4ax$ અને $x^2 = 4by$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

ઉકેલ : $y^2 = 4ax$ ...(i)

$x^2 = 4by$ ...(ii)

સમીકરણો (i) અને (ii) ઉકેલતાં,

$\left(\dfrac{x^2}{4b}\right)^2 = 4ax$. આથી $x^4 = 64\ ab^2\,x$

$\therefore\ x\,(x^3 - 64ab^2) = 0$. આથી $x = 0,\ x = 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$

આથી, છેદબિંદુઓ $(0, 0)$ અને $(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}},\ 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})$ થાય.

હવે, $y^2 = 4ax \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4a}{2y} = \dfrac{2a}{y}$ અને $x^2 = 4by \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{4b} = \dfrac{x}{2b}$

આથી, વક્ર $y^2 = 4ax$ ને બિંદુ $(0, 0)$ આગળનો સ્પર્શક y-અક્ષને સમાંતર છે અને વક્ર $x^2 = 4by$ ને બિંદુ $(0, 0)$ આગળનો સ્પર્શક x-અક્ષને સમાંતર છે.

$\therefore$ બે વક્રો વચ્ચેનો ખૂણો $= \dfrac{\pi}{2}$

બિંદુ $(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}},\ 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})$ આગળ વક્ર (i) નો ઢાળ $= \dfrac{2a}{4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = m_1$

બિંદુ $(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}, 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})$ આગળ વક્ર (ii) નો ઢાળ $= \dfrac{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{2b} = 2\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = m_2$

આમ, $tan\,\theta = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\dfrac{2\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 + 2\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}}\right| = \dfrac{3a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{2(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})}$

$\therefore \quad \theta = tan^{-1}\left(\dfrac{3a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{2(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})}\right)$

ઉદાહરણ 14 : જેનાં પ્રચલ સમીકરણ $x = 3cos\,\theta - cos^3\theta$, $y = 3sin\theta - sin^3\theta$ હોય તેવા વક્રના કોઈ પણ બિંદુ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ $4(y\,cos^3\theta - x\,sin^3\theta) = 3\ sin\ 4\theta$ છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : અહીં, $x = 3cos\,\theta - cos^3\theta$ અને $y = 3sin\theta - sin^3\theta$ આપેલ છે.

$\therefore \quad \dfrac{dx}{d\theta} = -3sin\,\theta + 3cos^2\theta\ sin\,\theta = -3sin\theta\ (1 - cos^2\theta) = -3sin^3\theta$

અને $\dfrac{dy}{d\theta} = 3cos\ \theta - 3sin^2\theta\ cos\theta = 3cos\theta\ (1 - sin^2\theta) = 3cos^3\theta$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{cos^3\theta}{sin^3\theta}$

આથી, અભિલંબનો ઢાળ $= +\dfrac{sin^3\theta}{cos^3\theta}$

આથી, અભિલંબનું સમીકરણ

$$y - (3sin\theta - sin^3\theta) = \frac{sin^3\theta}{cos^3\theta}[x - (3cos\theta - cos^3\theta)]$$

$\Rightarrow \quad y\ cos^3\theta - 3sin\theta\ cos^3\theta + sin^3\theta\ cos^3\theta = xsin^3\theta - 3sin^3\theta\ cos\theta + sin^3\theta\ cos^3\theta$

$\Rightarrow \quad y\ cos^3\theta - xsin^3\theta = 3sin\theta\ cos\theta\ (cos^2\theta - sin^2\theta)$

$$= \frac{3}{2}sin2\theta\ .\ cos2\theta$$

$$= \frac{3}{4}sin4\theta$$

અથવા $4(ycos^3\ \theta - xsin^3\ \theta) = 3\ sin4\theta$.

ઉદાહરણ 15 : $f(x) = sec\,x + \log\ cos^2x$, $0 \le x \le 2\pi$ ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\quad f(x) = sec\,x + 2\ \log\ cosx$

આમ, $f'(x) = sec\,x\ tan\,x - 2\ tan\,x = tan\,x\ (sec\,x - 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow tan\,x = 0$ અથવા $sec\,x = 2$ અથવા $cos\,x = \dfrac{1}{2}$

આથી, x ની શક્ય કિંમતો $x = 0$ અથવા $x = \pi$ અને $x = 2\pi$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ અથવા } x = \frac{5\pi}{3}$$

વળી, $f''(x) = sec^2x\ (secx - 2) + tanx\ (secx\ tanx)$

$= sec^3x + secx\ tan^2x - 2sec^2x$

$= sec\,x\ (sec^2x + tan^2x - 2secx)$. આપણે નોંધીશું કે,

$f''(\pi) = -1\ (1 + 0 + 2) = -3 < 0$. આથી, $x = \pi$ આગળ fની સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત મળે.

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\ (4 + 3 - 4) = 6 > 0$. આથી, $x = \frac{\pi}{3}$ આગળ fની સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત મળે.

$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\ (4 + 3 - 4) = 6 > 0$. આથી, $x = \frac{5\pi}{3}$ આગળ પણ fની સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત મળે.

$\therefore$ y ની $x = 0$ આગળ કિંમત $1 + 0 = 1$ = વૈશ્વિક મહત્તમ

y ની $x = \pi$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત $-1 + 0 = -1$ = વૈશ્વિક ન્યૂનતમ

y ની $x = \frac{\pi}{3}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત $2 + 2\log\frac{1}{2} = 2\ (1 - \log 2)$

y ની $x = \frac{5\pi}{3}$ આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત $2 + 2\log\frac{1}{2} = 2\ (1 - \log 2)$

y ની $x = 2\pi$ આગળ કિંમત $= 1$ = વૈશ્વિક મહત્તમ

ઉદાહરણ 16 : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ માં અંતર્ગત લંબચોરસનું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 6.3 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે C (x, y) એ ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ પરનું બિંદુ છે. ધારો કે, જેની બાજુઓ $AB = 2x$ અને $BC = 2y$ હોય, તેવો લંબચોરસ ABCD મહત્તમ ક્ષેત્રફળ ધરાવે છે.

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $A = 4xy$ પરથી,

$A^2 = 16x^2y^2 = s$ (કહીશું)

આથી, $s = 16x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\cdot b^2 = \frac{16b^2}{a^2}\ (a^2x^2 - x^4)$

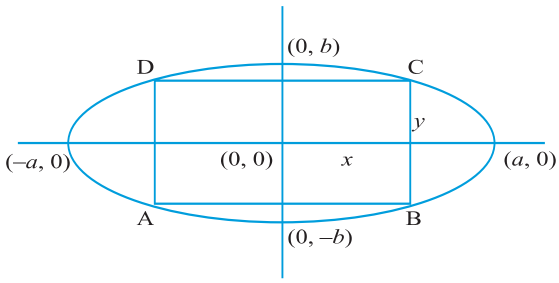
$\Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{16b^2}{a^2} \cdot [2a^2x - 4x^3]$

સ્પષ્ટ છે કે $x \neq 0$.

વળી, $\frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}},\ y = \frac{b}{\sqrt{2}}$

હવે, $\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{16b^2}{a^2}\ [2a^2 - 12x^2]$

આથી, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ આગળ $\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{16b^2}{a^2}[2a^2 - 6a^2] = \frac{16b^2}{a^2}(-4a^2) < 0$



આકૃતિ 6.3

આમ, $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$, આગળ, s મહત્તમ છે અને આથી, લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ A મહત્તમ થાય.

મહત્તમ ક્ષેત્રફળ $= 4 \cdot x \cdot y = 4 \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{b}{\sqrt{2}} = 2ab$ ચોરસ એકમ

ઉદાહરણ 17 : વિધેય $f(x) = sin2x - x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમતો વચ્ચેનો તફાવત શોધો.

ઉકેલ : $f(x) = sin2x - x$

$\therefore \quad f'(x) = 2\ cos2x - 1$

આથી, $f'(x) = 0 \Rightarrow cos2x = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 2x = \dfrac{-\pi}{3}$ અથવા $\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-\pi}{6}$ અથવા $\dfrac{\pi}{6}$

$f''(x) = -4\ sin\ 2x$

$\therefore \quad f''\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) > 0$. આથી $f(-\dfrac{\pi}{6})$ સ્થાનીય ન્યૂનતમ તથા $f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) < 0$ અને આથી $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય ધારણ કરે છે.

$\therefore \quad f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = sin\ (-\pi) + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, નિરપેક્ષ મહત્તમ

$\therefore \quad f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = sin\left(-\dfrac{2\pi}{6}\right) + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{6}$, સ્થાનીય ન્યૂનતમ

$\therefore \quad f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = sin\left(\dfrac{2\pi}{6}\right) - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$, સ્થાનીય મહત્તમ

$\therefore \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = sin(\pi) - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$, નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ

સ્પષ્ટ છે કે, $\dfrac{\pi}{2}$ એ નિરપેક્ષ મહત્તમ કિંમત છે જ્યારે $-\dfrac{\pi}{2}$ એ નિરપેક્ષ ન્યૂનતમ કિંમત છે.

આથી, તફાવત $= \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$

ઉદાહરણ 18 : a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને અંતર્ગત સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ આવેલો છે. તેનો શિરઃકોણ 2θ છે, તો જ્યારે $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ હોય, ત્યારે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને અંતર્ગત સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ABC એવો મળે છે કે જેથી AB = AC.
AD = AO + OD = $a + a\ cos2\theta$ અને BC = 2BD = $2a\ sin2\theta$ (આકૃતિ 6.4 જુઓ.)

આથી, ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ $\Delta = \dfrac{1}{2} BC \cdot AD$

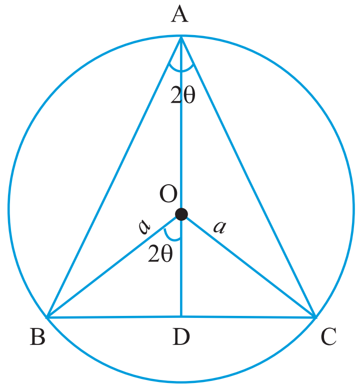
$= \dfrac{1}{2} 2a\ sin2\theta \cdot (a + a\ cos2\theta)$

$= a^2 sin2\theta\ (1 + cos2\theta)$

$\therefore \ \Delta = a^2 sin2\theta + \dfrac{1}{2} a^2\ sin4\theta$

આથી, $\dfrac{d\Delta}{d\theta} = 2a^2 cos2\theta + 2a^2 cos4\theta$

$= 2a^2(cos2\theta + cos4\theta)$



આકૃતિ 6.4

$\frac{d\Delta}{d\theta} = 0 \Rightarrow cos2\theta = -cos4\theta = cos\ (\pi - 4\theta)$

આથી, $2\theta = \pi - 4\theta$. આથી, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\frac{d^2\Delta}{d\theta^2} = 2a^2\ (-2sin2\theta - 4sin4\theta) < 0$ $\qquad \left(\theta = \frac{\pi}{6}\right)$

આથી, જ્યારે $\theta = \frac{\pi}{6}$ હોય, ત્યારે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 19 થી 23 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 19 : વક્ર $3y = 6x - 5x^3$ પરના કોઈ બિંદુ આગળ દોરેલ અભિલંબ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતો હોય, તો $x =$ ....

(A) 1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

ઉકેલ : ધારો કે, વક્ર $3y = 6x - 5x^3$ પરનું બિંદુ (x_1, y_1) છે. આ બિંદુ આગળ દોરેલ અભિલંબ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 2 - 5x_1^2$.

વળી, બિંદુ (x_1, y_1) આગળ દોરેલ અભિલંબ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે. અભિલંબનો ઢાળ $= \frac{y_1}{x_1}$

$\therefore$ સ્પર્શકનો ઢાળ $= \frac{-x_1}{y_1}$

આથી, $2 - 5x_1^2 = \frac{-x_1}{y_1} = \frac{-3}{6 - 5x_1^2}$.

વળી, $x_1 = 1$ આ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આથી, સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 20 : બે વક્રો $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$ અને $3x^2y - y^3 = 2$

(A) એકબીજાને સ્પર્શે છે. (B) એકબીજાને કાટખૂણે છેદે છે.

(C) એકબીજાને $\frac{\pi}{3}$ ખૂણે છેદે છે. (D) એકબીજાને $\frac{\pi}{4}$ ખૂણે છેદે છે.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે બે વક્રો છેદે છે કે નહિ તે નક્કી કરીએ.

$\therefore\ x^3 - 3xy^2 + 3x^2y - y^3 = 0$

$\therefore\ (x^3 - y^3) + 3xy\ (x - y) = 0$

$\therefore\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 3xy\ (x - y) = 0$

$\therefore\ (x - y)(x^2 + 4xy + y^2) = 0$

$\therefore\ x = y$ અથવા $x^2 + 4xy + y^2 = 0$

હવે, $x = y$ લેતાં, $y^3 - 3y^3 + 2 = 0$ તેથી, $2 - 2y^3 = 0$ એટલે કે $(1 - y^3) = 0$

$\therefore\ y = 1$ મળે. આથી, છેદબિંદુ $(1, 1)$ મળે.

$x^2 + 4xy + y^2 = 0$ અશક્ય છે.

હવે, પ્રથમ વક્રના સમીકરણ પરથી, $3x^2 - 3y^2 - 6xy\frac{dy}{dx} = 0$ મળે.

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{2xy} = m_1$ તથા બીજા વક્રના સમીકરણ પરથી,

$$6xy + 3x^2\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2} = m_2$$

વળી, $m_1 \cdot m_2 = -1$. આથી, વિકલ્પ (B) સાચો જવાબ છે.

નોંધ : ઉત્તર સાચો છે પણ અભિગમ સાચો નથી.

ખરેખર તો (1, 1) આગળ પ્રથમ વક્ર માટે,

$$3 - 3 - 6\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore \quad m_1 = 0$

$\therefore$ સ્પર્શક X-અક્ષને સમાંતર છે, તે $y = 1$ છે.

(1, 1) આગળ બીજા વક્ર માટે સ્પર્શક Y-અક્ષને સમાંતર છે.

તે $x = 1$ છે.

$\therefore$ તેમની વચ્ચેનો ખૂણો કાટખૂણો છે.

$m_1 m_2 = -1$ શક્ય નથી.

$m_1 = 0$ છે. m_2 નું અસ્તિત્વ નથી.

ઉદાહરણ 21 : $x = e^t\, cost$ તથા $y = e^t\, sint$ સમીકરણવાળા વક્રનો સ્પર્શક $t = \dfrac{\pi}{4}$ હોય, ત્યારે x-અક્ષ સાથે .... માપનો ખૂણો બનાવે.

(A) 0 (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $\dfrac{dx}{dt} = -\, e^t\, sint + e^t cost$, $\dfrac{dy}{dt} = e^t cost + e^t sint$

આથી, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = \dfrac{cos\, t + sin\, t}{cos\, t - sin\, t} \to \infty$. આથી, વિકલ્પ (D) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 22 : વક્ર $y = sin\ x$ ને (0, 0) આગળ દોરેલ અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x - y = 0$

ઉકેલ : $\dfrac{dy}{dx} = cosx$. આથી, અભિલંબનો ઢાળ $= \left(\dfrac{-1}{cos\ x}\right)_{x=0} = -1$

આથી, અભિલંબનું સમીકરણ $y - 0 = -1(x - 0)$ અથવા $x + y = 0$ મળે.

સાચો જવાબ (C) છે.

ઉદાહરણ 23 : વક્ર $y^2 = x$ પરના .... બિંદુ આગળનો સ્પર્શક x-અક્ષ સાથે $\dfrac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવે.

(A) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ (B) $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ (C) (4, 2) (D) (1, 1)

ઉકેલ : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y} = tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

$\therefore \quad y = \dfrac{1}{2}$. આથી $x = \dfrac{1}{4}$

સાચો જવાબ (B) છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 24 થી 29 વાળા પ્રશ્નોમાં ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 24 : વક્ર $y = x^2 + ax + 25$ એ x-અક્ષને સ્પર્શે તે માટે 'a' ની કિંમતો .... હોઈ શકે.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + a = 0$ એટલે કે, $x = -\frac{a}{2}$.

ધારો કે સ્પર્શબિંદુ $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ છે.

આથી, $\frac{a^2}{4} + a\left(-\frac{a}{2}\right) + 25 = 0 \Rightarrow a = \pm 10$ (x-અક્ષ પર $y = 0$)

આથી, a ની કિંમતો ± 10 હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 25 : જો $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 2x + 1}$, હોય, તો $f(x)$ ની મહત્તમ કિંમત .... છે.

ઉકેલ : f મહત્તમ બને, તે માટે, $4x^2 + 2x + 1$ ન્યૂનતમ બને તે જરૂરી છે. એટલે કે,

$4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)$ બને. આથી, $x = -\frac{1}{4}$ માટે $4x^2 + 2x + 1$ ની ન્યૂનતમ કિંમત $\frac{3}{4}$ મળે.

આથી, f ની મહત્તમ કિંમત $= \frac{4}{3}$.

ઉદાહરણ 26 : ધારો કે, વિધેય f ના પ્રદેશના અંતરાલની અંદર $x = c$ આગળ દ્વિતીય વિકલિત એવું મળે કે જેથી, $f'(c) = 0$ અને $f''(c) > 0$ હોય, તો c એ .... છે.

ઉકેલ : સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય ધરાવતી સંખ્યા

ઉદાહરણ 27 : જો $f(x) = sinx$, $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ હોય, તો f ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

ઉકેલ : -1

ઉદાહરણ 28 : $sinx + cosx$ ની મહત્તમ કિંમત .... છે.

ઉકેલ : $\sqrt{2}$ $\quad$ ($a = 1$, $b = 1$, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$)

ઉદાહરણ 29 : જ્યારે ગોલકની ત્રિજ્યા 2 સેમી હોય, ત્યારે ગોલકના ઘનફળનો તેના પૃષ્ઠફળને સાપેક્ષ થતો વૃદ્ધિદર .... છે.

ઉકેલ : 1 સેમી^{3}/સેમી^{2}

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$, $S = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dS}{dr} = 8\pi r \Rightarrow \frac{dV}{dS} = \frac{r}{2} = 1$, કારણ કે $r = 2$.

સ્વાધ્યાય 6.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. મીઠાનો એક ગોલીય ટુકડો પાણીમાં એવી રીતે ઓગળે છે કે જેથી તેના ઘનફળમાં થતા ઘટાડાનો દર એ કોઈ પણ ક્ષણે તેના પૃષ્ઠફળના પ્રમાણમાં છે. સાબિત કરો કે તે ગોલીય ટુકડાની ત્રિજ્યા અચળ દરે ઘટી રહી છે.

2. જો કોઈ વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ અચળ દરે સતત વધી રહ્યું હોય, તો સાબિત કરો કે વર્તુળની પરિમિતિ તેની ત્રિજ્યાના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે.

3. એક પતંગ 151.5 મીટરની ઊંચાઈએ ઊડે છે. જો પતંગનો સમક્ષિતિજ વેગ 10 મી/સેકન્ડ હોય, તો જ્યારે પતંગ ચગાવી રહેલ છોકરાથી પતંગ 250 મીટર દૂર હોય, ત્યારે દોરી છોડવાનો દર શોધો. છોકરાની ઊંચાઈ 1.5 મીટર છે.

4. એકબીજા સાથે 45° ના ખૂણો રચતા બે રસ્તાઓના સંગમ બિંદુથી બે માણસો A અને B વેગ v સાથે મુસાફરી શરૂ કરે છે. જો તેઓ ભિન્ન રસ્તાઓ દ્વારા મુસાફરી પૂરી કરે, તો તેઓ જે જગ્યાએથી છૂટા પડ્યા હોય, તે જગ્યા આગળનો દર શોધો.

5. જે ઝડપે *sine* વધે તેની બમણી ઝડપે ખૂણો θ વધતો હોય, તો θ નું મૂલ્ય શોધો. $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

6. $(1.999)^5$ નું આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

7. ધાતુના એક પોલા ગોલીય છીપ (દરિયાકિનારે મળતી વસ્તુ)ની આંતરિક અને બાહ્ય ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 3 સેમી અને 3.0005 સેમી હોય, તો તે ધાતુનું આસન્ન ઘનફળ શોધો.

8. 2 મી ઊંચો એક માણસ $1\frac{2}{3}$ મી/સે ના દરથી શેરીના દિવા તરફ જઈ રહ્યો છે. જમીનથી શેરીના દિવાની ઊંચાઈ $5\frac{1}{3}$ મીટર છે. તેના પડછાયાની લંબાઈ કેટલી ઝડપથી બદલાઈ રહી છે ? જ્યારે તે શેરીના દિવાના આધારથી $3\frac{1}{3}$ મીટર દૂર હોય, ત્યારે તેના પડછાયાની લંબાઈમાં કેટલી ઝડપથી ફેરફાર થાય તે શોધો.

9. એક સ્વિમિંગ પુલને સફાઈ માટે ખાલી કરવામાં આવે છે. L એ સ્વિમિંગ પુલમાં રહેલ પાણીનો આંક (લિટરમાં) દર્શાવે છે. t સેકન્ડ પછી પુલમાં રહેલ પાણી ખાલી કરવાનું બંધ કરવામાં આવે છે. વળી, $L = 200\ (10 - t)^2$ છે. 5 સેકન્ડ પછી કેટલી ઝડપથી પાણી બહાર નીકળી રહ્યું છે ? પ્રથમ 5 સેકન્ડ દરમિયાન પાણીના બહાર નીકળવાના પ્રવાહનો સરેરાશ દર શું હશે ?

10. એક સમઘનનું ઘનફળ અચળ દરે વધી રહ્યું છે. સાબિત કરો કે તેના પૃષ્ઠફળમાં થતો વધારો એ તેની બાજુની લંબાઈના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

11. જો બે ચોરસની બાજુઓ x અને y માટે $y = x - x^2$ હોય, તો બીજા ચોરસના ક્ષેત્રફળમાં પ્રથમ ચોરસના ક્ષેત્રફળને સાપેક્ષ થતા ફેરફારનો દર શોધો.

12. વક્રો $2x = y^2$ અને $2xy = k$ લંબચ્છેદી બને તે માટેની શરત શોધો.

13. સાબિત કરો કે વક્રો $xy = 4$ અને $x^2 + y^2 = 8$ એકબીજાને સ્પર્શે છે.

14. વક્ર $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ પરના જે બિંદુ આગળના સ્પર્શકો અક્ષો સાથે સમાન ઢળેલા હોય, તે બિંદુના યામ શોધો.

15. વક્રો $y = 4 - x^2$ અને $y = x^2$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

16. સાબિત કરો કે, વક્રો $y^2 = 4x$ અને $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ બિંદુ $(1, 2)$ આગળ પરસ્પર એકબીજાને સ્પર્શે છે.

17. વક્ર $3x^2 - y^2 = 8$ ને રેખા $x + 3y = 4$ ને સમાંતર અભિલંબના સમીકરણ મેળવો.

18. વક્ર $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ પરના કયાં બિંદુઓ આગળ સ્પર્શકો y-અક્ષને સમાંતર હોય ?

19. વક્ર $y = b \cdot e^{\frac{-x}{a}}$ એ y-અક્ષને જે બિંદુમાં છેદે, તે બિંદુ આગળ રેખા $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ વક્રને સ્પર્શે છે તેમ સાબિત કરો.

20. સાબિત કરો કે, $f(x) = 2x + cot^{-1}x + \log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$ એ **R** માં વધતું વિધેય છે.

21. સાબિત કરો કે, $a \geq 1$ માટે, $f(x) = \sqrt{3}\,sinx - cosx - 2ax + b$ એ **R** માં ઘટતું વિધેય છે.

22. $f(x) = tan^{-1}(sinx + cosx)$ એ $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માં વધતું વિધેય છે, તેમ સાબિત કરો.

23. વક્ર $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ નો ઢાળ કયા બિંદુએ મહત્તમ હોય ? મહત્તમ ઢાળ પણ શોધો.

24. સાબિત કરો કે વિધેય $f(x) = sinx + \sqrt{3}\,cosx$ એ $x = \frac{\pi}{6}$ આગળ મહત્તમ કિંમત ધારણ કરે છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

25. જો કાટકોણ ત્રિકોણમાં, બાજુ તથા કર્ણની લંબાઈના માપનો સરવાળો અચળ હોય, તો સાબિત કરો કે જ્યારે તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $\frac{\pi}{3}$ હોય, ત્યારે તે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય.

26. વિધેય $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ એ x ની જે કિંમતો આગળ સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો ધરાવે તે કિંમતો તથા નતિબિંદુ શોધો. વળી, તેને સંગત સ્થાનીય મહત્તમ તથા સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો પણ શોધો.

27. કોઈ એક શહેરમાં એક ટેલિફોન કંપની 500 ગ્રાહકોની યાદી બનાવે છે અને પ્રત્યેક ગ્રાહક પાસેથી વાર્ષિક ₹ 300/- નિયત ચાર્જ વસૂલે છે. કંપની વાર્ષિક લવાજમમાં વધારો કરવાની દરખાસ્ત મૂકે અને ધારણા બાંધે કે પ્રત્યેક ₹ 1/- ના વધારાથી એક ગ્રાહક સેવા લેવાનું બંધ કરી દે, તો કંપની મહત્તમ નફો પ્રાપ્ત થાય તે માટે કેટલો વધારો કરશે ?

28. જો રેખા $x\ cos\alpha + y\ sin\alpha = p$ વક્ર $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ને સ્પર્શે તો, સાબિત કરો કે,
$a^2\ cos^2\alpha + b^2\ sin^2\alpha = p^2$.

29. આપેલ પૂંઠાના જથ્થામાંથી ચોરસ આધારવાળી એક ખુલ્લી પેટી બનાવવાની છે. જો તેનું કુલ પૃષ્ઠફળ c^2 હોય, તો સાબિત કરો કે, તેનું મહત્તમ ઘનફળ $\frac{c^3}{6\sqrt{3}}$ ઘન એકમ છે.

30. 36 સેમીની પરિમિતિ ધરાવતા લંબચોરસને તે એક બાજુની આસપાસ ફરે તે રીતે બહારથી વાળવામાં આવે કે જેથી તેનું ઘનફળ શક્ય હોય તેટલું મહત્તમ થાય તો તે લંબચોરસનાં પરિમાણ નક્કી કરો. તેનું મહત્તમ ઘનફળ પણ શોધો.

31. જો સમઘન અને ગોલકનાં પૃષ્ઠફળનો સરવાળો અચળ હોય, તો જ્યારે તેમનાં ઘનફળનો સરવાળો ન્યૂનતમ હોય ત્યારે સમઘનની ધારની લંબાઈ અને ગોલકના વ્યાસનો ગુણોત્તર શું હોય તે શોધો.

32. કોઈ એક વર્તુળનો વ્યાસ AB છે તથા C એ વર્તુળ પરનું બિંદુ છે, તો સાબિત કરો કે જ્યારે ΔABC સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ હોય, ત્યારે તેનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય.

33. ચોરસ આધારવાળી અને શિરોલંબ બાજુઓ ધરાવતી ધાતુની એક પેટીનું ઘનફળ 1024 સેમી^{3} છે. આ પેટીનાં મથાળા અને તળિયા માટે વપરાયેલ સામગ્રીની કિંમત ₹ 5/સેમી^{2} તથા બાજુઓ માટે વપરાયેલ સામગ્રીની કિંમત ₹ 2.50/સેમી^{2} હોય, તો આ પેટી બનાવવા માટેનો ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

34. x, $2x$ અને $\frac{x}{3}$ માપની બાજુઓ ધરાવતા લંબ સમાંતર ફલક અને ગોલકનાં પૃષ્ઠફળનો સરવાળો અચળ આપેલ છે. જો x એ ગોલકની ત્રિજ્યા કરતાં ત્રણ ગણો હોય, તો તેમનાં ઘનફળનો સરવાળો ન્યૂનતમ છે તેમ સાબિત કરો. વળી, તેમનાં ઘનફળના સરવાળાની ન્યૂનતમ કિંમત પણ શોધો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 35 થી 39 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

35. એક સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુઓ 2 સેમી/સેકન્ડના દરથી વધે છે. જ્યારે બાજુનું માપ 10 સેમી હોય, ત્યારે તેના ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારાનો દર .... હોય.

(A) 10 સેમી^{2}/સેકન્ડ (B) $\sqrt{3}$ સેમી^{2}/સેકન્ડ (C) $10\sqrt{3}$ સેમી^{2}/સેકન્ડ (D) $\frac{10}{3}$ સેમી^{2}/સેકન્ડ

36. એક 5 મીટર લાંબી નિસરણી દીવાલે ટેકવી છે. જો નિસરણીનો ઉપલો છેડો 10 સેમી/સેકન્ડના દરે નીચેની તરફ સરકે, જ્યારે નિસરણીનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 2 મીટર દૂર હોય, ત્યારે નિસરણી તથા ભોંયતળિયાની વચ્ચે બનતા ખૂણાનો ઘટવાનો દર .... હોય.

(A) $\frac{1}{10}$ રેડિયન/સેકન્ડ (B) $\frac{1}{20}$ રેડિયન/સેકન્ડ (C) 20 રેડિયન/સેકન્ડ (D) 10 રેડિયન/સેકન્ડ

37. વક્ર $y = x^{\frac{1}{5}}$ ને બિંદુ $(0, 0)$ આગળ ....

(A) શિરોલંબ સ્પર્શક (y-અક્ષને સમાંતર) હોય.

(B) સમક્ષિતિજ સ્પર્શક (x-અક્ષને સમાંતર) હોય.

(C) તિર્યક સ્પર્શક હોય.

(D) સ્પર્શક ન મળે.

38. વક્ર $3x^2 - y^2 = 8$ ના રેખા $x + 3y = 8$ ને સમાંતર અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

(A) $3x - y = 8$ (B) $3x + y + 8 = 0$

(C) $x + 3y \pm 8 = 0$ (D) $x + 3y = 0$

39. જો વક્ર $ay + x^2 = 7$ અને $x^3 = y$ બિંદુ $(1, 1)$ આગળ કાટખૂણે છેદે, તો a ની કિંમત .... હોય.

(A) 1 (B) 0 (C) –6 (D) 0.6

40. જો $y = x^4 - 10$ હોય તથા x માં 2 માંથી 1.99 જેટલો ફેરફાર થતો હોય, તો y માં થતો ફેરફાર .... હોય.

(A) 0.32 (B) .032 (C) 5.68 (D) 5.968

41. વક્ર $y(1 + x^2) = 2 - x$, x-અક્ષને જે બિંદુએ છેદે તે બિંદુ આગળ વક્રને દોરેલ સ્પર્શકનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x + 5y = 2$ (B) $x - 5y = 2$

(C) $5x - y = 2$ (D) $5x + y = 2$

42. વક્ર $y = x^3 - 12x + 18$ ને .... બિંદુઓ આગળ x-અક્ષને સમાંતર સ્પર્શકો છે.

(A) $(2, -2), (-2, -34)$ (B) $(2, 34), (-2, 0)$

(C) $(0, 34), (-2, 0)$ (D) $(2, 2), (-2, 34)$

43. વક્ર $y = e^{2x}$ નો બિંદુ $(0, 1)$ આગળનો સ્પર્શક x-અક્ષને .... બિંદુમાં છેદે.

(A) $(0, 1)$ (B) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ (C) $(2, 0)$ (D) $(0, 2)$

44. $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ પ્રચલ સમીકરણ ધરાવતા વક્રનો બિંદુ $(2, -1)$ આગળનો ઢાળ .... છે.

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{-6}{7}$ (D) -6

45. બે વક્રો $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$ અને $3x^2y - y^3 - 2 = 0$ .... માપના ખૂણે છેદે છે.

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

46. વિધેય $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 1$ એ .... પર ઘટતું વિધેય છે.

(A) $[-1, \infty)$ (B) $[-2, -1]$ (C) $(-\infty, -2]$ (D) $[-1, 1]$

47. ધારો કે, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + cosx$, વ્યાખ્યાયિત વિધેય માટે f ....

(A) ને $x = \pi$ આગળ ન્યૂનતમ કિંમત છે. (B) ને $x = 0$ આગળ મહત્તમ કિંમત છે.

(C) ઘટતું વિધેય છે. (D) વધતું વિધેય છે.

48. .... કિંમતો માટે $y = x(x - 3)^2$ ઘટતું વિધેય છે.

(A) $1 < x < 3$ (B) $x < 0$ (C) $x > 0$ (D) $0 < x < \frac{3}{2}$

49. વિધેય $f(x) = 4\,sin^3x - 6\,sin^2x + 12\,sinx + 100$ એ ....

(A) $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. (B) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

(C) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે. (D) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

50. નીચેનામાંથી કયું વિધેય $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ માં ઘટે છે ?

(A) $sin2x$ (B) $tanx$ (C) $cosx$ (D) $cos\,3x$

51. વિધેય $f(x) = tan\,x - x$

(A) હંમેશાં વધે. (B) હંમેશાં ઘટે.

(C) ક્યારેય વધે નહિ. (D) ક્યારેક વધે અને ક્યારેક ઘટે.

52. જો $x \in R$ હોય, તો $x^2 - 8x + 17$ ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

53. બહુપદી $x^3 - 18x^2 + 96x$; $x \in [0, 9]$ ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

(A) 126 (B) 0 (C) 135 (D) 160

54. વિધેય $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ ને ....

(A) x ની બે કિંમતો આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય હોય.

(B) x ની બે કિંમતો આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય.

(C) x ની એક કિંમત આગળ મહત્તમ અને એક કિંમત આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય.

(D) મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યો ન હોય.

55. $\sin x \cdot \cos x$ ની મહત્તમ કિંમત .... છે.

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

56. $f(x) = 2\sin 3x + 3\cos 3x$ એ $x = \frac{5\pi}{6}$ આગળ ....

(A) મહત્તમ હોય. (B) ન્યૂનતમ હોય.

(C) શૂન્ય હોય. (D) મહત્તમ કે ન્યૂનતમ ન હોય.

57. વક્ર $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ નો મહત્તમ ઢાળ .... છે.

(A) 0 (B) 12 (C) 16 (D) 32

58. $f(x) = x^x$ ને .... આગળ આત્યંતિક બિંદુ હોય,

(A) $x = e$ (B) $x = \frac{1}{e}$ (C) $x = 1$ (D) $x = \sqrt{e}$

59. $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ ની મહત્તમ કિંમત .... છે.

(A) e (B) e^e (C) $e^{\frac{1}{e}}$ (D) $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

નીચેના ક્રમાંક 60 થી 64 વાળાં વિધાનોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

60. વક્રો $y = 4x^2 + 2x - 8$ અને $y = x^3 - x + 13$ .... બિંદુ આગળ એકબીજાને સ્પર્શે છે.

61. વક્ર $y = \tan x$ ને બિંદુ $(0, 0)$ આગળ દોરેલ અભિલંબનું સમીકરણ .... છે.

62. વિધેય $f(x) = \sin x - ax + b$ એ a ની .... કિંમત માટે, **R** પર વધતું વિધેય છે.

63. વિધેય $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$, $x > 0$ એ .... અંતરાલમાં ઘટતું વિધેય છે.

64. વિધેય $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ $(a > 0, b > 0, x > 0)$ ની ન્યૂનતમ કિંમત .... છે.

પ્રકરણ 7

સંકલન

7.1 વિહંગાવલોકન

7.1.1 જો $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, તો $\int f(x)dx = F(x) + c$ થાય. આ સંકલિતને $f(x)$ નો અનિયત સંકલિત અથવા વ્યાપક સંકલિત અથવા પૂર્વગ કહે છે. c ને સંકલિતનો સ્વૈર અચળ કહે છે. આ બધા સંકલિતોમાં અચળનો તફાવત હોય છે.

7.1.2 જો બે વિધેયોમાં માત્ર અચળનો તફાવત હોય, તો તે બે વિધેયોના વિકલિત સમાન હોય છે.

7.1.3 ભૌમિતિક રીતે વિધાન $\int f(x)dx = F(x) + c = y$ વક્રોના સમુદાયનું નિરૂપણ કરે છે. c નાં ભિન્ન મૂલ્યો માટે આ સમુદાયના ભિન્ન સભ્યો પ્રાપ્ત થાય છે અને આ સભ્યોમાંના કોઈ એક સભ્યને પોતાના મૂળ સ્થાનને સમાંતર સ્થાનાંતરિત કરી બીજા સભ્યો મેળવી શકાય છે. વક્ર અને રેખા $x = a$ નાં છેદબિંદુઓ પર દોરેલ સ્પર્શરેખાઓ સમાંતર છે.

7.1.4 અનિયત સંકલનના ગુણધર્મો :

(i) વિકલન અને સંકલન એકબીજાની વ્યસ્ત ક્રિયાઓ છે.

$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ અને $\int f'(x)dx = f(x) + c$, જ્યાં c એ કોઈ સ્વૈર અચળ છે.

(ii) બે અનિયત સંકલિતોના વિકલિત સમાન હોય, તો આવાં બે વિધેયો એક જ સમુદાયના વક્રો દર્શાવશે અને તેથી તે બે સમતુલ્ય છે. જો f અને g એવાં બે વિધેયો હોય કે જેમાં,

$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$, તો $\int f(x)\,dx$ અને $\int g(x)\,dx$ સમતુલ્ય છે.

(iii) બે વિધેયના સરવાળાનો સંકલિત એટલે કે બે વિધેયના સંકલિતોનો સરવાળો. આમ,

$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

(iv) કોઈ વાસ્તવિક અચળને સંકલિતના સંકેત પહેલા કે પછી લખી શકાય. એટલે,

$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ જ્યાં, 'a' વાસ્તવિક અચળ છે.

(v) જો $f_1, f_2, ..., f_n$ નિશ્ચિત સંખ્યામાં વિધેયો હોય અને $k_1, k_2, ..., k_n$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો ગુણધર્મ (iii) અને (iv) ને વ્યાપક રીતે,

$\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + ... + k_n f_n(x))\,dx = k_1\int f_1(x)dx + k_2\int f_2(x)dx + ... + k_n\int f_n(x)dx$ લખી શકાય.

7.1.5 સંકલન માટેની રીતો :

જો સંકલ્ય f પ્રમાણિત રૂપમાં મૂકી શકાય તેમ પ્રત્યક્ષ રીતે જણાતું ન હોય, તો આપેલ સંકલ્ય પ્રમાણિત રૂપમાં રૂપાંતરિત કરીને તે માટે પ્રતિવિકલિત શોધવા આપણે નવી પદ્ધતિઓ કે રીતો વિકસાવવાની આવશ્યકતા પડે. આ પૈકીની મુખ્ય રીતો નીચેના પર આધારિત છે :

1. સંકલન માટે આદેશની રીત
2. આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત
3. ખંડશઃ સંકલનની રીત

7.1.6 નિયત સંકલન :

નિયત સંકલિતને $\int_a^b f(x)\,dx$ દ્વારા દર્શાવાય છે. b ને નિયત સંકલનની ઊર્ધ્વસીમા અને a ને નિયત સંકલનની અધઃસીમા કહે છે. નિયત સંકલન નીચે દર્શાવેલ બે રીતો દ્વારા મેળવી શકાય છે :

(i) સરવાળાના લક્ષ તરીકે નિયત સંકલન

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, જ્યાં F એ f નું પ્રતિવિકલિત છે.

7.1.7 સરવાળાના લક્ષ તરીકે નિયત સંકલન :

નિયત સંકલિત $\int_a^b f(x)\,dx$ એટલે વક્ર $y = f(x)$, રેખાઓ $x = a$, $x = b$ તથા x-અક્ષ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ. એટલે $\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f(a) + f(a+h) + ... + f\left(a + (n-1)h\right)\right]$

અથવા $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{h\to 0} h\left[f(a) + f(a+h) + ... + f(a+(n-1)h)\right]$,

n ની કિંમત જેમ જેમ વધારતા જઈએ, તેમ તેમ $\frac{1}{n}$ નું મૂલ્ય નાનું થતાં-થતાં શૂન્યની નજીક મળશે એટલે કે જેમ $n \to \infty$ તેમ $\frac{1}{n} \to 0$. તે પરથી જેમ $n \to \infty$ તેમ $h = \frac{b-a}{n} \to 0$.

7.1.8 નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત :

(i) ક્ષેત્રફળ વિધેય : વિધેય $A(x)$ ને ક્ષેત્રફળ વિધેય કહીશું અને તે નીચે પ્રમાણે પ્રાપ્ત થશે :

$$A(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

(ii) સંકલન ગણિતનો પહેલો મૂળભૂત પ્રમેય :

ધારો કે, વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત છે અને $A(x)$ એ કોઈ ક્ષેત્રફળ વિધેય હોય, તો પ્રત્યેક $x \in [a, b]$ માટે $A'(x) = f(x)$.

(iii) સંકલન ગણિતનો બીજો મૂળભૂત પ્રમેય :

ધારો કે, વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત છે તથા F એ f નો પ્રતિવિકલિત છે, તો

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

7.1.9 નિયત સંકલનના કેટલાક ગુણધર્મો :

P_0 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

P_1 : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, વિશિષ્ટ કિસ્સામાં $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P_2 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

P_3 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

P_4 : $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

P_5 : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

P_6 : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{જો } f(2a-x) = f(x) \\ 0, & \text{જો } f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$,

P_7 : (i) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, f યુગ્મ વિધેય હોય, એટલે $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$

(ii) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$, f અયુગ્મ વિધેય હોય, એટલે $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$ થાય.

7.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : $\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right)$ નું x ને સાપેક્ષ સંકલિત મેળવો.

ઉકેલ : $\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

$$= \int 2a(x)^{\frac{-1}{2}}\,dx - \int bx^{-2}\,dx + \int 3c\,x^{\frac{2}{3}}dx$$

$$= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9cx^{\frac{5}{3}}}{5} + c$$

ઉદાહરણ 2 : $\int \frac{3ax}{b^2 + c^2x^2}dx$ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $v = b^2 + c^2x^2$, તો $dv = 2c^2\,xdx$

$$\therefore \int \frac{3ax}{b^2 + c^2x^2}dx = \frac{3a}{2c^2}\int \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{3a}{2c^2}\log\left|b^2 + c^2x^2\right| + c.$$

ઉદાહરણ 3 : નીચેનો સંકલિત વિકલન કરીને ચકાસો :

$$\int \frac{x^3dx}{x+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|x+1| + c$$

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|x+1| + c\right)$

$$= 1 - \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3} - \frac{1}{x+1}$$

$$= 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} = \frac{x^3}{x+1}$$

$$\therefore \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|x+1| + c\right) = \int \frac{x^3}{x+1}dx$$

ઉદાહરણ 4 : $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$, $x \neq 1$ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = sin^{-1}x + I_1$

જ્યાં, $I_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$1 - x^2 = t^2$ લેતાં, $-2x\,dx = 2t\,dt.$ $\quad t > 0$

$\therefore\ I_1 = -\int dt = -t + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

તેથી, $I = sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$.

ઉદાહરણ 5 : $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$, $\beta > \alpha$ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $x - \alpha = t^2$, જ્યાં $t > 0$ તેથી, $\beta - x = \beta-(t^2+\alpha) = \beta - t^2 - \alpha = -t^2 - \alpha + \beta$ અને $dx = 2tdt$.

$$\text{હવે, } I = \int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2(\beta-\alpha-t^2)}} = \int \frac{2\,dt}{\sqrt{(\beta-\alpha-t^2)}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}, \text{ જ્યાં } k^2 = \beta - \alpha,\ k > 0$$

$$= 2sin^{-1}\frac{t}{k} + c = 2sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}} + c.$$

નોંધ : જો $t < 0$ હોય, તો ?

ઉદાહરણ 6 : $\int tan^8 x\, sec^4 x\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int tan^8 x\, sec^4 x\, dx$

$$= \int tan^8 x\left(sec^2 x\right) sec^2 x\, dx$$

$$= \int tan^8 x\left(tan^2 x+1\right) sec^2 x\, dx$$

$$= \int tan^{10} x\ sec^2 x\, dx + \int tan^8 x\ sec^2 x\, dx$$

$$= \frac{tan^{11} x}{11} + \frac{tan^9 x}{9} + c$$

ઉદાહરણ 7 : $\int \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx$ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $x^2 = t$. તેથી, $2x\ dx = dt$.

$$\therefore\ I = \int \frac{x^3 dx}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{t^2+3t+2}$$

ધારો કે, $\frac{t}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$ એટલે કે $t = A(t+2) + B(t+1)$

t ના સહગુણકો તથા અચળ પદ સરખાવતાં, $A = -1$, $B = 2$ મળે.

$$\therefore\ I = \frac{1}{2}\left[2\int \frac{dt}{t+2} - \int \frac{dt}{t+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\log|t+2| - \log|t+1|\right]$$

$$= \log\left|\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\right| + c$$

ઉદાહરણ 8 : $\int \frac{dx}{2sin^2x + 5cos^2x}$ મેળવો.

ઉકેલ : અંશ અને છેદને cos^2x વડે ભાગતાં,

$$I = \int \frac{sec^2 x\, dx}{2tan^2 x + 5}$$

ધારો કે, $tan\, x = t$. તેથી $sec^2x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{2t^2 + 5}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{5}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\, tan\, x}{\sqrt{5}}\right) + c$$

બીજી રીત :

$$\int \frac{dt}{2t^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} tan^{-1}\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} tan^{-1}\frac{\sqrt{2}\, tan\, x}{\sqrt{5}}$$

$$\left(\int \frac{dx}{ax^2 + b} = \frac{1}{\sqrt{ab}} tan^{-1}\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}} \quad (a, b > 0)\right)$$

ઉદાહરણ 9 : સરવાળાના લક્ષ તરીકે, $\int_{-1}^{2}(7x-5)dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = -1$, $b = 2$ અને $h = \frac{2+1}{n}$. આથી, $nh = 3$ અને $f(x) = 7x - 5$.

હવે, $\int_{-1}^{2}(7x-5)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(-1) + f(-1+h) + f(-1+2h) + ... + f(-1+(n-1)h)\right]$

અહીં, $f(-1) = -7 - 5 = -12$

$f(-1 + h) = -7 + 7h - 5 = -12 + 7h$

$f(-1 + (n-1)\, h) = 7\,(n - 1)\, h - 12$

$$\therefore \quad \int_{-1}^{2}(7x-5)dx = \lim_{h\to 0} h\left[(-12) + (7h - 12) + (14h - 12) + ... + (7(n-1)h - 12)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[7h\left[1 + 2 + ... + (n-1)\right] - 12n\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[7h\frac{(n-1)n}{2} - 12n\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{7}{2}(nh)(nh-h) - 12nh\right]$$

$$= \frac{7}{2}(3)(3-0) - 12 \times 3$$

$$= \frac{7 \times 9}{2} - 36 = \frac{-9}{2}$$

ઉદાહરણ 10 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7 x}{\cot^7 x + \tan^7 x} dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7 x}{\cot^7 x + \tan^7 x} dx$ ...(1)

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cot^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \tan^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$ (P_4 પરથી)

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^7 x\, dx}{\cot^7 x\, dx + \tan^7 x} dx$ ...(2)

પરિણામ (1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tan^7 x + \cot^7 x}{\tan^7 x + \cot^7 x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{4}$$

ઉદાહરણ 11 : $\int_2^8 \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{10-x}} dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int_2^8 \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{10-x}} dx$ ...(1)

$= \int_2^8 \frac{\sqrt{10-(10-x)}}{\sqrt{10-x} + \sqrt{10-(10-x)}} dx$ (P_3 પરથી)

$\therefore \ I = \int_2^8 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{10-x} + \sqrt{x}} dx$ ...(2)

પરિણામ (1) અને (2)નો સરવાળો કરતાં,

$$2\mathrm{I} = \int_2^8 1dx = 8 - 2 = 6$$

$\therefore$ I = 3

ઉદાહરણ 12 : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + sin2x}\, dx$

ઉકેલ :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + sin2x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(sin\,x + cos\,x)^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (sin\,x + cos\,x) dx \qquad \left(\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{માં } sin\,x + cos\,x > 0\right)$$

$$= [-cos\,x + sin\,x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\mathrm{I} = 1$$

ઉદાહરણ 13 : $\int x^2 tan^{-1}x\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $\mathrm{I} = \int x^2 tan^{-1}x\, dx$

$$= tan^{-1}x \int x^2 dx - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^3}{3}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} tan^{-1}x - \frac{1}{3}\int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \qquad \left(1 + x^2 = t \text{ લેતાં, } \int \frac{x^3 dt}{(1+x^2)} = \int \frac{(t-1)dt}{2t} \text{ લઈ શકાય.}\right)$$

$$= \frac{x^3}{3} tan^{-1}x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log(1 + x^2) + c$$

ઉદાહરણ 14 : $\int \sqrt{10 - 4x + 4x^2}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $\mathrm{I} = \int \sqrt{10 - 4x + 4x^2}\, dx = \int \sqrt{(2x-1)^2 + (3)^2}\, dx$

ધારો કે, $t = 2x - 1$. તેથી, $dt = 2dx$.

$$\therefore \mathrm{I} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t^2 + (3)^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} t \frac{\sqrt{t^2+9}}{2} + \frac{9}{4}\log\left|t + \sqrt{t^2+9}\right| + c$$

$$= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2 + 9} + \frac{9}{4}\log\left|(2x-1) + \sqrt{(2x-1)^2 + 9}\right| + c$$

ઉદાહરણ 15 : $\int \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}$ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $x^2 = t$, તો

$$\frac{x^2}{x^4+x^2-2} = \frac{t}{t^2+t-2} = \frac{t}{(t+2)\,(t-1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1}$$

$\therefore \quad t = A\,(t-1) + B\,(t+2)$

સહગુણકો સરખાવતાં, $A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3}$ મળે.

$$\therefore \quad \frac{x^2}{x^4+x^2-2} = \frac{2}{3}\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^2-1}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

A, B માટે બીજી રીત :

$t = A(t-1) + B(t+2)$

$t = 1$ લેતાં $1 = 3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

$t = -2$ લેતાં $-2 = -3A \Rightarrow A = \frac{2}{3}$

A, B માટે ત્રીજી રીત :

$$\frac{t}{(t+2)(t-1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1}$$

A શોધવા $t+2$ ના અવયવ સિવાય બધે $t = -2$ લો. (ડાબી બાજુએ)

$\frac{-2}{-3} = A = \frac{2}{3}$

B શોધવા $t-1$ સિવાયના અવયવોમાં $t = 1$ લો.

$\frac{1}{3} = A$

ઉદાહરણ 16 : $\int \frac{x^3+x}{x^4-9}dx$

ઉકેલ : $I = \int \frac{x^3+x}{x^4-9}dx$

$$= \int \frac{x^3}{x^4-9}dx + \int \frac{x\,dx}{x^4-9} = I_1 + I_2$$

હવે, $I_1 = \int \frac{x^3}{x^4-9}\,dx$ માં

ધારો કે, $t = x^4 - 9$. તેથી, $4x^3\,dx = dt$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\log|t| + c_1 = \frac{1}{4}\log\left|x^4-9\right| + c_1$$

$$I_2 = \int \frac{x\,dx}{x^4-9}$$

ધારો કે, $x^2 = u$. તેથી, $2x\,dx = du$.

$$\therefore \quad I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-(3)^2} = \frac{1}{2\times 6}\log\left|\frac{u-3}{u+3}\right| + c_2$$

$$= \frac{1}{12}\log\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + c_2$$

આમ, $I = I_1 + I_2$

$$= \frac{1}{4}\log\left|x^4 - 9\right| + \frac{1}{12}\log\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + c. \qquad \text{જ્યાં } c = c_1 + c_2$$

ઉદાહરણ 17 : સાબિત કરો કે, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$

ઉકેલ : $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx \qquad (P_4 \text{ પરથી})$$

$$\therefore \quad I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

તેથી, $$2I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left|\sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(\sec\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}\right) - \log\left(\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(\sqrt{2}+1\right) - \log\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

ઉદાહરણ 18 : $\int_0^1 x(tan^{-1}x)^2 dx$ ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $I = \int_0^1 x(tan^{-1}x)^2 dx$

ખંડશઃ સંકલન કરતાં,

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[(tan^{-1}x)^2\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \cdot 2\frac{tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \cdot tan^{-1}x\,dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - I_1, \text{ જ્યાં } I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \cdot tan^{-1}x\,dx$$

હવે, $$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\; tan^{-1}x\; dx$$

$$= \int_0^1 tan^{-1}x\,dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} tan^{-1}x\,dx$$

$$= I_2 - \frac{1}{2}\left[(tan^{-1}x)^2\right]_0^1 = I_2 - \frac{\pi^2}{32}$$

અહીં, $$I_2 = \int_0^1 tan^{-1}x\,dx$$

$$= \left[x\,tan^{-1}x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\log\left|1+x^2\right|\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2.$$

તેથી, $$I_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi^2}{32}$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi^2}{32}$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$$

$$= \frac{\pi^2 - 4\pi}{16} + \log\sqrt{2}.$$

ઉદાહરણ 19 : કિંમત મેળવો : $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$, જ્યાં $f(x) = |x+1| + |x| + |x-1|$.

ઉકેલ : આપણે $f(x)$ ને નીચે પ્રમાણે પુનઃવ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{જો } -1 < x \le 0 \\ x+2, & \text{જો } 0 < x \le 1 \\ 3x, & \text{જો } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$\therefore \quad I = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (2-x)\,dx + \int_{0}^{1} (x+2)\,dx + \int_{1}^{2} 3x\,dx$ **(P_2 પરથી)**

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} + \left[\frac{3x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$= 0 - \left(-2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + 2\right) + 3\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{19}{2}$$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 20 થી 28 પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 20 : $\int e^x (\cos x - \sin x)\,dx$ = ...

(A) $e^x \cos x + c$ (B) $e^x \sin x + c$ (C) $-e^x \cos x + c$ (D) $-e^x \sin x + c$

ઉકેલ : $\int e^x [f(x) + f'(x)]\,dx = e^x f(x) + c$ હોવાથી, અહીં $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$.

સાચો ઉકેલ (A) છે.

ઉદાહરણ 21 : $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ = ...

(A) $\tan x + \cot x + c$ (B) $(\tan x + \cot x)^2 + c$

(C) $\tan x - \cot x + c$ (D) $(\tan x - \cot x)^2 + c$

ઉકેલ : $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

$$= \int \sec^2 x\,dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx$$

$$= \tan x - \cot x + c$$

સાચો ઉકેલ (C) છે.

ઉદાહરણ 22 : જો $\int \frac{3e^x - 5e^{-x}}{4e^x + 5e^{-x}}\,dx = ax + b \log |4e^x + 5e^{-x}| + c$, તો

(A) $a = \frac{-1}{8}$, $b = \frac{7}{8}$ (B) $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{7}{8}$ (C) $a = \frac{-1}{8}$, $b = \frac{-7}{8}$ (D) $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{-7}{8}$

ઉકેલ : બંને બાજુ વિકલન કરતાં,

$$\frac{3e^x - 5e^{-x}}{4e^x + 5e^{-x}} = a + b\,\frac{(4e^x - 5e^{-x})}{4e^x + 5e^{-x}},$$

$3e^x - 5e^{-x} = a\,(4e^x + 5e^{-x}) + b\,(4e^x - 5e^{-x})$.

સહગુણકો સરખાવતાં, $3 = 4a + 4b$ અને $-5 = 5a - 5b$ મળશે.

સમીકરણો ઉકેલતાં, $a = \frac{-1}{8}$, $b = \frac{7}{8}$.

સાચો ઉકેલ (A) છે.

ઉદાહરણ 23 : $\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$ = ...

(A) $\int_a^b f(x-c)\,dx$ (B) $\int_a^b f(x+c)\,dx$ (C) $\int_a^b f(x)\,dx$ (D) $\int_{a-c}^{b-c} f(x)\,dx$

ઉકેલ : $x = t + c$ લેતાં,

$$I = \int_a^b f(c+t)\,dt = \int_a^b f(x+c)\,dx.$$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

ઉદાહરણ 24 : જો f અને g એ [0, 1] માં સતત વિધેયો હોય તથા $f(x) = f(a - x)$ અને $g(x) + g(a - x) = a$, તો $\int_0^a f(x)\cdot g(x)\,dx$ = ...

(A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$ (C) $\int_0^a f(x)dx$ (D) $a\int_0^a f(x)dx$

ઉકેલ : $I = \int_0^a f(x)\cdot g(x)\,dx$

$$= \int_0^a f(a-x)\ g(a-x)dx$$

$$= \int_0^a f(x)\ (a-g(x))dx$$

$$= a\int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(x)\cdot g(x)\,dx$$

$$= a\int_0^a f(x)dx - I$$

$$I = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

ઉદાહરણ 25 : જો $x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+9t^2}}$ અને $\frac{d^2y}{dx^2} = ay$, તો a = ...

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 1

ઉકેલ : અહીં, $x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+9t^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+9y^2}}$, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+9y^2}$

આથી, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{18y}{2\sqrt{1+9y^2}}\cdot\frac{dy}{dx} = 9y.$

સાચો ઉકેલ (C) છે.

ઉદાહરણ 26 : $\int_{-1}^{1} \frac{x^3 + |x| + 1}{x^2 + 2|x| + 1} dx$ = ...

(A) log 2 (B) 2 log 2 (C) $\frac{1}{2}$log 2 (D) 4 log 2

ઉકેલ : $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^3 + |x| + 1}{x^2 + 2|x| + 1} dx$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{x^2 + 2|x| + 1} dx + \int_{-1}^{1} \frac{|x| + 1}{x^2 + 2|x| + 1} dx$$

$$= 0 + 2 \int_{0}^{1} \frac{|x| + 1}{(|x| + 1)^2} dx$$ [અયુગ્મ વિધેય + યુગ્મ વિધેય]

$$= 2 \int_{0}^{1} \frac{x + 1}{(x + 1)^2} dx$$

$$= 2 \int_{0}^{1} \frac{1}{x + 1} dx$$

$$= 2 \left| \log |x + 1| \right|_{0}^{1}$$

$$= 2 \log 2$$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

ઉદાહરણ 27 : જો $\int_{0}^{1} \frac{e^t}{1 + t} dt = a$, તો $\int_{0}^{1} \frac{e^t}{(1 + t)^2} dt$ = ...

(A) $a - 1 + \frac{e}{2}$ (B) $a + 1 - \frac{e}{2}$ (C) $a - 1 - \frac{e}{2}$ (D) $a + 1 + \frac{e}{2}$

ઉકેલ : $I = \int_{0}^{1} \frac{e^t}{1 + t} dt = a$

$$\therefore \left| \frac{1}{1 + t} e^t \right|_{0}^{1} + \int_{0}^{1} \frac{e^t}{(1 + t)^2} dt = a$$

$$\therefore \int_{0}^{1} \frac{e^t}{(1 + t)^2} = a - \frac{e}{2} + 1$$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

ઉદાહરણ 28 : $\int_{-2}^{2} \left| x \cos \pi x \right| dx$ = ...

(A) $\frac{8}{\pi}$ (B) $\frac{4}{\pi}$ (C) $\frac{2}{\pi}$ (D) $\frac{1}{\pi}$

ઉકેલ : $I = \int_{-2}^{2} \left| x \cos \pi x \right| dx$

$$= 2\int_{0}^{2} \left| x \cos \pi x \right| dx$$

$$= 2\left\{\int_{0}^{\frac{1}{2}} \left| x \cos \pi x \right| dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left| x \cos \pi x \right| dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \left| x \cos \pi x \right| dx\right\}$$

$$= 2\left\{\left[\frac{x}{\pi} \sin \pi x + \frac{\cos \pi x}{\pi^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{x}{\pi} \sin \pi x + \frac{1}{\pi^2} \cos \pi x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{x}{\pi} \sin \pi x + \frac{1}{\pi^2} \cos \pi x\right]_{\frac{3}{2}}^{2}\right\}$$

$$= 2\left\{\left[\left(\frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\pi^2}\right) - \left(0 + \frac{\cos 0}{\pi^2}\right)\right] - \left[\left(\frac{3}{2\pi} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{\pi^2} \cos \frac{3\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\pi^2}\right)\right]\right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{2}{\pi} \sin 2\pi + \frac{1}{\pi^2} \cos 2\pi\right) - \left(\frac{3}{2\pi} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{\pi^2} \cos \frac{3\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= 2\left\{\left[\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}\right) - \left(\frac{-3}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\right) + \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{3}{2\pi}\right)\right]\right\}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{3}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{3}{2\pi}\right]$$

$$= 2\left[\frac{1+3+1+3}{2\pi}\right] = \frac{8}{\pi}$$

સાચો ઉકેલ (A) છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 29 થી 32 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 29 : $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x} dx$ = ...

ઉકેલ : $\frac{\tan^7 x}{7} + c$, કારણ કે $\int \frac{\sin^6 x \, dx}{\cos^8 x} = \int \tan^6 x \sec^2 x \, dx = \frac{\tan^7 x}{7} + c$

ઉદાહરણ 30 : જો $f(x)$ એ .... વિધેય હોય, તો $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

ઉકેલ : અયુગ્મ

ઉદાહરણ 31 : જો $f(2a - x) =$ .... તો $\int_0^{2a} f(x)\, dx = 2\int_0^{a} f(x)\, dx$.

ઉકેલ : $f(x)$

ઉદાહરણ 32 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x\, dx}{\sin^n x + \cos^n x} =$ ....

ઉકેલ : $\frac{\pi}{4}$

સ્વાધ્યાય 7.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

પ્રશ્ન 1 અને 2 સાબિત કરો :

1. $\int \frac{2x-1}{2x+3} dx = x - \log |(2x + 3)^2| + c$

2. $\int \frac{2x+3}{x^2 + 3x} dx = \log |x^2 + 3x| + c$

પ્રશ્ન નં. 3 થી 26 ના સંકલિત મેળવો :

3. $\int \frac{(x^2+2)dx}{x+1}$

4. $\int \frac{e^{6\log x} - e^{5\log x}}{e^{4\log x} - e^{3\log x}} dx$

5. $\int \frac{(1+\cos x)}{x+\sin x} dx$

6. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

7. $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$

8. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx$

9. $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$

10. $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx$ (સૂચન : $\sqrt{x} = z$ લો.)

11. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx$

12. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}} dx$ (સૂચન : $x = z^4$ લો.)

13. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

15. $\int \frac{dt}{\sqrt{3t-2t^2}}$

16. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+9}} dx$

17. $\int \sqrt{5-2x+x^2}\, dx$

18. $\int \frac{x}{x^4-1} dx$

19. $\int \frac{x^2}{1-x^4} dx$ (સૂચન : $x^2 = t$ લો.)

20. $\int \sqrt{2ax - x^2}\, dx$

21. $\int \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

22. $\int \frac{(\cos 5x + \cos 4x)}{1-2\cos 3x} dx$

23. $\int \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3 - x^3}} dx$ **25.** $\displaystyle\int \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x} dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 1}}$ (**સૂચન** : $x^2 = \sec\theta$ લો.)

પ્રશ્ન નં. 27 અને 28 ને સરવાળાના લક્ષ સ્વરૂપે મેળવો :

27. $\displaystyle\int_0^2 (x^2 + 3)\, dx$ **28.** $\displaystyle\int_0^2 e^x\, dx$

પ્રશ્ન નં. 29 થી 34 વાળા પ્રશ્નોની કિંમત મેળવો :

29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ **30.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x\, dx}{1 + m^2 \tan^2 x}$

31. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ (અનુચિત સંકલિત) **32.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

33. $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$ **34.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ (**સૂચન** : $x = \sin\theta$ લો.)

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

પ્રશ્ન નં. 35 થી 47 માં સંકલિત મેળવો :

35. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 - 12}$ **36.** $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} dx$ **38.** $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx$

39. $\displaystyle\int e^{\tan^{-1} x} \left(\frac{1 + x + x^2}{1 + x^2}\right) dx$ **40.** $\displaystyle\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\, dx$ (**સૂચન** : $x = a\tan^2\theta$ લો.)

41. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{(1 - \cos x)^{\frac{5}{2}}} dx$ **42.** $\displaystyle\int e^{-3x} \cos^3 x\, dx$

43. $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\, dx$ (**સૂચન** : $\tan x = t^2$ લો.)

44. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2}$ (**સૂચન** : અંશ અને છેદને $\cos^4 x$ વડે ભાગો.)

45. $\displaystyle\int_0^1 x \log(1 + 2x)\, dx$ **46.** $\displaystyle\int_0^{\pi} x \log \sin x\, dx$ (અનુચિત સંકલન)

47. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x + \cos x) dx$ (અનુચિત સંકલિત)

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 48 થી 58 વાળા પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

48. $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\theta}{\cos x - \cos\theta} dx$ = ...

(A) $2(\sin x + x\cos\theta) + c$

(B) $2(\sin x - x\cos\theta) + c$

(C) $2(\sin x + 2x\cos\theta) + c$

(D) $2(\sin x - 2x\cos\theta) + c$

49. $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$ = ...

(A) $\sin(b-a)\log\left|\frac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + c$

(B) $cosec(b-a)\log\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + c$

(C) $cosec(b-a)\log\left|\frac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + c$

(D) $\sin(b-a)\log\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + c$

50. $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$ = ...

(A) $(x+1)\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + c$

(B) $x\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + c$

(C) $\sqrt{x} - x\tan^{-1}\sqrt{x} + c$

(D) $\sqrt{x} - (x+1)\tan^{-1}\sqrt{x} + c$

51. $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$ = ...

(A) $\frac{e^x}{1+x^2} + c$

(B) $\frac{-e^x}{1+x^2} + c$

(C) $\frac{e^x}{(1+x^2)^2} + c$

(D) $\frac{-e^x}{(1+x^2)^2} + c$

52. $\int \frac{x^9}{(4x^2+1)^6} dx$ = ...

(A) $\frac{1}{5x}\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{-5} + c$

(B) $\frac{1}{5}\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{-5} + c$

(C) $\frac{1}{10x}\left(\frac{1}{x^2}+4\right)^{-5} + c$

(D) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{x^2}+4\right)^{-5} + c$

53. જો $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)} = a\log|1+x^2| + b\tan^{-1}x + \frac{1}{5}\log|x+2| + c$ હોય, તો

(A) $a = \frac{-1}{10}, b = -\frac{2}{5}$

(B) $a = \frac{1}{10}, b = -\frac{2}{5}$

(C) $a = \frac{-1}{10}, b = \frac{2}{5}$

(D) $a = \frac{1}{10}, b = \frac{2}{5}$

54. $\int \frac{x^3}{x+1}\, dx$ = ...

(A) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\log|1-x|+c$
(B) $x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\log|1-x|+c$
(C) $x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\log|1+x|+c$
(D) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\log|1+x|+c$

55. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\, dx$ = ...

(A) $\log|1+\cos x|+c$
(B) $\log|x+\sin x|+c$
(C) $x-\tan\frac{x}{2}+c$
(D) $x\cdot\tan\frac{x}{2}+c$

56. જો $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = a(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+b\sqrt{1+x^2}+c$ હોય, તો

(A) $a=\frac{1}{3},\ b=1$
(B) $a=\frac{-1}{3},\ b=1$
(C) $a=\frac{-1}{3},\ b=-1$
(D) $a=\frac{1}{3},\ b=-1$

57. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x}$ = ...

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

58. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$ = ...

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ (C) 2 (D) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 59 થી 63 વાળા પ્રશ્નોમાં ખાલી જગ્યા પૂરો :

59. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x} dx$ = ...

60. $\int \frac{x+3}{(x+4)^2} e^x dx$ = ...

61. જો $\int_0^a \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{\pi}{8}$, તો a = ...

62. $\int \frac{\sin x}{3+4\cos^2 x} dx$ = ...

63. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\ \cos^2 x\ dx$ = ...

પ્રકરણ **8**

સંકલનના ઉપયોગો

8.1 વિહંગાવલોકન

આપણે આ પ્રકરણમાં સાદા વક્રથી આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ, રેખા અને વર્તુળનું ચાપ, પરવલય કે ઉપવલયથી ઘેરાયેલા પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે સંકલનનો કેવી રીતે ઉપયોગ થાય છે તેનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે અહીં ઉપર દર્શાવેલ વક્રો વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું.

8.1.1 વક્ર $y = f(x)$, રેખાઓ $x = a$ અને $x = b\ (b > a)$ તથા x-અક્ષ દ્વારા આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ નીચે દર્શાવેલ સૂત્ર દ્વારા દર્શાવી શકાય :

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

8.1.2 વક્ર $x = \phi(y)$, y-અક્ષ અને રેખાઓ $y = c$, $y = d$ દ્વારા આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ નીચે દર્શાવેલ સૂત્ર દ્વારા દર્શાવી શકાય :

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \int_c^d x\,dy = \int_c^d \phi(y)\,dy$$

8.1.3 બે વક્રો $y = f(x)$, $y = g(x)$ અને રેખાઓ $x = a$, $x = b$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ નીચે પ્રમાણે લઈ શકાય :

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx,\ \text{જ્યાં, } [a, b] \text{ માં } f(x) \geq g(x) \text{ છે.}$$

8.1.4 જો $[a, c]$ માં $f(x) \geq g(x)$ અને $[c, b]$ માં $f(x) \leq g(x)$ અને $a < c < b$, તો

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [(g(x) - f(x))]\,dx$$

8.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : વક્ર $y = sin\ x$ તથા $x = 0$ અને $x = \pi$ વચ્ચે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

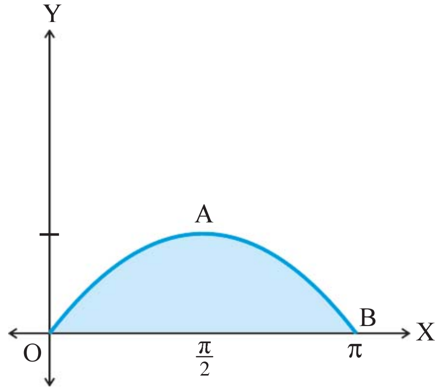
ઉકેલ : માંગેલ ક્ષેત્રફળ OAB $= \int_0^{\pi} y dx$

$$= \int_0^{\pi} sin\ x\, dx$$

$$= [-cos\ x]_0^{\pi}$$

$$= cos\ 0 - cos\ \pi$$

$= 2$ ચોરસ એકમ



આકૃતિ 8.1

ઉદાહરણ 2 : વક્ર $ay^2 = x^3$, y-અક્ષ અને રેખાઓ $y = a$ અને $y = 2a$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. $(a > 0)$

ઉકેલ : માંગેલ ક્ષેત્રફળ

$$\text{BMNC} = \int_a^{2a} x\, dy$$

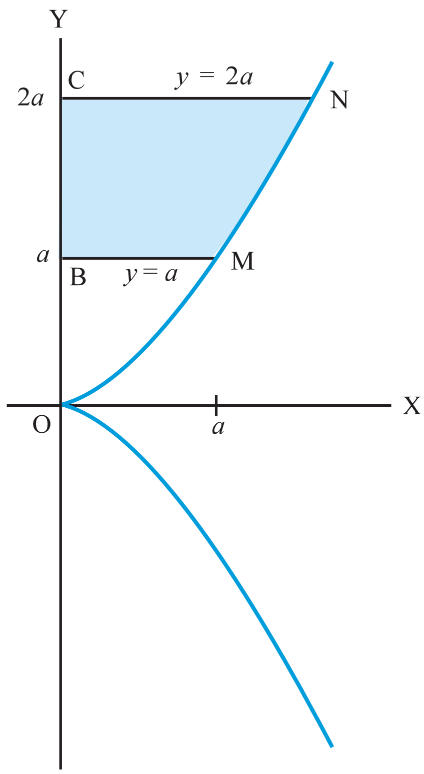
$$= \int_a^{2a} a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} dy$$

$$= \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{5}\left[y^{\frac{5}{3}}\right]_a^{2a}$$

$$= \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{5}\left[(2a)^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{5}{3}}\right]$$

$$= \frac{3}{5} a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{5}{3}}\left[(2)^{\frac{5}{3}} - 1\right]$$

$= \frac{3}{5}a^2\left[2 \cdot 2^{\frac{2}{3}} - 1\right]$ ચોરસ એકમ



આકૃતિ 8.2

ઉદાહરણ 3 : પરવલય $y^2 = 2x$ અને રેખા $x - y = 4$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : સમીકરણો $x - y = 4$ અને $y^2 = 2x$ ને x અને y માટે ઉકેલતાં, આપણને વક્રોનાં છેદબિંદુઓ મળશે.

$y^2 = 8 + 2y$ આપેલ છે.

$\therefore\ (y - 4)\ (y + 2) = 0$

તેથી, $y = 4$ અથવા -2 અને $x = 8$ અથવા 2 મળે.

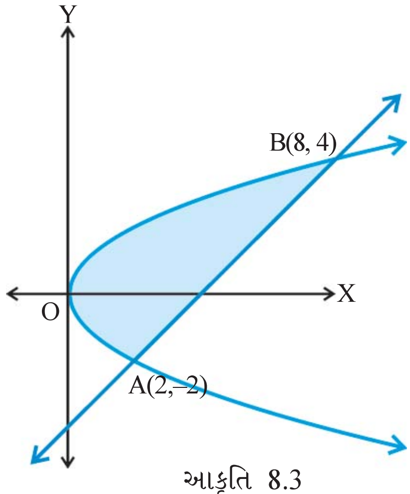
બંને વક્રો (8, 4) અને (2, –2) બિંદુઓમાં છેદશે.

આથી, ક્ષેત્રફળ $= \int_{-2}^{4}\left(4 + y - \frac{1}{2}y^2\right)dy$

$= \left[4y + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{4}$

$= \left[\left(16 + 8 - \frac{32}{3}\right) - \left(-8 + 2 + \frac{4}{3}\right)\right]$

$= 18$ ચોરસ એકમ



આકૃતિ 8.3

ઉદાહરણ 4 : પરવલય $y^2 = 6x$ અને $x^2 = 6y$ વચ્ચે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

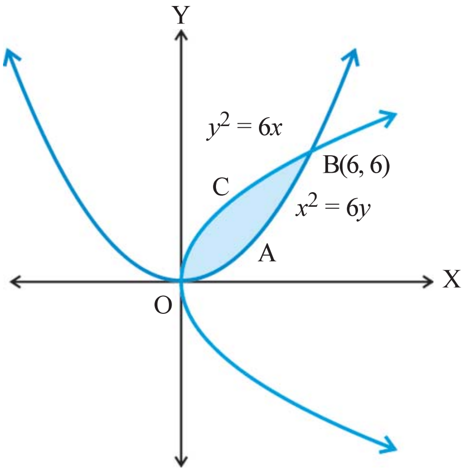
ઉકેલ : આપેલ સમીકરણોને x અને y માટે ઉકેલતાં આપણને પરવલયોનાં છેદબિંદુઓ મળશે. તે O(0, 0) અને (6, 6) છે. ($y^4 = 36x^2 = 216y$)

ક્ષેત્રફળ OABC $= \int_{0}^{6}\left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right)dx$

$= \left[2\sqrt{6}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{18}\right]_0^6$

$= 2\sqrt{6}\,\frac{(6)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(6)^3}{18}$

$= 2 \cdot \frac{36}{3} - \frac{36}{3} = \frac{36}{3} = 12$ ચોરસ એકમ



આકૃતિ 8.4

ઉદાહરણ 5 : વક્ર $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. $t \in [0, 2\pi]$

ઉકેલ : નીચે પ્રમાણે t નો લોપ કરતાં,

$x = 3\cos t,\ y = 2\sin t \Rightarrow \frac{x}{3} = \cos t,\ \frac{y}{2} = \sin t$ તેથી, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. આ ઉપવલયનું સમીકરણ છે.

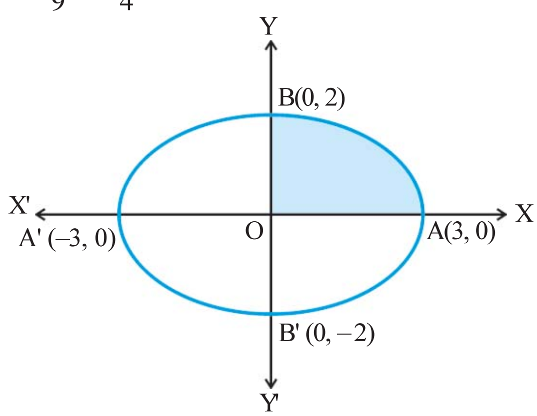
આકૃતિ 8.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે,

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 4\int_{0}^{3}\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\,dx$

$= \frac{8}{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^3$

$= \frac{8}{3}\left[\left(0 + \frac{9}{2}\sin^{-1}(1)\right) - (0 + 0)\right]$

$= \frac{8}{3}\left(\frac{9}{2} \times \frac{\pi}{2}\right) = 6\pi$ ચોરસ એકમ



આકૃતિ 8.5

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 6 : પરવલય $y = \frac{3x^2}{4}$ અને રેખા $3x - 2y + 12 = 0$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વક્રોનાં સમીકરણો $y = \frac{3x^2}{4}$ અને

$3x - 2y + 12 = 0$ ઉકેલતાં,

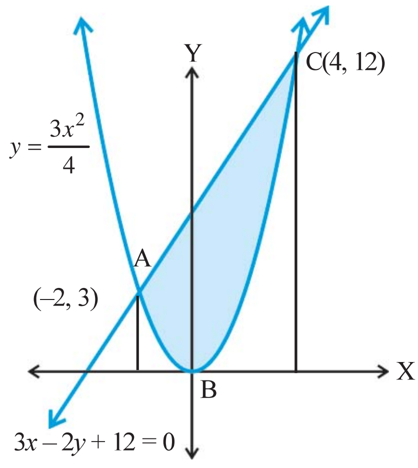
$3x^2 - 6x - 24 = 0$ થાય.

$\therefore \quad (x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore \quad x = 4$ અથવા $x = -2$ મળશે.

આથી, $y = 12$ અથવા $y = 3$ થાય.

આકૃતિ 8.6 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે



આકૃતિ 8.6

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= ABC$ નું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_{-2}^{4} \left(\frac{12+3x}{2}\right) dx - \int_{-2}^{4} \frac{3x^2}{4} dx$$

$$= \left[6x + \frac{3x^2}{4}\right]_{-2}^{4} - \left[\frac{3x^3}{12}\right]_{-2}^{4}$$

$$= [(24 + 12) - (-12 + 3)] - [16 - (-2)]$$

$= 45 - 18 = 27$ ચોરસ એકમ

ઉદાહરણ 7 : વક્રો $x = at^2$, $y = 2at$, X-અક્ષ અને $t = 1$ તથા $t = 2$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

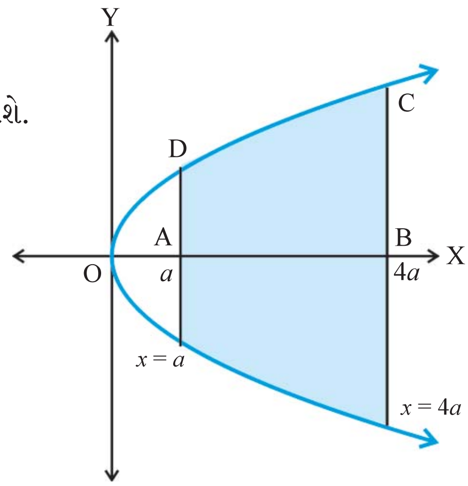
ઉકેલ : વક્રો $x = at^2$ અને ...(i)

$y = 2at$ આપેલ છે. ...(ii)

$\therefore \quad t = \frac{y}{2a}$. t ની આ કિંમત (i) માં મૂકતા, $y^2 = 4ax$ મળશે.

હવે, $t = 1$ અને $t = 2$ (i) માં મૂકતાં,

$x = a$ અને $x = 4a$



આકૃતિ 8.7

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 2$ (ABCD નું ક્ષેત્રફળ)

$$= 2\int_{a}^{4a} y\, dx$$

$$= 2 \times 2\int_{a}^{4a} \sqrt{ax}\, dx$$

$$= 8\sqrt{a}\left[\frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{a}^{4a} = \frac{56}{3}a^2 \text{ ચોરસ એકમ}$$

ઉદાહરણ 8 : વર્તુળ $x^2 + y^2 = 2ax$ અને પરવલય $y^2 = ax$ વચ્ચે તથા x-અક્ષની ઉપર આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ વક્રોનાં સમીકરણો ઉકેલતા, $x^2 + ax = 2ax$ મળે.

$\therefore \quad x = 0$ અથવા $x = a$

હવે, $y^2 = ax$ હોવાથી,

$y = 0$ અથવા $y = \pm a$

આકૃતિ 8.8 પરથી,

માંગેલ ક્ષેત્રફળ ODAB = $\int_0^a \left(\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax}\right) dx$

હવે, $\sqrt{2ax - x^2}$ માં $x = 2a\, sin^2\theta$ લેતાં,

$dx = 4a \sin\theta \cos\theta\, d\theta$ અને

$x = 0, \Rightarrow \theta = 0, \quad x = a \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

હવે, $\int_0^a \sqrt{2ax - x^2}\, dx$

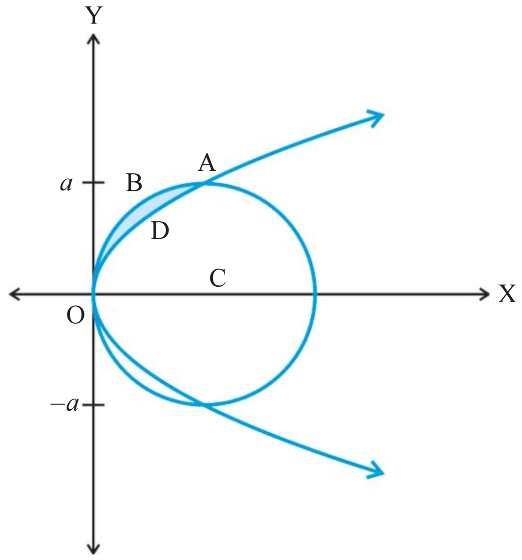
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a \sin\theta \cos\theta)(4a \sin\theta \cos\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} a^2 .$$

હવે, $\int_0^a \sqrt{ax}\, dx = \sqrt{a}\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)_0^a = \frac{2}{3} a^2$

માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= \frac{\pi}{4}a^2 - \frac{2}{3}a^2 = a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$ ચોરસ એકમ



આકૃતિ 8.8

ઉદાહરણ 9 : વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ ના રેખા $x = \frac{a}{2}$ વડે કપાતા વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : સમીકરણો $x^2 + y^2 = a^2$ અને $x = \frac{a}{2}$ ઉકેલતાં, છેદબિંદુઓ $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ અને $\left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ મળશે.

આમ, આકૃતિ 8.9 પરથી,

માંગેલ ક્ષેત્રફળ = 2 (CAB) નું ક્ષેત્રફળ

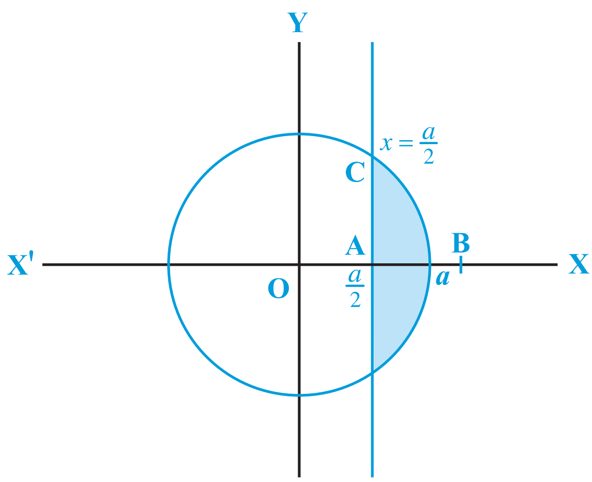
$$= 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{\frac{a}{2}}^{a}$$

$$= 2\left[\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{a}{4}\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \frac{a^2}{12}\left(6\pi - 3\sqrt{3} - 2\pi\right)$$

$$= \frac{a^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) \text{ ચોરસ એકમ}$$



આકૃતિ 8.9

બીજી ભૌમિતિક રીત :

ΔCOA માં sin AOC $= \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ખૂણો AOC $= \frac{\pi}{3}$

લઘુવૃત્તાંશ AOC નું ક્ષેત્રફળ AOC $= \frac{1}{2}r^2\theta$

$$= \frac{1}{2}r^2 \frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{6}$$

ΔOAC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

લઘુવૃત્તાંશખંડનું ક્ષેત્રફળ $= 2\left(\frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}a^2}{8}\right)$

$$= \frac{a^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

નીચેનાં ક્રમાંક 10 થી 12 વાળાં વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 10 : વર્તુળ $x^2 + y^2 = 2$ થી આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) 4π ચોરસ એકમ (B) $2\sqrt{2}\pi$ ચોરસ એકમ

(C) $4\pi^2$ ચોરસ એકમ (D) 2π ચોરસ એકમ

ઉકેલ : ક્ષેત્રફળ $= 4\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\, dx$

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$= 2\pi$ ચોરસ એકમ

સાચો ઉકેલ (D) છે.

નોંધ : વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2 = 2\pi$

ઉદાહરણ 11 : ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ થી આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\pi^2 ab$ (B) πab (C) $\pi a^2 b$ (D) πab^2

ઉકેલ : ક્ષેત્રફળ $= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$= \pi ab$

સાચો ઉકેલ (B) છે.

ઉદાહરણ 12 : વક્ર $y = x^2$ અને રેખા $y = 16$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

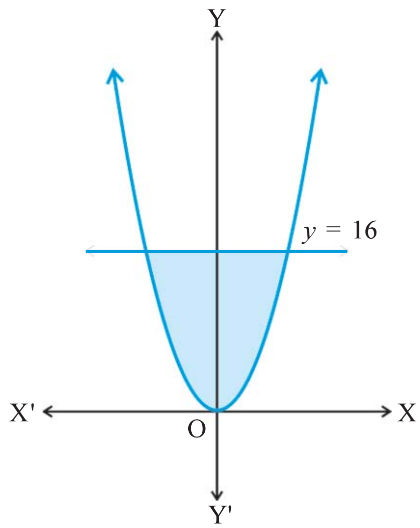
(A) $\frac{32}{3}$ (B) $\frac{256}{3}$

(C) $\frac{64}{3}$ (D) $\frac{128}{3}$

ઉકેલ : માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 2\int_0^{16} \sqrt{y}\, dy = 2\left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{16}$

$= \frac{256}{3}$

સાચો ઉકેલ (B) છે.



આકૃતિ 8.10

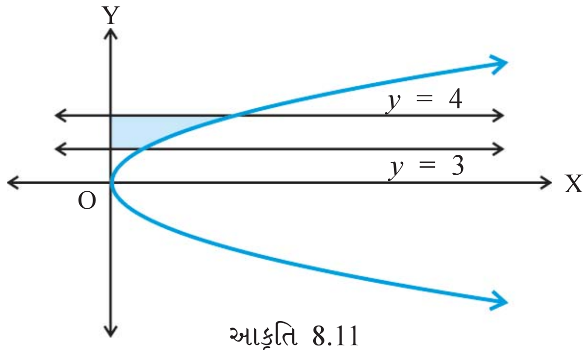
નીચેનાં ક્રમાંક 13 અને 14 વાળા વિધાનો સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 13 : વક્ર $x = y^2$, y-અક્ષ અને રેખાઓ $y = 3$ અને $y = 4$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

ઉકેલ : $A = \int_3^4 x dy = \int_3^4 y^2 dy$

$= \left[\frac{y^3}{3}\right]_3^4$

$= \frac{37}{3}$ ચોરસ એકમ

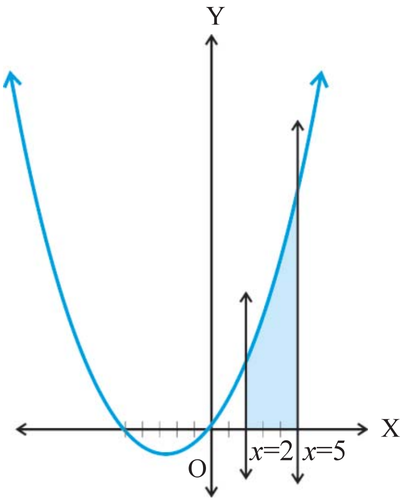


આકૃતિ 8.11

ઉદાહરણ 14 : વક્ર $y = x^2 + x$, x-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 2$ તથા $x = 5$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

ઉકેલ : $\int_2^5 (x^2 + x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_2^5$

$= \frac{117}{3} + \frac{21}{2} = \frac{297}{6}$ ચોરસ એકમ



આકૃતિ 8.12

સ્વાધ્યાય 8.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. વક્રો $y^2 = 9x$ અને $y = 3x$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

2. બે પરવલયો $y^2 = 2px$ અને $x^2 = 2py$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

3. વક્ર $y = x^3$, રેખા $y = x + 6$ અને $x = 0$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. વક્રો $y^2 = 4x$ અને $x^2 = 4y$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
5. વક્ર $y^2 = 9x$ અને $y = x$ વચ્ચે ઘેરાયેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
6. પરવલય $x^2 = y$ અને રેખા $y = x + 2$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
7. રેખા $x = 2$ અને પરવલય $y^2 = 8x$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
8. $\{(x, 0) : y = \sqrt{4-x^2}\}$ અને x-અક્ષથી રચાતા પ્રદેશનું આલેખન કરો અને તે પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ સંકલનનો ઉપયોગ કરી મેળવો.
9. વક્ર $y = 2\sqrt{x}$ અને રેખાઓ $x = 0$ અને $x = 1$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
10. સંકલનનો ઉપયોગ કરી રેખા $2y = 5x + 7$, x-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 2$ અને $x = 8$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
11. વક્ર $y = \sqrt{x-1}$ નો અંતરાલ $[1, 5]$ માં સ્થૂળ આલેખ દોરો અને તે વક્રના રેખાઓ $x = 1$ અને $x = 5$ વચ્ચે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
12. વક્ર $y = \sqrt{a^2-x^2}$ ની નીચેના તથા રેખાઓ $x = 0$ અને $x = a$ વચ્ચે ઘેરાયેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
13. વક્ર $y = \sqrt{x}$ અને $y = x$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
14. વક્ર $y = -x^2$ અને રેખા $x + y + 2 = 0$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
15. વક્ર $y = \sqrt{x}$ અને $x = 2y + 3$ અને x-અક્ષ દ્વારા આવૃત પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

16. વક્રો $y^2 = 2x$ અને $x^2 + y^2 = 4x$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
17. વક્ર $y = \sin x$ ના $x = 0$ અને $x = 2\pi$ વચ્ચે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
18. $(-1, 1)$, $(0, 5)$ અને $(3, 2)$ શિરોબિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ સંકલનનો ઉપયોગ કરીને મેળવો.
19. $\{(x, y) : y^2 \le 6ax$ અને $x^2 + y^2 \le 16a^2\}$ થી રચાતા પ્રદેશનું સ્થૂળ આલેખન કરી તેનું ક્ષેત્રફળ સંકલનના ઉપયોગથી મેળવો.
20. રેખાઓ $x + 2y = 2$, $y - x = 1$ અને $2x + y = 7$ વડે રચાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
21. રેખાઓ $y = 4x + 5$, $y = 5 - x$ અને $4y = x + 5$ વડે રચાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
22. વક્ર $y = 2\cos x$ અને રેખાઓ $x = 0$ તથા $x = 2\pi$ અને x-અક્ષ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
23. વક્રો $y = 1 + |x + 1|$, $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$ નો સ્થૂળ આલેખ દોરો અને તેથી રચાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ સંકલનના ઉપયોગથી શોધો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 24 થી 34 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

24. વક્ર $y = cosx$ અને $y = sinx$, y-અક્ષ તથા $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... ચોરસ એકમ છે.

(A) $\sqrt{2}$ ચોરસ એકમ   (B) $(\sqrt{2}+1)$ ચોરસ એકમ

(C) $(\sqrt{2}-1)$ ચોરસ એકમ   (D) $(2\sqrt{2}-1)$ ચોરસ એકમ

25. વક્ર $x^2 = 4y$ અને રેખા $x = 4y - 2$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\frac{3}{8}$ ચોરસ એકમ (B) $\frac{5}{8}$ ચોરસ એકમ (C) $\frac{7}{8}$ ચોરસ એકમ (D) $\frac{9}{8}$ ચોરસ એકમ

26. વક્ર $y=\sqrt{16-x^2}$ અને x-અક્ષ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) 8 ચોરસ એકમ (B) 20π ચોરસ એકમ (C) 16π ચોરસ એકમ (D) 256π ચોરસ એકમ

27. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 32$, રેખા $y = x$ અને x-અક્ષ વડે પ્રથમ ચરણમાં આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(A) 16π ચોરસ એકમ (B) 4π ચોરસ એકમ (C) 32π ચોરસ એકમ (D) 24 ચોરસ એકમ

28. વક્ર $y = \cos x$ ના $x = 0$ અને $x = \pi$ વચ્ચે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) 2 ચોરસ એકમ (B) 4 ચોરસ એકમ (C) 3 ચોરસ એકમ (D) 1 ચોરસ એકમ

29. પરવલય $y^2 = x$ અને રેખા $2y = x$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\frac{4}{3}$ ચોરસ એકમ (B) 1 ચોરસ એકમ (C) $\frac{2}{3}$ ચોરસ એકમ (D) $\frac{1}{3}$ ચોરસ એકમ

30. વક્ર $y = \sin x$, x-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 0$ તથા $x = \frac{\pi}{2}$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) 2 ચોરસ એકમ (B) 4 ચોરસ એકમ (C) 3 ચોરસ એકમ (D) 1 ચોરસ એકમ

31. ઉપવલય $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ થી આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) 20π ચોરસ એકમ (B) $20\pi^2$ ચોરસ એકમ

(C) $16\pi^2$ ચોરસ એકમ (D) 25π ચોરસ એકમ

32. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 1$ થી આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) 2π ચોરસ એકમ (B) π ચોરસ એકમ (C) 3π ચોરસ એકમ (D) 4π ચોરસ એકમ

33. વક્ર $y = x + 1$ અને રેખાઓ $x = 2$ અને $x = 3$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\frac{7}{2}$ ચોરસ એકમ (B) $\frac{9}{2}$ ચોરસ એકમ (C) $\frac{11}{2}$ ચોરસ એકમ (D) $\frac{13}{2}$ ચોરસ એકમ

34. વક્ર $x = 2y + 3$ અને રેખાઓ $y = 1$ અને $y = -1$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) 4 ચોરસ એકમ (B) $\frac{3}{2}$ ચોરસ એકમ (C) 6 ચોરસ એકમ (D) 8 ચોરસ એકમ

પ્રકરણ 9

વિકલ સમીકરણો

9.1 વિહંગાવલોકન

(i) સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ અવલંબી ચલના વિકલોને સમાવતા સમીકરણને વિકલ સમીકરણ કહે છે.

(ii) માત્ર એક જ સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ અવલંબી ચલના વિકલોને સમાવતા સમીકરણને સામાન્ય વિકલ સમીકરણ કહે છે, જ્યારે એક કરતાં વધુ સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ અવલંબી ચલના વિકલિતોને સમાવતા સમીકરણને (વિભાગીય) આંશિક વિકલ સમીકરણ કહે છે.

(iii) વિકલ સમીકરણમાં આવતા અવલંબી ચલના સ્વતંત્ર ચલને સાપેક્ષ વિકલિતોમાં ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષાને વિકલ સમીકરણની કક્ષા કહે છે.

(iv) જો વિકલ સમીકરણ વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપે હોય, તો વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ વ્યાખ્યાયિત છે.

(v) વિકલ સમીકરણમાં આવતા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતના ઉચ્ચતમ ઘાતાંક (માત્ર ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા)ને વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ (વ્યાખ્યાયિત હોય તો) કહે છે.

(vi) સમાવિષ્ટ ચલો વચ્ચેના સંબંધ દ્વારા આપેલા વિકલ સમીકરણનું સમાધાન થતું હોય, તો તેને વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ કહે છે. જે ઉકેલમાં વિકલ સમીકરણની કક્ષા જેટલા સ્વૈર અચળોનો સમાવેશ થતો હોય, તે ઉકેલને વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ કહે છે અને જે ઉકેલ સ્વૈર અચળોથી મુક્ત હોય (એટલે કે, જેમાં સ્વૈર અચળોનો સમાવેશ ન થતો હોય) તેવા ઉકેલને વિશિષ્ટ ઉકેલ કહે છે.

(vii) આપેલ વિધેય પરથી, વિકલ સમીકરણ બનાવતી વખતે, આપણે આપેલ વિધેયમાં સ્વૈર અચળોની જેટલી સંખ્યા હોય તેટલી વખત તે વિધેયનું ક્રમશઃ વિકલન કરવું પડે અને ત્યાર બાદ તેમાંથી સ્વૈર અચળોનો લોપ કરવો પડે.

(viii) વક્રોની સંહતિ દર્શાવતા સમીકરણમાં હાજર સ્વૈર અચળોની સંખ્યાને સમાન વક્રોની સંહતિના વિકલ સમીકરણની કક્ષા હોય છે.

(ix) જે સમીકરણમાં ચલને સંપૂર્ણપણે છૂટા પાડી શકાતા હોય એટલે કે, x ને સમાવતાં પદો dx સાથે અને y ને સમાવતાં પદો dy સાથે એમ અલગ થઈ શકતા હોય, તે સમીકરણ ઉકેલવા માટે **વિયોજનીય ચલની રીત**નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

(x) જો કોઈ શૂન્યેતર અચળ λ માટે, દ્વિચલ વિધેયને $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય, તો વિધેય $F(x, y)$ ને n ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય કહે છે.

(xi) શૂન્ય ઘાત ધરાવતાં સમપરિમાણીય વિધેયો F(x, y) અને G(x, y) માટે, કોઈ વિકલ સમીકરણને $\frac{dy}{dx}$ = F(x, y) અથવા $\frac{dx}{dy}$ = G(x, y) સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય, તો તે વિકલ સમીકરણને સમપરિમાણીય વિકલ સમીકરણ કહે છે.

(xii) $\frac{dy}{dx}$ = F(x, y) સ્વરૂપના સમપરિમાણીય વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા માટે આપણે $y = vx$ અને $\frac{dx}{dy}$ = G(x, y) સ્વરૂપના સમપરિમાણીય વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા માટે આપણે $x = vy$ આદેશ લઈશું.

(xiii) $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ જ્યાં, P અને Q અચળ હોય તેવા અથવા માત્ર x નાં વિધેયો છે, સ્વરૂપના વિકલ સમીકરણને પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ કહે છે. આ પ્રકારના વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ y (સંકલ્યકારક અવયવ) = $\int$Q (સંકલ્યકારક અવયવ) $dx + c$ દ્વારા મળે છે.

જ્યાં, સંકલ્યકારક અવયવ = $e^{\int P dx}$.

(xiv) $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ જ્યાં, P_1 અને Q_1 અચળ છે અથવા માત્ર y નાં વિધેયો છે, એ પ્રથમ કક્ષાના સુરેખ વિકલ સમીકરણનું અન્ય સ્વરૂપ છે. આ પ્રકારના વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ

x (સંકલ્યકારક અવયવ) = $\int Q_1$ (સંકલ્યકારક અવયવ) $dy + c$, જ્યાં, સંકલ્યકારક અવયવ = $e^{\int P_1 dy}$ દ્વારા મેળવી શકાય.

9.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : વક્રોની સંહતિ $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ ને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$

$$\frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x} \text{ અને } \frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x} + 4Be^{-2x}$$

આમ, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$ એટલે કે, $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$, માંગેલ વિકલ સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 2 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\therefore$ બંને બાજુ સંકલન કરતાં, $\log|y| = \log|x| + \log c$. આથી, $\log|y| = \log|cx|$ આથી, $y = cx$

ઉદાહરણ 3 : $\frac{dy}{dx} = ye^x$; $x = 0$ અને $y = e$ નો ઉકેલ મેળવો. જ્યારે, $x = 1$ હોય ત્યારે y ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx} = ye^x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int e^x dx$ આથી, $\log y = e^x + c$

હવે $x = 0$ અને $y = e$ લેતાં, $\log e = e^0 + c$ મળે એટલે કે, $c = 0$ **($\log e = 1$)**

આથી, $\log y = e^x$.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં $x = 1$ લેતાં, $\log y = e$. આથી, $y = e^e$. માંગેલ y ની કિંમત છે.

ઉદાહરણ 4 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$ નો ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ સ્વરૂપનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

હવે, સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x$

આથી, આપેલ વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ

$$y \cdot x = \int x \cdot x^2 \, dx, \text{ એટલે કે, } yx = \frac{x^4}{4} + c$$

આથી, $y = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$.

અન્ય રીત :

$$x\,dy + y\,dx = x^3 dx$$

$$d\,(xy) = x^3 dx$$

$$\therefore \quad xy = \frac{x^4}{4} + c$$

ઉદાહરણ 5 : ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાઓની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $y = mx$ એ ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાઓની સંહતિ દર્શાવતું સમીકરણ છે.

આથી, $\frac{dy}{dx} = m$

m નો લોપ કરતાં, આપણને $y = \frac{dy}{dx} \cdot x$ મળે અથવા $x\frac{dy}{dx} - y = 0$.

ઉદાહરણ 6 : સમતલમાં આવેલી સમક્ષિતિજ ન હોય તેવી તમામ રેખાઓનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : સમતલમાં આવેલી સમક્ષિતિજ ન હોય તેવી તમામ રેખાઓનું વ્યાપક સમીકરણ $ax + by = c$, $a \neq 0$ છે.

આથી, $a\frac{dx}{dy} + b = 0$.

ફરીથી, બંને બાજુ y-પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$a\frac{d^2x}{dy^2} = 0 \quad \text{તેથી,} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = 0.$$

ઉદાહરણ 7 : ઊગમબિંદુ સિવાયના વક્ર પરના કોઈ પણ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $y + \frac{y}{x}$ હોય, તો તે વક્રનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{dy}{dx} = y + \frac{y}{x} = y\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{y} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$\log y = x + \log x + c$

$\therefore \quad \log\left(\frac{y}{x}\right) = x + c$

$\therefore \quad \frac{y}{x} = e^{x+c} = e^x \cdot e^c$

$\therefore \quad \frac{y}{x} = k \cdot e^x$

$\therefore \quad y = kx \cdot e^x$

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 8 : કોઈ એક વક્ર બિંદુ (1, 1) માંથી પસાર થાય છે. જો વક્ર પરના કોઈ બિંદુ $P(x, y)$ આગળ દોરેલ વક્રના અભિલંબનું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર અને બિંદુ P થી x-અક્ષ સુધીનું અંતર સમાન હોય, તો તે વક્રનું સમીકરણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે વક્રને બિંદુ $P(x, y)$ આગળ દોરેલ અભિલંબ $(Y - y) = \frac{-dx}{dy}(X - x)$ એટલે કે,

$$Y + X\frac{dx}{dy} - \left(y + x\frac{dx}{dy}\right) = 0 \qquad \text{...(1)}$$

આથી, ઊગમબિંદુમાંથી (1) પર દોરેલ લંબની લંબાઈ

$$\frac{\left|y + x\frac{dx}{dy}\right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} \qquad \text{...(2)}$$

વળી, બિંદુ P થી x-અક્ષ સુધીનું અંતર $|y|$ છે.

આમ, $\frac{\left|y + x\frac{dx}{dy}\right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = |y|$

$\therefore \quad \left(y + x\frac{dx}{dy}\right)^2 = y^2\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]$. આથી $\frac{dx}{dy}\left[\frac{dx}{dy}\left(x^2 - y^2\right) + 2xy\right] = 0$

$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = 0$ અથવા $\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$

વિકલ્પ I : $\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow dx = 0$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં, $x = k$ મળે. તે (1, 1) માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \quad x = 1$, લેતાં, $k = 1$ મળે.

આથી, વક્રનું સમીકરણ $x = 1$ છે. (તે અશક્ય છે, માટે અસ્વીકાર્ય છે.)

વિકલ્પ II : $\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$. આથી $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

$\therefore$ આ સમપરિમાણ સમીકરણ છે.

$\therefore$ $y = vx$ આદેશ લેતાં, આપણને $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2x^2 - x^2}{2vx^2}$ મળે.

$\therefore$ $x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} - v = \frac{-(1 + v^2)}{2v}$

$\therefore$ $\frac{2v}{1 + v^2}dv = \frac{-dx}{x}$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં, આપણને

$\log(1 + v^2) = -\log x + \log c$

$\therefore$ $\log(1 + v^2)(x) = \log c$

$\therefore$ $(1 + v^2)x = c$

$\therefore$ $x^2 + y^2 = cx$ મળે.

ઉપર્યુક્ત સમીકરણમાં $x = 1$, $y = 1$ લેતાં, $c = 2$ મળે.

આથી, માંગેલ વક્રનું સમીકરણ $x^2 + y^2 - 2x = 0$ છે.

ઉદાહરણ 9 : એક વક્ર બિંદુ $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ માંથી પસાર થાય છે. જો વક્રના કોઈ પણ બિંદુ $P(x, y)$ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\frac{y}{x} - cos^2\frac{y}{x}$ હોય, તો તે વક્રનું સમીકરણ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ શરત અનુસાર,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - cos^2\frac{y}{x} \qquad \text{...(i)}$$

આ સમપરિમાણીય વિકલ સમીકરણ છે.

$\therefore$ આદેશ $y = vx$ લેતાં, આપણને

$v + x\frac{dv}{dx} = v - cos^2 v$ એટલે કે $x\frac{dv}{dx} = -cos^2 v$ મળે.

$\therefore$ $sec^2 v \; dv = -\frac{dx}{x}$

આથી, $tan\, v = -\log x + c$ **(બંને બાજુ સંકલન કરતાં)**

$\therefore$ $tan\frac{y}{x} + \log x = c$ **...(ii)**

(ii) માં $x = 1$, $y = \frac{\pi}{4}$ લેતાં, $c = 1$ મળે.

આથી, $tan\left(\frac{y}{x}\right) + \log x = 1$ માંગેલ વક્રનું સમીકરણ છે.

ઉદાહરણ 10 : ઉકેલો : $x^2\frac{dy}{dx} - xy = 1 + cos\left(\frac{y}{x}\right)$, $(x \neq 0)$ અને $x = 1$ ત્યારે $y = \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને $x^2\frac{dy}{dx} - xy = 2cos^2\left(\frac{y}{2x}\right)$, $x \neq 0$ તરીકે લખી શકાય.

$$\therefore \quad \frac{x^2\frac{dy}{dx} - xy}{2cos^2\left(\frac{y}{2x}\right)} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{sec^2\left(\frac{y}{2x}\right)}{2}\left[x^2\frac{dy}{dx} - xy\right] = 1$$

બંને બાજુ x^3 વડે ભાગતાં, આપણને

$$\frac{sec^2\left(\frac{y}{2x}\right)}{2}\left[\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}\right] = \frac{1}{x^3}$$ મળે.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left[tan\left(\frac{y}{2x}\right)\right] = \frac{1}{x^3}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં, આપણને

$$tan\left(\frac{y}{2x}\right) = \frac{-1}{2x^2} + k$$ મળે.

$x = 1$ તથા $y = \frac{\pi}{2}$ લેતાં, $k = \frac{3}{2}$ મળે.

આથી, $tan\left(\frac{y}{2x}\right) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}$ માંગેલ ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 11 : સમીકરણ $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$ કયા પ્રકારનું વિકલ સમીકરણ છે તે જણાવો અને તેનો ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને $xdy = \left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)dx$. એટલે કે,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$$ લખી શકાય. ... **(1)**

(1) ની જમણી બાજુ પરથી સ્પષ્ટ છે કે તે શૂન્ય ઘાતાંકવાળું સમપરિમાણીય વિધેય છે. આથી, આપેલ સમીકરણ સમપરિમાણીય વિકલ સમીકરણ છે.

$\therefore$ આદેશ $y = vx$ લેતાં, (1) પરથી,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+v^2x^2}+vx}{x}$$ એટલે કે,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1+v^2} + v$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1+v^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x}$$ **...(2)**

(2) ની બંને બાજુ સંકલન કરતાં, આપણને

$$\log\left(v + \sqrt{1 + v^2}\right) = \log x + \log c$$

$\therefore \quad v + \sqrt{1 + v^2} = cx$ મળે.

આથી, $\dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = cx$

$\therefore \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$

બીજી રીત : $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$

$$\therefore \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\,\frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} = \frac{dx}{x}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં, $\log\left(\dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\right) = \log cx$

$\therefore \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 12 થી 21 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 12 : વિકલ સમીકરણ $\left(1 + \dfrac{dy}{dx}\right)^3 = \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ નું પરિમાણ .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : વિકલ્પ (B) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 13 : વિકલ સમીકરણ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 \log\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ નું પરિમાણ .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) અવ્યાખ્યાયિત

ઉકેલ : આપેલ વિકલ સમીકરણ એ તેનાં વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપે નથી. આથી તેનું પરિમાણ વ્યાખ્યાયિત નથી.

વિકલ્પ (D) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 14 : વિકલ સમીકરણ $\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^2 = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે .... અને .... છે.

(A) 1, 2 (B) 2, 2 (C) 2, 1 (D) 4, 2

ઉકેલ : વિકલ્પ (C) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 15 : a ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળોના સમુદાયના વિકલ સમીકરણની કક્ષા .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : 'a' ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળોના સમુદાયનું સમીકરણ

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ છે. તેમાં બે સ્વૈર અચળાંકો h અને k છે. આથી, આપેલ વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 થશે.

વિકલ્પ (B) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 16 : વિકલ સમીકરણ $2x\frac{dy}{dx} - y = 3$ નો ઉકેલ .... નો સમુદાય દર્શાવે છે.

(A) રેખાઓ (B) વર્તુળો (C) પરવલયો (D) ઉપવલયો

ઉકેલ : $\frac{2dy}{y+3} = \frac{dx}{x} \Rightarrow 2 \log (y + 3) = \log x + \log c$

$\Rightarrow (y + 3)^2 = cx$ પરવલયોનો સમુદાય દર્શાવે છે.

વિકલ્પ (C) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 17 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx}(x \log x) + y = 2 \log x$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) e^x (B) $\log x$ (C) $\log (\log x)$ (D) x

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણને $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\log x} = \frac{2}{x}$ સ્વરૂપે લખી શકાય.

આથી, સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int \frac{1}{x\log x}dx} = e^{\log (\log x)} = \log x$.

વિકલ્પ (B) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 18 : વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $y = 2$ (B) $y = 2x$ (C) $y = 2x - 4$ (D) $y = 2x^2 - 4$

ઉકેલ : વિકલ્પ (C) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 19 : નીચેનામાંથી કયું વિધેય x અને y નું સમપરિમાણીય વિધેય નથી ?

(A) $x^2 + 2xy$ (B) $2x - y$ (C) $cos^2\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$ (D) $sin\, x - cos\, y$

ઉકેલ : વિકલ્પ (D) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 20 : વિકલ સમીકરણ $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c$ (B) $\log x \cdot \log y = c$ (C) $xy = c$ (D) $x + y = c$

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણ પરથી આપણને $\log x + \log y = \log c$ મળે અને તે $xy = c$ દર્શાવે છે.

વિકલ્પ (C) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 21 : વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $y = \frac{x^2+c}{4x^2}$ (B) $y = \frac{x^2}{4} + c$ (C) $y = \frac{x^4+c}{x^2}$ (D) $y = \frac{x^4+c}{4x^2}$

ઉકેલ : સંકલ્યકારક અવયવ = $e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2$.

આથી, ઉકેલ $y \cdot x^2 = \int x^2 \cdot x dx = \frac{x^4}{4} + k$ એટલે કે, $y = \frac{x^4 + 4k}{4x^2}$ છે.

અહીં $\frac{c}{4x^2} = \frac{k}{x^2}$ એટલે કે, $c = 4k$.

વિકલ્પ (D) સાચો જવાબ છે.

ઉદાહરણ 22 : વિધાન સત્ય બને તે રીતે નીચેની ખાલી જગ્યાઓ પૂરો :

(i) પરવલયો $y^2 = 4ax$ ના સમુદાયને દર્શાવતા વિકલ સમીકરણની કક્ષા .... છે.

(ii) વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$ નું પરિમાણ .... છે.

(iii) વિકલ સમીકરણ $\tan x \, dx + \tan y \, dy = 0$ ના વિશિષ્ટ ઉકેલમાં સ્વૈર અચળાંકોની સંખ્યા .... છે.

(iv) $F(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$ એ .... ઘાતાંકવાળું સમપરિમાણીય વિધેય છે.

(v) વિકલ સમીકરણ $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 \log\left(\frac{x}{y}\right) - y^2}{xy \log\left(\frac{x}{y}\right)}$ ના ઉકેલ માટે, યોગ્ય આદેશ .... છે.

(vi) વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} - y = \sin x$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(vii) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ નો વ્યાપક ઉકેલ .... છે.

(viii) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$ નો વ્યાપક ઉકેલ .... છે.

(ix) વક્રોના સમુદાય $y = A \sin x + B \cos x$ ને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ .... છે.

(x) $\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{dy} = 1 (x \neq 0)$ ને જ્યારે $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ના સ્વરૂપમાં લખવામાં આવે, ત્યારે

P = ...

ઉકેલ :

(i) કક્ષા : 1; a એક માત્ર સ્વૈર અચળ છે.

(ii) પરિમાણ : 2; કારણ કે દ્વિતીય વિકલિત એ ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત છે અને તેનો ઘાતાંક 2 છે.

(iii) શૂન્ય : કારણ કે કોઈ પણ વિકલ સમીકરણના વિશિષ્ટ ઉકેલમાં એક પણ સ્વૈર અચળ હોતો નથી.

(iv) શૂન્ય

(v) $x = vy$

(vi) $\dfrac{1}{x}$; કારણ કે, આપેલ વિકલ સમીકરણને $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$ લખી શકાય અને તેથી સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\log x} = \dfrac{1}{x}$.

(vii) $e^y = e^x + c$; કારણ કે, આપેલ સમીકરણ પરથી, આપણને $e^y dy = e^x dx$ મળે.

(viii) $xy = \dfrac{x^2}{2} + c$; સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x$ અને તેનો ઉકેલ $y \cdot x = \int x.1\,dx = \dfrac{x^2}{2} + c$.

(ix) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$; આપેલ વિધેયનું ક્રમશઃ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં, આપણને $\dfrac{dy}{dx} = \text{A} \cos x - \text{B} \sin x$

અને $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\text{A} \sin x - \text{B} \cos x$ મળે.

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ એ માંગેલ વિકલ સમીકરણ છે.

(x) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; કારણ કે આપેલ સમીકરણને $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \dfrac{y}{\sqrt{x}}$ એટલે કે $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{\sqrt{x}} = \dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ લખી શકાય.

આ વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$ સ્વરૂપનું છે.

ઉદાહરણ 23 : નીચેનાં વિધાનો **સત્ય** છે કે **અસત્ય** તે જણાવો :

(i) ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળા અને x-અક્ષ પર નાભિઓ ધરાવતા ઉપવલયોના સમુદાયને દર્શાવતા વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે.

(ii) વિકલ સમીકરણ $\sqrt{1 + \dfrac{d^2y}{dx^2}} = x + \dfrac{dy}{dx}$ નું પરિમાણ અવ્યાખ્યાયિત છે.

(iii) $\dfrac{dy}{dx} + y = 5$ એ $\dfrac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$ સ્વરૂપનું વિકલ સમીકરણ છે, પરંતુ તેને વિયોજનીય ચલની રીતનો ઉપયોગ કરીને પણ ઉકેલી શકાય.

(iv) $\text{F}(x, y) = \dfrac{y \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + x}{x \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ એ સમપરિમાણીય વિકલ સમીકરણ છે.

(v) $\text{F}(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ એ 1 પરિમાણ ધરાવતું સમપરિમાણીય વિધેય છે.

(vi) વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx} - y = \cos x$ નો સંકલ્યકારક અવયવ e^x છે.

(vii) વિકલ સમીકરણ $x(1 + y^2)dx + y\,(1 + x^2)dy = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ $(1 + x^2)\,(1 + y^2) = k$ છે.

(viii) વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx} + y \sec x = \tan x$ નો વ્યાપક ઉકેલ $y\,(\sec x - \tan x) = \sec x - \tan x + x + k$ છે.

(ix) વિકલ સમીકરણ $y^2 \frac{dy}{dx} + y^2 + 1 = 0$ નો ઉકેલ $x + y = tan^{-1}y$ છે.

(x) વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} + xy = x$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ $y = x$ છે.

ઉકેલ :

(i) સત્ય, કારણ કે, ઉપવલયોના સમુદાયને દર્શાવતા સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ માં બે સ્વૈર અચળ છે.

(ii) સત્ય, કારણ કે, સમીકરણ વિકલિતોની બહુપદીના સ્વરૂપે નથી.

(iii) સત્ય

(iv) સત્ય, કારણ કે, $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\circ} F(x, y)$.

(v) સત્ય, કારણ કે, $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^1 F(x, y)$.

(vi) અસત્ય, કારણ કે, સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int -1dx} = e^{-x}$.

(vii) સત્ય, કારણ કે, આપેલ સમીકરણને $\frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{-2y}{1+y^2}dy$ લખી શકાય.

$\therefore \log(1 + x^2) = -\log(1 + y^2) + \log k$

$\therefore (1 + x^2)(1 + y^2) = k$

(viii) અસત્ય, કારણ કે, સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int sec\, x\, dx} = e^{\log(sec\, x + tan\, x)} = sec\, x + tan\, x$

$$\therefore y(sec\, x + tan\, x) = \int (sec\, x + tan\, x)\, tan\, x\, dx$$

$$= \int \left(sec\, x\, tan\, x + sec^2 x - 1\right) dx$$

$$= sec\, x + tan\, x - x + k$$

(ix) સત્ય, $x + y = tan^{-1}y \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{1+y^2} - 1\right) = 1 \text{ એટલે કે } \frac{dy}{dx} = \frac{-(1+y^2)}{y^2}$$

એ આપેલ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

(x) અસત્ય, કારણ કે, $y = x$ એ આપેલ વિકલ સમીકરણનું સમાધાન કરતું નથી.

સ્વાધ્યાય 9.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. $\frac{dy}{dx} = 2^{y-x}$ નો ઉકેલ મેળવો.

2. સમતલમાં આવેલી અને શિરોલંબ ન હોય તેવી તમામ રેખાઓનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

3. જ્યારે $x = 5$ અને $y = 0$ હોય ત્યારે $\frac{dy}{dx} = e^{-2y}$ ઉકેલો.

$y = 3$ હોય ત્યારે x ની કિંમત શોધો.

4. વિકલ સમીકરણ $(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{x^2-1}$ નો ઉકેલ મેળવો.

5. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + 2xy = y$ નો ઉકેલ મેળવો.

6. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + ay = e^{mx}$ નો વ્યાપક ઉકેલ મેળવો.

7. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + 1 = e^{x+y}$ નો ઉકેલ શોધો.

8. ઉકેલો : $ydx - xdy = x^2ydx$

9. જ્યારે $x = 0$ અને $y = 0$ હોય, ત્યારે વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$ નો ઉકેલ મેળવો.

10. $(x + 2y^3)\frac{dy}{dx} = y$ નો વ્યાપક ઉકેલ મેળવો.

11. જો $\left(\frac{2 + sin\,x}{1 + y}\right)\frac{dy}{dx} = -\,cos\,x$ નો ઉકેલ $y(x)$ હોય તથા $y(0) = 1$ હોય, તો $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ની કિંમત શોધો.

12. જો $(1 + t)\frac{dy}{dt} - ty = 1$ નો ઉકેલ $y(t)$ હોય તથા $y(0) = -1$ હોય, તો સાબિત કરો કે $y(1) = -\frac{1}{2}$.

13. $y = (sin^{-1}x)^2 + A\,cos^{-1}x + B$; જ્યાં A અને B સ્વૈર અચળો છે. જેનો વ્યાપક ઉકેલ y હોય તેવું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

14. ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા અને કેન્દ્ર y-અક્ષ પર હોય તેવાં તમામ વર્તુળોનું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

15. ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા અને વિકલ સમીકરણ $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$ નું સમાધાન કરતા હોય તેવા વક્રનું સમીકરણ શોધો.

16. ઉકેલો : $x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$

17. વિકલ સમીકરણ $(1 + y^2) + (x - e^{tan^{-1}y})\frac{dy}{dx} = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

18. $y^2dx + (x^2 - xy + y^2)\,dy = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

19. ઉકેલો : $(x + y)\,(dx - dy) = dx + dy$

[**સૂચન :** dx અને dy અલગ કર્યા પછી આદેશ $x + y = z$ લો.]

20. ઉકેલો : $2(y + 3) - xy\dfrac{dy}{dx} = 0;\ y(1) = -2$

21. જ્યારે $x = \dfrac{\pi}{2}$ અને $y = 2$ આપેલ હોય ત્યારે વિકલ સમીકરણ $dy = \cos x\,(2 - y\,\operatorname{cosec} x)\,dx$ નો ઉકેલ શોધો.

22. $Ax^2 + By^2 = 1$ માં આપેલ અચળો A અને B નો લોપ કરી વિકલ સમીકરણની રચના કરો.

23. વિકલ સમીકરણ $(1 + y^2)\tan^{-1}x\,dx + 2y(1 + x^2)\,dy = 0$ નો ઉકેલ શોધો.

24. (1, 2) કેન્દ્ર ધરાવતાં સમકેન્દ્રી વર્તુળોની સંહતિનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

25. ઉકેલો : $y + \dfrac{d}{dx}(xy) = x(\sin x + \log x)$

26. $(1 + \tan y)(dx - dy) + 2xdy = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

27. ઉકેલો : $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y) + \sin(x + y)$ [સૂચન : આદેશ $x + y = z$ લો.]

28. $\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin 2x$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

29. એક વક્ર બિંદુ (2, 1) માંથી પસાર થાય છે. જો વક્રના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ હોય, તો તે વક્રનું સમીકરણ શોધો.

30. એક વક્ર બિંદુ (1, 0) માંથી પસાર થાય છે. જો વક્રના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $\dfrac{y - 1}{x^2 + x}$ હોય, તો તે વક્રનું સમીકરણ શોધો.

31. એક વક્ર ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે. જો વક્રના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ એ તે બિંદુના x-યામ તથા y-યામના તફાવતના વર્ગ જેટલો હોય, તો તે વક્રનું સમીકરણ મેળવો.

32. એક વક્ર બિંદુ (1, 1) માંથી પસાર થાય છે. જો વક્રના કોઈ પણ બિંદુ $P(x, y)$ આગળ દોરેલ સ્પર્શક યામાક્ષોને A અને B માં એ રીતે છેદે કે જેથી P એ AB નું મધ્યબિંદુ બને તો તે વક્રનું સમીકરણ શોધો.

33. ઉકેલો : $x\dfrac{dy}{dx} = y(\log y - \log x + 1)$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 34 થી 75 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

34. વિકલ સમીકરણ $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = x\sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ નું પરિમાણ .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) અવ્યાખ્યાયિત

35. વિકલ સમીકરણ $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{d^2y}{dx^2}$ નું પરિમાણ .... છે.

(A) 4 (B) $\frac{3}{2}$ (C) અવ્યાખ્યાયિત (D) 2

36. વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{5}} = 0$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે .... છે.

(A) 2 અને અવ્યાખ્યાયિત (B) 2 અને 2 (C) 2 અને 3 (D) 3 અને 3

37. જો $y = e^{-x}$ (A $cosx$ + B $sinx$), હોય, તો y એ .... નો ઉકેલ છે.

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0$

38. વક્રસંહતિ y = A $cos\alpha x$ + B $sin\alpha x$, નું વિકલ સમીકરણ .... છે. A અને B સ્વૈર અચળ છે.

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} - \alpha^2 y = 0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha y = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} - \alpha y = 0$

39. વિકલ સમીકરણ $xdy - ydx = 0$ નો ઉકેલ .... દર્શાવે છે.

(A) લંબાતિવલય (B) ઊગમબિંદુ શીર્ષ હોય તેવો પરવલય

(C) ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા (D) ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળું વર્તુળ

40. વિકલ સમીકરણ $cos\,x \frac{dy}{dx} + y\,sin\,x = 1$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) $cos\,x$ (B) $tan\,x$ (C) $sec\,x$ (D) $sin\,x$

41. વિકલ સમીકરણ $tan\,y\ sec^2x\ dx + tan\,x\ sec^2y\ dy = 0$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $tan\,x + tan\,y = k$ (B) $tan\,x - tan\,y = k$

(C) $\frac{tan\ x}{tan\ y} = k$ (D) $tan\,x \cdot tan\,y = k$

42. વક્રો y = Ax + A^3 ના સમુદાયને દર્શાવતા વિકલ સમીકરણનું પરિમાણ .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

43. $x\frac{dy}{dx} - y = x^4 - 3x$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) x (B) $\log x$ (C) $\frac{1}{x}$ (D) $-x$

44. $\frac{dy}{dx} - y = 1$, $y(0) = 1$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $xy = -e^x$ (B) $xy = -e^{-x}$ (C) $xy = -1$ (D) $y = 2e^x - 1$

45. $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1}$; $y(1) = 2$ ના ઉકેલોની સંખ્યા .... છે.

(A) શૂન્ય (B) એક (C) બે (D) અનંત

46. નીચેનામાંથી કયું સમીકરણ દ્વિતીય કક્ષાનું વિકલ સમીકરણ છે ?

(A) $(y')^2 + x = y^2$ (B) $y'y'' + y = \sin x$

(C) $y''' + (y'')^2 + y = 0$ (D) $y' = y^2$

47. વિકલ સમીકરણ $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 1$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) $-x$ (B) $\frac{x}{1+x^2}$ (C) $\sqrt{1-x^2}$ (D) $\frac{1}{2}\log(1 - x^2)$

48. નીચેનામાંથી કયા વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = c$ છે ?

(A) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ (B) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$

(C) $(1 + x^2)\, dy + (1 + y^2)\, dx = 0$ (D) $(1 + x^2)\, dx + (1 + y^2)\, dy = 0$

49. વિકલ સમીકરણ $y\frac{dy}{dx} + x = c$ .... દર્શાવે છે.

(A) અતિવલયોનો સમુદાય (B) પરવલયોનો સમુદાય

(C) ઉપવલયોનો સમુદાય (D) વર્તુળોનો સમુદાય

50. $e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ .... છે.

(A) $e^x \cos y = k$ (B) $e^x \sin y = k$

(C) $e^x = k \cos y$ (D) $e^x = k \sin y$

51. વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y^5 = 0$ નું પરિમાણ .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

52. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$, $y(0) = 0$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $y = e^x (x - 1)$ (B) $y = xe^{-x}$

(C) $y = xe^{-x} + 1$ (D) $y = (x + 1)e^{-x}$

53. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + y \tan x - \sec x = 0$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) $\cos x$ (B) $\sec x$ (C) $e^{\cos x}$ (D) $e^{\sec x}$

54. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $y = \tan^{-1}x$ (B) $y - x = k(1 + xy)$

(C) $x = \tan^{-1}y$ (D) $\tan(xy) = k$

55. વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1+y}{x}$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) $\dfrac{x}{e^x}$ (B) $\dfrac{e^x}{x}$ (C) xe^x (D) e^x

56. $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ એ નીચેનામાંથી કયા વિકલ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે ?

(A) $\dfrac{dy}{dx} + my = 0$ (B) $\dfrac{dy}{dx} - my = 0$

(C) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - m^2y = 0$ (D) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0$

57. વિકલ સમીકરણ $\cos x \sin y \, dx + \sin x \cos y \, dy = 0$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $\dfrac{\sin x}{\sin y} = c$ (B) $\sin x \sin y = c$

(C) $\sin x + \sin y = c$ (D) $\cos x \cos y = c$

58. $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $y = \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{k}{x}$ (B) $y = xe^x + cx$

(C) $y = xe^x + k$ (D) $x = \dfrac{e^y}{y} + \dfrac{k}{y}$

59. વક્રો $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ ના સમુદાયને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ .... છે. a સ્વૈર અચળ છે.

(A) $(x^2 - y^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ (B) $2(x^2 + y^2)\dfrac{dy}{dx} = xy$

(C) $2(x^2 - y^2)\dfrac{dy}{dx} = xy$ (D) $(x^2 + y^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy$

60. વક્રો $y = \mathrm{A}x + \mathrm{A}^3$ ના સમુદાયને સંગત વિકલ સમીકરણની કક્ષા .... થશે.

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) અવ્યાખ્યાયિત

61. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\, e^{x^2-y}$ નો વ્યાપક ઉકેલ .... છે.

(A) $e^{x^2-y} = c$ (B) $e^{-y} + e^{x^2} = c$ (C) $e^y = e^{x^2} + c$ (D) $e^{x^2+y} = c$

62. જો કોઈ વક્રને કોઈ પણ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ એ તે બિંદુના x-યામ તથા y-યામના ગુણોત્તર જેટલો હોય, તો તે વક્ર .... દર્શાવે.

(A) ઉપવલય (B) પરવલય (C) વર્તુળ (D) લંબાતિવલય

63. વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2}{2}} + xy$ નો વ્યાપક ઉકેલ .... છે.

(A) $y = ce^{\frac{-x^2}{2}}$ (B) $y = ce^{\frac{x^2}{2}}$ (C) $y = (x+c)e^{\frac{x^2}{2}}$ (D) $y = (c-x)e^{\frac{x^2}{2}}$

64. સમીકરણ $(2y - 1)\, dx - (2x + 3)dy = 0$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $\frac{2x-1}{2y+3} = k$ (B) $\frac{2y+1}{2x-3} = k$ (C) $\frac{2x+3}{2y-1} = k$ (D) $\frac{2x-1}{2y-1} = k$

65. નીચેનામાંથી કયા વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ $y = a \cos x + b \sin x$ છે ?

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} + (a + b)\, y = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} + (a - b)\, y = 0$

66. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$, $y\,(0) = 0$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $y = e^{-x}\,(x - 1)$ (B) $y = xe^{x}$ (C) $y = xe^{-x} + 1$ (D) $y = xe^{-x}$

67. વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = y^4$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે .... છે.

(A) 1, 4 (B) 3, 4 (C) 2, 4 (D) 3, 2

68. વિકલ સમીકરણ $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \frac{d^2y}{dx^2}$ ની કક્ષા અને પરિમાણ .... છે.

(A) 2, $\frac{3}{2}$ (B) 2, 3 (C) 2, 1 (D) 3, 4

69. વક્રો $y^2 = 4a\,(x + a)$ ના સમુદાયને દર્શાવતું વિકલ સમીકરણ .... છે.

(A) $y^2 = 4\frac{dy}{dx}\left(x + \frac{dy}{dx}\right)$ (B) $2y\frac{dy}{dx} = 4a$

(C) $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ (D) $2x\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y$

70. નીચેનામાંથી કયું સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ છે ?

(A) $y = (Ax + B)e^{x}$ (B) $y = (Ax + B)e^{-x}$

(C) $y = Ae^{x} + Be^{-x}$ (D) $y = A \cos x + B \sin x$

71. સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$ નો વ્યાપક ઉકેલ .... છે.

(A) $y \sec x = \tan x + c$ (B) $y \tan x = \sec x + c$

(C) $\tan x = y \tan x + c$ (D) $x \sec x = \tan y + c$

72. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $x(y + \cos x) = \sin x + c$ (B) $x(y - \cos x) = \sin x + c$

(C) $xy \cos x = \sin x + c$ (D) $x(y + \cos x) = \cos x + c$

73. વિકલ સમીકરણ $(e^x + 1)\, y\, dy = (y + 1)\, e^x dx$ નો વ્યાપક ઉકેલ .... છે.

(A) $(y + 1) = k(e^x + 1)$ (B) $y + 1 = e^x + 1 + k$

(C) $y = \log\{k(y + 1)(e^x + 1)\}$ (D) $y = \log\left\{\frac{e^x+1}{y+1}\right\} + k$

74. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $y = e^{x-y} - x^2 e^{-y} + c$ (B) $e^y - e^x = \frac{x^3}{3} + c$

(C) $e^x + e^y = \frac{x^3}{3} + c$ (D) $e^x - e^y = \frac{x^3}{3} + c$

75. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ નો ઉકેલ .... છે.

(A) $y(1 + x^2) = c + \tan^{-1}x$ (B) $\frac{y}{1+x^2} = c + \tan^{-1}x$

(C) $y \log(1 + x^2) = c + \tan^{-1}x$ (D) $y(1 + x^2) = c + \sin^{-1}x$

76. વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક (i) થી (xi) વાળા પ્રશ્નોમાં ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + e^{\frac{dy}{dx}} = 0$ નું પરિમાણ .... છે.

(ii) વિકલ સમીકરણ $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = x$ નું પરિમાણ .... છે.

(iii) ત્રણ કક્ષા ધરાવતા વિકલ સમીકરણના વ્યાપક ઉકેલમાં રહેલાં સ્વૈર અચળોની સંખ્યા .... છે.

(iv) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\log x} = \frac{1}{x}$ એ .... સ્વરૂપનું વિકલ સમીકરણ છે.

(v) $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ સ્વરૂપના સુરેખ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ .... દ્વારા આપવામાં આવે છે.

(vi) વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ નો ઉકેલ .... છે.

(vii) સમીકરણ $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$ નો ઉકેલ .... છે.

(viii) વિકલ સમીકરણ $ydx + (x + xy)\, dy = 0$ નો ઉકેલ .... છે.

(ix) $\dfrac{dy}{dx} + y = sin\, x$ નો વ્યાપક ઉકેલ .... છે.

(x) વિકલ સમીકરણ $cot\, y\ dx = xdy$ નો ઉકેલ .... છે.

(xi) $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1+y}{x}$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

77. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

(i) $\dfrac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ સ્વરૂપના સુરેખ વિકલ સમીકરણનો સંકલ્યકારક અવયવ $e^{\int P_1 dy}$ દ્વારા શોધવામાં આવે છે.

(ii) $\dfrac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ સ્વરૂપના વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ

$x \cdot$ (સંકલ્યકારક અવયવ) $= \int$(સંકલ્યકારક અવયવ) $\times\ Q_1 dy$ દ્વારા શોધવામાં આવે છે.

(iii) $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ સ્વરૂપના વિકલ સમીકરણના ઉકેલ માટે યોગ્ય આદેશ $y = vx$ છે. $f(x, y)$ એ શૂન્ય ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય છે.

(iv) $\dfrac{dx}{dy} = g(x, y)$ સ્વરૂપના વિકલ સમીકરણના ઉકેલ માટે યોગ્ય આદેશ $x = vy$ છે. $g(x, y)$ એ શૂન્ય ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય છે.

(v) બે કક્ષા ધરાવતા વિકલ સમીકરણના વિશિષ્ટ ઉકેલમાં સ્વૈર અચળોની સંખ્યા 2 છે.

(vi) $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ દ્વારા દર્શાવાતાં વર્તુળોના સમુદાયના વિકલ સમીકરણની કક્ષા 2 છે.

(vii) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ નો ઉકેલ $y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = c$ છે.

(viii) $y = e^x\,(A\, cos\, x + B\, sin\, x)$ દ્વારા દર્શાવાતા વક્રોના સમુદાયનું વિકલ સમીકરણ

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ છે.

(ix) વિકલ સમીકરણ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y}{x}$ નો ઉકેલ $x + y = kx^2$ છે.

(x) સમીકરણ $\dfrac{xdy}{dx} = y + x\, tan\, \dfrac{y}{x}$ નો ઉકેલ $sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = cx$ છે.

(xi) એક જ સમતલમાં આવેલી સમક્ષિતિજ ન હોય તેવી તમામ રેખાઓનું વિકલ સમીકરણ $\dfrac{d^2x}{dy^2} = 0$ છે.

પ્રકરણ **10**

સદિશ બીજગણિત

10.1 વિહંગાવલોકન

10.1.1 જે જથ્થા અથવા રાશિને માન તેમ જ દિશા હોય તે રાશિને સદિશ કહે છે.

10.1.2 સદિશ $\vec{a}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ થી મળે છે અને તેને $\hat{a}$ થી દર્શાવાય છે.

10.1.3 બિંદુ P(x, y, z) નો સ્થાનસદિશ $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ છે અને તેનું માન $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ થશે. O એ ઊગમબિંદુ છે.

10.1.4 સદિશના અદિશ ઘટકો એ સદિશના દિક્‌ગુણોત્તર છે અને તે તેમને અનુરૂપ અક્ષોના પ્રક્ષેપ છે.

10.1.5 કોઈ પણ સદિશના માન r, દિક્‌ગુણોત્તર (a, b, c) અને દિક્‌કોસાઇન (l, m, n) વચ્ચેનો સંબંધ :

$$l = \frac{a}{r},\ m = \frac{b}{r},\ n = \frac{c}{r}$$

10.1.6 ત્રિકોણની બાજુઓને ક્રમમાં દર્શાવતા સદિશોનો સરવાળો $\vec{0}$ છે.

10.1.7 સદિશોના સરવાળા માટે ત્રિકોણનો નિયમ 'ત્રિકોણની બે બાજુઓને ક્રમમાં દર્શાવતા સદિશોનો સરવાળો એ તેમની વિરુદ્ધ દિશામાં લીધેલા ત્રીજી બાજુના સદિશની બરાબર થાય છે.'

10.1.8 અદિશ ગુણાકાર

જો $\vec{a}$ એ સદિશ અને λ અદિશ હોય, તો $\lambda\vec{a}$ એ સદિશ થશે તથા તેનું માન $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ થશે. જો λ ધન હોય, તો $\lambda\vec{a}$ અને $\vec{a}$ ની દિશા સમાન છે તથા λ ઋણ હોય, તો $\lambda\vec{a}$ ની દિશા $\vec{a}$ ની દિશાથી વિરુદ્ધ દિશા છે.

10.1.9 બે બિંદુઓને જોડતો સદિશ

જો $P_1(x_1, y_1, z_1)$ અને $P_2(x_2, y_2, z_2)$ બે બિંદુઓ હોય, તો

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \text{ અને}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

10.1.10 વિભાજન-સૂત્ર

$\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સ્થાનસદિશવાળાં બિંદુઓ અનુક્રમે P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું વિભાજન કરતા બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ

(i) અંતઃવિભાજનનો ગુણોત્તર $m : n$ હોય, તો $\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ અને

(ii) બહિર્વિભાજનનો ગુણોત્તર $m : n$ હોય, તો $\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ થાય.

10.1.11 સદિશ $\vec{a}$ નો $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ અને $\vec{a}$ નો $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ $\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$ છે.

10.1.12 અંતઃગુણન અથવા અદિશ ગુણાકાર

જો સદિશ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો તેમનું અંતઃગુણન અથવા અદિશ ગુણાકાર

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta$ થાય.

10.1.13 બહિર્ગુણન અથવા સદિશ ગુણાકાર

જો સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય તથા $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ને સમાવતા સમતલને લંબ એકમ સદિશ $\hat{n}$ હોય, તો તેમનું બહિર્ગુણન અથવા સદિશ ગુણાકાર $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\theta\ \hat{n}$ થાય. $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\hat{n}$ જમણા હાથની પદ્ધતિ બનાવે છે.

10.1.14 જો $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ અને $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ બે સદિશો હોય અને λ કોઈ પણ અદિશ હોય, તો

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i}+(a_2+b_2)\hat{j}+(a_3+b_3)\hat{k}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i}+(\lambda a_2)\hat{j}+(\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{i} + (a_2c_1 - a_1c_2)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

બે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો θ લેતાં,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

10.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ના સરવાળાની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

ઉકેલ : $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ નો સરવાળો $\vec{c}$ હોય, તો

$$\vec{c} = (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + (-\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} + 5\hat{k}$$

હવે, $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$.

આમ, માંગેલો એકમ સદિશ $\hat{c} = \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}\left(\hat{i} + 5\hat{k}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}\hat{i} + \dfrac{5}{\sqrt{26}}\hat{k}$.

ઉદાહરણ 2 : P અને Q અનુક્રમે (1, 3, 2) અને (–1, 0, 8) બિંદુઓ હોય, તો $\overrightarrow{PQ}$ ની દિશાની વિરુદ્ધ દિશામાં 11 માનવાળો સદિશ શોધો.

ઉકેલ : ઉદ્ભવબિંદુ P(1, 3, 2) અને અંતિમબિંદુ Q(–1, 0, 8) હોય, તેવો

$$\overrightarrow{PQ} = (-1 - 1)\hat{i} + (0 - 3)\hat{j} + (8 - 2)\hat{k} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

આમ, $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

આથી, $\overrightarrow{QP}$ ની દિશાનો એકમ સદિશ

$$\widehat{QP} = \frac{\overrightarrow{QP}}{|\overrightarrow{QP}|} = \frac{2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}}{7}$$

આમ, માંગેલો 11 માનવાળો સદિશ $11\,\widehat{QP} = 11\left(\dfrac{2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}}{7}\right) = \dfrac{22}{7}\hat{i} + \dfrac{33}{7}\hat{j} - \dfrac{66}{7}\hat{k}$.

ઉદાહરણ 3 : બિંદુઓ P અને Q ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\overrightarrow{OP} = 2\vec{a} + \vec{b}$ અને $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} - 2\vec{b}$ છે. બિંદુઓ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું 1:2 ગુણોત્તરમાં (i) અંતઃવિભાજન અને (ii) બહિર્વિભાજન કરતા બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ મેળવો.

ઉકેલ : (i) બિંદુઓ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું 1:2 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ R નો સ્થાનસદિશ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(2\vec{a} + \vec{b}) + 1(\vec{a} - 2\vec{b})}{1+2} = \frac{5\vec{a}}{3}.$$

(ii) બિંદુઓ P અને Q ને જોડતા રેખાખંડનું 1:2 ગુણોત્તરમાં બહિર્વિભાજન કરતા બિંદુ R′ નો સ્થાનસદિશ

$$\overrightarrow{OR'} = \frac{2(2\vec{a} + \vec{b}) - 1(\vec{a} - 2\vec{b})}{2-1} = 3\vec{a} + 4\vec{b}.$$

ઉદાહરણ 4 : જો બિંદુઓ (–1, –1, 2), (2, m, 5) અને (3, 11, 6) સમરેખ હોય, તો m શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, આપેલાં બિંદુઓ A(–1, –1, 2), B(2, m, 5) અને C (3, 11, 6) છે.

$$\overrightarrow{AB} = (2+1)\hat{i} + (m+1)\hat{j} + (5-2)\hat{k} = 3\hat{i} + (m+1)\hat{j} + 3\hat{k}$$

અને $\overrightarrow{AC} = (3+1)\hat{i} + (11+1)\hat{j} + (6-2)\hat{k} = 4\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$.

બિંદુઓ A, B, C સમરેખ હોવાથી, કોઈક $\lambda \in R - \{0\}$ માટે $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ અર્થાત્

$$(3\hat{i} + (m+1)\hat{j} + 3\hat{k}) = \lambda(4\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k})$$

$\Rightarrow$ $3 = 4\lambda$ અને $m + 1 = 12\lambda$

માટે, $m = 8$

અથવા $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & m+1 & 3 \\ 4 & 12 & 4 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow 3(12) = 4(m+1) \Rightarrow m = 8$

ઉદાહરણ 5 : y-અક્ષ અને z -અક્ષ સાથે અનુક્રમે $\frac{\pi}{4}$ અને $\frac{\pi}{2}$ ખૂણા બનાવતો તથા $3\sqrt{2}$ માનવાળો સદિશ $\vec{r}$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $m = cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ અને $n = cos\frac{\pi}{2} = 0$.

હવે, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ પરથી,

$$l^2 + \frac{1}{2} + 0 = 1 \Rightarrow l = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

આથી, માંગેલ $\vec{r} = 3\sqrt{2}\ (l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k})$

$$\vec{r} = 3\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + 0\hat{k}\right)$$

$$\therefore\ \vec{r} = \pm 3\hat{i} + 3\hat{j}$$

ઉદાહરણ 6 : જો $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ અને $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ હોય, તો $\vec{a}$ એ $\lambda\vec{b} + \vec{c}$ને લંબ થાય તેવો λ શોધો.

ઉકેલ : $\lambda\vec{b} + \vec{c} = \lambda(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) + (\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$

$$= (\lambda + 1)\hat{i} + (\lambda + 3)\hat{j} - (2\lambda + 1)\hat{k}$$

હવે, $\vec{a} \perp (\lambda\vec{b} + \vec{c})$ હોવાથી, $\vec{a} \cdot (\lambda\vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\therefore\ (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot [(\lambda + 1)\hat{i} + (\lambda + 3)\hat{j} - (2\lambda + 1)\hat{k}] = 0$

$\therefore\ 2(\lambda + 1) - (\lambda + 3) - (2\lambda + 1) = 0$

$\therefore\ \lambda = -2$

ઉદાહરણ 7 : $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ અને $-\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ના સમતલને લંબ હોય તેવા $10\sqrt{3}$ માનવાળા બધા જ સદિશો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ છે.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (8-3)\hat{i} - (4+1)\hat{j} + (3+2)\hat{k} = 5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2 + (5)^2} = \sqrt{3(5)^2} = 5\sqrt{3}$$

માટે, $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સમતલને લંબ એકમ સદિશ $\dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \dfrac{5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}}{5\sqrt{3}}$ છે.

આમ, $10\sqrt{3}$ માનવાળા $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સમતલને લંબ સદિશો $\pm 10\sqrt{3}\left(\dfrac{5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}}{5\sqrt{3}}\right)$, અર્થાત્

$\pm 10(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 8 : સદિશનો ઉપયોગ કરી $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, x-અક્ષની ધન દિશા સાથે A અને B ખૂણા બનાવતા એકમ સદિશો $\hat{OP}$ અને $\hat{OQ}$ છે. તેથી $\angle QOP = A - B$ થશે. [આકૃતિ 10.1]

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\widehat{OP} = \vec{OM} + \vec{MP} = \cos A\,\hat{i} + \sin A\,\hat{j}$ અને

$$\widehat{OQ} = \vec{ON} + \vec{NQ} = \cos B\,\hat{i} + \sin B\,\hat{j}$$

વ્યાખ્યા પરથી $\widehat{OP} \cdot \widehat{OQ} = |\widehat{OP}|\,|\widehat{OQ}| \cos(A - B)$

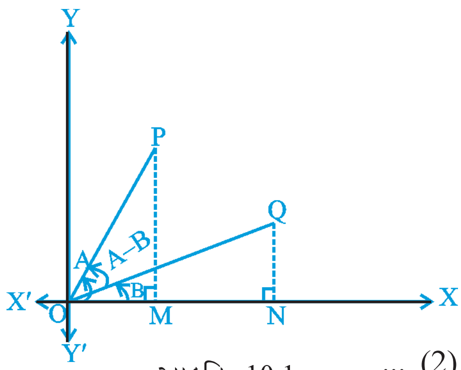
$= \cos(A - B)$ ...(1)

$(|\widehat{OP}| = 1 = |\widehat{OQ}|)$

ઘટકો અનુસાર,

$\widehat{OP} \cdot \widehat{OQ} = (\cos A\,\hat{i} + \sin A\,\hat{j}) \cdot (\cos B\,\hat{i} + \sin B\,\hat{j})$

$= \cos A \cos B + \sin A \sin B$ ... (2)



આકૃતિ 10.1

(1) અને (2) પરથી,

$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

ઉદાહરણ 9 : જો ΔABC માં ખૂણાઓ A, B, C ની સામેની બાજુઓના માન અનુક્રમે a, b, c હોય, તો $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : ધારો કે, ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ BC, CA અને AB ને અનુક્રમે $\vec{a}$, $\vec{b}$ અને $\vec{c}$ વડે રજૂ કરીએ. [આકૃતિ 10.2].

હવે, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, અર્થાત્ $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

$\vec{a}$ થી પૂર્વ બહિર્ગુણન અને $\vec{b}$ થી ઉત્તર બહિર્ગુણન કરતાં,

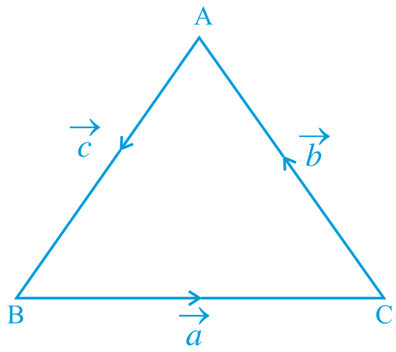
અનુક્રમે $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$

અને $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$ મળશે.

આથી, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c} \times \vec{a}|$

$\therefore \quad |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\pi - C) = |\vec{b}||\vec{c}| \sin(\pi - A) = |\vec{c}||\vec{a}| \sin(\pi - B)$



આકૃતિ 10.2

$\therefore \quad ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$

abc વડે ભાગતાં, $\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$ અર્થાત્ $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 10 થી 21 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 10 : સદિશ $6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ નું માન .... છે.

(A) 5 (B) 7 (C) 12 (D) 1

ઉકેલ : $\sqrt{36 + 4 + 9} = 7.$

સાચો જવાબ (B) છે.

ઉદાહરણ 11 : સદિશો $\vec{a} + \vec{b}$ અને $2\vec{a} - \vec{b}$ ને જોડતા રેખાખંડનું 1 : 2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુનો સ્થાનસદિશ .... છે.

(A) $\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ (B) $\vec{a}$ (C) $\dfrac{5\vec{a}-\vec{b}}{3}$ (D) $\dfrac{4\vec{a}+\vec{b}}{3}$

ઉકેલ : વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં, માંગેલ બિંદુનો સ્થાનસદિશ

$$\frac{2(\vec{a}+\vec{b})+1(2\vec{a}-\vec{b})}{2+1} = \frac{4\vec{a}+\vec{b}}{3}.$$

સાચો જવાબ (D) છે.

ઉદાહરણ 12 : જેનું ઉદ્ભવબિંદુ P(2, –3, 5) અને અંતિમ બિંદુ Q(3, –4, 7) હોય, તે સદિશ .... છે.

(A) $\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ (B) $5\hat{i} - 7\hat{j} + 12\hat{k}$ (C) $-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $\vec{PQ} = (3 - 2)\hat{i} + (-4 + 3)\hat{j} + (7 - 5)\hat{k} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 13 : સદિશો $\hat{i} - \hat{j}$ અને $\hat{j} - \hat{k}$ વચ્ચેનો ખૂણો .... છે.

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{2\pi}{3}$ (C) $\dfrac{-\pi}{3}$ (D) $\dfrac{5\pi}{6}$

ઉકેલ : (1, –1, 0) તથા (0, 1, –1) વચ્ચેના ખૂણા માટે

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં, $\cos\theta = \dfrac{0-1+0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}.$

$\therefore \quad \theta = \dfrac{2\pi}{3}.$ આથી, સાચો જવાબ (B) છે.

ઉદાહરણ 14 : સદિશો $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $3\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ એકબીજાને લંબ હોય, તો λ = ...

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

ઉકેલ : $(2, -1, 2)\cdot(3, \lambda, 1) = 0$

$2\cdot 3 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 8.$

સાચો જવાબ (D) છે.

ઉદાહરણ 15 : જેની પાસપાસેની બાજુઓ $\hat{i} + \hat{j}$ અને $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ હોય, તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : જેની પાસપાસેની બાજુઓ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય, તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ છે.

$\vec{a} \times \vec{b} = (\hat{i} + \hat{j}) \times (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$. આથી, $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3}$

સાચો જવાબ (B) છે.

$$(\hat{i} + \hat{j}) \times (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

ઉદાહરણ 16 : જો $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 3$ અને $|\vec{a} \times \vec{b}| = 12$ હોય, તો $\vec{a}\cdot\vec{b}$ .... થાય.

(A) $6\sqrt{3}$ (B) $8\sqrt{3}$ (C) $12\sqrt{3}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\sin\theta|$ સૂત્ર પરથી $\sin\theta = \frac{1}{2}$ એટલે કે $\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \theta = \pm\frac{\pi}{6}$ મળે છે.

આથી, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = 8 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$. અથવા

$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a}\cdot\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ પરથી $144 + |\vec{a}\cdot\vec{b}|^2 = 576$ આથી, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12\sqrt{3}$

સાચો જવાબ (C) છે.

ઉદાહરણ 17 : ΔABC ની બાજુઓ AB અને AC દર્શાવતા બે સદિશો અનુક્રમે $\hat{j} + \hat{k}$ અને $3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ છે. A માંથી દોરેલી મધ્યગાની લંબાઈ .... છે.

(A) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{48}}{2}$ (C) $\sqrt{18}$ (D) આમાંથી એક પણ નહિ.

ઉકેલ : $\vec{AD} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$

મધ્યગા $\vec{AD}$ ની લંબાઈ $|\vec{AD}| = \frac{1}{2}\left|3\hat{i} + 5\hat{k}\right| = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 18 : સદિશ $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ નો $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ .... છે.

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{6}$

ઉકેલ : $\vec{a}$ નો $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})\cdot(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2}{3}.$$

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 19 : જો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ એકમ સદિશ હોય અને $\sqrt{3}\,\vec{a} - \vec{b}$ એકમ સદિશ થાય તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો .... હોય.

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $|\sqrt{3}\,\vec{a} - \vec{b}\,|^2 = 3|\,\vec{a}\,|^2 + |\,\vec{b}\,|^2 - 2\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$

$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. આથી $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6}$ (કારણ કે $|\,\vec{a}\,| = 1 = |\,\vec{b}\,|$)

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 20 : સદિશો $\hat{i} - \hat{j}$ અને $\hat{i} + \hat{j}$ સાથે જમણા હાથની પદ્ધતિ બનાવતો લંબ એકમ સદિશ .... છે.

(A) $\hat{k}$ (B) $-\hat{k}$ (C) $\frac{\hat{i} - \hat{j}}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}$

ઉકેલ : માગેલો એકમ સદિશ $\frac{(\hat{i} - \hat{j})\times(\hat{i} + \hat{j})}{|(\hat{i} - \hat{j})\times(\hat{i} + \hat{j})|} = \frac{2\hat{k}}{2} = \hat{k}$.

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 21 : જો $|\,\vec{a}\,| = 3$ અને $-1 \le k \le 2$ હોય, તો $|\,k\,\vec{a}\,|$ .... અંતરાલમાં આવેલો છે.

(A) [0, 6] (B) [–3, 6] (C) [3, 6] (D) [1, 2]

ઉકેલ : $|\,k\,\vec{a}\,|$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય એ સંખ્યાની દૃષ્ટિએ k ના ન્યૂનતમ મૂલ્યથી મળે, અર્થાત્ $k = 0$ પરથી, $|\,k\,\vec{a}\,| = |\,k\,|\,|\,\vec{a}\,| = 0 \times 3 = 0$ અને સંખ્યાની દૃષ્ટિએ મહત્તમ મૂલ્ય $k = 2$ થી મળે તે $|\,k\,\vec{a}\,| = 6$ થશે.

સાચો જવાબ (A) છે.

સ્વાધ્યાય 10.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{j} + \hat{k}$ ના સરવાળાની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

2. જો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ હોય, તો (i) $6\,\vec{b}$ અને (ii) $2\,\vec{a} - \vec{b}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

3. બિંદુઓ P અને Q ના યામ અનુક્રમે (5, 0, 8) અને (3, 3, 2) હોય, તો $\overrightarrow{PQ}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ શોધો.

4. જો બિંદુઓ A અને B ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય, તો BC = 1.5 BA થાય તે રીતે લંબાવેલ BA પરના બિંદુ C નો સ્થાનસદિશ શોધો.

5. જો બિંદુઓ (k, –10, 3), (1, –1, 3) અને (3, 5, 3) સમરેખ હોય, તો સદિશની મદદથી k શોધો.

6. સદિશ $\vec{r}$ એ ત્રણે ય અક્ષો સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે. જો $\vec{r}$ નું માન $2\sqrt{3}$ એકમ હોય, તો $\vec{r}$ શોધો.

7. સદિશ $\vec{r}$ x-અક્ષ સાથે લઘુકોણ બનાવે છે. $\vec{r}$ નું માન 14 અને દિક્‌ગુણોત્તરો 2, 3, –6 છે. $\vec{r}$ ની દિક્‌કોસાઇન અને ઘટકો શોધો.

8. સદિશો $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ બંનેને લંબ 6 માનવાળો સદિશ શોધો.

9. સદિશો $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અને $3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

10. જો $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$. પરિણામનું ભૌમિતિક દૃષ્ટિએ અર્થઘટન કરો.

11. સદિશો $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ વચ્ચેના ખૂણા માટે *sin* નું મૂલ્ય શોધો.

12. જો બિંદુઓ A, B, C, D ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $2\hat{i} - 3\hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ હોય, તો $\overrightarrow{AB}$ નો $\overrightarrow{CD}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

13. જો ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ A(1, 2, 3), B(2, – 1, 4) અને C(4, 5, – 1) હોય, તો સદિશની મદદથી ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

14. સદિશની મદદથી સાબિત કરો કે, એક જ આધાર પરના અને સમાન સમાંતર બાજુઓ વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ સમાન છે.

વિસ્તૃત પ્રશ્નો (L.A.)

15. જો ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ A, B, C ની સામેની બાજુઓના માન a, b, c હોય, તો સાબિત કરો કે $cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

16. જો ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ વડે દર્શાવાય, તો દર્શાવો કે તે ત્રિકોણનું સદિશ ક્ષેત્રફળ $\frac{1}{2}\left[\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}\right]$ થાય. તે પરથી ત્રણ બિંદુઓ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ સમરેખ હોવા માટેની શરત મેળવો. ત્રિકોણના સમતલને લંબ એકમ સદિશ પણ શોધો.

17. દર્શાવો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ $\dfrac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}$ છે. $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અને $\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ જેના વિકર્ણો હોય તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.

18. જો $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{j} - \hat{k}$ હોય, તો $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ અને $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$ થાય તેવો સદિશ $\vec{c}$ શોધો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 19 થી 33 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

19. જેનું માન 9 હોય, તેવો સદિશ $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ની દિશાવાળો સદિશ .... છે.

(A) $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ (B) $\dfrac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}$ (C) $3(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ (D) $9(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$

20. બિંદુઓ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ અને $\vec{a} + \vec{b}$ ને જોડતા રેખાખંડનું 3 : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુનો સ્થાનસદિશ .... છે.

(A) $\frac{3\vec{a} - 2\vec{b}}{2}$ (B) $\frac{7\vec{a} - 8\vec{b}}{4}$ (C) $\frac{3\vec{a}}{4}$ (D) $\frac{5\vec{a}}{4}$

21. જેના ઉદ્‌ભવબિંદુ અને અંતિમ બિંદુ અનુક્રમે (2, 5, 0) અને (–3, 7, 4) હોય તેવો સદિશ .... છે.

(A) $-\hat{i} + 12\hat{j} + 4\hat{k}$ (B) $5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ (C) $-5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ (D) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

22. સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના માન અનુક્રમે $\sqrt{3}$ અને 4 છે. જો $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3}$ હોય, તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો .... છે.

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{5\pi}{2}$

23. જો $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો λ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}$

24. સદિશો $3\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$ અને $2\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ એકબીજાને સમાંતર હોય, તો λ = ...

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{2}{5}$

25. જો ઊગમબિંદુમાંથી બિંદુઓ A અને B સુધીના સદિશો અનુક્રમે $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ હોય, તો ત્રિકોણ OAB નું ક્ષેત્રફળ = ...

(A) 340 (B) $\sqrt{25}$ (C) $\sqrt{229}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{229}$

26. સદિશ $\vec{a}$ માટે, $|\vec{a} \times \hat{i}|^2 + |\vec{a} \times \hat{j}|^2 + |\vec{a} \times \hat{k}|^2$ નું મૂલ્ય = ...

(A) $\vec{a}^{\,2}$ (B) $3\vec{a}^{\,2}$ (C) $4\vec{a}^{\,2}$ (D) $2\vec{a}^{\,2}$

27. જો $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ અને $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ હોય, તો $|\vec{a} \times \vec{b}|$ = ...

(A) 5 (B) 10 (C) 14 (D) 16

28. જો .... તો સદિશો $\lambda\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $\hat{i} + \lambda\hat{j} - \hat{k}$ અને $2\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ સમતલીય છે.

(A) $\lambda = -2$ (B) $\lambda = 0$ (C) $\lambda = 1$ (D) $\lambda = -1$

29. જો $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ થાય તેવા $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ એકમ સદિશ હોય, તો $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 1 (B) 3

(C) $-\frac{3}{2}$ (D) આપેલ પૈકીમાંથી એક પણ નહિ.

30. $\vec{a}$ નો $\vec{b}$ પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ = ...

(A) $\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$ (B) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$ (C) $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$ (D) $\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\hat{b}$

31. જો $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ અને $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 5$ થાય તેવા સદિશો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ હોય, તો $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ નું મૂલ્ય = ...

(A) 0 (B) 1 (C) –19 (D) 38

32. જો $|\vec{a}| = 4$ અને $-3 \le \lambda \le 2$ હોય, તો $|\lambda \vec{a}|$ નો વિસ્તાર .... છે.

(A) [0, 8] (B) [–12, 8] (C) [0, 12] (D) [8, 12]

33. સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = \hat{j} + \hat{k}$ બંનેને લંબએકમ .... સદિશ મળે.

(A) એક (B) બે (C) ત્રણ (D) અનંત

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 34 થી 40 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

34. જો ...., તો સદિશ $\vec{a} + \vec{b}$ અસમરેખ સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગે છે.

35. કોઈક શૂન્યેતર સદિશ $\vec{r}$ માટે જો $\vec{r} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{r} \cdot \vec{b} = 0$ અને $\vec{r} \cdot \vec{c} = 0$ હોય, તો $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ નું મૂલ્ય = ...

36. જો સદિશો $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ અને $\vec{b} = -\hat{i} - 2\hat{k}$ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓ હોય, તો તેના વિકર્ણો વચ્ચેનો લઘુકોણ = ...

37. $|k\vec{a}| < |\vec{a}|$ અને $k\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a}$ એ $\vec{a}$ ને સમાંતર છે. આ વિધાન સત્ય હોય, તો k નાં મૂલ્યો .... છે.

38. અભિવ્યક્તિ $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ નું મૂલ્ય .... છે.

39. જો $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = 144$ અને $|\vec{a}| = 4$, તો $|\vec{b}|$ = ...

40. જો $\vec{a}$ એ કોઈ પણ શૂન્યેતર સદિશ હોય, તો $(\vec{a} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{a} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{a} \cdot \hat{k})\hat{k}$ = ...

નીચેના ક્રમાંક 41 થી 45 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

41. જો $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, તો એ જરૂરી છે કે $\vec{a} = \pm\vec{b}$.

42. બિંદુ P નો સ્થાનસદિશ એટલે કે એવો સદિશ કે જેનું ઉદ્‌ભવબિંદુ ઊગમબિંદુ છે.

43. જો $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ હોય, તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ લંબસદિશો છે.

44. શૂન્યેતર સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ માટે સૂત્ર $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \times \vec{b}$ પ્રમાણભૂત છે.

45. જો સમભુજ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ હોય, તો $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

પ્રકરણ **11**

ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ

11.1 વિહંગાવલોકન

11.1.1 રેખાએ યામાક્ષોની ધન દિશામાં યામાક્ષો સાથે બનાવેલા ખૂણાઓની કોસાઇનને રેખાની દિક્કોસાઇન કહે છે.

11.1.2 જો l, m, n રેખાની દિક્કોસાઇન હોય, તો $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. $-l$, $-m$, $-n$ પણ રેખાની દિક્કોસાઇન છે.

11.1.3 બે બિંદુઓ P (x_1, y_1, z_1) અને Q (x_2, y_2, z_2) માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઇન

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}, \text{ જ્યાં } PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

11.1.4 રેખાની દિક્કોસાઇનના સમપ્રમાણની સંખ્યાઓને રેખાના દિક્ગુણોત્તર કહે છે.

11.1.5 જો રેખાની દિક્કોસાઇન l, m, n હોય અને દિક્ગુણોત્તર a, b, c હોય, તો

$$l = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad m = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad n = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

11.1.6 અવકાશની પરસ્પર સમાંતર ન હોય અને છેદક ન હોય તેવી રેખાઓને વિષમતલીય રેખાઓ કહે છે. તે જુદા-જુદા સમતલમાં આવેલી હોય છે. તેમને સમાવતું સમતલ સંભવી ના શકે.

11.1.7 કોઈ પણ બિંદુ (સામાન્ય રીતે ઊગમબિંદુ)માંથી દોરેલી અને આપેલી વિષમતલીય રેખાઓને સમાંતર પરસ્પર છેદતી બે રેખા વચ્ચેના ખૂણાને આપેલી વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો કહે છે.

11.1.8 જો l_1, m_1, n_1 અને l_2, m_2, n_2 બે રેખાઓની દિક્કોસાઇન હોય અને આ બે રેખા વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$

11.1.9 જો a_1, b_1, c_1 અને a_2, b_2, c_2 બે રેખાઓના દિક્ગુણોત્તર હોય અને આ બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

11.1.10 $\vec{a}$ સ્થાનસદિશવાળા બિંદુમાંથી પસાર થતી અને આપેલ સદિશ $\vec{b}$ ને સમાંતર રેખાનું સદિશ સમીકરણ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ છે, $\lambda \in R$.

11.1.11 બિંદુ (x_1, y_1, z_1) માંથી પસાર થતી અને l, m, n દિક્કોસાઇન (અથવા a, b અને c દિક્ગુણોત્તર) વાળી રેખાનું સમીકરણ

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \quad \text{અથવા} \quad \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}.$$

11.1.12 $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સ્થાનસદિશવાળાં બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}), \quad \lambda \in R.$$

11.1.13 બે બિંદુઓ (x_1, y_1, z_1) અને (x_2, y_2, z_2) માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

11.1.14 જો બે રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \lambda\vec{b_2}$ વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય, તો $cos\theta = \frac{|\vec{b_1} \cdot \vec{b_2}|}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}$

અથવા $\theta = cos^{-1}\frac{|\vec{b_1} \cdot \vec{b_2}|}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}$ વડે મળે છે.

11.1.15 જો $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ અને $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ બે રેખાનાં સમીકરણ હોય, તો તેમના વચ્ચેનો લઘુકોણ θ એ $cos\,\theta = |l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|$ થી મળે છે. l_1, m_1, n_1 અને l_2, m_2, n_2 દિક્કોસાઇન છે.

11.1.16 બે વિષમતલીય રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર એ આ બંને રેખાઓ પરના લંબરેખાખંડની લંબાઈ છે.

11.1.17 બે વિષમતલીય રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \lambda\vec{b_2}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$\left|\frac{(\vec{b_1} \times \vec{b_2}) \cdot (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}\right|.$$

11.1.18 બે રેખાઓ $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ અને $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2 + (c_1a_2-c_2a_1)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2}}$$

11.1.19 સમાંતર રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a_1} + \mu\vec{b}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \lambda\vec{b}$ વચ્ચેનું અંતર

$$\left|\frac{\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b}|}\right|.$$

11.1.20 જો સમતલનું ઊગમબિંદુથી અંતર p હોય અને સમતલ પરનો લંબ એકમ સદિશ (અભિલંબ સદિશ) $\hat{n}$ હોય, તો સમતલનું સદિશ સમીકરણ $\vec{r} \cdot \hat{n} = p$ થાય.

11.1.21 ઊગમબિંદુથી p અંતરે આવેલ અને અભિલંબની દિક્કોસાઈન l, m, n વાળા સમતલનું સમીકરણ $lx + my + nz = p$ છે.

11.1.22 $\vec{a}$ સ્થાનસદિશવાળા બિંદુમાંથી પસાર થતા અને સદિશ $\vec{n}$ ને લંબ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ અથવા $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$, જ્યાં $d = \vec{a} \cdot \vec{n}$

11.1.23 જેના દિક્ગુણોત્તર a, b, c હોય તેવી આપેલી રેખાને લંબ અને આપેલા બિંદુ (x_1, y_1, z_1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$.

11.1.24 ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) અને (x_3, y_3, z_3) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

11.1.25 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ સ્થાનસદિશ ધરાવતાં ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \left[(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\right] = 0.$$

11.1.26 યામાક્ષોને $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ અને $(0, 0, c)$ બિંદુએ છેદતા સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ છે. (અથવા અક્ષો પરના અંતઃખંડ a, b, c વાળા સમતલનું સમીકરણ)

11.1.27 એકબીજાને છેદતાં સમતલો $\vec{r} \cdot \vec{n_1} = d_1$ અને $\vec{r} \cdot \vec{n_2} = d_2$ ના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું સદિશ સમીકરણ, શૂન્યેતર અચળ λ માટે $(\vec{r} \cdot \vec{n_1} - d_1) + \lambda(\vec{r} \cdot \vec{n_2} - d_2) = 0$ છે.

11.1.28 છેદતાં સમતલો $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ અને $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ ના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું કાર્તેઝિય સમીકરણ $(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$ છે.

11.1.29 જો રેખાઓ $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b_1}$ અને $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b_2}$ સમતલીય હોય, તો $(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2}) = 0$.

11.1.30 જો રેખાઓ $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ અને $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$ સમતલીય હોય, તો

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

11.1.31 બે સમતલો $\vec{r} \cdot \vec{n_1} = d_1$ અને $\vec{r} \cdot \vec{n_2} = d_2$ વચ્ચેના લઘુકોણ θ નું સદિશ સ્વરૂપ

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\left|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|\left|\vec{n_2}\right|}.$$

11.1.32 જો રેખા $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ અને સમતલ $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$ વચ્ચેનો લઘુકોણ θ હોય, તો

$$sin\,\theta = \frac{|\vec{b} \cdot \vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}.$$

11.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : જો રેખાના દિક્ગુણોત્તર 1, 1, 2 હોય, તો રેખાની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : દિક્કોસાઇન $l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ થાય.

અહીં, a, b, c અનુક્રમે 1, 1, 2 છે.

આથી, $l = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$, $m = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$, $n = \frac{2}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$

અર્થાત્ $l = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $m = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $n = \frac{2}{\sqrt{6}}$ એટલે કે, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ રેખાની દિક્કોસાઇન છે.

ઉદાહરણ 2 : બિંદુઓ P(2, 3, 5) અને Q(–1, 2, 4) માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : બિંદુઓ $P(x_1, y_1, z_1)$ અને $Q(x_2, y_2, z_2)$ માંથી પસાર થતી રેખાની દિક્કોસાઇન

$$\frac{x_2-x_1}{PQ}, \frac{y_2-y_1}{PQ}, \frac{z_2-z_1}{PQ} \text{ છે.}$$

અહીં, $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$$= \sqrt{(-1-2)^2+(2-3)^2+(4-5)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

તેથી રેખાની દિક્કોસાઇન $\pm\left(\frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right)$ અથવા $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

ઉદાહરણ 3 : જો રેખા x, y, z-અક્ષોની ધન દિશા સાથે અનુક્રમે 30°, 60°, 90° માપના ખૂણા બનાવે, તો તેની દિક્કોસાઇન શોધો.

ઉકેલ : અક્ષોની ધન દિશા સાથે α, β, γ ખૂણા બનાવતી રેખાની દિક્કોસાઇન $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$, $cos\,\gamma$ છે.

આથી, આપેલી રેખાની દિક્કોસાઇન $cos\,30°$, $cos\,60°$, $cos\,90°$ અર્થાત્ $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

નોંધ : ખૂણાના માપ 30°, 60°, 45° હોઈ શકે ?

ઉદાહરણ 4 : બિંદુઓ Q(2, 2, 1) અને R(5, 1, –2) ને જોડતી રેખા પરના બિંદુનો x-યામ 4 હોય, તો તેનો z-યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ P, QR નું $\lambda : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. તેથી P ના યામ

$$\left(\frac{5\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{-2\lambda+1}{\lambda+1}\right)$$

પરંતુ P નો x-યામ 4 છે.

આથી, $\dfrac{5\lambda+2}{\lambda+1} = 4 \Rightarrow \lambda = 2$

તેથી, P નો z-યામ $\dfrac{-2\lambda+1}{\lambda+1} = -1$.

ઉદાહરણ 5 : $(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$ સ્થાનસદિશવાળા બિંદુનું સમતલ $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) = 9$ થી અંતર શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{n} = \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $d = 9$

તેથી, માંગેલું અંતર $\dfrac{\left|(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}).(\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}) - 9\right|}{\sqrt{1+4+16}}$

$$= \frac{|2-2-4-9|}{\sqrt{21}} = \frac{13}{\sqrt{21}}.$$

આ સૂત્ર એમની યાદીમાં નથી, પરંતુ પાઠ્યપુસ્તકમાં આપેલું છે.

ઉદાહરણ 6 : બિંદુ (–2, 4, –5) નું રેખા $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-4}{5} = \dfrac{z+8}{6}$ થી અંતર શોધો.

ઉકેલ : અહીં, P(–2, 4, –5) આપેલું બિંદુ છે. રેખા પરનું કોઈ પણ બિંદુ Q $(3\lambda - 3, 5\lambda + 4, 6\lambda - 8)$ થશે.

$\vec{PQ} = (3\lambda - 1)\hat{i} + 5\lambda\hat{j} + (6\lambda - 3)\hat{k}$.

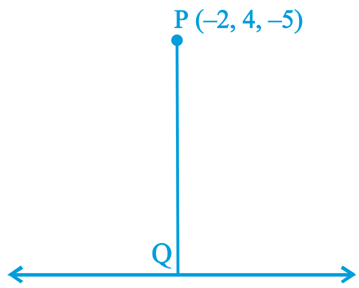
$\vec{PQ} \perp (3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k})$, હોવાથી,

$3(3\lambda - 1) + 5(5\lambda) + 6(6\lambda - 3) = 0$

$9\lambda + 25\lambda + 36\lambda = 21$, અર્થાત્ $\lambda = \dfrac{3}{10}$.

આમ, $\vec{PQ} = -\dfrac{1}{10}\hat{i} + \dfrac{15}{10}\hat{j} - \dfrac{12}{10}\hat{k}$

તેથી, $\left|\vec{PQ}\right| = \dfrac{1}{10}\sqrt{1+225+144} = \sqrt{\dfrac{37}{10}}$.



આકૃતિ 11.1

ઉદાહરણ 7 : (3, – 4, – 5) અને (2, –3, 1) માંથી પસાર થતી રેખા, ત્રણ બિંદુઓ (2, 2, 1), (3, 0, 1) અને (4, –1, 0) માંથી પસાર થતા સમતલને જે બિંદુએ છેદે તે બિંદુના યામ શોધો.

ઉકેલ : (2, 2, 1), (3, 0, 1) અને (4, –1, 0) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ

$$\left[(\vec{r} - (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})\right] \cdot \left[(\hat{i} - 2\hat{j}) \times (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})\right] = 0$$

$$\left[\vec{r} - (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})\right] \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 0$$

એટલે કે, $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 7$ અથવા $2x + y + z - 7 = 0$ ... (1)

(3, –4, –5) અને (2, –3, 1) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{6} \quad ...(2)$$

રેખા (2) પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(-\lambda + 3, \lambda - 4, 6\lambda - 5)$ થશે. આ બિંદુ સમતલ (1) પર આવેલું છે.
આથી, $2(-\lambda + 3) + (\lambda - 4) + (6\lambda - 5) - 7 = 0$, અર્થાત્ $\lambda = 2$.

તેથી માંગેલું બિંદુ (1, –2, 7) છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 8 : બિંદુ $(-1, -5, -10)$ નું રેખા $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ અને સમતલ $\vec{r}\cdot(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ ના છેદબિંદુથી અંતર શોધો.

ઉકેલ : $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ અને $\vec{r}\cdot(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ આપ્યાં છે.

આ બે સમીકરણ ઉકેલતાં, $[(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})]\cdot(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$

$\therefore$ $(3\lambda + 2) - (4\lambda - 1) + 2\lambda + 2 = 5$ પરથી $\lambda = 0$ મળે.

આથી, રેખા અને સમતલનું છેદબિંદુ $(2, -1, 2)$ અને બીજું આપેલું બિંદુ $(-1, -5, -10)$ છે.

આથી, આ બે બિંદુ વચ્ચેનું અંતર $= \sqrt{[2-(-1)]^2 + [-1+5]^2 + [2-(-10)]^2} = 13$

ઉદાહરણ 9 : એક સમતલ યામાક્ષોને A, B, C માં છેદે છે. ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર (α, β, γ) છે. સાબિત કરો કે સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 3$ છે.

ઉકેલ : ધારો કે, સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ છે.

તેથી, A, B, C ના યામ અનુક્રમે $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ અને $(0, 0, c)$ થશે. ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર

$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$ અર્થાત્ $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$ થશે.

પરંતુ ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રના યામ (α, β, γ) છે.

આથી, $\alpha = \frac{a}{3}$, $\beta = \frac{b}{3}$, $\gamma = \frac{c}{3}$ એટલે કે, $a = 3\alpha$, $b = 3\beta$, $c = 3\gamma$.

આમ, સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 3$ છે.

ઉદાહરણ 10 : જે રેખાઓની દિક્‌કોસાઈન $3l + m + 5n = 0$ અને $6mn - 2nl + 5lm = 0$ સમીકરણથી મળે, તે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

ઉકેલ : આપેલાં સમીકરણોમાંથી m નો લોપ કરતાં, $6n(-3l - 5n) - 2nl + 5l(-3l - 5n) = 0$

$\therefore$ $2n^2 + 3ln + l^2 = 0$

$\therefore$ $(n + l)(2n + l) = 0$

$\therefore$ $l = -n$ અથવા $l = -2n$

જો $l = -n$, તો $m = -2n$

અને જો $l = -2n$, તો $m = n$.

આમ, બે રેખાના દિક્‌ગુણોત્તરો $-n, -2n, n$ અને $-2n, n, n$ છે એટલે કે,

$1, 2, -1$ અને $-2, 1, 1$ છે.

આથી, આ રેખાઓને સમાંતર સદિશો અનુક્રમે

$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ છે.

જો આ બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$= \frac{\left(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}\right)\cdot\left(-2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} = -\frac{1}{6}$$

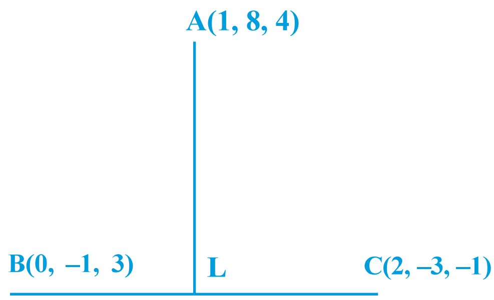
આથી, $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{6}\right)$.

ઉદાહરણ 11 : બિંદુ A(1, 8, 4) માંથી બિંદુઓ B(0, –1, 3) અને C (2, –3, –1) ને જોડતી રેખા પરનો લંબપાદ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે A(1, 8, 4) માંથી બિંદુઓ B(0, –1, 3) અને C (2, –3, –1) માંથી પસાર થતી રેખા પરનો લંબપાદ આકૃતિ 11.2 માં બતાવ્યા પ્રમાણે L છે.

સૂત્ર $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ નો ઉપયોગ કરતાં રેખા BC નું સમીકરણ

$$\vec{r} = \left(-\hat{j}+3\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k}\right) \text{ છે.}$$



આકૃતિ 11.2

$$\therefore \quad x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} = 2\lambda\hat{i} - (2\lambda+1)\hat{j} + (3-4\lambda)\hat{k}$$

બંને બાજુઓ સરખાવતાં,

$$x = 2\lambda,\ y = -(2\lambda + 1),\ z = 3 - 4\lambda \qquad ...(1)$$

આમ, L ના યામ $(2\lambda, -(2\lambda + 1), (3 - 4\lambda))$ છે.

તેથી રેખા AL ના દિક્ગુણોત્તર

$$(1 - 2\lambda),\ 8 + (2\lambda + 1),\ 4 - (3 - 4\lambda)$$

અર્થાત્ $1 - 2\lambda,\ 2\lambda + 9,\ 1 + 4\lambda$ છે.

AL એ BC ને લંબ હોવાથી,

$$(1 - 2\lambda)(2) + (2\lambda + 9)(-2) + (4\lambda + 1)(-4) = 0$$

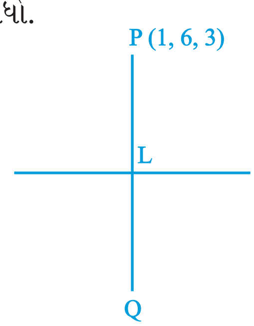
$$\Rightarrow \lambda = \frac{-5}{6}$$

λ નું મૂલ્ય (1) માં મૂકતાં માંગેલું બિંદુ $\left(\frac{-5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$ મળશે.

ઉદાહરણ 12 : બિંદુ (1, 6, 3) નું રેખા $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ માં પ્રતિબિંબ શોધો.

ઉકેલ : આપેલું બિંદુ P(1, 6, 3) છે અને

P માંથી આપેલી રેખા પરનો લંબપાદ L છે.



આકૃતિ 11.3

આપેલી રેખા પરના વ્યાપક બિંદુના યામ

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3} = \lambda,$$

અર્થાત્ $x = \lambda,\ y = 2\lambda + 1,\ z = 3\lambda + 2$.

જો L ના યામ કોઈક $\lambda \in R$ માટે $(\lambda, 2\lambda + 1, 3\lambda + 2)$ હોય, તો

PL ના દિક્ગુણોત્તર $\lambda - 1, 2\lambda - 5, 3\lambda - 1$ થશે.

પરંતુ PL ને લંબ આપેલી રેખાના દિક્ગુણોત્તર 1, 2, 3 છે.

આથી, $(\lambda - 1) 1 + (2\lambda - 5) 2 + (3\lambda - 1) 3 = 0$ એટલે કે, $\lambda = 1$. તેથી L ના યામ (1, 3, 5) થશે.

ધારો કે $Q(x_1, y_1, z_1)$ એ P(1, 6, 3) નું આપેલ રેખામાં પ્રતિબિંબ છે. તેથી, L એ PQ નું મધ્યબિંદુ થશે.

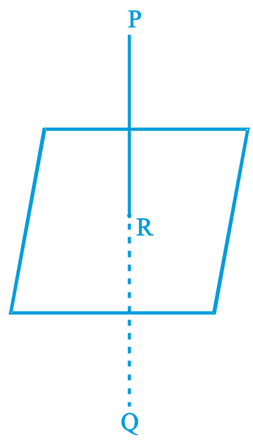
આથી, $\frac{x_1+1}{2} = 1, \frac{y_1+6}{2} = 3, \frac{z_1+3}{2} = 5$

$\Rightarrow x_1 = 1, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 7$

તેથી (1, 6, 3) નું આપેલી રેખામાં પ્રતિબિંબ (1, 0, 7) થશે.

ઉદાહરણ 13 : $\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ સ્થાનસદિશવાળા બિંદુનું સમતલ $\hat{r}\cdot\left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) + 3 = 0$ માં પ્રતિબિંબ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલું બિંદુ $P\left(\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}\right)$ છે અને આકૃતિ 11.4 માં બતાવ્યા પ્રમાણે P નું સમતલ $\hat{r}\cdot\left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) + 3 = 0$ માં પ્રતિબિંબ Q છે.



આકૃતિ 11.4

PQ એ બિંદુ P માંથી પસાર થાય છે અને આપેલા સમતલને લંબ છે, તેથી રેખા PQ નું સમીકરણ

$$\vec{r} = \left(\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}\right) + \lambda\left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)$$

Q રેખા PQ પર આવેલું હોવાથી Q ને

કોઈક $\lambda \in R$ માટે $\left(\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$, એટલે કે

$(1+2\lambda)\hat{i}+(3-\lambda)\hat{j}+(4+\lambda)\hat{k}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય.

PQ નું મધ્યબિંદુ R હોવાથી, R નો સ્થાનસદિશ

$$\frac{\left[(1 + 2\lambda)\hat{i} + (3 - \lambda)\hat{j} + (4 + \lambda)\hat{k}\right] + \left[\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}\right]}{2}$$

એટલે કે, $(\lambda + 1)\hat{i} + \left(3 - \frac{\lambda}{2}\right)\hat{j} + \left(4 + \frac{\lambda}{2}\right)\hat{k}$

ફરીથી, R એ સમતલ $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) + 3 = 0$, પર આવેલું હોવાથી,

$$\left\{(\lambda+1)\hat{i} + \left(3 - \frac{\lambda}{2}\right)\hat{j} + \left(4 + \frac{\lambda}{2}\right)\hat{k}\right\}\cdot(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + 3 = 0$$

$\therefore \quad 2\lambda + 2 - 3 + \frac{\lambda}{2} + 4 + \frac{\lambda}{2} + 3 = 0$

$\therefore \quad 3\lambda + 6 = 0$

$\therefore \quad \lambda = -2$

આથી, Q નો સ્થાનસદિશ $\left(\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}\right) - 2\left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)$, અર્થાત્ $-3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$ થશે.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 14 થી 19 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 14 : બિંદુ (2, 5, 7) માંથી x-અક્ષ પર દોરેલા લંબપાદના યામ .... છે.

(A) (2, 0, 0) (B) (0, 5, 0) (C) (0, 0, 7) (D) (0, 5, 7)

ઉકેલ : સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 15 : બિંદુઓ (3, 2, –1) અને (6, 2, –2) ને જોડતા રેખાખંડ પરના બિંદુ P નો x-યામ 5 હોય, તો y-યામ .... છે.

(A) 2 (B) 1 (C) –1 (D) –2

ઉકેલ : ધારો કે, બિંદુ P રેખાખંડનું $\lambda : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. P નો x-યામ $x = \frac{6\lambda + 3}{\lambda + 1}$, એટલે કે $\frac{6\lambda + 3}{\lambda + 1} = 5$ થશે. આથી, $\lambda = 2$. આમ, P નો y-યામ $\frac{2\lambda + 2}{\lambda + 1} = 2$.

સાચો જવાબ (A) છે.

ઉદાહરણ 16 : જો રેખા x, y, z અક્ષોની ધન દિશામાં અનુક્રમે α, β, γ ખૂણા બનાવે, તો રેખાની દિક્કોસાઇન .... છે.

(A) $sin\,\alpha, sin\,\beta, sin\,\gamma$ (B) $cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma$

(C) $tan\,\alpha, tan\,\beta, tan\,\gamma$ (D) $cos^2\,\alpha, cos^2\,\beta, cos^2\,\gamma$

ઉકેલ : સાચો જવાબ (B) છે.

ઉદાહરણ 17 : x-અક્ષથી બિંદુ P(a, b, c) નું અંતર .... છે.

(A) $\sqrt{a^2+c^2}$ (B) $\sqrt{a^2+b^2}$ (C) $\sqrt{b^2+c^2}$ (D) $b^2 + c^2$

ઉકેલ : બિંદુ P(a, b, c) થી Q(a, o, o) નું અંતર એ માગેલું અંતર થશે. તે $\sqrt{b^2+c^2}$ છે.

સાચો જવાબ (C) છે.

ઉદાહરણ 18 : અવકાશમાં x-અક્ષનું સમીકરણ .... છે.

(A) $x = 0, y = 0$ (B) $x = 0, z = 0$ (C) $x = 0$ (D) $y = 0, z = 0$

ઉકેલ : x-અક્ષ પર y અને z-યામ શૂન્ય હોય છે. સાચો જવાબ (D) છે.

ઉદાહરણ 19 : એક રેખા યામાક્ષો સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે. આ રેખાની દિક્કોસાઇન .... છે.

(A) $\pm(1, 1, 1)$ (B) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (C) $\pm\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (D) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

ઉકેલ : ધારો કે, રેખા પ્રત્યેક અક્ષ સાથે α ખૂણો બનાવે છે. રેખાની દિક્કોસાઇન $cos\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $cos\,\alpha$ થશે.

હવે, $cos^2\alpha + cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ હોવાથી, $cos\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

સાચો જવાબ (B) છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 20 થી 22 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 20 : જો રેખા x, y, z-અક્ષ સાથે અનુક્રમે $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ અને $\frac{\pi}{4}$ ખૂણા બનાવે, તો રેખાની દિક્કોસાઇન .... છે.

ઉકેલ : રેખાની દિક્કોસાઇન $cos\frac{\pi}{2}$, $cos\frac{3\pi}{4}$, $cos\frac{\pi}{4}$ એટલે કે, $\pm\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

નોંધ : $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ હોવાથી ખૂણાના માપ યથેચ્છ ના લેવાય, ઉદાહરણ તરીકે $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ ન લેવાય.

ઉદાહરણ 21 : જો રેખા યામાક્ષોની ધન દિશા સાથે α, β, γ ખૂણા બનાવે, તો $sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma$ = ...

ઉકેલ :
$$\begin{aligned} sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma &= (1 - cos^2\alpha) + (1 - cos^2\beta) + (1 - cos^2\gamma) \\ &= 3 - (cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma) \\ &= 2 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 22 : જો એક રેખા y અને z બંને અક્ષો સાથે $\frac{\pi}{4}$ નો ખૂણો બનાવે, તો x-અક્ષ સાથે .... માપનો ખૂણો બનાવે.

ઉકેલ : ધારો કે રેખા x-અક્ષ સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે છે. આથી, $cos^2\alpha + cos^2\frac{\pi}{4} + cos^2\frac{\pi}{4} = 1$

સાદું રૂપ આપતાં $\alpha = \frac{\pi}{2}$ મળે.

નીચેના ક્રમાંક 23 અને 24 વાળાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

ઉદાહરણ 23 : બિંદુઓ (1, 2, 3), (–2, 3, 4) અને (7, 0, 1) સમરેખ છે.

ઉકેલ : ધારો કે, (1, 2, 3), (–2, 3, 4) અને (7, 0, 1) અનુક્રમે બિંદુઓ A, B અને C છે.

રેખાઓ AB અને BC ના દિક્ગુણોત્તરો –3, 1, 1 ને સમપ્રમાણમાં છે. આથી, વિધાન સત્ય છે.

ઉદાહરણ 24 : બિંદુઓ (3, 5, 4) અને (5, 8, 11) માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$\vec{r} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k})$ છે.

ઉકેલ : બિંદુઓ (3, 5, 4) અને (5, 8, 11) ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે

$\vec{a} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 11\hat{k}$ છે.

તેથી માગેલું સમીકરણ $\vec{r} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k})$ થશે.

આથી, વિધાન સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 11.3
ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. $\overrightarrow{OA}$ એ OX સાથે 60° અને OY સાથે 45° નો ખૂણો બનાવે તથા $|\overrightarrow{OA}| = 10$ એકમ, તો બિંદુ A નો સ્થાનસદિશ મેળવો. $A \in R^3$

2. (1, –2, 3) બિંદુમાંથી પસાર થતી અને સદિશ $3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ ને સમાંતર રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

3. સાબિત કરો કે રેખાઓ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ અને $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = z$ એકબીજીને છેદે છે. તેમનું છેદબિંદુ પણ શોધો.

4. રેખાઓ $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ અને $\vec{r} = (2\hat{j} - 5\hat{k}) + \mu(6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

5. સાબિત કરો કે A(0, –1, –1) અને B(4, 5, 1) માંથી પસાર થતી રેખા C(3, 9, 4) અને D(–4, 4, 4) માંથી પસાર થતી રેખાને છેદે છે.

6. જો $pp' + rr' + 1 = 0$ હોય, તો રેખાઓ $x = py + q$, $z = ry + s$ અને $x = p'y + q'$, $z = r'y + s'$ પરસ્પર લંબ છે તેમ સાબિત કરો.

7. બિંદુઓ A(2, 3, 4) અને B(4, 5, 8) ને જોડતા રેખાખંડને કાટખૂણે દુભાગતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

8. ઊગમબિંદુથી $3\sqrt{3}$ એકમ અંતરે આવેલા અને જેનો અભિલંબ યામાક્ષો સાથે સમાન ખૂણા બનાવે તેવા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

9. બિંદુ (–2, –1, –3) માંથી દોરેલી રેખા સમતલના (1, –3, 3) બિંદુએ કાટખૂણે હોય, તો તે સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

10. બિંદુઓ (2, 1, 0), (3, –2, –2) અને (3, 1, 7) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

11. રેખા $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$ ને $\frac{\pi}{3}$ ખૂણે છેદતી અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી બે રેખાઓનાં સમીકરણ શોધો.

12. જે રેખાઓની દિક્કોસાઈન સમીકરણ $l + m + n = 0$ અને $l^2 + m^2 - n^2 = 0$ થી મળે, તે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

13. એક ચલ રેખાની બે પાસપાસેની પરિસ્થિતિની દિક્કોસાઈન l, m, n અને $l + \delta l$, $m + \delta m$, $n + \delta n$ છે. સાબિત કરો કે બે પરિસ્થિતિ વચ્ચેનો નાનો ખૂણો $\delta\theta$ એ $\delta\theta^2 = \delta l^2 + \delta m^2 + \delta n^2$ થી મળે છે.

14. ઊગમબિંદુ O અને A(a, b, c) છે. OA ની દિક્કોસાઈન શોધો તથા A માંથી પસાર થતા અને OA સાથે કાટખૂણો બનાવતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

15. બે લંબાક્ષોની પદ્ધતિનું ઊગમબિંદુ સમાન છે. એક સમતલ તેમને અનુક્રમે ઊગમબિંદુથી a, b, c અને a', b', c' અંતરે છેદે, તો સાબિત કરો કે, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2}$.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

16. બિંદુ (2, 3, –8) માંથી રેખા $\frac{4-x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{3}$ પરનો લંબપાદ શોધો. આપેલા બિંદુથી રેખા સુધીનું લંબઅંતર પણ શોધો.

17. રેખા $\frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{-9}$ થી બિંદુ (2, 4, –1) નું અંતર શોધો.

18. બિંદુ $\left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$ થી સમતલ $2x - 2y + 4z + 5 = 0$ નું લંબઅંતર અને લંબપાદ શોધો.

19. બિંદુ (3, 0, 1) માંથી પસાર થતી અને સમતલો $x + 2y = 0$ અને $3y - z = 0$ ને સમાંતર રેખાનું સમીકરણ શોધો.

20. બિંદુઓ (2, 1, –1) અને (–1, 3, 4) માંથી પસાર થતા તથા સમતલ $x - 2y + 4z = 10$ ને લંબ સમતલનું સમીકરણ શોધો.

21. રેખાઓ $\vec{r} = (8 + 3\lambda)\hat{i} - (9 + 16\lambda)\hat{j} + (10 + 7\lambda)\hat{k}$ અને

$\vec{r} = 15\hat{i} + 29\hat{j} + 5\hat{k} + \mu(3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

22. સમતલ $5x + 3y + 6z + 8 = 0$ ને લંબ અને સમતલો $x + 2y + 3z - 4 = 0$ તથા

$2x + y - z + 5 = 0$ ના છેદમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

23. સમતલ $ax + by = 0$ ને સમતલ $z = 0$ સાથેની છેદરેખા સાથે α ખૂણે પરિભ્રમણ કરાવવામાં આવે છે. સાબિત કરો કે નવી પરિસ્થિતિમાં સમતલનું સમીકરણ $ax + by \pm(\sqrt{a^2 + b^2} \tan \alpha)z = 0$ થાય.

24. સમતલો $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 3\hat{j}) - 6 = 0$ અને $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) = 0$ ના છેદમાંથી પસાર થતા અને ઊગમબિંદુથી એક એકમ અંતરે આવેલા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

25. સાબિત કરો કે બિંદુઓ $(\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$ અને $3(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ એ સમતલ $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}) + 9 = 0$ થી સમાન અંતરે અને એકબીજાની વિરુદ્ધ બાજુએ આવેલાં છે.

26. $\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ અને $\overrightarrow{CD} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ બે સદિશ છે. બિંદુઓ A અને C ના સ્થાનસદિશ અનુક્રમે $6\hat{i} + 7\hat{j} + 4\hat{k}$ અને $-9\hat{j} + 2\hat{k}$ છે. $\overrightarrow{PQ}$ એ $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{CD}$ બંનેને લંબ થાય તે રીતે રેખા AB પરના બિંદુ P અને રેખા CD પરના બિંદુ Q ના સ્થાનસદિશ મેળવો.

27. દર્શાવો કે સમીકરણો $2l + 2m - n = 0$ અને $mn + nl + lm = 0$ થી જે રેખાઓની દિક્કોસાઈન મળે, તે રેખાઓ એકબીજી સાથે કાટખૂણો બનાવે છે.

28. જો પરસ્પર લંબ ત્રણ રેખાઓની દિક્કોસાઈન l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 હોય, તો સાબિત કરો કે જે રેખાની દિક્કોસાઈન $l_1 + l_2 + l_3$, $m_1 + m_2 + m_3$, $n_1 + n_2 + n_3$ ના સમપ્રમાણમાં હોય તે રેખા આપેલી ત્રણેય રેખાઓ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 29 થી 36 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

29. બિંદુ (α, β, γ) નું y-અક્ષથી અંતર .... છે.

(A) β (B) $|\beta|$ (C) $|\beta| + |\gamma|$ (D) $\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}$

30. જો રેખાની દિક્કોસાઈન k, k, k, હોય, તો .... સત્ય બને.

(A) $k > 0$ (B) $0 < k < 1$ (C) $k = 1$ (D) $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ અથવા $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

31. ઊગમબિંદુથી સમતલ $\vec{r} \cdot \left(\frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} - \frac{6}{7}\hat{k}\right) = 1$ નું અંતર .... છે.

(A) 1 (B) 7

(C) $\frac{1}{7}$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

32. રેખા $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ અને સમતલ $2x - 2y + z = 5$ વચ્ચેના ખૂણાની *sine* .... છે.

(A) $\frac{10}{6\sqrt{5}}$ (B) $\frac{4}{5\sqrt{2}}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

33. બિંદુ (α, β, γ) નું xy-સમતલમાં પ્રતિબિંબ .... છે.

(A) $(\alpha, \beta, 0)$ (B) $(0, 0, \gamma)$ (C) $(-\alpha, -\beta, \gamma)$ (D) $(\alpha, \beta, -\gamma)$

34. A(0, 4, 1), B(2, 3, –1), C(4, 5, 0) અને D(2, 6, 2) શિરોબિંદુવાળા ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) 9 ચોરસ એકમ (B) 18 ચોરસ એકમ (C) 27 ચોરસ એકમ (D) 81 ચોરસ એકમ

35. $xy + yz = 0$ થી દર્શાવતો બિંદુગણ .... છે.

(A) પરસ્પર લંબ રેખાઓની જોડ (B) સમાંતર રેખાઓની જોડ

(C) સમાંતર સમતલોની જોડ (D) લંબ સમતલોની જોડ

36. સમતલ $2x - 3y + 6z - 11 = 0$, x-અક્ષ સાથે $sin^{-1}(\alpha)$ ખૂણો બનાવે છે. α નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 37 થી 41 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

37. (2, 0, 0), (0, 3, 0) અને (0, 0, 4) બિંદુઓમાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ .... છે.

38. સદિશ $(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ ની દિક્કોસાઈન .... છે.

39. રેખા $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ નું સદિશ સમીકરણ .... છે.

40. બિંદુઓ (3,4,–7) અને (1,–1,6) માંથી પસાર થતી રેખાનું સદિશ સમીકરણ .... છે.

41. સમતલ $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$ નું કાર્તેઝિય સમીકરણ .... છે.

નીચેના ક્રમાંક 42 થી 49 વાળાં વિધાનો પૈકી કયાં સત્ય છે કે અસત્ય છે તે જણાવો :

42. સમતલ $x + 2y + 3z - 6 = 0$ ને લંબ એકમ સદિશ $\frac{1}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{k}$ છે.

43. સમતલ $2x - 3y + 5z + 4 = 0$ ના અક્ષો પર બનતા અંતઃખંડ $-2, \frac{4}{3}, -\frac{4}{5}$ છે.

44. રેખા $\vec{r} = (5\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ અને સમતલ $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ વચ્ચેનો ખૂણો $sin^{-1}\left(\frac{5}{2\sqrt{91}}\right)$ છે.

45. સમતલો $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) = 1$ અને $\bar{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j}) = 4$ વચ્ચેનો ખૂણો $cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{58}}\right)$ છે.

46. રેખા $\vec{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ સમતલ $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 2 = 0$ માં આવેલી છે.

47. રેખા $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ નું સદિશ સમીકરણ $\vec{r} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$ છે.

48. સદિશ $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ને સમાંતર અને બિંદુ $(5, -2, 4)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{3}$ છે.

49. જો ઊગમબિંદુથી સમતલ પરનો લંબપાદ $(5, -3, -2)$ હોય, તો સમતલનું સમીકરણ $\vec{r} \cdot (5\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) = 38$ છે.

પ્રકરણ 12

સુરેખ આયોજન

12.1 વિહંગાવલોકન

12.1.1 ઈષ્ટતમપણાના પ્રશ્નો

જે પ્રશ્નો વિધેયને મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ બનાવે તેવા પ્રશ્નોને ઈષ્ટતમપણાના પ્રશ્નો કહેવામાં આવે છે. ઈષ્ટતમપણાના પ્રશ્નોમાં ઉપલબ્ધ સંસાધનોથી ઉત્પાદન; નફો વગેરેને મહત્તમ અથવા ખર્ચ ન્યૂનતમ કરવાના પ્રશ્નોનો સમાવેશ થાય છે.

12.1.2 સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો (LPP) : સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નો બે ચલ x અને y ના સુરેખ વિધેયના ઈષ્ટતમપણા (મહત્તમ/ન્યૂનતમ) સાથે સંકળાયેલા છે. તે વિધેયને **હેતુલક્ષી વિધેય** કહે છે. ચલ અનૃણ હોય અને સુરેખ અસમતાના ગણનું સમાધાન કરે તેવી શરતોને અધીન હોય તેવા ચલનું તે વિધેય છે. (તે અસમતાઓને **સુરેખ મર્યાદા** તરીકે ઓળખાય છે) સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન એ વિશિષ્ટ પ્રકારના ઈષ્ટતમ મૂલ્યનો પ્રશ્ન છે.

12.1.3 હેતુલક્ષી વિધેય : જેમાં a અને b અચળ હોય તેવા સુરેખ વિધેય $Z = ax + by$ ને તેની મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ કિંમતો શોધવાની હોય છે.

12.1.4 નિર્ણાયક ચલ રાશિઓ : હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ માં x અને y ને નિર્ણાયક ચલ રાશિઓ કહેવામાં આવે છે.

12.1.5 મર્યાદાઓ : સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં ચલો પરની સુરેખ અસમતાઓ અથવા અવરોધોને મર્યાદાઓ (પ્રતિબંધો) કહેવાય છે. $x \geq 0$, $y \geq 0$ શરતોને અનૃણ મર્યાદાઓ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

12.1.6 શક્ય ઉકેલોનો પ્રદેશ : સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં અનૃણ મર્યાદા $x \geq 0$, $y \geq 0$ સહિતની બધી મર્યાદાઓ દ્વારા નિર્ધારિત થતા સામાન્ય ક્ષેત્રને શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ કહેવામાં આવે છે.

12.1.7 શક્ય ઉકેલ : સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશની સીમા પરનાં અને તેની અંદરનાં બિંદુઓ શક્ય ઉકેલ રજૂ કરે છે.

12.1.8 અશક્ય ઉકેલ : શક્ય ઉકેલપ્રદેશની બહારના કોઈ પણ બિંદુને અશક્ય ઉકેલ કહેવાય છે.

12.1.9 ઈષ્ટતમ શક્ય ઉકેલ : શક્ય ઉકેલપ્રદેશનું કોઈ પણ બિંદુ હેતુલક્ષી વિધેયનું ઈષ્ટતમ મૂલ્ય આપે છે. તેને ઈષ્ટતમ શક્ય ઉકેલ કહે છે.

સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નના ઉકેલ મેળવવામાં નીચેના પ્રમેયો મૂળભૂત છે.

12.1.10 પ્રમેય 1 : ધારો કે R એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન માટેના હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ માટેના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ છે. (તે બહિર્મુખ બહુકોણ હોય છે.) જ્યારે Z ને ઈષ્ટતમ મૂલ્ય (મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ)

મળે ત્યારે તે ચલરાશિઓ x અને y થી બનતી અસમતાઓ દ્વારા રચાતા બહિર્મુખ બહુકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુ આગળ પ્રાપ્ત થાય છે.

પ્રમેય 2 : ધારો કે R એ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન માટેના હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ માટેના શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ છે. જો આ પ્રદેશ R **સીમિત** હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેય Z ને મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્ય પ્રદેશ R ના કોઈ પણ શિરોબિંદુ આગળ પ્રાપ્ત થાય.

જો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ R **અસીમિત** હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેયનું મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ મૂલ્ય હોય અથવા ન પણ હોય. જો તે હોય, તો R ના શિરોબિંદુએ મળે.

12.1.11 સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનો ઉકેલ મેળવવા માટે શિરોબિંદુની રીત :

આ પદ્ધતિમાં નીચેના મુદ્દાઓ સામેલ છે :

(1) સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નનો શક્ય ઉકેલપ્રદેશ શોધો. આ પ્રદેશનાં શિરોબિંદુ શોધો. તે નિરીક્ષણ દ્વારા અથવા એકબીજાને છેદતી રેખાઓનાં બે સમીકરણોને ઉકેલીને મેળવી શકાય.

(2) દરેક શિરોબિંદુ આગળ હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ ની કિંમત મેળવો. ધારો કે આ બિંદુઓ આગળ Z ની મહત્તમ કિંમત તથા ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે M તથા m છે.

(3) (i) જો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ સીમિત હોય, તો Z ની મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ કિંમત અનુક્રમે M તથા m થાય.

(ii) જો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત હોય, તો નીચે પ્રમાણે આગળ વધી શકાય :

(a) જો $ax + by > M$ થી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ પણ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ સાથે સામાન્ય ન હોય, તો Z ની મહત્તમ કિંમત M થાય, નહિ તો Z ને મહત્તમ કિંમત ન મળે.

(b) જો $ax + by < m$ થી રચાતા ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ પણ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશ સાથે સામાન્ય ન હોય, તો Z ની ન્યૂનતમ કિંમત m થાય, નહિ તો Z ને ન્યૂનતમ કિંમત ન મળે.

12.1.12 એકથી વધુ ઈષ્ટતમ બિંદુઓ : જો શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં બે શિરોબિંદુઓ આગળ ઈષ્ટતમ મૂલ્યો સમાન હોય અર્થાત્ જો બંને સમાન મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ મૂલ્ય આપે, તો આ બે શિરોબિંદુને જોડતા રેખાખંડનું કોઈ પણ બિંદુ એ પણ ઈષ્ટતમ ઉકેલ છે.

12.2 ઉદાહરણો

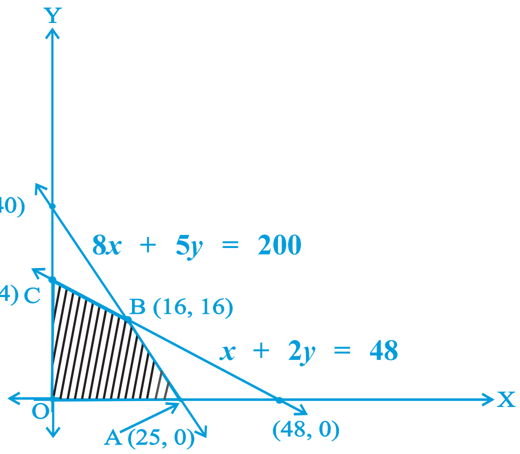
ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 12.1 માં દર્શાવ્યો છે. $Z = 4x + 3y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય નક્કી કરો.

ઉકેલ : શક્ય ઉકેલપ્રદેશ સીમિત છે. આથી, Z નું મહત્તમ મૂલ્ય શક્ય ઉકેલપ્રદેશના શિરોબિંદુ આગળ જ હોવું જોઈએ. (આકૃતિ 12.1)

શિરોબિંદુઓ	Z ની કિંમત	
O(0, 0)	$4(0) + 3(0) = 0$	
A(25, 0)	$4(25) + 3(0) = 100$	
B(16, 16)	$4(16) + 3(16) = \mathbf{112}$	← (મહત્તમ)
C(0, 24)	$4(0) + 3(24) = 72$	

તેથી Z નું મહત્તમ મૂલ્ય 112 છે.

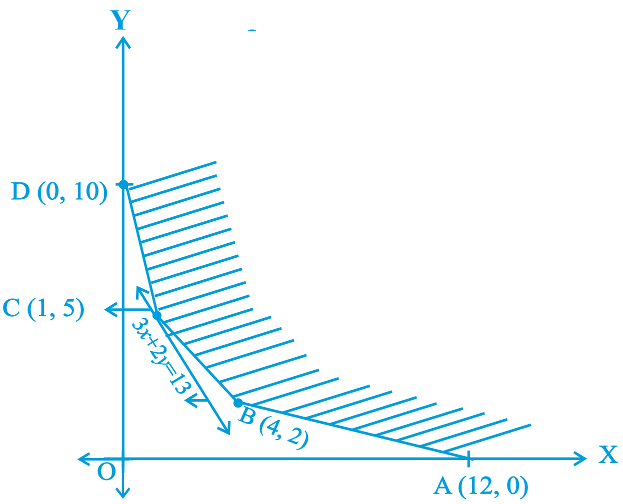


આકૃતિ 12.1

ઉદાહરણ 2 : સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 12.2 માં દર્શાવ્યો છે, તો $Z = 3x + 2y$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય નક્કી કરો. (શક્ય હોય તો)

ઉકેલ : શક્ય ઉકેલપ્રદેશ (R) સીમિત નથી. તેથી Z નું મૂલ્ય ન્યૂનતમ હોઈ શકે અથવા અસ્તિત્વમાં ન પણ હોય. જો અસ્તિત્વમાં હોય, તો તે શિરોબિંદુ આગળ હોય. (આકૃતિ 12.2)

શિરોબિંદુઓ	Z ની કિંમત	
A(12, 0)	$3(12) + 2(0) = 36$	
B(4, 2)	$3(4) + 2(2) = 16$	
C(1, 5)	$3(1) + 2(5) = \mathbf{13}$	← (ન્યૂનતમ)
D(0, 10)	$3(0) + 2(10) = 20$	



આકૃતિ 12.2

$3x + 2y < 13$ નો આલેખ દોરતાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, R ને સામાન્ય બિંદુ નથી. તેથી સૌથી નાનું મૂલ્ય 13 એ Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને આલેખની રીતે ઉકેલો.

મહત્તમ $Z = 2x + 3y$

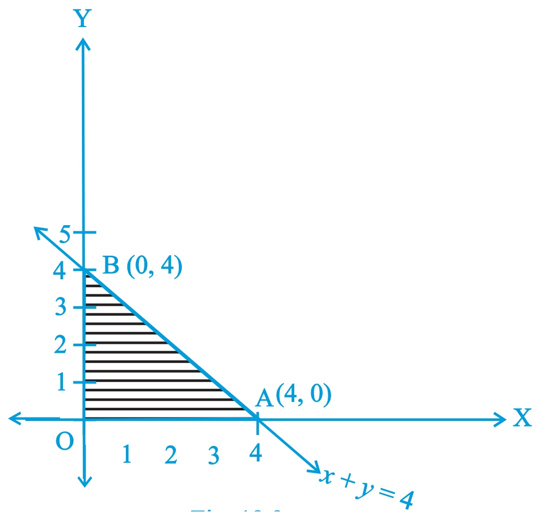
$x + y \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

ઉકેલ : આકૃતિ 12.3 માં રંગીન પ્રદેશ OAB શક્ય ઉકેલપ્રદેશ છે. મર્યાદાઓ $x \geq 0$, $y \geq 0$ અને $x + y \leq 4$ દ્વારા રચાતો શક્ય ઉકેલપ્રદેશ OAB **સીમિત** છે. તેથી, મહત્તમ મૂલ્ય શક્ય ઉકેલપ્રદેશના કોઈક શિરોબિંદુ આગળ મળશે.

શિરોબિંદુઓ O(0, 0), A (4, 0) અને B (0, 4) છે.

આ દરેક શિરોબિંદુઓ આગળ Z નું મૂલ્ય મેળવતાં,

શિરોબિંદુઓ	Z ની કિંમત	
O(0, 0)	$2(0) + 3(0) = 0$	
A(4, 0)	$2(4) + 3(0) = 8$	
B(0, 4)	$2(0) + 3(4) = \mathbf{12}$	← મહત્તમ



આકૃતિ 12.3

આથી, (0, 4) બિંદુએ Z ની મહત્તમ કિંમત 12 છે.

ઉદાહરણ 4 : એક ઉત્પાદક કંપની બે પ્રકારના ટેલિવિઝન સેટ બનાવે છે. એક પ્રકાર શ્વેતશ્યામ અને બીજો પ્રકાર રંગીન ટી.વી. સેટનો છે. કંપની એક સપ્તાહમાં વધુમાં વધુ 300 ટીવી બનાવી શકે તેટલાં સંસાધનો છે. તેને એક શ્વેતશ્યામ ટીવી ₹ 1800 અને એક રંગીન ટીવી ₹ 2700 માં પડે છે. કંપની એક સપ્તાહમાં ટીવી બનાવવા મહત્તમ ₹ 6,48,000 થી વધુ રોકાણ કરી શકતી નથી. જો તે એક શ્વેતશ્યામ ટીવી પર ₹ 510 નો નફો કરે અને એક રંગીન ટીવી પર ₹ 675 નફો કરે, તો કંપની દ્વારા દરેક પ્રકારનાં કેટલાં ટીવીનું નિર્માણ થવું જોઈએ કે જેથી મહત્તમ નફો થાય ? આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે આલેખની રીતે દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે x અને y અનુક્રમે દરેક સપ્તાહમાં બનતા શ્વેતશ્યામ તથા રંગીન ટીવીની સંખ્યા દર્શાવે છે.

તેથી, $x \geq 0$, $y \geq 0$

કંપની સપ્તાહમાં વધુમાં વધુ 300 સેટ બનાવી શકે છે.

$$x + y \leq 300$$

સેટના ઉત્પાદનની સાપ્તાહિક કિંમત (₹ માં) $1800x + 2700y$

અને કંપની મહત્તમ ₹ 6,48,000 સુધી ખર્ચ કરી શકે છે.

આથી, $1800x + 2700y \leq 648000$

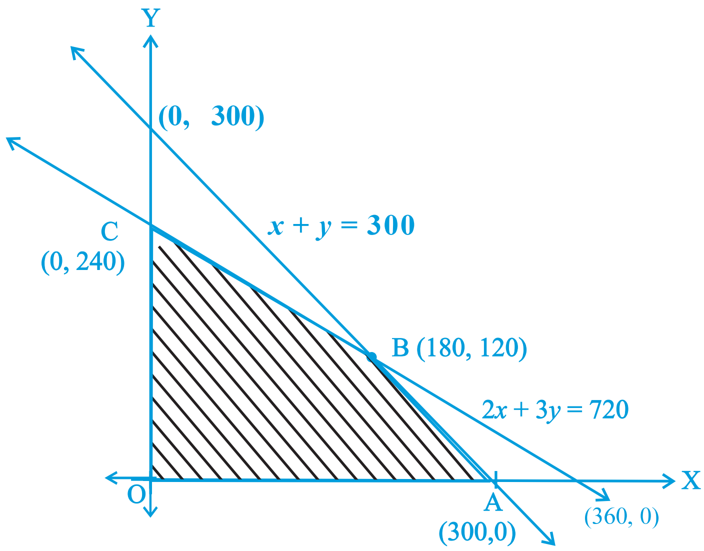
અર્થાત્ $2x + 3y \le 720$

x શ્વેતશ્યામ ટીવી અને y રંગીન ટીવીનો કુલ નફો ₹ $(510x + 675y)$ છે. તેથી, **હેતુલક્ષી વિધેય** $Z = 510x + 675y$ છે.

આમ, પ્રશ્નનું ગાણિતિક સ્વરૂપ,

મહત્તમ $Z = 510x + 675y$

મર્યાદાઓ $\left.\begin{aligned} x + y &\le 300 \\ 2x + 3y &\le 720 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}\right\}$



આકૃતિ 12.4

વિસ્તૃત પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 5 : ઉદાહરણ 4 નો સંદર્ભ લઈ સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નને ઉકેલો.

ઉકેલ : મહત્તમ $Z = 510x + 675y$ મેળવો.

મર્યાદાઓ $\left.\begin{aligned} x + y &\le 300 \\ 2x + 3y &\le 720 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}\right\}$

શક્ય ઉકેલપ્રદેશ OABC આકૃતિ 12.4 માં દર્શાવ્યો છે.

અહીં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ સીમિત છે, તેથી Z નું મહત્તમ મૂલ્ય OABC ના કોઈક શિરોબિંદુ પર હશે.

શિરોબિંદુઓ	Z ની કિંમત	
O (0, 0)	510 (0) + 675 (0) = 0	
A (300, 0)	510 (300) + 675 (0) = 153000	
B (180, 120)	510 (180) + 675 (120) = **172800**	← મહત્તમ
C (0, 240)	510 (0) + 675 (240) = 162000	

તેથી (180, 120) બિંદુએ મહત્તમ મૂલ્ય ₹ 1,72,800 મળે અર્થાત્ કંપની 180 શ્વેતશ્યામ ટીવી અને 120 રંગીન ટીવી બનાવે તો મહત્તમ નફો મળે.

ઉદાહરણ 6 :

મર્યાદાઓ $x + 2y \ge 10$

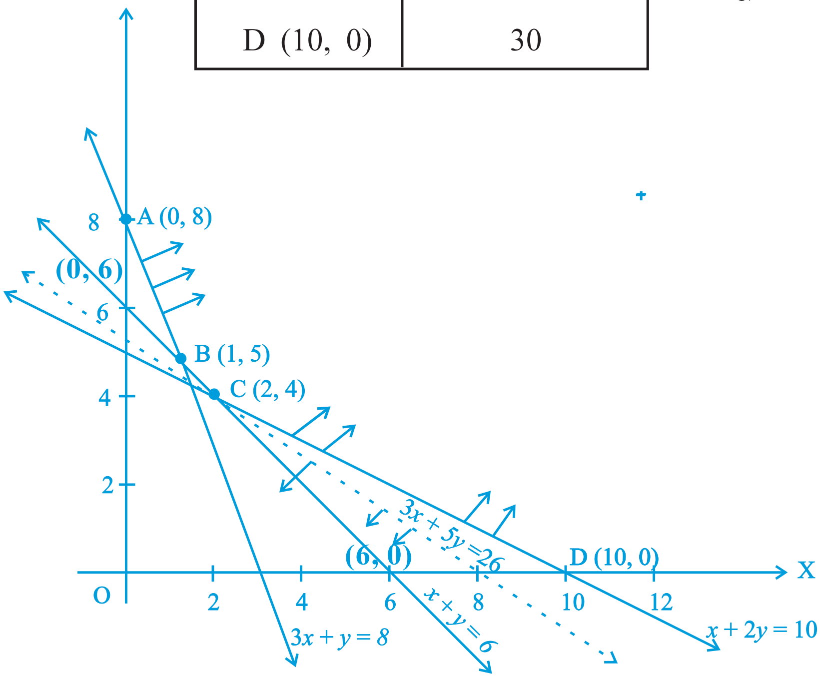
$x + y \ge 6$

$3x + y \ge 8$

$x, y \ge 0$ પરથી $Z = 3x + 5y$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : આપણે સૌપ્રથમ $x + 2y = 10$, $x + y = 6$, $3x + y = 8$ નો આલેખ દોરીશું. રંગીન પ્રદેશ ABCD એ ઉપર્યુક્ત મર્યાદા દ્વારા નિર્ધારિત શક્ય ઉકેલપ્રદેશ R છે. શક્ય ઉકેલપ્રદેશ અસીમિત છે. તેથી Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે અથવા ન પણ મળે. જો તે મળે તો તે શિરોબિંદુ પર હશે.

શિરોબિંદુઓ	Z ની કિંમત
A (0, 8)	40
B (1, 5)	28
C (2, 4)	**26** ← ન્યૂનતમ
D (10, 0)	30



આકૃતિ 12.5

આકૃતિ 12.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $3x + 5y < 26$ નો આલેખ તૂટક રેખા દ્વારા દર્શાવો.

આપણે જોયું કે $3x + 5y < 26$ દ્વારા નક્કી થતા ખુલ્લા અર્ધ સમતલ ને શક્ય ઉકેલપ્રદેશ R સાથે કોઈ પણ બિંદુ સામાન્ય નથી. તેથી 26 એ Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 7 તથા 8 વાળા પ્રશ્નના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 7 : સુરેખ મર્યાદા દ્વારા નક્કી થતા શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 10), (5, 5), (15, 15), (0, 20). છે.

$p > 0$, $q > 0$ માટે $Z = px + qy$.

p અને q ની .... શરતને અધીન Z નું મહત્તમ મૂલ્ય (15, 15) અને (0, 20) બંને આગળ મળે.

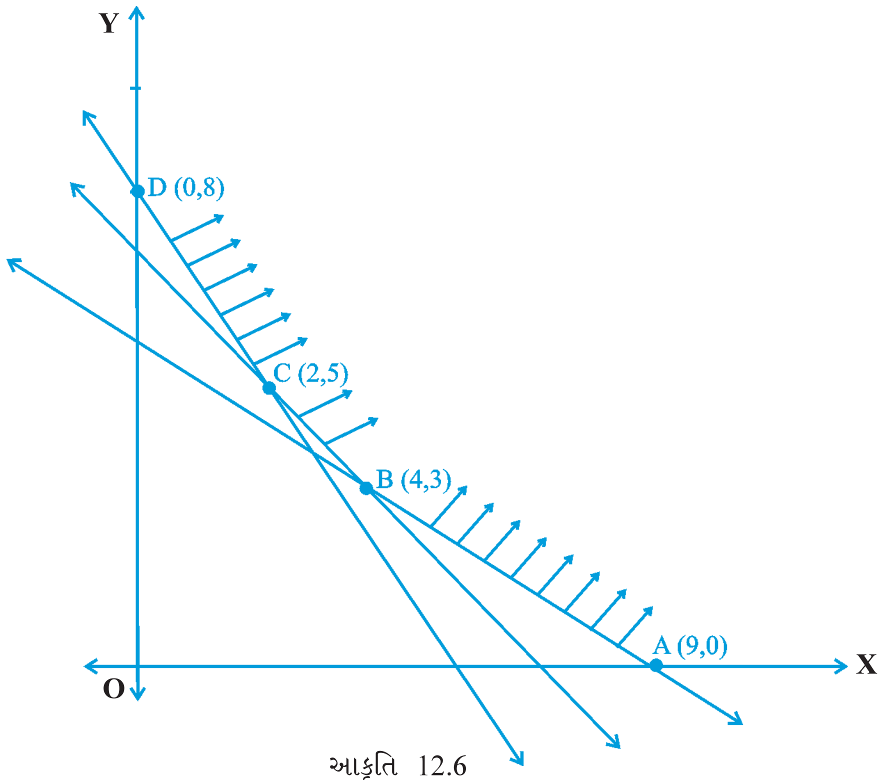
(A) $p = q$ (B) $p = 2q$ (C) $q = 2p$ (D) $q = 3p$

ઉકેલ : Z નું મહત્તમ મૂલ્ય (15, 15) અને (0, 20) આગળ છે.

તેથી, $15p + 15q = 0 \cdot p + 20q \Rightarrow q = 3p$. સાચો વિકલ્પ (D) છે.

ઉદાહરણ 8 : સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 12.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે છે. $Z = 4x + 3y$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય .... બિંદુએ મળે.

(A) (0, 8) (B) (2, 5) (C) (4, 3) (D) (9, 0)



આકૃતિ 12.6

ઉકેલ : સાચો વિકલ્પ (B) છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 9 તથા 10 વાળાં પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 9 : સુરેખ આયોજનનાં પ્રશ્નમાં મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ મૂલ્યો માટેનું સુરેખ વિધેય .... વિધેય કહેવાય છે.

ઉકેલ : હેતુલક્ષી

ઉદાહરણ 10 : સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં તમામ સુરેખ મર્યાદાઓ દ્વારા નક્કી થયેલા સામાન્ય પ્રદેશને .... પ્રદેશ કહેવાય છે.

ઉકેલ : શક્ય ઉકેલ

નીચેના ક્રમાંક 11 અને 12 વાળાં ઉદાહરણોમાં આપેલ વિધાનો પૈકી કયા સત્ય કે અસત્ય છે તે જણાવો :

ઉદાહરણ 11 : સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ સીમિત હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ ને R માં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે.

ઉકેલ : સત્ય

ઉદાહરણ 12 : સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય હંમેશાં શક્ય ઉકેલ-પ્રદેશના ફક્ત એક જ શિરોબિંદુ પર મળે.

ઉકેલ : અસત્ય

ન્યૂનતમ મૂલ્ય શક્ય ઉકેલપ્રદેશના એક કરતાં વધુ શિરોબિંદુએ પણ મળી શકે છે.

સ્વાધ્યાય 12.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

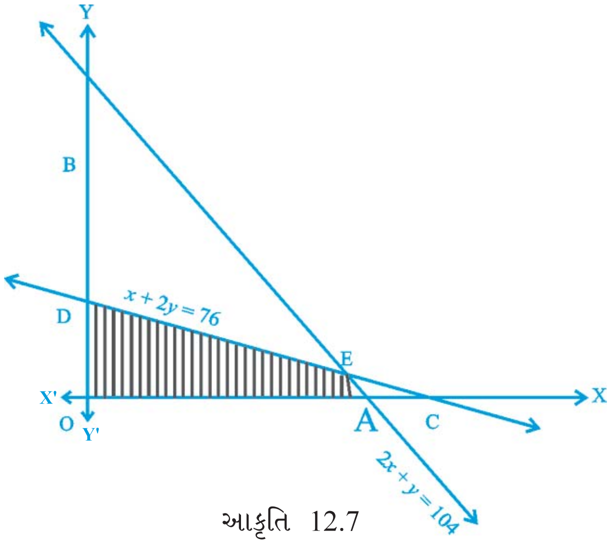
1. $Z = 11x + 7y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય નક્કી કરો. મર્યાદાઓ $2x + y \le 6$, $x \le 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

2. $Z = 3x + 4y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય મેળવો. મર્યાદાઓ $x + y \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

3. $Z = 11x + 7y$ વિધેયનું મહત્તમ મૂલ્ય મેળવો. મર્યાદાઓ $x \le 3$, $y \le 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

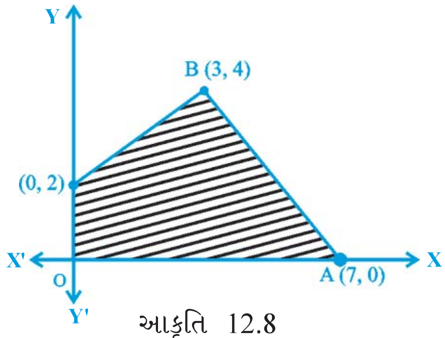
4. $Z = 13x - 15y$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય મેળવો. મર્યાદાઓ $x + y \le 7$, $2x - 3y + 6 \ge 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

5. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 12.7 માં દર્શાવ્યો છે, તો $Z = 3x + 4y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય નક્કી કરો.



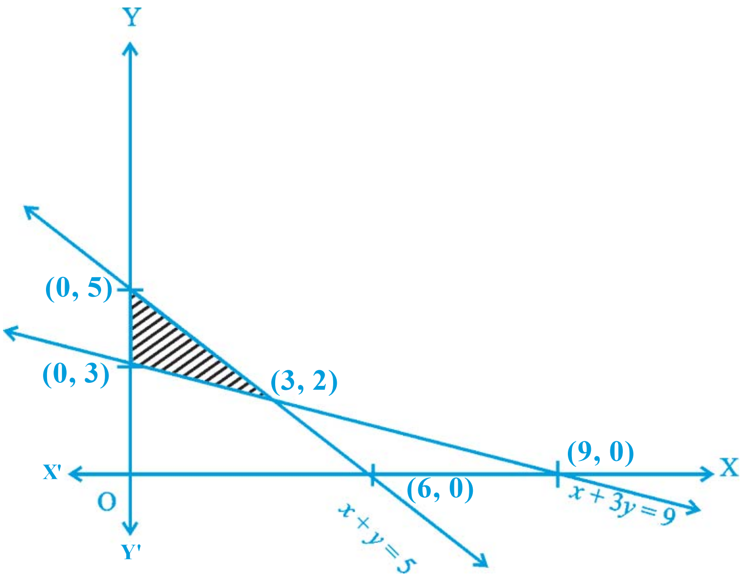
આકૃતિ 12.7

6. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 12.8 માં દર્શાવ્યો છે.
$Z = 5x + 7y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય મેળવો.



આકૃતિ 12.8

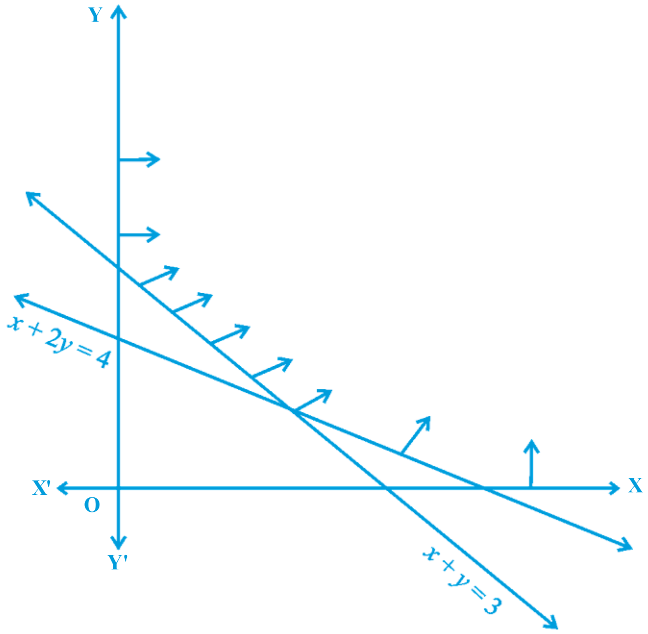
7. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 12.9 માં દર્શાવ્યો છે. $Z = 11x + 7y$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય શોધો.



આકૃતિ 12.9

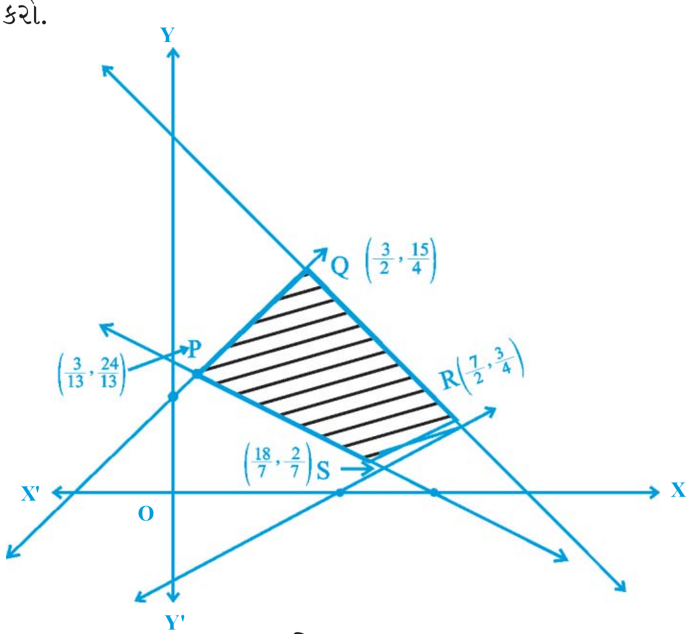
8. ઉપર્યુક્ત પ્રશ્ન નં. 7 માં Z નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો.

9. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 12.10 માં દર્શાવ્યો છે. $Z = 4x + y$ નું મૂલ્ય પ્રદેશના દરેક શિરોબિંદુ આગળ શોધો. જો Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય અસ્તિત્વ ધરાવે તો તે શોધો.



આકૃતિ 12.10

10. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 12.11 માં દર્શાવ્યો છે. $Z = x + 2y$ નાં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યો નક્કી કરો.



આકૃતિ 12.11

11. વીજપરિપથના ઉત્પાદક પાસે A અને B બે પ્રકારના પરિપથ બનાવવા માટે 200 અવરોધો, 120 ટ્રાન્ઝિસ્ટર અને 150 કૅપેસિટર્સ છે. A પ્રકારના પરિપથ માટે 20 અવરોધો, 10 ટ્રાન્ઝિસ્ટર અને 10 કૅપેસિટર્સની જરૂર છે. B પ્રકારના પરિપથ માટે 10 અવરોધો, 20 ટ્રાન્ઝિસ્ટર અને 30 કૅપેસિટર્સની જરૂર છે. જો A પ્રકારના પરિપથ પર ₹ 50 નફો અને B પ્રકારના પરિપથ પર ₹ 60 નફો થાય, તો આ પ્રશ્નને ઉત્પાદક મહત્તમ નફો કરી શકે તે રીતે સુરેખ આયોજનની રીતે ઉકેલો.

12. એક કંપની 1200 પૅકેજનું પરિવહન મોટી અને નાની વાનની મદદથી કરે છે. દરેક મોટી વાન 200 પૅકેજ લઈ જઈ શકે છે અને દરેક નાની વાન 80 પૅકેજ લઈ જઈ શકે છે. દરેક મોટી વાનનો ખર્ચ ₹ 400 અને નાની વાનનો ખર્ચ ₹ 200 છે. ખર્ચ ₹ 3000 થી વધવો જોઈએ નહિ અને મોટી વાનની સંખ્યા નાની વાનની સંખ્યા કરતાં વધવી જોઈએ નહિ. આ પ્રશ્નને ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે રીતે સુરેખ આયોજનની રીતે ઉકેલો.

13. એક કંપની A અને B એમ બે પ્રકારના સ્ક્રૂનું ઉત્પાદન કરે છે. બધા જ સ્ક્રૂને આંકા પાડવાના યંત્ર (થ્રેડિંગ મશીન) અને સ્ક્રૂનું માથું બનાવવાના યંત્ર (સ્લોટિંગ મશીન)માંથી પસાર કરવામાં આવે છે. A પ્રકારના સ્ક્રૂની પેટીને 2 મિનિટ થ્રેડિંગ મશીનની અને 3 મિનિટ સ્લોટિંગ મશીનની જરૂરિયાત છે. B પ્રકારના સ્ક્રૂની પેટીને 8 મિનિટ થ્રેડિંગ મશીનની અને 2 મિનિટ સ્લોટિંગ મશીનની જરૂરિયાત છે. એક અઠવાડિયામાં દરેક મશીન 60 કલાક માટે ઉપલબ્ધ છે. આ સ્ક્રૂને વેચતાં કંપની A પ્રકારના સ્ક્રૂની પ્રત્યેક પેટી પર ₹ 100 અને B પ્રકારના સ્ક્રૂની પ્રત્યેક પેટી પર ₹ 170 નફો કરે છે. આ પ્રશ્નને નફો મહત્તમ થાય તે રીતે સુરેખ આયોજનની રીતે ઉકેલો.

14. કંપની A તથા B એમ બે પ્રકારનાં સ્વેટર બનાવે છે. A પ્રકારનું સ્વેટર બનાવવાની કિંમત ₹ 360 અને B પ્રકારનું સ્વેટર બનાવવાની કિંમત ₹ 120 છે. કંપની એક દિવસમાં વધુમાં વધુ 300 સ્વેટર બનાવી શકે છે અને ₹ 72,000 નો ખર્ચ કરી શકે છે. B પ્રકારનાં સ્વેટરોની સંખ્યા A પ્રકારનાં સ્વેટરની સંખ્યા કરતાં 100 થી વધુ ન હોવી જોઈએ. કંપની A પ્રકારના સ્વેટર દીઠ ₹ 200 નો નફો કરે છે. B પ્રકારના સ્વેટર દીઠ ₹ 120 નો નફો કરે છે.

આ પ્રશ્નને નફો મહત્તમ થાય તે રીતે સુરેખ આયોજનની રીતે ઉકેલો.

15. એક વ્યક્તિ તેની મોટરસાઈકલ પર 50 કિમી/કલાકની ઝડપે જાય છે. તેને પેટ્રોલ માટે પ્રતિ કિમી ₹ 2 નો ખર્ચ કરવો પડે છે. જો તે 80 કિમી/કલાકની ઝડપે જાય, તો પેટ્રોલનો ખર્ચ કિમી દીઠ ₹ 3 વધે છે. પેટ્રોલનો ખર્ચ કરવા તેની પાસે વધુમાં વધુ ₹ 120 છે અને એક કલાકનો સમય છે. તે મહત્તમ કેટલું અંતર કાપી શકશે તે શોધવાની ઈચ્છા રાખે છે.

આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન સ્વરૂપે વ્યક્ત કરો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

16. પ્રશ્ન 11 જુઓ. મહત્તમ નફો મેળવવા માટે કંપની દ્વારા A અને B પ્રકારનાં કેટલાં પરિપથોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ? મહત્તમ નફો શોધો.

17. પ્રશ્ન 12 જુઓ. ખર્ચ શું હશે ?

18. પ્રશ્ન 13 જુઓ. સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન ઉકેલો અને ઉત્પાદકનો મહત્તમ નફો નક્કી કરો.

19. પ્રશ્ન 14 જુઓ. કંપનીએ મહત્તમ નફો મેળવવા એક દિવસમાં કેટલાં સ્વેટર બનાવવાં જોઈએ ? મહત્તમ નફો શોધો.

20. પ્રશ્ન 15 જુઓ. વ્યક્તિ મહત્તમ કેટલું અંતર સફર કરી શકે તે નક્કી કરો.

21. મર્યાદાઓ $x + 4y \le 8$, $2x + 3y \le 12$, $3x + y \le 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ ને અધીન $Z = x + y$ નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો.

22. કોઈ એક ઉત્પાદક બાઈકના બે મૉડેલ્સનું ઉત્પાદન કરે છે, મૉડેલ X અને મૉડેલ Y. એક એકમ મૉડેલ-X બનાવતા 6 માનવ-કલાક લાગે છે જ્યારે મૉડેલ-Y બનાવતા 10 માનવ-કલાક લાગે છે. દર અઠવાડિયે કુલ 450 માનવ-કલાક ઉપલબ્ધ છે. હેન્ડલિંગ અને માર્કેટિંગનો ખર્ચ મૉડેલ-X અને મૉડેલ-Y ના એક એકમ દીઠ અનુક્રમે ₹ 2000 અને ₹ 1000 છે. આ હેતુ માટે ઉપલબ્ધ અઠવાડિક કુલ ભંડોળ ₹ 80,000 છે. પ્રત્યેક મૉડેલ-X અને મૉડેલ-Y નો નફો અનુક્રમે ₹ 1000 અને ₹ 500 છે.

ઉત્પાદકે નફો મહત્તમ કરવા માટે દરેક મૉડેલની કેટલી બાઈક બનાવવી જોઈએ ? મહત્તમ નફો મેળવો.

23. દૈનિક આહાર-પુરવઠો આપવા માટે, કોઈ વ્યક્તિને કેટલીક X અને કેટલીક Y દવાની ગોળી લેવાની જરૂર છે. X અને Y માં રહેલ આયર્ન, કૅલ્શિયમ અને વિટામિનનું પ્રમાણ નીચે પ્રમાણે છે. (ગોળી દીઠ મિગ્રા)

ગોળીઓ	આયર્ન	કૅલ્શિયમ	વિટામિન
X	6	3	2
Y	2	3	4

વ્યક્તિને ઓછામાં ઓછા 18 મિલિગ્રામ આયર્ન, 21 મિલિગ્રામ કૅલ્શિયમ અને 16 મિલિગ્રામ વિટામિનની આવશ્યકતા છે. દવા X અને Y ની પ્રત્યેક ગોળીની કિંમત અનુક્રમે ₹ 2 અને ₹ 1 છે. તે વ્યક્તિએ ન્યૂનતમ ખર્ચ દ્વારા ઉપર્યુક્ત આવશ્યકતા સંતોષાય તે માટે દરેક દવાની કેટલી ગોળીઓ લેવી જોઈએ.

24. એક કંપની ફૅક્ટરી-I અને ફૅક્ટરી-II માં કૅલ્ક્યુલેટરના A, B અને C પ્રકારના 3 મૉડેલ બનાવે છે. કંપનીને A પ્રકારનાં ઓછામાં ઓછા 6400, B પ્રકારનાં ઓછામાં ઓછા 4000 અને C પ્રકારનાં ઓછામાં ઓછા 4800 કૅલ્ક્યુલેટરનો ઑર્ડર મળેલ છે. ફૅક્ટરી-I માં દરરોજ A પ્રકારનાં 50, B પ્રકારનાં 50 અને C પ્રકારનાં 30 કૅલ્ક્યુલેટર બનાવવામાં આવે છે. ફૅક્ટરી-II માં દરરોજ A પ્રકારનાં 40, B પ્રકારનાં 20 અને C પ્રકારનાં 40 કૅલ્ક્યુલેટર બનાવવામાં આવે છે. ફૅક્ટરી I અને II ને દરરોજ ચલાવવાનો ખર્ચ અનુક્રમે ₹ 12,000 અને ₹ 15,000 છે. માંગ સંતોષવા માટે દરેક ફૅક્ટરીને ચલાવવાના દિવસોની સંખ્યા તથા ચલાવવાનો ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

25. મહત્તમ અને ન્યૂનતમ $Z = 3x - 4y$ મેળવો.

મર્યાદા $x - 2y \le 0$

$-3x + y \le 4$

$x - y \le 6$

$x, \quad y \ge 0$

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 26 થી 34 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

26. સુરેખ મર્યાદા દ્વારા નક્કી થયેલા શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 0), (0, 40), (20, 40), (60, 20), (60, 0) છે. હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 4x + 3y$ માટે,

સ્તંભ A અને સ્તંભ B ની અભિવ્યક્તિને સરખાવતાં ....

સ્તંભ A	સ્તંભ B
મહત્તમ Z	325

(A) સ્તંભ A માં જથ્થો વધારે છે.

(B) સ્તંભ B માં જથ્થો વધારે છે.

(C) બંને જથ્થા સમાન છે.

(D) આપવામાં આવેલી માહિતીને આધારે સંબંધ નક્કી કરી શકતા નથી.

27. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં આકૃતિ 12.12 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે હેતુલક્ષી વિધેય $Z = 3x - 4y$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય .... બિંદુ આગળ મળે.

(A) (0, 0) (B) (0, 8)

(C) (5, 0) (D) (4, 10)

28. પ્રશ્ન 27 જુઓ. મહત્તમ Z મેળવવા માટેનું શિરોબિંદુ

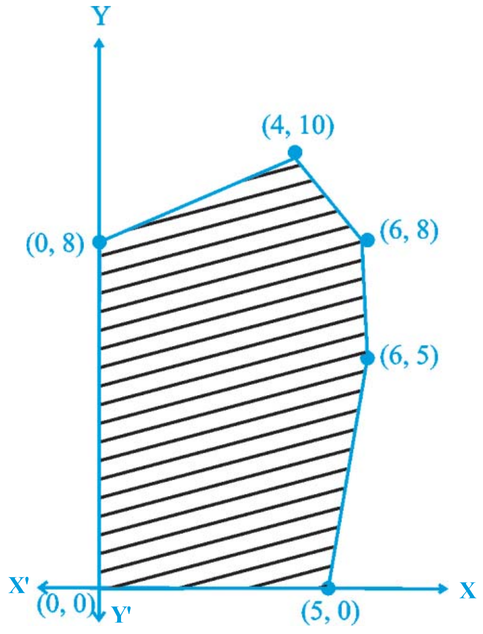
(A) (5, 0) (B) (6, 5)

(C) (6, 8) (D) (4, 10)

29. પ્રશ્ન 27 પરથી (મહત્તમ Z + ન્યૂનતમ Z) =

(A) 13 (B) 1

(C) – 13 (D) – 17



આકૃતિ 12.12

30. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ આકૃતિ 12.13 માં દર્શાવ્યો છે. $F = 3x - 4y$ હેતુલક્ષી વિધેય છે. F નું મહત્તમ મૂલ્ય શોધો.

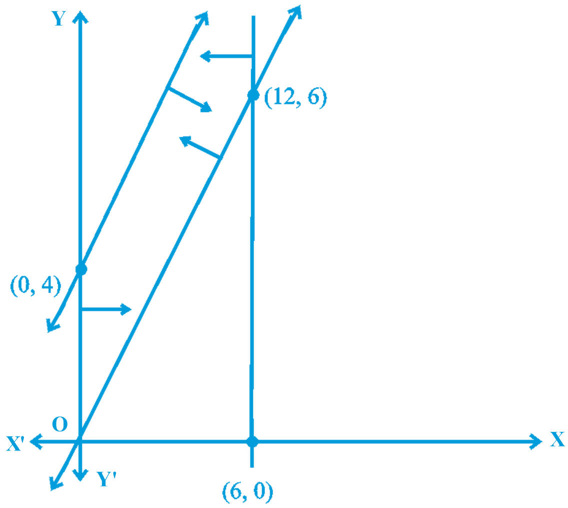
(A) 0 (B) 8

(C) 12 (D) – 18

31. પ્રશ્ન 30 જુઓ. F નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય

(A) 0 (B) –16

(C) 12 (D) અસ્તિત્વ નથી.



આકૃતિ 12.13

32. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 2), (3, 0), (6, 0), (6, 8) અને (0, 5) છે. $F = 4x + 6y$ હેતુલક્ષી વિધેય છે.

F નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય .... આગળ મળે.

(A) ફક્ત (0, 2)

(B) ફક્ત (3, 0)

(C) (0, 2) અને (3, 0) ને જોડતાં રેખાખંડના મધ્યબિંદુ

(D) (0, 2) અને (3, 0) જોડતાં કોઈ પણ બિંદુ

33. પ્રશ્ન 32 પરથી, મહત્તમ F – ન્યૂનતમ F = ...

(A) 60 (B) 48 (C) 42 (D) 18

34. સુરેખ મર્યાદા પદ્ધતિ દ્વારા નક્કી કરેલ શક્ય પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 3), (1, 1) અને (3, 0) છે. $Z = px + qy$ જ્યાં, $p, q > 0$. p અને q ની શરત પ્રમાણે Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય (3, 0) અને (1, 1) આગળ થાય, તો

(A) $p = 2q$ (B) $p = \frac{q}{2}$ (C) $p = 3q$ (D) $p = q$

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 35 થી 41 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

35. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં ચલોની સુરેખ અસમતાઓ અથવા નિયંત્રણોને .... કહે છે.

36. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં હેતુલક્ષી વિધેય હંમેશાં .... હોય છે.

37. જો સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ .... હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ નું ઇષ્ટતમ મૂલ્ય મળે અથવા ન મળે.

38. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ ના શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં બે શિરોબિંદુઓ આગળ બે સમાન મહત્તમ મૂલ્યો મળે છે, તો આ બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડના દરેક બિંદુ આગળ .... મૂલ્ય મળે.

39. જો સુરેખ અસમતાના શક્ય ઉકેલપ્રદેશને વર્તુળમાં સીમિત કરી શકાય, તો તેને .... કહે છે.

40. શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં શિરોબિંદુ એવા પ્રદેશનાં બિંદુ છે કે જે બે રેખાનું .... છે.

41. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશને હંમેશાં .... બહુકોણ થાય છે.

નીચેના ક્રમાંક 42 થી 45 વાળાં વિધાનો પૈકી કયાં સત્ય છે અને કયાં અસત્ય છે જણાવો :

42. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશ અસીમિત હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ નું મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે અથવા ન પણ મળે.

43. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ નું મહત્તમ મૂલ્ય હંમેશાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશના એક જ શિરોબિંદુએ મળે છે.

44. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશનું એક શિરોબિંદુ ઊગમબિંદુ હોય, તો હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય શૂન્ય મળે છે.

45. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં હેતુલક્ષી વિધેય $Z = ax + by$ નું મહત્તમ મૂલ્ય હંમેશાં સાન્ત હોય છે.

પ્રકરણ 13

સંભાવના

13.1 વિહંગાવલોકન

13.1.1 શરતી સંભાવના

જો E અને F યાદચ્છિક પ્રયોગની સમાન નિદર્શાવકાશ સાથે સંકળાયેલી બે ઘટના હોય, તો F ઉદ્‌ભવી હોય તે શરતે ઘટના E ની શરતી સંભાવના $P(E|F)$ થી દર્શાવાય છે.

તેને $P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$, $P(F) \neq 0$ દ્વારા મેળવવામાં આવે છે.

13.1.2 શરતી સંભાવનાના ગુણધર્મો :

E અને F યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શાવકાશ S સાથે સંકળાયેલી ઘટનાઓ હોય, તો

(i) $P(S | F) = P(F | F) = 1$

(ii) $P[(A \cup B) | F] = P(A | F) + P(B | F) - P[(A \cap B) | F]$,
જ્યાં, A અને B એ S સાથે સંગત બે ઘટનાઓ છે.

(iii) $P(E' | F) = 1 - P(E | F)$

13.1.3 સંભાવના માટેનો ગુણાકારનો નિયમ :

E અને F યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શાવકાશ સાથે સંકળાયેલી ઘટનાઓ હોય, તો

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= P(E)\ P(F | E),\ P(E) \neq 0 \\ &= P(F)\ P(E | F),\ P(F) \neq 0 \end{aligned}$$

જો ત્રણ ઘટનાઓ E, F અને G નિદર્શાવકાશ સાથે સંકળાયેલી હોય, તો

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\ P(F | E)\ P(G | (E \cap F))$$

13.1.4 નિરપેક્ષ ઘટનાઓ :

E અને F નિદર્શાવકાશ S સાથે સંકળાયેલી બે ઘટનાઓ છે. જો તે પૈકી એક ઘટનાના ઉદ્‌ભવની સંભાવના બીજી ઘટના પર આધારિત ન હોય, તો આપણે તેને નિરપેક્ષ ઘટના કહીશું.

આમ, બે ઘટનાઓ E અને F નિરપેક્ષ ઘટના હોય, તો

(a) $P(F | E) = P(F)$ **($P(E) \neq 0$ આપેલ હોય)**

(b) $P(E | F) = P(E)$ **($P(F) \neq 0$ આપેલ હોય)**

(c) $P(E \cap F) = P(E)\ P(F)$ **(સંભાવનાનો ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં)**

જો ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C નીચે આપેલી શરતોનું પાલન કરે, તો તે પરસ્પર નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે તેમ કહેવાય :

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)\ P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)\ P(C)$$

અને $P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$

13.1.5 નિદર્શાવકાશનું વિભાજન :

જો (a) $E_i \cap E_j = \phi$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$

(b) $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ અને

(c) $i = 1, 2, \ldots, n$ માટે પ્રત્યેક $E_i \neq \phi$, અર્થાત્ $P(E_i) > 0$

તો ઘટનાઓ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ને નિદર્શાવકાશ S નું વિભાજન કહેવાય છે.

13.1.6 પૂર્ણ સંભાવનાનો પ્રમેય :

$\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ નિદર્શાવકાશ S નું વિભાજન છે. ઘટના A નિદર્શાવકાશ S સાથે સંગત હોય, તો

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A \mid E_j)$$

13.1.7 બેયઝનો પ્રમેય :

જો $E_1, E_2, \ldots, E_n$ નિદર્શાવકાશ S સાથે સંગત પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે. $P(A) \neq 0$ હોય તેવી કોઈ પણ ઘટના માટે,

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i)}$$

13.1.8 યાદચ્છિક ચલ અને સંભાવના વિતરણ :

યાદચ્છિક ચલ એ વાસ્તવિક વિધેય છે. જે વિધેયનો પ્રદેશ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શાવકાશ હોય તેવા વાસ્તવિક મૂલ્યવાળા વિધેયને યાદચ્છિક ચલ કહે છે. યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ એ સંખ્યાની ગોઠવણ છે.

X	x_1	x_2	...	x_n
P (X)	p_1	p_2	...	p_n

જ્યાં, $p_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

13.1.9 યાદચ્છિક ચલનો મધ્યક અને વિચરણ

X એ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ મૂલ્યો ધરાવતો યાદચ્છિક ચલ છે. તેમની સંભાવના અનુક્રમે $p_1, p_2, \ldots, p_n$ છે. અહીં, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, X ના મધ્યકને μ વડે દર્શાવાય છે. (અથવા X નું અપેક્ષિત મૂલ્ય E (X) વડે દર્શાવાય છે.)

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

અને વિચરણ σ^2 વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p_{\text{i}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p_{\text{i}} - \mu^2$$

અથવા

$$\sigma^2 = E\left((X - \mu)^2\right)$$

યાદચ્છિક ચલ X ના પ્રમાણિત વિચલનને

$$\sigma = \sqrt{\text{વિચરણ } (X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p_i} \quad \text{તરીકે દર્શાવાય છે.}$$

13.1.10 બર્નુલી પ્રયત્નો :

નીચેની શરતોનું પાલન કરતા યાદચ્છિક પ્રયોગના પ્રયત્નોને **બર્નુલી પ્રયત્નો** કહેવાય છે :

(i) પ્રયત્નોની સંખ્યા સાન્ત હોવી જોઈએ.

(ii) પ્રયત્નો નિરપેક્ષ હોવા જોઈએ.

(iii) દરેક પ્રયત્નનાં બરાબર બે જ પરિણામો હોવા જોઈએ : સફળતા અથવા નિષ્ફળતા

(iv) સફળતા (અથવા નિષ્ફળતા)ની સંભાવના પ્રત્યેક પ્રયત્નમાં સમાન રહે છે.

13.1.11 દ્વિપદી વિતરણ :

0, 1, 2, ..., n મૂલ્યો ધરાવતા નીચેના યાદચ્છિક ચલ X ને n અને p પ્રચલવાળું દ્વિપદી વિતરણ કહે છે. તેનું સંભાવના વિતરણ

$P(X = r) = {}^nC_r \, p^r \, q^{n-r}$ છે.

$q = 1 - p$ અને $r = 0, 1, 2, ..., n$.

13.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

ઉદાહરણ 1 : A અને B કૉલેજમાં પ્રવેશ મેળવવા ઇચ્છતા બે ઉમેદવારો છે. A ની પસંદ થવાની સંભાવના 0.7 છે અને તેમાંથી માત્ર એક પસંદ થાય તેની સંભાવના 0.6 છે. B પસંદ થાય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે B પસંદ થાય તેની સંભાવના p છે.

P(A, B પૈકી બરાબર એક પસંદ થાય) = 0.6 (આપેલ છે.)

$\therefore$ P(A પસંદ થાય, B પસંદ ન થાય અથવા B પસંદ થાય, A પસંદ ન થાય) = 0.6

$\therefore$ $P(A \cap B') + P(A' \cap B) = 0.6$

$\therefore$ $P(A)\,P(B') + P(A')\,P(B) = 0.6$

$\therefore$ $(0.7)\,(1 - p) + (0.3)\,p = 0.6$

$\therefore$ $p = 0.25$

તેથી, B પસંદ થવાની સંભાવના 0.25 છે.

ઉદાહરણ 2 : ઘટનાઓ A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ઉદ્ભવે તેની સંભાવના p છે. જો A અને B માંથી બરાબર એક જ ઘટના ઉદ્ભવે તેની સંભાવના q હોય, તો સાબિત કરો કે,

$$P(A') + P(B') = 2 - 2p + q.$$

ઉકેલ : P (A અને B માંથી બરાબર એક જ (ઘટના) ઉદ્ભવે) = q (આપેલ છે.)

આપણને $P(A \cup B) - P(A \cap B) = q$ મળે.

$\therefore \quad p - P(A \cap B) = q$

$\therefore \quad P(A \cap B) = p - q$

$\therefore \quad 1 - P(A' \cup B') = p - q$

$\therefore \quad P(A' \cup B') = 1 - p + q$

$\therefore \quad P(A') + P(B') - P(A' \cap B') = 1 - p + q$

$$\begin{aligned} \therefore \quad P(A') + P(B') &= (1 - p + q) + P(A' \cap B') \\ &= (1 - p + q) + (1 - P(A \cup B)) \\ &= (1 - p + q) + (1 - p) \\ &= 2 - 2p + q \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 3 : ફૅક્ટરીમાં ઉત્પાદિત બલ્બના 10 % બલ્બ લાલ રંગના છે અને 2 % લાલ બલ્બ ખામીયુક્ત છે. જો યાદચ્છિક રીતે એક બલ્બ પસંદ કરવામાં આવે અને જો તે લાલ હોય, તો ખામીયુક્ત હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : બલ્બ લાલ હોય તે ઘટના A અને ખામીયુક્ત હોય તે ઘટના B લો.

$$P(A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10},$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{50} \times \frac{10}{1} = \frac{1}{5}$$

તેથી, પસંદ થયેલ બલ્બ લાલ હોય, તો તે ખામીયુક્ત હોય તેની સંભાવના $\frac{1}{5}$ છે.

ઉદાહરણ 4 : બે પાસા એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. પ્રથમ પાસા પર 6 મળે તે ઘટના A છે અને બીજા પાસા પર 2 મળે તે ઘટના B છે. ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ છે ?

ઉકેલ : $A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$

$A \cap B = \{(6, 2)\}$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{1}{6}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોય, તો

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

ડા.બા. $= P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

જ.બા. $= P(A)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

આથી, A અને B નિરપેક્ષ છે.

ઉદાહરણ 5 : 8 છોકરાઓ અને 4 છોકરીઓના સમૂહમાંથી યાદચ્છિક રીતે 4 વિદ્યાર્થીઓની સમિતિ પસંદ કરવામાં આવી છે. સમિતિમાં ઓછામાં ઓછી એક છોકરી છે તેમ આપેલ છે. સમિતિમાં બરાબર 2 છોકરીઓ હોય તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : ઓછામાં ઓછી એક છોકરી પસંદ કરવામાં આવે તે ઘટનાને A વડે દર્શાવતા અને બરાબર બે છોકરીઓ પસંદ થાય તે ઘટના B વડે દર્શાવતા આપણને P (B | A) ની જરૂર છે.

ઓછામાં ઓછી એક છોકરી પસંદ થાય તે ઘટનાને A વડે દર્શાવતા, A′ કોઈ છોકરી પસંદ થઈ નથી તે દર્શાવે છે. અર્થાત્ 4 છોકરાઓ પસંદ થાય.

$$P(A') = \frac{{}^{8}C_4}{{}^{12}C_4} = \frac{70}{495} = \frac{14}{99}$$

$$\therefore \quad P(A) = 1 - \frac{14}{99} = \frac{85}{99}$$

હવે, $P(A \cap B)$ = P (2 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ)

$$= \frac{{}^{8}C_2 \cdot {}^{4}C_2}{{}^{12}C_4}$$

$$= \frac{28 \times 6}{495} = \frac{56}{165}$$

આથી, $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{56}{165} \times \frac{99}{85} = \frac{168}{425}$

ઉદાહરણ 6 : કોઈ ચોક્કસ ફૅક્ટરીમાં મશીનો E_1, E_2, E_3 દ્વારા કુલ દૈનિક ઉત્પાદનના અનુક્રમે 50 %, 25 % અને 25 % ઈલેક્ટ્રિક બલ્બ ઉત્પાદિત કરે છે. મશીન E_1 અને E_2 પૈકી પ્રત્યેક દ્વારા ઉત્પન્ન થતા બલ્બમાં 4 % ખામીવાળા છે તથા E_3 દ્વારા ઉત્પન્ન થતા બલ્બોમાં 5 % બલ્બ ખામીવાળા છે તેમ આપેલ છે. જો એક દિવસ દરમિયાન ઉત્પન્ન થયેલ બલ્બમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક બલ્બ પસંદ કરવામાં આવે, તો તે ખામીવાળો નીકળે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પસંદ કરવામાં આવેલ બલ્બ ખામીવાળો છે તે ઘટના D છે.

મશીનો E_1 , E_2 અને E_3 દ્વારા ઉત્પાદિત થતા બલ્બમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલ એક બલ્બની ઘટના અનુક્રમે A_1 , A_2 અને A_3 છે.

$$P(D) = P(A_1)\,P(D\,|\,A_1) + P(A_2)\,P(D\,|\,A_2) + P(A_3)\,P(D\,|\,A_3) \qquad \text{...(1)}$$

$$P(A_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},\ P(A_2) = \frac{1}{4},\ P(A_3) = \frac{1}{4}$$

વળી, $P(D\,|\,A_1) = P(D\,|\,A_2) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

$$P(D\,|\,A_3) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

આ મૂલ્યોને (1) માં મૂકતાં, આપણને

$$P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{25} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{25} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{80} = \frac{17}{400} = 0.0425$$

ઉદાહરણ 7 : સમતોલ પાસાને 10 વખત ઉછાળતાં ઓછામાં ઓછી 8 વખત પાસા પરનો અંક 3 નો ગુણિત મળે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : અહીં અંક 3 નો ગુણિત મળે તેને સફળતા કહીએ અર્થાત્ 3 અથવા 6.

તેથી, p (3 અથવા 6) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

10 વખત ઉછાળતા r સફળતા મળે તેની સંભાવના

$$P(X = r) = {}^{10}C_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{10-r}$$

P (ઓછામાં ઓછી 8 સફળતા) $= P(8) + P(9) + P(10)$

$$= {}^{10}C_8\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}^{10}C_9\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)^1 + {}^{10}C_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$= \frac{1}{3^{10}} [45 \times 4 + 10 \times 2 + 1] = \frac{201}{3^{10}}.$$

ઉદાહરણ 8 : એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

X	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	c	$2c$	$2c$	$3c$	c^2	$2c^2$	$7c^2 + c$

c ની કિંમત શોધો. મધ્યક પણ શોધો.

ઉકેલ : $\Sigma p_i = 1$

$c + 2c + 2c + 3c + c^2 + 2c^2 + 7c^2 + c = 1$

$10c^2 + 9c - 1 = 0$

$(10c - 1)(c + 1) = 0$

$\Rightarrow c = \frac{1}{10}, c = -1$

આથી, c નું શક્ય મૂલ્ય $c = \frac{1}{10}$ **(શા માટે ?)**

$$\text{મધ્યક} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{7} x_i p_i$$

$$= 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 5\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 6 \times 2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 7\left(7\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{6}{10} + \frac{12}{10} + \frac{5}{100} + \frac{12}{100} + \frac{49}{100} + \frac{7}{10}$$

$$= 3.66$$

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

ઉદાહરણ 9 : એક પેટીમાં 8 લાલ અને 4 સફેદ દડા છે. તેમાંથી ચાર દડા પુરવણી સિવાય પસંદ કરવામાં આવે છે. X પસંદ થયેલ લાલ દડાની સંખ્યા દર્શાવે છે. X નું સંભાવના વિતરણ શોધો.

ઉકેલ : 4 દડા પસંદ કરવાના હોવાથી, X નાં મૂલ્યો 0, 1, 2, 3, 4 લઈ શકીએ.

$$P(X = 0) = P(\text{લાલ દડા નથી.}) = P(\text{4 સફેદ દડા}) = \frac{{}^4C_4}{{}^{12}C_4} = \frac{1}{495}$$

$P(X = 1)$ = P(1 લાલ અને 3 સફેદ દડા)

$$= \frac{{}^8C_1 \times {}^4C_3}{{}^{12}C_4} = \frac{32}{495}$$

$P(X = 2)$ = P(2 લાલ અને 2 સફેદ દડા)

$$= \frac{{}^8C_2 \times {}^4C_2}{{}^{12}C_4} = \frac{168}{495}$$

$P(X = 3)$ = P(3 લાલ અને 1 સફેદ દડો)

$$= \frac{{}^8C_3 \times {}^4C_1}{{}^{12}C_4} = \frac{224}{495}$$

$P(X = 4)$ = P(4 લાલ દડા)

$$= \frac{{}^8C_4}{{}^{12}C_4} = \frac{70}{495}$$

આમ, X નું માંગેલ સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ છે :

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{495}$	$\frac{32}{495}$	$\frac{168}{495}$	$\frac{224}{495}$	$\frac{70}{495}$

ઉદાહરણ 10 : એક સિક્કાને ત્રણવાર ઉછાળતાં મળતી છાપની સંખ્યાનું વિચરણ તથા પ્રમાણિત વિચલન નક્કી કરો :

ઉકેલ : X એ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવાથી મળતી છાપની સંખ્યા દર્શાવે છે. તેથી X નાં મૂલ્યો 0, 1, 2, 3 લેતાં, જ્યારે સિક્કાને 3 વખત ઉછાળીએ, ત્યારે આપણને મળતો નિદર્શાવકાશ,

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$P(X = 0)$ = P(એક પણ છાપ નહિ.) = P(TTT) = $\frac{1}{8}$

$P(X = 1)$ = P(એક છાપ) = P(HTT, THT, TTH) = $\frac{3}{8}$

$P(X = 2)$ = P(બે છાપ) = P(HHT, HTH, THH) = $\frac{3}{8}$

$P(X = 3)$ = P(ત્રણ છાપ) = P(HHH) = $\frac{1}{8}$

તેથી, X નું સંભાવના વિતરણ

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

X નું વિચરણ $= \sigma^2 = \Sigma\, x_i^2\, p_i - \mu^2$, **...(1)**

જ્યાં μ એ X નો મધ્યક છે.

$$\mu = \Sigma\, x_i\, p_i = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{2} \qquad ...(2)$$

હવે, $\Sigma\, x_i^2\, p_i = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$ ...(3)

(1), (2) અને (3) પરથી, આપણને

$$\sigma^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

પ્રમાણિત વિચલન $= \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ઉદાહરણ 11 : ઉદાહરણ 6 જુઓ. ખામીવાળા બલ્બનું ઉત્પાદન યંત્ર E_1 દ્વારા થયું હોય તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : હવે આપણે $P(A_1 | D)$ શોધવાનું છે.

$$P(A_1 | D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{P(A_1)P(D|A_1)}{P(D)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{25}}{\frac{17}{400}} = \frac{8}{17}$$

ઉદાહરણ 12 : એક ગાડી બનાવતી કંપનીને બે કારખાના X અને Y છે. કારખાના X માં ગાડીની સંખ્યા પૈકી કુલ 70 % ગાડી બને છે. કારખાના Y માં કુલ સંખ્યાના 30 % ગાડી બને છે. કારખાના X માં બનતી 80 % ગાડી અને કારખાના Y માં બનતી 90 % ગાડી ઉત્તમ ગુણવત્તાવાળી છે. યાદૃચ્છિક રીતે એક ગાડી પસંદ કરતાં તે ઉત્તમ ગુણવત્તાવાળી માલૂમ પડે છે. તે કારખાના X માંથી આવી હોય તેની સંભાવના શું છે ?

ઉકેલ : ધારો કે, ઘટના E એ ગાડી ઉત્તમ ગુણવત્તાવાળી છે. B_1 અને B_2 ઘટના અનુક્રમે પસંદ થયેલ ગાડીનું કારખાના X તથા Y માં ઉત્પાદન થયું હોય.

હવે, $P(B_1) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$, $P(B_2) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

$P(E | B_1)$ = કારખાના X માં બનતી ઉત્તમ ગુણવત્તાવાળી ગાડીની સંભાવના $= \frac{80}{100} = \frac{8}{10}$

$P(E | B_2) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$

$\therefore$ $P(B_1 | E)$ = પસંદ થયેલ ગાડી કારખાના X માં બનેલ હોય ત્યારે તે ઉત્તમ ગુણવત્તાવાળી હોય તેની સંભાવના

$$= \frac{P(B_1) \times P(E | B_1)}{P(B_1) \cdot P(E | B_1) + P(B_2) \cdot P(E | B_2)}$$

$$= \frac{\frac{7}{10} \times \frac{8}{10}}{\frac{7}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{9}{10}} = \frac{56}{83}$$

આથી, માંગેલ સંભાવના $= \frac{56}{83}$.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 13 થી 17 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 13 : A અને B બે ઘટનાઓ છે. P (A) = 0.2, P (B) = 0.4, P (A ∪ B) = 0.6 હોય, તો $P(A \mid B)$ = ...

(A) 0.8 (B) 0.5 (C) 0.3 (D) 0

ઉકેલ : આપેલ માહિતી પરથી, $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$,

તે દર્શાવે છે કે, $P(A \cap B) = 0$. તેથી, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$.

સાચો વિકલ્પ (D) છે.

ઉદાહરણ 14 : બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.2$, અને $P(A \mid B) = 0.5$.

તો $P(A'|B')$ = ...

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{6}{7}$

ઉકેલ :
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A \mid B)\, P(B) \\ &= 0.5 \times 0.2 \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A' \mid B') &= \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} \\ &= \frac{P[(A \cup B)']}{P(B')} \\ &= \frac{1 - P((A \cup B))}{1 - P(B)} \\ &= \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - P(B)} \\ &= \frac{1 - 0.6 - 0.2 + 0.1}{1 - 0.2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

સાચો વિકલ્પ (C) છે.

ઉદાહરણ 15 : જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય કે જેથી $0 < P(A) < 1$ અને $0 < P(B) < 1$, તો આપેલ પૈકી કયું સાચું નથી ?

(A) A અને B પરસ્પર નિવારક છે. (B) A અને B′ નિરપેક્ષ છે.

(C) A′ અને B નિરપેક્ષ છે. (D) A′ અને B′ નિરપેક્ષ છે.

ઉકેલ : સાચો વિકલ્પ (A) છે.

ઉદાહરણ 16 : X એ યાદચ્છિક ચલ છે. X નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

X	30	10	–10
P (X)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

તો E (X) = ...

(A) 6 (B) 4 (C) 3 (D) –5

ઉકેલ : $E(X) = 30 \times \frac{1}{5} + 10 \times \frac{3}{10} - 10 \times \frac{1}{2} = 4.$

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 17 : યાદચ્છિક ચલ X એ ધારણ કરેલ કિંમતો $x_1, x_2, ..., x_n$ ની સંભાવના અનુક્રમે $p_1, p_2, ..., p_n$, હોય, તો X નું વિચરણ .... છે.

(A) $E(X^2)$ (B) $E(X^2) + E(X)$

(C) $E(X^2) - [E(X)]^2$ (D) $\sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$

ઉકેલ : સાચો વિકલ્પ (C) છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 18 અને 19 વાળાં પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 18 : જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય કે જેથી, $P(A) = p$, $P(B) = 2p$ અને

P(A અને B માંથી બરાબર એક) $= \frac{5}{9}$, તો $p =$ ....

ઉકેલ : $\left[(1-p)(2p) + p(1-2p) = 3p - 4p^2 = \frac{5}{9}\right]$

$\therefore \quad 36p^2 - 27p + 5 = 0$

$\therefore \quad (3p - 1)(12p - 5) = 0$

$p = \frac{1}{3}$ અથવા $\frac{5}{12}$

ઉદાહરણ 19 : જો A અને B′ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો $P(A' \cup B) = 1 -$ ....

ઉકેલ : $P(A' \cup B) = 1 - P(A \cap B') = 1 - P(A)\ P(B')$

(A અને B′ નિરપેક્ષ છે.).

નીચેના ક્રમાંક 20 થી 22 વાળાં વિધાનો પૈકી કયાં સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

ઉદાહરણ 20 : A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

ઉકેલ : અસત્ય. કારણ કે, જ્યારે A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટના હોય ત્યારે, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

ઉદાહરણ 21 : જો $P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$ હોય, તો ત્રણ ઘટના A, B અને C ને નિરપેક્ષ ઘટનાઓ કહેવાય છે.

ઉકેલ : અસત્ય. કારણ એ છે કે, જો A, B, C જોડયુક્ત નિરપેક્ષ ઘટના હોય અને

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$ થાય તો A, B, C નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

ઉદાહરણ 22 : બર્નુલી પ્રયત્નોની એક શરત એવી છે કે પ્રયત્નો પરસ્પર નિરપેક્ષ હોય.

ઉકેલ : સત્ય

સ્વાધ્યાય 13.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (S.A.)

1. અસમતોલ પાસા માટે મળતાં પરિણામોની સંભાવના નીચે પ્રમાણે છે :

   $P(1) = P(2) = 0.2$, $P(3) = P(5) = P(6) = 0.1$ અને $P(4) = 0.3$.

   પાસાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે. ઘટના A અને B અનુક્રમે ‘દરેક વખતે સમાન સંખ્યા મળે’ અને કુલ સરવાળો 10 અથવા વધુ હોય’ તે છે. A અને B નિરપેક્ષ છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

2. ઉપર્યુક્ત પ્રશ્ન 1 માં પાસો સમતોલ હોય, તો ઘટના A અને B નિરપેક્ષ છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

3. બે ઘટના A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના ઉદ્ભવે તેની સંભાવના 0.6 છે. જો A અને B એક- સાથે ઉદ્ભવે તેની સંભાવના 0.3 છે. $P(A') + P(B')$ શોધો.

4. એક થેલીમાં 5 લાલ અને 3 કાળી લખોટીઓ છે. પુનરાવર્તન વગર એક પછી એક ત્રણ લખોટીઓ પસંદ કરવામાં આવે છે. જો પ્રથમ લખોટી લાલ રંગની હોય, તો પસંદ કરેલી ત્રણ લખોટીમાંથી ઓછામાં ઓછી એક કાળા રંગની હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

5. બે પાસાને એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે અને કુલ સરવાળો નોંધવામાં આવે છે. ઘટનાઓ E, F અને G અનુક્રમે 'સરવાળો 4 છે', 'સરવાળો 9 અથવા તેથી વધુ', 'સરવાળો 5 વડે વિભાજ્ય છે' છે. P(E), P(F) અને P(G) શોધો અને જો શક્ય હોય, તો કઈ જોડની ઘટનાઓ નિરપેક્ષ છે તે નક્કી કરો.

6. સિક્કાને ત્રણવાર ઉછાળવાના પ્રયોગને દ્વિપદી વિતરણ શા માટે કહેવાય છે તે સમજાવો.

7. A અને B બે ઘટનાઓ છે. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ અને $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

(i) $P(A|B)$ (ii) $P(B|A)$ (iii) $P(A'|B)$ (iv) $P(A'|B')$ શોધો.

8. ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C ની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{2}$ છે. $P(A \cap C) = \frac{1}{5}$ અને $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ આપેલ છે. $P(C \mid B)$ અને $P(A' \cap C')$ શોધો.

9. બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ E_1 અને E_2 માટે $P(E_1) = p_1$ અને $P(E_2) = p_2$. જે ઘટનાઓની સંભાવના

(i) $p_1 p_2$ (ii) $(1 - p_1) p_2$ (iii) $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$ (iv) $p_1 + p_2 - 2p_1p_2$ હોય તેને શબ્દોમાં વર્ણવો.

10. યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

X	0.5	1	1.5	2
P(X)	k	k^2	$2k^2$	k

(i) k ની કિંમત શોધો.

(ii) સંભાવના વિતરણનો મધ્યક શોધો.

11. સાબિત કરો : (i) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

(ii) $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap B') + P(A' \cap B)$

12. X એ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળતા મળતા કાંટાની સંખ્યા દર્શાવે છે. X નું પ્રમાણિત વિચલન નક્કી કરો.

13. પાસાની રમતમાં, એક ખેલાડી દાવમાં દરેક વખતે પાસો ઉછાળે ત્યારે ₹ 1 ચૂકવે છે. જો પાસા પર મળતો અંક 3 હોય, તો તે ₹ 5 મેળવે છે. જો પાસા પર 1 અથવા 6 મળે, તો તે ₹ 2 મેળવે છે અન્યથા કશું ન મળે. પ્રયત્નોની લાંબી શૃંખલા બાદ ખેલાડીને મળતા નફાનું અપેક્ષિત મૂલ્ય શોધો.

14. એક જ સમયે ત્રણ પાસા ઉછાળવામાં આવે છે. જો પાસા પર મળતા અંકોનો સરવાળો છ થાય છે, તેમ જાણતા હોય, તો ત્રણ વખત 2 નો અંક મળે તેની સંભાવના શોધો.

15. ધારો કે, લોટરીની ₹ 1 ની 10,000 ટિકિટો વેચવામાં આવે છે. પ્રથમ ઈનામ ₹ 3000 અને બીજું ઈનામ ₹ 2000 છે. ₹ 500 નાં ત્રણ તૃતીય ઈનામ છે. જો તમે એક ટિકિટ ખરીદો છો તો તમારી ગાણિતિક અપેક્ષા શું છે ?

16. એક થેલીમાં 4 સફેદ અને 5 કાળા દડા છે. બીજી થેલીમાં 9 સફેદ, 7 કાળા દડા છે. એક દડો પ્રથમ થેલીમાંથી બીજી થેલીમાં નાખવામાં આવે છે અને પછી બીજી થેલીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ દડો સફેદ રંગનો હોય તેની સંભાવના શોધો.

17. થેલી I માં 3 કાળા અને 2 સફેદ દડા છે. થેલી II માં 2 કાળા અને 4 સફેદ દડા છે. યાદચ્છિક રીતે એક થેલી અને તેમાંથી એક દડો પસંદ કરવામાં આવે, તો કાળો દડો પસંદ થવાની સંભાવના નક્કી કરો.

18. એક પેટીમાં 5 વાદળી અને 4 લાલ દડા છે. યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે અને તેને પરત મૂકવામાં આવતો નથી. તેનો રંગ પણ નોંધવામાં આવતો નથી. ત્યાર બાદ યાદચ્છિક રીતે બીજો દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. બીજો દડો વાદળી રંગનો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

19. 52 પત્તાંના ઢગમાંથી પુનરાવર્તન વગર ક્રમશઃ ચાર પત્તાં પસંદ કરવામાં આવે છે. ચારે ય પત્તાં રાજાનાં હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

20. પાસાને 5 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. બરાબર ત્રણ વખત અયુગ્મ સંખ્યા આવે તેની સંભાવના શોધો.

21. દસ સિક્કાઓને ઉછાળવામાં આવે છે. ઓછામાં ઓછી 8 છાપ મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

22. એક વ્યક્તિ નિશાન તાકી શકે તેની સંભાવના 0.25 છે. તે 7 વખત નિશાન તાકે છે. તે ઓછામાં ઓછી બે વખત નિશાન તાકી શકે તેની સંભાવના કેટલી ?

23. 100 ઘડિયાળોના ઢગમાં 10 ઘડિયાળ ખામીયુક્ત છે તેની જાણ છે. જો 8 ઘડિયાળ એક પછી એક પુનરાવર્તન સહિત પસંદ કરવામાં આવે, તો ઓછામાં ઓછી એક ઘડિયાળ ખામીયુક્ત પસંદ થાય તેની સંભાવના કેટલી ?

24. યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ આપેલ છે :

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	0.25	0.3	0.2	0.15

(i) $V\left(\frac{X}{2}\right)$ (ii) X નું વિચરણ શોધો.

25. યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

X	0	1	2	3
P(X)	k	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{4}$	$\frac{k}{8}$

(i) k ની કિંમત મેળવો.

(ii) $P(X \le 2)$ અને $P(X > 2)$ મેળવો.

(iii) $P(X \le 2) + P(X > 2)$ મેળવો.

26. નીચે આપેલ સંભાવના વિતરણ માટે યાદચ્છિક ચલ X નું પ્રમાણિત વિચલન મેળવો :

X	2	3	4
P(X)	0.2	0.5	0.3

27. એક સમતોલ પાસા માટે $P(4) = \frac{1}{10}$ અને બાકીની સંખ્યાની સંભાવના સમાન છે. પાસાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે. X એ 'પાસા પર ચાર જેટલી વખત આવે તે સંખ્યા દર્શાવે' તો યાદચ્છિક ચલ X નું વિચરણ શોધો.

28. એક પાસાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. X એ પાસા પર જેટલી વખત 2 આવે તે સંખ્યા દર્શાવે, તો X નું અપેક્ષિત મૂલ્ય શોધો.

29. બે સમતોલ પાસાને એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. પ્રથમ પાસા માટે $P(6) = \frac{1}{2}$. બાકીની સંખ્યા માટેની સંભાવના સમાન છે. બીજા પાસા માટે $P(1) = \frac{2}{5}$ અને બાકીની સંખ્યાની સંભાવના સમાન છે. સંખ્યા 1 મળે તેનું સંભાવના વિતરણ શોધો.

30. યાદૃચ્છિક ચલ X અને Y નાં સંભાવના વિતરણો નીચે પ્રમાણે છે :

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Y	0	1	2	3
P(Y)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

સાબિત કરો કે, $E(Y^2) = 2\ E(X)$

31. એક ફૅક્ટરી બલ્બ બનાવે છે. કોઈ એક બલ્બ ખામીવાળો હોય તેની સંભાવના $\frac{1}{50}$ છે અને દરેક બૉક્સમાં 10 બલ્બ ભરેલા છે. કોઈ એક બૉક્સ માટે નીચેની સંભાવના શોધો :

(i) કોઈ પણ બલ્બ ખરાબ નથી.

(ii) બરાબર બે બલ્બ ખરાબ છે.

(iii) 8 થી વધુ બલ્બ બરાબર કાર્ય કરે છે.

32. ધારો કે તમારી પાસે બે સમાન દેખાતા સિક્કા છે. તમે જાણો છો કે તે પૈકી એક સમતોલ છે અને એક બે છાપવાળો છે. તમે એક સિક્કાને બહાર કાઢીને ઉછાળો છો અને છાપ મળે, તો પસંદ થયેલ સિક્કો સમતોલ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

33. ધારો કે રુધિરજૂથ O ધરાવતા 6 % લોકો ડાબોડી છે અને અન્ય રુધિરજૂથનાં 10 % લોકો ડાબોડી છે. 30 % લોકોનું રુધિરજૂથ O છે. જો કોઈ ડાબોડી વ્યક્તિ યાદૃચ્છિક પસંદ કરવામાં આવે, તો તેનું રુધિરજૂથ O હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

34. પ્રાકૃતિક સંખ્યા ગણ $S = \{1, 2, 3, ..., n\}$ માંથી બે પ્રાકૃતિક સંખ્યા r, s એક પછી એક પુરવણી સિવાય પસંદ કરવામાં આવે છે. $P[r \le p | s \le p]$, જ્યાં, $p \in S$ શોધો.

35. એક પાસાને બે વખત ઉછાળતાં મળતાં પરિણામોમાં બંનેમાંથી મોટા પૂર્ણાંકનું સંભાવના વિતરણ મેળવો. વિતરણનો મધ્યક પણ મેળવો.

36. યાદૃચ્છિક ચલ X ફક્ત 0, 1, 2 કિંમતો ધારણ કરે છે. $P(X = 0) = P(X = 1) = p$ અને $E(X^2) = E(X)$ છે. p ની કિંમત શોધો.

37. નીચે આપેલ વિતરણનું વિચરણ શોધો :

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

38. A અને B પાસાની એક જોડને વારાફરતી ઉછાળે છે. જો સરવાળો 6 થાય તો A જીત મેળવે છે અને સરવાળો 7 થાય તો B જીત મેળવે છે. A રમતની શરૂઆત કરે છે. પાસાની જોડીને ત્રીજી વખત ઉછાળતા A જીત મેળવે તેની સંભાવના શોધો.

39. બે પાસાને ઉછાળવામાં આવે છે. નીચે આપેલી બે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ છે કે નહિ તે ચકાસો :

$A = \{(x, y) : x + y = 11\}$ $B = \{(x, y) : x \ne 5\}$, જ્યાં, (x, y) વિશિષ્ટ બિંદુ સૂચવે છે.

40. એક પાત્રમાં m સફેદ અને n કાળા દડા છે. એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને તેને તે જ રંગના વધારાના k દડા સાથે પાત્રમાં પાછો મૂકવામાં આવે છે. યાદચ્છિક રીતે ફરીથી એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે, દર્શાવો કે પસંદ થયેલ સફેદ દડાની સંભાવના k પર આધારિત નથી.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (L.A.)

41. ત્રણ થેલીઓમાં નીચે પ્રમાણેના લાલ અને સફેદ દડાઓ છે :

થેલી 1 : 3 લાલ દડાઓ

થેલી 2 : 2 લાલ અને 1 સફેદ દડાઓ

થેલી 3 : 3 સફેદ દડાઓ

થેલી i પસંદ કરી તેમાંથી એક દડો પસંદ કરવામાં આવે તેની સંભાવના $\frac{i}{6}$ છે. $i = 1, 2, 3$.

(i) એક લાલ દડો પસંદ થાય. (ii) એક સફેદ દડો પસંદ થાય. તે ઘટનાની સંભાવના કેટલી ?

42. ઉપરનો પ્રશ્ન 41 જુઓ. જો સફેદ દડો પસંદ થયો હોય, તો તે

(i) થેલી 2 તથા (ii) થેલી 3 માંથી પસંદ થાય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

43. એક દુકાનદાર ત્રણ પ્રકારનાં ફૂલ A_1, A_2 અને A_3 નાં બીજ વેચે છે. તે અનુક્રમે 4 : 4 : 2 નાં પ્રમાણમાં મિશ્ર કરી વેચવામાં આવે છે. આ ત્રણ પ્રકારનાં બીજનો બીજ અંકુરણ થવાનો દર 45 %, 60 % અને 35 % છે. નીચેની સંભાવના ગણો :

(i) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ બીજ અંકુરિત થાય.

(ii) બીજ A_3 પ્રકારનું છે તેમ આપેલ હોય, ત્યારે તે અંકુરિત થશે નહિ.

(iii) યાદચ્છિક રીતે પસંદ થયેલ બીજ અંકુરિત થતું નથી એમ આપેલ હોય, ત્યારે તે A_2 પ્રકારનું છે.

44. પત્ર TATA NAGAR અથવા CALCUTTA થી આવ્યો છે તે જ્ઞાત છે. પરબીડિયા પર ફક્ત બે ક્રમિક અક્ષરો TA જ દેખાય છે. પત્ર TATA NAGAR થી આવ્યો હોય તેની સંભાવના શું છે ?

45. બે થેલી પૈકી એકમાં 3 કાળા અને 4 સફેદ દડા છે. જ્યારે બીજી થેલીમાં 4 કાળા અને 3 સફેદ દડા છે. એક પાસો ઉછાળવામાં આવે છે. જો તે 1 અથવા 3 દર્શાવે તો પ્રથમ થેલીમાંથી દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. પરંતુ તે બીજો કોઈ પૂર્ણાંક બતાવે તો બીજી થેલીમાંથી એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે, તો કાળો દડો પસંદ થવાની સંભાવના શોધો.

46. ત્રણ પાત્રોમાં અનુક્રમે 2 સફેદ અને 3 કાળા દડા, 3 સફેદ અને 2 કાળા દડા, 4 સફેદ અને 1 કાળો દડો છે. દરેક પાત્ર પસંદ થવાની સંભાવના સરખી છે. પસંદ થયેલ પાત્રમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવે, તો તે સફેદ માલૂમ પડે છે તો, તે બીજા પાત્રમાંથી આવ્યો હોય તેની સંભાવના શોધો.

47. છાતીનો ઍક્સ-રે તપાસતાં, જ્યારે વ્યક્તિ ખરેખર ક્ષયરોગથી પિડાતી હોય ત્યારે ક્ષયરોગનું નિદાન થાય (રિપૉર્ટ દ્વારા વ્યક્તિ ક્ષયરોગનો રોગી છે તેવું પ્રમાણિત થાય) તેની સંભાવના 0.99 છે. સ્વસ્થ વ્યક્તિને નિદાનમાં ક્ષયરોગ દર્શાવે તેની સંભાવના 0.001 છે. કોઈ એક શહેરમાં 1000 વ્યક્તિએ 1 વ્યક્તિ ક્ષયરોગથી પિડાય છે. કોઈ એક વ્યક્તિને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી તેનું નિદાન કરતાં ક્ષયરોગ માલૂમ પડે, તો તેને ખરેખર ક્ષયરોગ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

48. કોઈ વસ્તુ ત્રણ યંત્રો A, B અને C દ્વારા બને છે. કોઈ એક સમયે બનેલ વસ્તુઓમાંથી 50 % યંત્ર A દ્વારા, 30 % યંત્ર B દ્વારા અને 20 % એ યંત્ર C દ્વારા બનેલ છે. યંત્ર A દ્વારા ઉત્પાદિત વસ્તુમાં 2 % અને યંત્ર B દ્વારા ઉત્પાદિત વસ્તુમાં 2 % તથા યંત્ર C દ્વારા ઉત્પાદિત વસ્તુમાં 3 % ખામીવાળી છે. બધી વસ્તુઓ એક ગોદામમાં સંગ્રહિત છે. યાદચ્છિક રીતે એક વસ્તુ પસંદ કરવામાં આવે છે અને તે ખામીયુક્ત માલૂમ પડે છે, તો તે વસ્તુ યંત્ર A દ્વારા બની હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

49. યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

$$P(X = x) = \begin{cases} k(x + 1) & x = 1, 2, 3, 4 \text{ માટે} \\ 2kx & x = 5, 6, 7 \text{ માટે} \\ 0 & \text{અન્યથા} \end{cases}$$

જ્યાં, k અચળ છે.

(i) k નું મૂલ્ય (ii) E (X) (iii) X નું પ્રમાણિત વિચલન ગણો.

50. યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

X	1	2	4	2A	3A	5A
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

ગણતરી કરો.

(i) E(X) = 2.94 હોય, તો A નું મૂલ્ય

(ii) X નું વિચરણ

51. યાદચ્છિક ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

$$P(X = x) = \begin{cases} kx^2 & x = 1, 2, 3 \\ 2kx & x = 4, 5, 6 \\ 0 & \text{અન્યથા} \end{cases}$$

જ્યાં, k અચળ છે. ગણતરી કરો.

(i) E(X) (ii) E $(3X^2)$ (iii) $P(X \geq 4)$

52. એક થેલીમાં $(2n + 1)$ સિક્કા છે. તે પૈકી n સિક્કા બંને બાજુએ છાપ ધરાવે છે. જ્યારે બાકીના સિક્કા સમતોલ છે. થેલીમાંથી એક સિક્કો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે અને તેને ઉછાળવામાં આવે છે. જો સિક્કો ઉછાળતાં મળતું પરિણામ છાપ હોય તેની સંભાવના $\frac{31}{42}$ હોય, તો n નું મૂલ્ય નક્કી કરો.

53. બરાબર ચીપેલાં પત્તાંના ઢગમાંથી બે પત્તાં એક પછી એક પુનરાવર્તન સિવાય પસંદ કરવામાં આવે છે. યાદચ્છિક ચલ X નો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો. જ્યાં, X એ એક્કો મળે તેની સંખ્યા છે.

54. પાસાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે. પાસા ઉછાળતાં મળતો પૂર્ણાંક યુગ્મ મળે તે સફળતા છે. સફળતાનું વિચરણ શોધો.

55. એક પત્તા પર એક નંબર, આ રીતે 1 થી 5 અંક લખેલાં 5 પત્તાંમાંથી બે પત્તાં યાદચ્છિક રીતે પુનરાવર્તન સિવાય પસંદ કરવામાં આવે છે. X એ બે પત્તાં પર મળતા અંકોનો સરવાળો દર્શાવે છે. X નો મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 56 થી 82 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

56. જો $P(A) = \frac{4}{5}$ અને $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$, તો $P(B | A) =$ ....

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{17}{20}$

57. જો $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$ અને $P(B) = \frac{17}{20}$, તો $P(A | B) =$ ....

(A) $\frac{14}{17}$ (B) $\frac{17}{20}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{1}{8}$

58. જો $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ અને $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, તો $P(B | A) + P(A | B) =$ ....

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{2}$

59. જો $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$ અને $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, તો $P(A' | B') \cdot P(B' | A') =$ ....

(A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{5}{7}$ (C) $\frac{25}{42}$ (D) 1

60. જો A અને B ઘટનાઓ છે. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A | B) = \frac{1}{4}$ હોય, તો $P(A' \cap B') =$ ....

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{16}$

61. જો $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.8$ અને $P(B | A) = 0.6$ હોય, તો $P(A \cup B) =$ ....

(A) 0.24 (B) 0.3 (C) 0.48 (D) 0.96

62. જો A અને B બે ઘટનાઓ છે તથા $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, તો

(A) $P(A | B) = P(A) \cdot P(B)$ (B) $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

(C) $P(A | B) \cdot P(B | A) = 1$ (D) $P(A | B) = \frac{P(A)}{P(B)}$

63. A અને B એવી ઘટનાઓ છે કે જેથી $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ અને $P(A \cup B) = 0.5$, તો $P(B' \cap A)$ $=$ ....

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{1}{5}$

64. ઘટનાઓ A અને B માટે $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(A | B) = \frac{1}{2}$ અને $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ હોય, તો $P(A) =$ ....

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$

65. ઉપર્યુક્ત પ્રશ્ન નં. 64 માં $P(B \mid A') =$ ....

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$

66. જો $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(A \mid B) = \frac{1}{2}$ અને $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, તો $P((A \cup B)') + P(A' \cup B) =$ ....

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

67. $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ અને $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$ હોય, તો $P(A' \mid B) =$ ....

(A) $\frac{6}{13}$ (B) $\frac{4}{13}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$

68. ઘટનાઓ A અને B માટે, $P(A) > 0$ અને $P(B) \neq 1$, તો $P(A' \mid B') =$ ....

(A) $1 - P(A \mid B)$ (B) $1 - P(A' \mid B)$ (C) $\frac{1 - P(A \cup B)}{P(B')}$ (D) $\frac{P(A')}{P(B')}$

69. જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, $P(A) = \frac{3}{5}$ અને $P(B) = \frac{4}{9}$, તો $P(A' \cap B') =$ ....

(A) $\frac{4}{15}$ (B) $\frac{8}{45}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{9}$

70. જો બે ઘટનાઓ નિરપેક્ષ હોય, તો

(A) તે પરસ્પર નિવારક હોવી જ જોઈએ.

(B) તેમની સંભાવનાનો સરવાળો 1 થવો જ જોઈએ.

(C) (A) અને (B) બંને સાચા છે.

(D) ઉપર્યુક્તમાંથી કોઈ પણ સાચું નથી.

71. ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{5}{8}$ અને $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ હોય, તો

$P(A \mid B) \cdot P(A' \mid B) =$ ....

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{3}{20}$ (D) $\frac{6}{25}$

72. જો A અને B નિરપેક્ષ હોય, તો $P(A \cap B) =$ ....

(A) $P(A) + P(B)$ (B) $P(A) - P(B)$ (C) $P(A) \cdot P(B)$ (D) $\frac{P(A)}{P(B)}$

73. બે ઘટનાઓ E અને F નિરપેક્ષ છે. જો $P(E) = 0.3$, $P(E \cup F) = 0.5$, તો $P(E \mid F) - P(F \mid E)$ $=$ ....

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{3}{35}$ (C) $\frac{1}{70}$ (D) $\frac{1}{7}$

74. એક થેલીમાં 5 લાલ અને 3 વાદળી દડાઓ છે. જો 3 દડાઓ યાદચ્છિક રીતે પુનરાવર્તન સિવાય પસંદ કરવામાં આવે, તો બરાબર એક લાલ દડો મળે તેની સંભાવના ....

(A) $\frac{45}{196}$ (B) $\frac{135}{392}$ (C) $\frac{15}{56}$ (D) $\frac{15}{29}$

75. ઉપર્યુક્ત પ્રશ્ન નં. 74 વાંચો. પ્રથમ દડો લાલ હોય, ત્યારે પસંદ કરેલ ત્રણ લાલ દડામાંથી બરાબર બે દડા લાલ હોવાની સંભાવના ....

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{15}{28}$ (D) $\frac{5}{28}$

76. ત્રણ વ્યક્તિઓ A, B અને C વારાફરતી નિશાન તાકે છે. A શરૂઆત કરે છે. ત્રણેયની નિશાન તાકી શકવાની સંભાવના અનુક્રમે 0.4, 0.3 અને 0.2 છે. બે વ્યક્તિ નિશાન તાકી શકે તેની સંભાવના ....

(A) 0.024 (B) 0.188 (C) 0.336 (D) 0.452

77. ધારણા કરો કે એક કુટુંબમાં દરેક બાળક સમાન રીતે છોકરો અથવા છોકરી હોવાનું સંભવિત છે. યાદચ્છિક રીતે ત્રણ બાળકોવાળું એક કટુંબ પસંદ કરો. કુટુંબમાં ઓછામાં ઓછી એક છોકરી હોય તેમ આપેલ હોય, ત્યારે સૌથી મોટું બાળક છોકરી હોય તેની સંભાવના ....

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{7}$

78. પાસો ઉછાળવામાં આવે અને રમવાનાં 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પાસા પર યુગ્મ નંબર આવે અને કાળીનું પત્તું મળે તેની સંભાવના ....

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{3}{4}$

79. એક પેટીમાં 3 નારંગી દડા, 3 લીલા દડા અને 2 વાદળી દડા છે. ત્રણ દડાઓ યાદચ્છિક રીતે પુનરાવર્તન સિવાય પસંદ કરવામાં આવે, તો 2 લીલા અને એક વાદળી દડો મળે તેની સંભાવના ....

(A) $\frac{3}{28}$ (B) $\frac{2}{21}$ (C) $\frac{1}{28}$ (D) $\frac{167}{168}$

80. એક ટૉર્ચમાં 8 બૅટરી પૈકી 3 બંધ છે. જો બે બૅટરીને પુનરાવર્તન સિવાય પસંદ કરી તેમનું પરીક્ષણ કરવામાં આવે, તો બંને બૅટરી બંધ હોય, તેની સંભાવના ....

(A) $\frac{33}{56}$ (B) $\frac{9}{64}$ (C) $\frac{1}{14}$ (D) $\frac{3}{28}$

81. આઠ સિક્કાને એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે, બરાબર 3 છાપ મળે તે ઘટનાની સંભાવના .... છે.

(A) $\frac{1}{256}$ (B) $\frac{7}{32}$ (C) $\frac{5}{32}$ (D) $\frac{3}{32}$

82. બે પાસાને ઉછાળવામાં આવે છે. પાસા પર મળતા અંકોનો સરવાળો 6 થી ઓછો હોય, તો સરવાળો 3 મળે તે ઘટનાની સંભાવના ....

(A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{5}{18}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

83. દ્વિપદી વિતરણ માટે શેની આવશ્યકતા નથી ?

(A) દરેક પ્રયત્ન માટે 2 પરિણામો છે.

(B) પ્રયત્નોની સંખ્યા નિશ્ચિત છે.

(C) પરિણામો એકબીજા પર આધારિત હોવું આવશ્યક છે.

(D) બધા પ્રયત્નો માટે સફળતાની સંભાવના સમાન હોવી જોઈએ.

84. બરાબર ચીપેલાં રમવાનાં 52 પત્તાંના ઢગમાંથી બે પત્તાં પુરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે, તો બંને પત્તાં રાણીના મળે તેની સંભાવના ....

(A) $\frac{1}{13} \times \frac{1}{13}$ (B) $\frac{1}{13} + \frac{1}{13}$ (C) $\frac{1}{13} \times \frac{1}{17}$ (D) $\frac{1}{13} \times \frac{4}{51}$

85. સત્ય-અસત્ય પ્રકારની પરીક્ષામાં 10 જવાબોમાંથી ઓછામાં ઓછા 8 જવાબોનું સાચું અનુમાન લગાવવાની સંભાવના ....

(A) $\frac{7}{64}$ (B) $\frac{7}{128}$ (C) $\frac{45}{1024}$ (D) $\frac{7}{41}$

86. એક વ્યક્તિ તરવૈયો નથી તેની સંભાવના 0.3 છે. 5 વ્યક્તિમાંથી 4 વ્યક્તિ તરવૈયા હોય, તેની સંભાવના શોધો.

(A) ${}^5C_4\ (0.7)^4\ (0.3)$ (B) ${}^5C_1\ (0.7)\ (0.3)^4$

(C) ${}^5C_4\ (0.7)\ (0.3)^4$ (D) $(0.7)^4\ (0.3)$

87. યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ

X	2	3	4	5
P(X)	$\frac{5}{k}$	$\frac{7}{k}$	$\frac{9}{k}$	$\frac{11}{k}$

માટે k નું મૂલ્ય ....

(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 48

88. આપેલ સંભાવના વિતરણ માટે,

X	– 4	–3	–2	–1	0
P(X)	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

E(X) = ...

(A) 0 (B) –1 (C) –2 (D) –1.8

89. નીચે આપેલ સંભાવના વિતરણ માટે,

X	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

$E(X^2)$ = ...

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 10

90. ધારો કે યાદચ્છિક ચલ X એ પ્રચલ n અને p વાળા દ્વિપદી વિતરણને અનુસરે છે. (જ્યાં, $0 < p < 1$). જો $P(x = r)\ /\ P(x = n - r)$ એ n તથા r થી નિરપેક્ષ છે, તો p = ...

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{7}$

91. કૉલેજમાં 30 % વિદ્યાર્થીઓ ભૌતિકશાસ્ત્રમાં નાપાસ થાય છે, 25 % ગણિતમાં નાપાસ થાય છે, 10 % વિદ્યાર્થીઓ બંનેમાં નાપાસ થાય છે. એક વિદ્યાર્થી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

જો તે ગણિતમાં નાપાસ થયો હોય, તો તે ભૌતિકશાસ્ત્રમાં નાપાસ થાય તેની સંભાવના શોધો.

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{9}{20}$ (D) $\frac{1}{3}$

92. A અને B બે વિદ્યાર્થીઓ છે. તેમના દ્વારા પ્રશ્નનું યોગ્ય રીતે નિરાકરણ થાય તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{4}$ છે. જો તેમની સામાન્ય ભૂલ કરવાની સંભાવના $\frac{1}{20}$ હોય અને તે સમાન જવાબ પ્રાપ્ત કરે, તો તેમનો જવાબ સાચો હોય તેની સંભાવના શોધો.

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{40}$ (C) $\frac{13}{120}$ (D) $\frac{10}{13}$

93. એક પેટીમાં 100 પેન છે, તેમાંથી 10 ખામીવાળી પેન છે. એક પછી એક પુનરાવર્તન સહિત પસંદ કરેલા નમૂનાની 5 પેન પૈકી વધુમાં વધુ એક પેન ખામીવાળી હોય, તેની સંભાવના કેટલી ?

(A) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (B) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^4$ (C) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\left(\frac{9}{10}\right)^5 + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^4$

નીચેના ક્રમાંક 94 થી 103 વાળાં વિધાનો પૈકી કયાં સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

94. P(A) > 0 અને P(B) > 0, તો A અને B બંને પરસ્પર નિવારક અને નિરપેક્ષ હોઈ શકે છે.

95. જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો A' અને B' પણ નિરપેક્ષ છે.

96. જો A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય, તો તેઓ નિરપેક્ષ પણ હોઈ શકે.

97. બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હંમેશાં પરસ્પર નિવારક હોય છે.

98. જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો P(A અને B) = P(A) . P(B).

99. સંભાવના વિતરણના મધ્યકનું બીજું નામ અપેક્ષિત મૂલ્ય છે.

100. જો A અને B′ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો $P(A' \cup B) = 1 - P(A)\ P(B')$.

101. જો A અને B નિરપેક્ષ હોય, તો

P (A અને B પૈકી ગમે તે એક ઉદ્ભવે) = $P(A)P(B')+P(B)P(A')$.

102. જો A અને B બે ઘટનાઓ એવી હોય કે જેથી P(A) > 0 અને P(A) + P(B) >1, તો

$$P(B \mid A) \geq 1 - \frac{P(B')}{P(A)}$$

103. જો A, B અને C ત્રણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ એવી હોય કે જેથી, P(A) = P(B) = P(C) = p, તો P (A, B, C પૈકી ઓછામાં ઓછી બે ઉદ્ભવે) = $3p^2 - 2p^3$

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 104 થી 108 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

104. જો બે ઘટનાઓ A અને B માટે,

$$P(A \mid B) = p,\ P(A) = p,\ P(B) = \frac{1}{3}$$

અને $P(A \cup B) = \frac{5}{9}$, તો p = ...

105. જો A અને B માટે,

$$P(A' \cup B') = \frac{2}{3} \text{ અને } P(A \cup B) = \frac{5}{9},$$

તો $P(A') + P(B')$ = ...

106. જો દ્વિપદી વિતરણ X ના પ્રચલ $n = 5$, p છે. જો $P(X = 2) = 9 \cdot P(X = 3)$, તો p = ...

107. યાદૃચ્છિક ચલ X ની કિંમતો $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ની સંભાવના અનુક્રમે $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$ છે,

તો Var(X) = ...

108. A અને B બે ઘટનાઓ છે. જો $P(A \mid B) = P(A)$, તો A અને B .... ઘટનાઓ છે.

પ્રશ્નપત્રનું પરિરૂપ : I (CBSE)

ગણિત : ધોરણ XII

સમય : 3 કલાક
મહત્તમ ગુણ : 100

પ્રશ્નપત્રના ભિન્ન-ભિન્ન વિભાગો ઉપર ગુણભાર નીચે પ્રમાણે છે :

(A) પ્રશ્નના પ્રકરણ પ્રમાણે ગુણભાર :

ક્રમ	એકમ	ગુણ
1.	સંબંધ અને વિધેય	10
2.	બીજગણિત	13
3.	કલન ગણિત	44
4.	સદિશ અને ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ	17
5.	સુરેખ આયોજન	06
6.	સંભાવના	10
	કુલ	**100**

(B) પ્રશ્નના પ્રકાર પ્રમાણે ગુણભાર :

ક્રમ	પ્રશ્નનો પ્રકાર	પ્રત્યેક પ્રશ્નના ગુણ	પ્રશ્નોની સંખ્યા	કુલ ગુણ
1.	બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો/હેતુલક્ષી પ્રશ્નો/અતિ ટૂંકજવાબી પ્રશ્નો	01	10	10
2.	ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો	04	12	48
3.	વિસ્તૃત પ્રશ્નો	06	07	42
	કુલ		**29**	**100**

(C) વિકલ્પોનું આયોજન :

બધા પ્રશ્નો ફરજિયાત છે. ચાર ગુણવાળા ચાર પ્રશ્નોમાં આંતરિક વિકલ્પ અને છ ગુણવાળા બે પ્રશ્નોમાં આંતરિક વિકલ્પનો પ્રબંધ કરેલ છે.

રૂપરેખા

એકમ/પ્રશ્નનો પ્રકાર	બહુવિકલ્પી/ અતિ ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો	ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો	વિસ્તૃત પ્રશ્નો	કુલ
સંબંધ અને વિધેય	-	4 (1)	6 (1)	10 (2)
બીજગણિત	3 (3)	4 (1)	6 (1)	13 (5)
કલન ગણિત	4 (4)	28 (7)	12 (2)	44 (13)
સદિશ અને ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ	3 (3)	8 (2)	6 (1)	17 (6)
સુરેખ આયોજન	–	–	6 (1)	6 (1)
સંભાવના	–	4 (1)	6 (1)	10 (2)
કુલ	**10 (10)**	**48 (12)**	**42 (7)**	**100 (29)**

વિભાગ A

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 3 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. જો $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, તો (x, y) = ...

(A) (1, 1) (B) (1, –1) (C) (–1, 1) (D) (–1, –1)

2. (–2, 4), (2, k) અને (5, 4) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 35 ચોરસ એકમ હોય, તો k નું મૂલ્ય = ...

(A) 4 (B) –2 (C) 6 (D) –6

3. વક્ર $y^2 = 4x$ ના .... બિંદુએ સ્પર્શરેખાનું સમીકરણ $y = x + 1$ છે.

(A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (1, –2) (D) (–1, 2)

4. જેના ઘટકો

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\left|-3\hat{i}+\hat{j}\right|}{2}, & i \neq j \\ (i+j)^2, & i = j \end{cases}$$ થી મળે તેવો 2 × 2 શ્રેણિક રચો.

5. $tan^{-1}(e^x)$ નું x ના વિશે $x = 0$ આગળ વિકલન કરી વિકલિતનું મૂલ્ય શોધો.

6. જો રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-6}{3}$ હોય, તો તે રેખાનું સદિશ સમીકરણ શોધો.

7. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (sin^{83}x + x^{123})\, dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે ક્રમાંક 8 થી 10 વાળા પ્રશ્નોની ખાલી જગ્યા પૂરો :

8. $\int \frac{sin\, x + cos\, x}{\sqrt{1 + sin\, 2x}}\, dx$ = ...

9. જો $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$ પરસ્પર લંબ હોય, તો λ = ...

10. $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ નો $\hat{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ પરનો પ્રક્ષેપ .... છે.

વિભાગ B

11. સાબિત કરો : $cot^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+sin\, x} + \sqrt{1-sin\, x}}{\sqrt{1+sin\, x} - \sqrt{1-sin\, x}}\right\} = \frac{x}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

અથવા

જો $sin^{-1}x + sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$, $x > 0$ હોય, તો સમીકરણનો x વિશે ઉકેલ મેળવો.

12. નિશ્ચાયકના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરી, સાબિત કરો :

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

13. વિધેય $f(x) = |x + 1| + |x + 2|$ નું $x = -1$ અને $x = -2$ આગળ સાતત્ય ચર્ચો.

14. જો $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$ અને $y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$ હોય, તો $\theta = \frac{\pi}{2}$ આગળ $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો.

અથવા

જો $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $-1 < x < 1$

15. એક શંકુનો વ્યાસ 10 સેમી અને ઊંડાઈ 10 સેમી છે. તેમાં 4 ઘન સેમી/મિનિટના દરે પાણી રેડવામાં આવે છે. જ્યારે પાણીની ઊંડાઈ 6 સેમી થાય ત્યારે પાણીના સ્તરનો વધવાનો દર શોધો.

અથવા

વિધેય $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ જે અંતરાલમાં (i) વધે, (ii) ઘટે તે અંતરાલ શોધો.

16. $\int \frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2}\, dx$ શોધો.

અથવા

$\int \left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2} \right) dx$ શોધો.

17. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

18. x-અક્ષ પર કેન્દ્રવાળા અને ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતાં બધાં જ વર્તુળોનું વિકલ સમીકરણ શોધો.

19. વિકલ સમીકરણ $x^2y\, dx - (x^3 + y^3)\, dy = 0$ ઉકેલો.

20. જો $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ અને $\vec{b} \neq \vec{c}$ હોય, તો સાબિત કરો કે કોઈક અચળ λ માટે $\vec{b} = \vec{c} + \lambda\vec{a}$.

21. રેખાઓ $\vec{r} = (\lambda-1)\hat{i} + (\lambda+1)\hat{j} - (1+\lambda)\hat{k}$ અને $\vec{r} = (1-\mu)\hat{i} + (2\mu-1)\hat{j} + (\mu+2)\hat{k}$ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર શોધો.

22. 52 પત્તાંમાંથી એક પત્તું ખોવાઈ ગયું છે. પત્તાંના ઢગમાં વધેલાં પત્તાંમાંથી બે પત્તાં ખેંચવામાં આવ્યાં અને તે બંને લાલનાં મળ્યાં. ખોવાયેલું પત્તું લાલનું હોય તેની સંભાવના શોધો.

વિભાગ C

23. બે શ્રેણિકો A અને B નીચે પ્રમાણે છે :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ અને } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ચકાસો કે AB = BA = 6I. I એ 3 કક્ષાનો એકમ શ્રેણિક છે અને તે પરથી સમીકરણ સંહતિ $x - y = 3$, $2x + 3y + 4z = 17$ અને $y + 2z = 7$ નો ઉકેલ મેળવો.

24. ગણ $\mathbf{R} - \{-1\}$, પર દ્વિક્ક્રિયા નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

પ્રત્યેક $a, b \in \mathbf{R} - \{-1\}$ માટે $a * b = a + b + ab$.

સાબિત કરો કે $\mathbf{R} - \{-1\}$ પર $*$ સમક્રમી છે. $*$ માટે તટસ્થ ઘટક શોધો અને સાબિત કરો કે $\mathbf{R} - \{-1\}$ માં પ્રત્યેક ઘટકના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ છે.

25. સાબિત કરો કે જ્યારે ત્રિકોણ સમદ્વિભુજ હોય, ત્યારે આપેલા કર્ણવાળા કાટકોણ ત્રિકોણની પરિમિતિ મહત્તમ છે.

26. સંકલનની રીતનો ઉપયોગ કરી રેખાઓ

$2x + y = 4$, $3x - 2y = 6$ અને $x - 3y + 5 = 0$ થી ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

અથવા

$\int_1^4 (2x^2 - x)dx$ નું મૂલ્ય સરવાળાના લક્ષથી મેળવો.

27. બિંદુ (2, 3, 7) થી સમતલ $3x - y - z = 7$ પરના લંબપાદના યામ શોધો. લંબઅંતર પણ શોધો.

અથવા

રેખાઓ $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ અને $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \mu(-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ ને સમાવતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો. વળી, બિંદુ (1, 1, 1) થી આ સમતલનું અંતર શોધો.

28. 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પછી એક એમ બે પત્તાં પુરવણી વગર ખેંચવામાં આવે છે. રાજાના પત્તાંની પસંદગીની સંખ્યાનું સંભાવના વિતરણ શોધો. વિતરણનો મધ્યક અને વિચરણ પણ શોધો.

29. એક આહારવિદ્ બે પ્રકારની ખાદ્યવસ્તુનું એવી રીતે મિશ્રણ કરવા માગે છે કે, જેથી મિશ્રણમાં વિટામિન A નું ઓછામાં ઓછું પ્રમાણ 8 એકમ અને વિટામિન C નું ઓછામાં ઓછું પ્રમાણ 10 એકમ હોય. ખાદ્યસામગ્રી 'I' માં વિટામિન A નું પ્રમાણ 2 એકમ/કિગ્રા અને વિટામિન C નું પ્રમાણ 1 એકમ/કિગ્રા છે. ખાદ્યસામગ્રી 'II' માં વિટામિન A નું પ્રમાણ 1 એકમ/કિગ્રા અને વિટામિન C નું પ્રમાણ 2 એકમ/કિગ્રા છે. ખાદ્યસામગ્રી 'I' ની ખરીદકિંમત ₹ 50 પ્રતિ કિગ્રા અને ખાદ્યસામગ્રી 'II' ની ખરીદકિંમત ₹ 70 પ્રતિ કિગ્રા છે. આ મિશ્રણનું મૂલ્ય ન્યૂનતમ થાય તે રીતે આ કૂટપ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના સૂત્રરૂપે રચી આલેખથી તેનો ઉકેલ શોધો.

ગુણપ્રદાન યોજના

વિભાગ A

1. C

2. D

3. A

4. $\begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 16 \end{bmatrix}$

5. $\frac{1}{2}$

6. $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k})$, જ્યાં λ અચળ છે.

7. 0

8. $x + c$

9. $\lambda = -2$

10. $\frac{+1}{7}$ $\qquad 1 \times 10 = 10$

વિભાગ B

11. ડા.બા. $= cot^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{1+sin\,x} + \sqrt{1-sin\,x}}{\sqrt{1+sin\,x} - \sqrt{1-sin\,x}}\right\}$

$$= cot^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)^2}}\right\} \qquad 1\tfrac{1}{2}$$

$$= cot^{-1}\left\{\dfrac{\left|cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right| + \left|cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right|}{\left|cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}\right| - \left|cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right|}\right\}$$

$$= cot^{-1}\left\{\dfrac{cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{2}}\right\} \left[0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow cos\frac{x}{2} > sin\frac{x}{2} > 0 \text{ હોવાથી}\right] \qquad 1\tfrac{1}{2}$$

$$= cot^{-1}\left\{\dfrac{2\,cos\frac{x}{2}}{2\,sin\frac{x}{2}}\right\} = cot^{-1}\left\{cot\frac{x}{2}\right\} = \frac{x}{2} \qquad \left(0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}\right) \qquad 1$$

અથવા

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1}x$$

$$\therefore \quad 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}x\right) \qquad 1$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos(\sin^{-1}x) - \cos\frac{\pi}{3}\sin(\sin^{-1}x)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)} - \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x$$

$$\therefore \quad 4x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} - x,$$

$$5x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad 25x^2 = 3(1 - x^2)$$

$$\therefore \quad 28x^2 = 3$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{3}{28}$$

$$\therefore \quad x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} \qquad 1$$

આથી, $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ ($x > 0$ આપ્યું છે.)

આમ, $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ આપેલા સમીકરણનો ઉકેલ છે. $\frac{1}{2}$

12. ધારો કે, $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 2(p+q+r) & r+p & p+q \\ 2(x+y+z) & z+x & x+y \end{vmatrix} \qquad 1$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ p+q+r & r+p & p+q \\ x+y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1$ અને $C_3 \to C_3 - C_1$ નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ p+q+r & -q & -r \\ x+y+z & -y & -z \end{vmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ કરતાં અને C_2 તથા C_3 માંથી (–1) સામાન્ય લેતાં,

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

13. વિકલ્પ 1 : જ્યારે, $x < -2$

$f(x) = |x + 1| + |x + 2| = -(x + 1) - (x + 2) = -2x - 3$

વિકલ્પ 2 : જ્યારે, $-2 \le x < -1$

$f(x) = -x - 1 + x + 2 = 1$ 1

વિકલ્પ 3 : જ્યારે, $x \ge -1$

$f(x) = x + 1 + x + 2 = 2x + 3$

આમ,

$$f(x) = \begin{cases} -2x-3 & ; \quad x<-2 \\ 1 & ; \quad -2\le x<-1 \\ 2x+3 & ; \quad x\ge -1 \end{cases}$$

હવે, $x = -2$ ની ડાબી બાજુથી, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}(-2x-3) = 4 - 3 = 1$

અને $x = -2$ ની જમણી બાજુથી, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} 1 = 1$

વળી, $f(-2) = |-2 + 1| + |-2 + 2| = |-1| + |0| = 1$

આમ, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ $1\frac{1}{2}$

$\therefore$ $x = -2$ આગળ વિધેય f સતત છે.

હવે, $x = -1$ ની ડાબી બાજુથી, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 1 = 1$

અને $x = -1$ ની જમણી બાજુથી, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}(2x+3) = 1$ $1\frac{1}{2}$

વળી, $f(-1) = |-1 + 1| + |-1 + 2| = 1$

આમ, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$

$\therefore$ $x = -1$ આગળ વિધેય f સતત છે.

આથી, આપેલું વિધેય બંને બિંદુઓ $x = -1$ અને $x = -2$ આગળ સતત છે.

નોંધ : $|x + 1|$ તથા $|x + 2|$ એ R માં સતત છે. આથી કોઈ ગણતરી જરૂરી નથી.

14. $x = 2cos\,\theta - cos\,2\theta$ અને $y = 2sin\,\theta - sin\,2\theta$

આથી, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{cos\,\theta - cos\,2\theta}{sin\,2\theta - sin\,\theta} = \dfrac{-2\,sin\frac{3\theta}{2}\,sin\left(\frac{-\theta}{2}\right)}{2\,cos\frac{3\theta}{2}\,sin\frac{\theta}{2}} = tan\dfrac{3\theta}{2}$ $1\frac{1}{2}$

બંને બાજુએ x ના વિશે વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2}sec^2\frac{3\theta}{2} \times \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{3}{2}\,sec^2\frac{3\theta}{2} \times \frac{1}{2(sin\,2\theta - sin\,\theta)} = \frac{3}{4}\,sec^2\frac{3\theta}{2} \times \frac{1}{2\,cos\,\frac{3\theta}{2}\,sin\,\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{3}{8}\,sec^3\frac{3\theta}{2}\,cosec\,\frac{\theta}{2}$$ $1\frac{1}{2}$

આમ, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ આગળ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{8}\,sec^3\dfrac{3\pi}{4}\,cosec\,\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-3}{2}$ 1

અથવા

$$x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$$

$\therefore$ $x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$

બંને બાજુએ વર્ગ કરતાં,

$x^2(1 + y) = y^2(1 + x)$

$\therefore$ $(x + y)\,(x - y) = -y\,x\,(x - y)$ 1

$\therefore$ $x + y = -x\,y$ એટલે કે, $y = \dfrac{-x}{1+x}$ $\left(\textbf{અથવા } y = -1 + \dfrac{1}{(1+x)}.\text{ આથી } \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(1+x)^2}\right)$ 2

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx} = -\left\{\dfrac{(1+x)\cdot 1 - x(0+1)}{(1+x)^2}\right\} = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ 1

નોંધ : જો $x = y$ હોય, તો $2x\sqrt{1+x} = 0$

$\therefore$ $x = 0$ અથવા $x = -1$, પરંતુ $x \neq -1$

આમ, વિધેય $\{(0, 0)\}$ રહે. વિકલનનો પ્રશ્ન જ ન રહે.

15. ધારો કે, OAB શંકુ છે અને કોઈ પણ સમય t માટે LM એ પાણીનું સ્તર દર્શાવે છે.

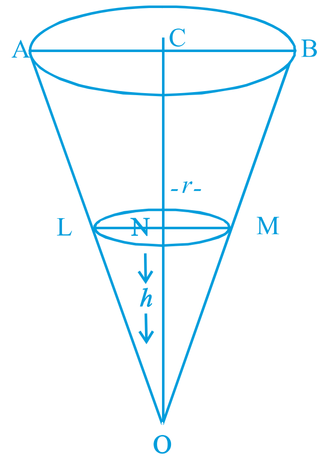
ધારો કે, ON $= h$ અને MN $= r$

AB $= 10$ સેમી, OC $= 10$ સેમી અને $\dfrac{dV}{dt} = 4$ સેમી^{3} /મિનિટ જ્યાં, V એ શંકુ OLM નું કદ દર્શાવે છે.

Δ ONM ~ Δ OCB થશે.

$\therefore \quad \frac{MN}{CB} = \frac{ON}{OC}$ અથવા $\frac{r}{5} = \frac{h}{10} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$ 1

હવે, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .... (i)



આકૃતિ 1.1

(i) માં $r = \frac{h}{2}$ મૂકતાં, $1\frac{1}{2}$

$V = \frac{1}{12}\pi h^3$

t ના વિશે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{12}\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

આથી, જ્યારે $h = 6$ સેમી તથા $\frac{dV}{dt} = 4$ સેમી^{3}/ મિનિટ, $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{9\pi}$ સેમી/મિનિટ $1\frac{1}{2}$

અથવા

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^4}$ 1

$$= \frac{3(x^6-1)}{x^4} = \frac{3(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^4}$$

$x^4 + x^2 + 1 > 0$ અને $x^4 > 0$ હોવાથી, f વધતું વિધેય થવા માટે,

$x^2 - 1 > 0$ આવશ્યક છે. $1\frac{1}{2}$

$\therefore \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ માં f વધતું વિધેય છે.

(ii) f ઘટતું વિધેય હોય, તો $f'(x) < 0$

$\therefore \quad x^2 - 1 < 0$

$\therefore \quad (x - 1)(x + 1) < 0$

[$x \neq 0$, f એ $x = 0$ માટે વ્યાખ્યાયિત નથી.] $1\frac{1}{2}$

આમ, $(-1, 0) \cup (0, 1)$ માં f ઘટતું વિધેય છે.

16. ધારો કે, $\frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ 1

માટે, $3x - 2 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x+3) + C(x+3)$

x^2, x ના સહગુણક તથા અચળપદ સરખાવતાં,

$$A + B = 0,\ 2A + 4B + C = 3 \text{ અને } A + 3B + 3C = -2$$

આ સમીકરણોને ઉકેલતાં,

$$A = \frac{-11}{4},\quad B = \frac{11}{4} \text{ અને } C = \frac{-5}{2}$$ $1\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2} = \frac{-11}{4(x+3)} + \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2}$$

આથી, $$\int \frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2}\,dx = \frac{-11}{4}\int \frac{1}{x+3}\,dx + \frac{11}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{-11}{4}\log|x+3| + \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} + c_1$$ $1\frac{1}{2}$

અથવા

$$\int\left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right)dx$$

$$= \int \log(\log x)\,dx + \int \frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

ખંડશઃ સંકલનની રીતે $\log(\log x)$ નું સંકલન કરતાં,

$$\int \log(\log x)\,dx = x\log(\log x) - \int \frac{x}{(\log x)} \times \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\log(\log x) - \int \frac{1}{\log x}\,dx$$ $1\frac{1}{2}$

$$= x\log(\log x) - \left[\frac{x}{\log x} - \int x\left(\frac{-1}{(\log x)^2}\right) \times \frac{1}{x}\,dx\right]$$ 1

$$= x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

તેથી, $$\int\left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right)dx = x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} + c$$ $1\frac{1}{2}$

17. ધારો કે, $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} dx$ $\left[\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx \text{ હોવાથી}\right]$

$= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x} dx - I$ 1

$\therefore \quad 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

ધારો કે, $\cos x = t$. $x = \pi \Rightarrow t = -1$, $x = 0 \Rightarrow t = 1$ અને $-\sin x\, dx = dt$

માટે, $2I = \pi \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2}$

$= \pi \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$ $1\frac{1}{2}$

$= \pi \left[\tan^{-1} t\right]_{-1}^{1} = \pi\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)\right]$

$= \pi\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi^2}{2}$ $1\frac{1}{2}$

$I = \frac{\pi^2}{4}$

18. ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતા અને x-અક્ષ પર કેન્દ્રવાળા વર્તુળનું સમીકરણ

$(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ... (i) $1\frac{1}{2}$

x ના વિશે વિકલન કરતાં,

$2(x-a) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad x + y\frac{dy}{dx} = a$

(i) માં a નું મૂલ્ય મૂકતાં, $1\frac{1}{2}$

$\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = \left(x + y\frac{dy}{dx}\right)^2$

$\therefore \quad (x^2 - y^2) + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$ 1

19. $x^2y\,dx - \left(x^3 + y^3\right) dy = 0$ આપેલ વિકલ સમીકરણ છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3 + y^3} \qquad \text{...(1)}$$

$y = vx$ લેતાં, $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ 1

માટે $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx^3}{x^3 + v^3x^3}$

$$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

$$\therefore \quad \int \frac{1+v^3}{v^4}dv = -\int \frac{dx}{x}$$ 1

તેથી, $\int \frac{1}{v^4}dv + \int \frac{1}{v}dv = -\int \frac{dx}{x}$ 1

આથી, $\frac{-1}{3v^3} + \log|v| = -\log|x| + c$

$\therefore \quad \frac{-x^3}{3y^3} + \log|y| = c$, વિકલ સમીકરણનો ઉકેલ છે. 1

20. હવે, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$

$$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore \quad \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$$ 1

$\therefore \quad \vec{a} = \vec{0}$ અથવા $\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ અથવા $\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$ 1

$\therefore \quad \vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$ [$\vec{a} \neq \vec{0}$ અને $\vec{b} \neq \vec{c}$ હોવાથી]

કોઈક અચળ λ માટે, $\vec{b} - \vec{c} = \lambda\vec{a}$

$\therefore \quad \vec{b} = \vec{c} + \lambda\vec{a}$ 1

21. $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ અને $\vec{r} = \vec{c} + \mu\vec{d}$ રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર

$$D = \left|\frac{(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})}{|\vec{b}\times\vec{d}|}\right|$$

હવે આપેલાં સમીકરણ,

$\vec{r} = \left(-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right) + \lambda\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)$ અને $r = \left(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right) + \mu\left(-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)$

આથી, $\vec{c}-\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\frac{1}{2}$

અને $\vec{b}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 0\vec{j} + 3\vec{k}$ 1

$\therefore\ |\vec{b}\times\vec{d}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$

તેથી, $D = \left|\frac{(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})}{|\vec{b}\times\vec{d}|}\right| = \left|\frac{6-0+9}{3\sqrt{2}}\right| = \frac{15}{3\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. 2

22. ધારો કે, ઘટનાઓ E_1, E_2, E_3, E_4 અને A નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

E_1 = ખોવાયેલું પત્તું લાલનું છે.

E_2 = ખોવાયેલું પત્તું કાળીનું છે.

E_3 = ખોવાયેલું પત્તું ફૂલ્લીનું છે.

E_4 = ખોવાયેલું પત્તું ચોકટનું છે.

A = વધેલાં પત્તાંમાંથી બે લાલનાં પત્તાંની પસંદગી $\frac{1}{2}$

તેથી, $P(E_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(E_2) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(E_3) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(E_4) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

$P(A|E_1)$ = લાલનું એક પત્તું ખોવાયું છે તેમ આપેલ હોય ત્યારે બે લાલનાં પત્તાંની પસંદગીની સંભાવના

$$= \frac{^{12}C_2}{^{51}C_2}$$

$P(A|E_2)$ = એક કાળીનું પત્તું ખોવાયું છે, તેમ આપેલ હોય ત્યારે બે લાલનાં પત્તાંની પસંદગીની સંભાવના

$$= \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}$$

તે જ પ્રમાણે, આપણને $P(A|E_3) = \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}$ અને $P(A|E_4) = \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}$ 1

બેયઝના પ્રમેય પરથી,

માંગેલી સંભાવના $= P(E_1 | A)$

$$= \frac{P(E_1)\,P(A|E_1)}{P(E_1)\,P(A|E_1)+P(E_2)\,P(A|E_2)+P(E_3)\,P(A|E_3)\ +P(E_4)\,P(A|E_4)}$$ 1

$$= \frac{\frac{1}{4}\,\frac{{}^{12}C_2}{{}^{51}C_2}}{\frac{1}{4}\times\frac{{}^{12}C_2}{{}^{51}C_2}+\frac{1}{4}\,\frac{{}^{13}C_2}{{}^{51}C_2}+\frac{1}{4}\,\frac{{}^{13}C_2}{{}^{51}C_2}+\frac{1}{4}\times\frac{{}^{13}C_2}{{}^{51}C_2}}$$ 1

$$= \frac{{}^{12}C_2}{{}^{12}C_2+{}^{13}C_2+{}^{13}C_2+{}^{13}C_2}$$

$$= \frac{66}{66+78+78+78} = \frac{11}{50}$$

વિભાગ C

23. $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 6I$ 1

તે જ પ્રમાણે, $BA = 6I$, આથી, $AB = 6I = BA$

$AB = 6I$, $A^{-1}(AB) = 6A^{-1}I$ 1

તેથી, $IB = 6A^{-1}$, એટલે કે $A^{-1} = \frac{1}{6}B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ $1\frac{1}{2}$

આપેલ સમીકરણ સંહતિને $AX = C$ લખી શકાય.

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$

આપેલ સંહતિ $AX = C$ નો ઉકેલ $X = A^{-1}C$ થાય. $\frac{1}{2}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6+34-28 \\ -12+34-28 \\ 6-17+35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$ 2

આથી, $x = 2$, $y = -1$ અને $z = 4$

24. સમક્રમી : કોઈ પણ $a, b \in \mathbf{R} - \{-1\}$ માટે $a * b = a + b + ab$ અને $b * a = b + a + ba$.
પરંતુ $\mathbf{R} - \{-1\}$ પર સરવાળા અને ગુણાકારના ક્રમના નિયમ પરથી,

$$a + b + ab = b + a + ba \text{ થાય.}$$

$\therefore \quad a * b = b * a$ 2

આથી, $\mathbf{R} - \{-1\}$ પર $*$ સમક્રમી છે.

તટસ્થ ઘટક : ધારો કે, e તટસ્થ ઘટક છે.

પ્રત્યેક $a \in \mathbf{R} - \{-1\}$ માટે, $a * e = e * a$

$\therefore \quad a + e + ae = a$ અને $e + a + ea = a$

માટે $e\ (1+a) = 0$. $a \neq -1$ હોવાથી $e = 0$

આમ, $\mathbf{R} - \{-1\}$ પર વ્યાખ્યાયિત $*$ માટે 0 તટસ્થ ઘટક છે.

વ્યસ્ત : ધારો કે, $a \in \mathbf{R} - \{-1\}$ અને a નો વ્યસ્ત b છે. 2

$a * b = e = b * a$

$\therefore \quad a * b = 0 = b * a$ $(e = 0)$

$\therefore \quad a + b + ab = 0$

$\therefore \quad b = \dfrac{-a}{a+1} \in \mathbf{R}$ ($a \neq -1$ હોવાથી)

તથા $\dfrac{-a}{a+1} \neq -1$. આમ, $b = \dfrac{-a}{a+1} \in \mathbf{R} - \{-1\}$ 2

આથી, $\mathbf{R} - \{-1\}$ ના પ્રત્યેક ઘટકના વ્યસ્તનું અસ્તિત્વ છે અને ઘટક a નો વ્યસ્ત $\dfrac{-a}{a+1}$ છે.

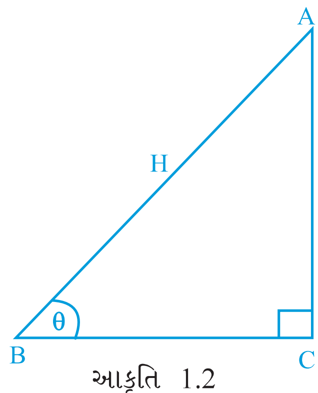
25. ધારો કે, H એ કર્ણ AB છે અને કર્ણ તથા કાટકોણ ત્રિકોણ ABC ના આધાર વચ્ચેનો ખૂણો θ છે.

આથી, પાયો = BC = H $\cos\theta$ અને લંબ = AC = H $\sin\theta$

કાટકોણ ત્રિકોણની પરિમિતિ = p

$= \text{H} + \text{H}\cos\theta + \text{H}\sin\theta$

પરિમિતિ, મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ માટે, $\dfrac{dp}{d\theta} = 0$



આકૃતિ 1.2

$\Rightarrow \text{H}(0 - \sin\theta + \cos\theta) = 0$, અર્થાત્ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 2

હવે, $\left(\dfrac{d^2p}{d\theta^2}\right) = -\text{H}\cos\theta - \text{H}\sin\theta$ 1

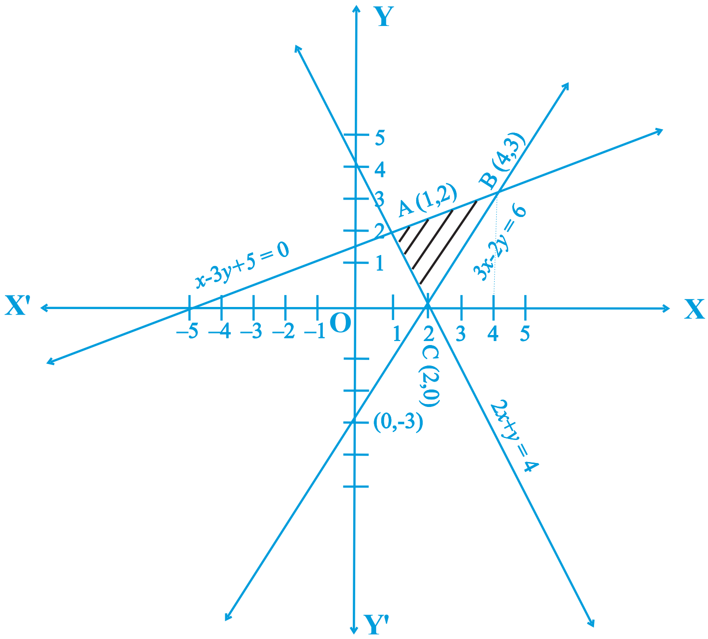
$$\Rightarrow \left(\frac{d^2p}{d\theta^2}\right)_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -\text{H}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\sqrt{2}\,\text{H} < 0$$ 1

આમ, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ આગળ p મહત્તમ છે.

$\theta = \frac{\pi}{4}$ માટે, આધાર $H\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{H}{\sqrt{2}}$ અને લંબ $= \frac{H}{\sqrt{2}}$ 1

આથી, જ્યારે કાટકોણ ત્રિકોણની પરિમિતિ મહત્તમ થાય, ત્યારે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય. 1

26.



આકૃતિ 1.3

A(1, 2), B(4, 3) અને C(2, 0) આપેલી રેખાઓનાં છેદબિંદુઓ છે. 1

આથી, માંગેલું ક્ષેત્રફળ

$$= \int_1^4 \left(\frac{x+5}{3}\right) dx - \int_1^2 (4-2x)\, dx - \int_2^4 \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{x^2}{2} + 5x\right)\right]_1^4 - \left[\left(4x - x^2\right)\right]_1^2 - \left[\left(\frac{3}{4}x^2 - 3x\right)\right]_2^4 \qquad 2\tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{16}{2} + 20\right) - \left(\frac{1}{2} + 5\right)\right] - \left[(8-4)-(4-1)\right] - \left[(12-12) - (3-6)\right]$$

$= \frac{1}{3} \times \frac{45}{2} - 1 - 3 = \frac{7}{2}$ ચોરસ એકમ 1

અથવા

$$I = \int_1^4 (2x^2 - x)\, dx$$

$$= \int_1^4 f(x)\, dx \qquad 1$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[f(1) + f(1+h) + f(1+2h) + \ldots\ldots + f\left(1+(n-1)h\right)\right] \quad \ldots(i)$$

જ્યાં, $h = \frac{4-1}{n}$ એટલે કે, $nh = 3$

હવે, $f\left(1+\overline{n-1}h\right) = 2\left(1+(n-1)h\right)^2 - \left(1+(n-1)h\right)$

$= 2\left(1+(n-1)^2h^2+2(n-1)h\right) -1\ (1+(n-1)\ h) = 2(n-1)^2h^2+3(n-1)h+1$

તેથી, $f(1) = 2\cdot0^2\,h^2+3\cdot0\cdot h+1$, $f(1+h) = 2\cdot1^2\,h^2+3\cdot1\cdot h+1$

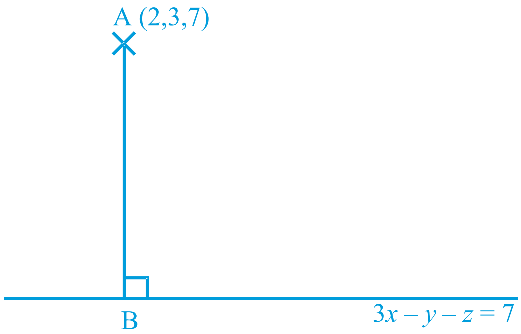
$f(1+2h) = 2\cdot2^2\,h^2+3\cdot2\cdot h+1$ $1\frac{1}{2}$

આમ, $I = \lim\limits_{h\to0} h\left[n+2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}h^2+\frac{3n(n-1)(nh-h)}{2}\right]$

$= \lim\limits_{h\to0} hn+\frac{2(nh)(nh-h)(2nh-h)}{6}+\frac{3(nh)(nh-h)}{2}$ 2

$= \lim\limits_{h\to0}\left\{3+\frac{2(3)(3-h)(6-h)}{6}+\frac{3(3)(3-h)}{2}\right\} = \frac{69}{2}$ $1\frac{1}{2}$

27.



આકૃતિ 1.4

આપેલા સમતલને લંબ રેખા AB નું સમીકરણ

$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-7}{-1} = \lambda$ (ધારો) $1\frac{1}{2}$

માટે, A માંથી સમતલ $3x - y - z = 7$ પર દોરેલા લંબના લંબપાદ B ના યામ કોઈક $\lambda \in R$ માટે,

$(3\lambda+2, -\lambda+3, -\lambda+7)$ $1\frac{1}{2}$

$B(3\lambda+2, -\lambda+3, -\lambda+7)$ સમતલ $3x - y - z = 7$ પર આવેલું હોવાથી,

$3(3\lambda+2)-(-\lambda+3)-(-\lambda+7) = 7 \Rightarrow \lambda = 1$ 2

આમ, B = (5, 2, 6) અને અંતર AB = (લંબની લંબાઈ)

$\sqrt{(2-5)^2+(3-2)^2+(7-6)^2} = \sqrt{11}$ એકમ

આથી, લંબપાદના યામ (5, 2, 6) અને લંબની લંબાઈ $= \sqrt{11}$ 1

અથવા

આપેલી રેખાઓ

$\vec{r} = \hat{i}+\hat{j}+\lambda\left(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}\right)$ ...(i)

અને $\vec{r} = \hat{i}+\hat{j}+\mu\left(-\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)$ ...(ii)

રેખા (i) બિંદુ (1, 1, 0) માંથી પસાર થાય છે અને તેના દિક્ગુણોત્તર 1, 2, –1 છે. $\frac{1}{2}$

રેખા (ii) બિંદુ (1, 1, 0) માંથી પસાર થાય છે અને તેના દિક્ગુણોત્તર –1, 1, –2 $\frac{1}{2}$

રેખાઓ (i) અને (ii) માંગેલા સમતલમાં આવેલી હોવાથી, સદિશો 1

$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ અને $\vec{c} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ સમતલને સમાંતર છે. 1

આથી, માંગેલ સમતલ સદિશ $\vec{b} \times \vec{c}$ ને લંબ છે અને

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

આથી, માંગેલા સમતલનું સમીકરણ

$$(\vec{r} - \vec{a})\cdot(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$ 1

$$\therefore \left[\vec{r} - (\hat{i} + \hat{j})\right]\cdot\left(-3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}\right) = 0$$

$\Rightarrow \vec{r}\cdot(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 0$ અને તેનું કાર્તેઝિય સ્વરૂપ $-x + y + z = 0$

(1, 1, 1) થી સમતલનું અંતર

$$\frac{|1(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ એકમ 2

28. ધારો કે, X રાજાનાં બે પત્તાં ખેંચવાની સંખ્યા દર્શાવે છે, નોંધીશું કે X એ 0, 1, 2 કિંમત લઈ શકે તેવો યાદચ્છિક ચલ છે.

$$P(X = 0) = P(\text{રાજા ન મળે}) = \frac{^{48}C_2}{^{52}C_2} = \frac{\frac{48!}{2!(48-2)!}}{\frac{52!}{2!(52-2)!}} = \frac{48 \times 47}{52 \times 51} = \frac{188}{221}$$ 1

P (X = 1) = P (એક રાજા અને એક રાજા ન હોય.)

$$= \frac{^{4}C_1 \times {}^{48}C_1}{^{52}C_2} = \frac{4 \times 48 \times 2}{52 \times 51} = \frac{32}{221}$$ 1

અને $P(X = 2) = P$ (બે રાજા) $= \frac{^{4}C_2}{^{52}C_2} = \frac{4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{221}$ 1

આમ, X નું સંભાવના વિતરણ

X	0	1	2
P(X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

1

હવે, X નો મધ્યક $= E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$

$$= 0 \times \frac{188}{221} + 1 \times \frac{32}{221} + 2 \times \frac{1}{221} = \frac{34}{221}$$

વળી, $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(x_i)$

$$= 0^2 \times \frac{188}{221} + 1^2 \times \frac{32}{221} + 2^2 \times \frac{1}{221} = \frac{36}{221}$$

હવે, વિચરણ $= E(X^2) - [E(X)^2] = \frac{36}{221} - \left(\frac{34}{221}\right)^2 = \frac{6800}{(221)^2}$ 1

આથી, પ્રમાણિત વિચલન $= \sqrt{\text{વિચરણ}} = \frac{\sqrt{6800}}{221} = 0.37$ 1

29. ધારો કે મિશ્રણમાં ખાદ્યસામગ્રી I, x કિગ્રા અને ખાદ્યસામગ્રી II, y કિગ્રા છે.

આમ, $2x + y \geq 8$

$x + 2y \geq 10$

$x, y \geq 0$ પરથી, 2

આપણે $Z = 50x + 70y$ ને ન્યૂનતમ કરવાનું છે.

ઉપરની અસમતાઓથી બનતો શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત પ્રદેશ છે. શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ

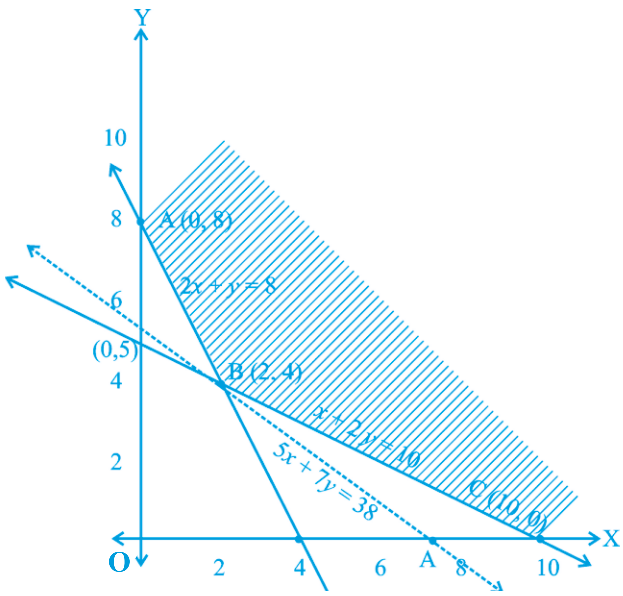
A(0, 8), B(2, 4), C(10, 0) $\frac{1}{2}$

હવે, A(0, 8) આગળ $Z = 50 \times 0 + 70 \times 8$

$= 560$ $2\frac{1}{2}$

B(2, 4) આગળ $Z = 380$

C(10, 0) આગળ $Z = 500$



આકૃતિ 1.5

શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ અસીમિત હોવાથી, આપણે $50x + 70y < 380$

અર્થાત્ $5x + 7y < 38$ નો આલેખ દોરીશું. $\frac{1}{2}$

ખુલ્લા અર્ધતલનું કોઈ પણ બિંદુ શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું બિંદુ નથી. આથી, Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય B(2, 4) આગળ 380 થશે. તેથી મિશ્રણનો ન્યૂનતમ ખર્ચ, એટલે કે ₹ 380 કરવા માટે આહારવિદે 2 કિગ્રા ખાદ્યસામગ્રી I અને 4 કિગ્રા ખાદ્યસામગ્રી II નું ઇષ્ટતમ મિશ્રણ બનાવવાની કુશળતા રાખવી જોઈશે. $\frac{1}{2}$

પ્રશ્નપત્ર II

વિભાગ A

પ્રશ્નો 1 થી 3 માં આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી સાચો ઉત્તર પસંદ કરો :

1. જો $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a * b = a + b^2$, વડે વ્યાખ્યાયિત દ્વિક્‌ક્રિયા હોય, તો $-2 * 5 =$ ....

(A) -52 (B) 23 (C) 64 (D) 13

2. જો $sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ એ એક વિધેય હોય, તો $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{-\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{7\pi}{6}$

નોંધ : અહીં sin^{-1} ની અન્ય શાખાનો ઉપયોગ કર્યો છે.

3. જો $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ પર હાર પ્રક્રિયા $R_1 \to R_1 - 2R_2$ બંને તરફ કરતાં .... મળે.

(A) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. જો A એ 3 કક્ષાવાળો ચોરસ શ્રેણિક હોય અને $|A| = 5$, તો $|adj\ A|$ નું મૂલ્ય શોધો.

5. જો A અને B એ 3 કક્ષાવાળા ચોરસ શ્રેણિકો હોય અને $|A| = -1$ તથા $|B| = 4$, તો $|3(AB)|$ નું મૂલ્ય શોધો.

6. $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ નું પરિમાણ .... છે.

નીચેના ક્રમાંક 7 અને 8 ના પ્રશ્નોમાં વિધાન સત્ય બને તે રીતે યોગ્ય ખાલી જગ્યા પૂરો :

7. વિકલ સમીકરણ $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$ ના ઉકેલ માટેનો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

8. $|\hat{i} - \hat{j}|^2$ નું મૂલ્ય .... છે.

9. સમતલો $3x + 4y - 7 = 0$ અને $6x + 8y + 6 = 0$ વચ્ચેનું લંબઅંતર શોધો.

10. જો $\vec{a}$ એ એકમ સદિશ હોય અને $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 99$, તો $|\vec{x}|$ નું મૂલ્ય શોધો.

વિભાગ B

11. જો n એ નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક છે અને R એ Z પરનો નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત સંબંધ છે :

$aRb \Leftrightarrow a - b$ એ નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક n વડે વિભાજ્ય છે, $\forall a, b \in Z$ તો સાબિત કરો કે R એ સામ્ય સંબંધ છે.

12. સાબિત કરો કે, $cot^{-1}7 + cot^{-1}8 + cot^{-1}18 = cot^{-1}3$.

અથવા

ઉકેલો : $tan^{-1}(2+x) + tan^{-1}(2-x) = tan^{-1}\frac{2}{3}$ $\qquad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

13. x માટે ઉકેલો : $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ x+6 & x-1 & x+2 \\ x-1 & x+2 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

અથવા

જો A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ અને B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, તો સાબિત કરો કે (AB)′ = B′A′.

14. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k\cos 2x}{\pi - 4x}, & \text{જો } x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ 5, & \text{જો } x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

f એ $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ સતત હોય, તો k શોધો.

15. જો $y = e^{a\cos^{-1}x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(1 - x^2)\frac{d^2y}{d^2x} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$.

16. $x = sin3t$, $y = cos2t$ વક્ર પરના $t = \frac{\pi}{4}$ માટેના બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

જે અંતરાલમાં $f(x) = sin^4 x + cos^4 x$ ચુસ્ત વધતું અને જે અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય હોય, તે અંતરાલો નક્કી કરો. $0 < x < \frac{\pi}{2}$

17. કિંમત શોધો : $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^4 x\, cos^3 x\, dx$

18. કિંમત શોધો : $\int \frac{3x+1}{2x^2 - 2x + 3}dx$

અથવા

કિંમત શોધો : $\int x\cdot(\log x)^2 dx$

19. ઉકેલો : $2y\, e^{\frac{x}{y}}\, dx + (y - 2\, x e^{\frac{x}{y}})\, dy = 0$. વળી, પ્રારંભિક શરત $x = 0$ હોય, ત્યારે $y = 1$ પરથી વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો.

20. જો $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ અને $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ તો, $\vec{b} + \vec{c}$ નો $\vec{a}$ પરનો પ્રક્ષેપ શોધો.

21. (1, 2, –4) માંથી પસાર થતી અને રેખાઓ $\vec{r} = (8\hat{i} - 16\hat{j} + 10\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k})$ અને $\vec{r} = (15\hat{i} + 29\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})$ બંનેને લંબરેખાનું સદિશ સમીકરણ મેળવો.

22. આપેલ ત્રણ સિક્કાઓ પૈકી એક અસમતોલ સિક્કાને ઉછાળતા 60 % પરિણામમાં કાંટો આવે છે, જ્યારે બીજા અસમતોલ સિક્કાને ઉછાળતા 75 % પરિણામમાં છાપ આવે છે અને ત્રીજો સિક્કો સમતોલ છે. આ ત્રણ સિક્કાઓ પૈકી એક સિક્કો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી ઉછાળતાં તેના પર છાપ આવે છે, તો પસંદ થયેલ સિક્કો સમતોલ હોવાની સંભાવના કેટલી ?

વિભાગ C

23. જો $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ હોય, તો A^{-1} શોધો અને તે પરથી સમીકરણ સંહતિ $4x + 2y + 3z = 2$, $x + y + z = 1$, $3x + y - 2z = 5$ નો ઉકેલ મેળવો.

અથવા

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક પ્રાથમિક ક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી મેળવો.

24. આપેલ તિર્યક ઊંચાઈ અને મહત્તમ ઘનફળવાળા શંકુનો અર્ધશિર્ષકોણ $tan^{-1}\sqrt{2}$ છે તેમ સાબિત કરો.

25. સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)\,dx$ મેળવો.

26. વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$ પરના $(1, \sqrt{3})$ બિંદુએ દોરેલા સ્પર્શક, અભિલંબ અને ધન x-અક્ષથી રચાતા ત્રિકોણના ત્રિકોણીય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ સંકલનની મદદથી શોધો.

27. સમતલો $x + 3y + 6 = 0$ અને $3x - y - 4z = 0$ ના છેદમાંથી પસાર થતા તથા જેનું ઊગમબિંદુથી લંબઅંતર એક એકમ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ શોધો.

અથવા

બિંદુ (3, 4, 5) નું સમતલ $x + y + z = 2$ થી $2x = y = z$ રેખાને સમાંતર અંતર શોધો.

28. ચાર ખામીવાળા ગોળા આકસ્મિક રીતે છ ખામીરહિત ગોળા સાથે મિશ્ર થઈ ગયા છે. ફક્ત જોઈને ગોળો ખામીવાળો છે કે ખામીરહિત તે કહી શકાય તેમ નથી. ચાર ગોળાની પસંદગી યાદચ્છિક રીતે કરવામાં આવે, તો ખામીવાળા ગોળાની સંખ્યા માટેનું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

29. એક ફર્નિચર ઉત્પાદક ત્રણ મશીન A, B અને C નો ઉપયોગ કરીને ખુરશી અને ટેબલનું ઉત્પાદન કરે છે. એક ખુરશીનું ઉત્પાદન કરવા માટે મશીન A ને 2 કલાક, મશીન B ને 1 કલાક અને મશીન C ને 1 કલાક લાગે છે. એક ટેબલનું ઉત્પાદન કરવા માટે મશીન A તથા B ને 1 કલાક અને મશીન C ને 3 કલાકની જરૂર પડે છે. ઉત્પાદકને એક ખુરશીના વેચાણ દ્વારા ₹ 30 નો નફો મળે છે, જ્યારે એક ટેબલના વેચાણ દ્વારા ₹ 60 નો નફો થાય છે. મશીન A એક અઠવાડિયામાં 70 કલાક, મશીન B 40 કલાક અને મશીન C 90 કલાક માટે પ્રાપ્ત છે. એક અઠવાડિયામાં કેટલી ખુરશી તથા કેટલા ટેબલનું ઉત્પાદન કરવું પડે કે જેથી મહત્તમ નફો મળે ? આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન તરીકે આલેખની રીતે ઉકેલો.

ગુણ પ્રદાન યોજના

વિભાગ A

1. B	**2.** D	**3.** B	
4. 25	**5.** –108	**6.** 2	**7.** $\frac{1}{x}$
8. 2	**9.** 2 એકમ	**10.** 10	$1 \times 10 = 10$

વિભાગ B

11. (i) અહીં aRa, $\forall a \in Z$ કારણ કે $a - a = 0$ એ કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n વડે વિભાજ્ય હોવાથી, R સ્વવાચક સંબંધ છે. 1

(ii) $aRb \Rightarrow a - b$ એ n વડે વિભાજ્ય છે. તેથી $b - a$ પણ n વડે વિભાજ્ય છે. તેથી bRa. આમ, R સંમિત સંબંધ છે. 1

(iii) જો aRb અને bRc, $a, b, c, \in \mathbf{Z}$, તો કોઈક $p, q \in \mathbf{Z}$ માટે

$a - b = n\,p,\ b - c = n\,q$ 1

$\therefore\ a - c = n\,(p + q)$ અને તેથી aRc.

તેથી, R પરંપરિત સંબંધ છે. આમ, R એ સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત છે. 1

$\therefore$ R એ સામ્ય સંબંધ છે.

12. ડા.બા. $= tan^{-1}\frac{1}{7} + tan^{-1}\frac{1}{8} + tan^{-1}\frac{1}{18}$ 1

$$= tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}} + tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{15}{55}\right) + tan^{-1}\frac{1}{18} \quad 1$$

$$= tan^{-1}\frac{3}{11} + tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$= tan^{-1}\frac{\frac{3}{11}+\frac{1}{18}}{1-\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{18}} \quad 1$$

$$= tan^{-1}\frac{65}{195}$$

$$= tan^{-1}\frac{1}{3} = cot^{-1}3 = \text{જ.બા.} \quad 1$$

અથવા

$$tan^{-1}(2 + x) + tan^{-1}(2 - x) = tan^{-1}\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ tan^{-1}\frac{(2+x)+(2-x)}{1-(2+x)\,(2-x)} = tan^{-1}\frac{2}{3} \quad 1\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{4}{x^2-3} = \frac{2}{3} \quad 1\tfrac{1}{2}$$

$\therefore\ x^2 = 9.$

તેથી $x = \pm 3$ 1

ચકાસો : નોંધ : (1) $(2 + x)(2 - x) = (4 - x^2) = -5 < 1$

(2) $4 - x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Rightarrow |x| > \sqrt{3}$ આવશ્યક છે.

13. અહીં, $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ x+6 & x-1 & x+2 \\ x-1 & x+2 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$, કરતાં, $\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$ મળે. $1\frac{1}{2}$

$\begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix}$, કરતાં, $\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -3 \\ 4 & -11 & -1 \\ -3 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0$ $1\frac{1}{2}$

$\therefore \ (x + 2)\ (-111) - 4(37) - 3(-37) = 0$ 1

ઉકેલતાં, $x = -\frac{7}{3}$

અથવા

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 15 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ 1

$\therefore$ ડા.બા. $= (AB)' = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ 1

જ.બા. $= B'\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 3 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ 2

$\therefore$ ડા.બા. = જ.બા.

14. અહીં, f એ $x = \frac{\pi}{4}$, આગળ સતત હોવાથી, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = 5$ થાય.

હવે, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{k \cdot \cos 2x}{\pi - 4x}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \frac{k \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - y\right)}{\pi - 4\left(\frac{\pi}{4} - y\right)}$, જ્યાં, $\frac{\pi}{4} - x = y$, 1

$= \lim\limits_{y \to 0} \frac{k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)}{\pi - \pi + 4y}$ 1

$= \lim\limits_{y \to 0} \frac{(k \sin 2y)}{2 \cdot 2y} = \frac{k}{2}$ 1

$\therefore \quad \frac{k}{2} = 5 \Rightarrow k = 10$ 1

15. $y = e^{a\cos^{-1}x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{a\cos^{-1}x}\frac{(-a)}{\sqrt{1-x^2}}$ 1

$\therefore \quad \sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = -ay$ ...(i)

x ને સાપેક્ષ ફરી વિકલન કરતાં,

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dx} = -a\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = -a\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}$$ $1\frac{1}{2}$

$$= -a(-ay) \quad [(i) \text{ પરથી}]$$

$$\therefore \quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$$

બીજી રીત :

$(1 - x^2)\, y_1^2 = a^2 - y^2$

$(1 - x^2)\, 2y_1y_2 - 2xy_1^2 = 2a^2yy_1$

$(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 = a^2y$ $1\frac{1}{2}$

$\left(y_1 = \frac{dy}{dx},\ y_2 = \frac{d^2y}{dx^2},\right)$

16. $\frac{dx}{dt} = 3\cos 3t, \quad \frac{dy}{dt} = -2\sin 2t$ 1

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2\sin 2t}{3\cos 3t}$ અને $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-2\sin\frac{\pi}{2}}{3\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{-2}{3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 1

વળી, $x = \sin 3t = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ અને $y = \cos 2t = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$

$\therefore$ સ્પર્શબિંદુ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ છે. 1

તેથી, સ્પર્શકનું સમીકરણ, $y - 0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\therefore \quad 2\sqrt{2}\,x - 3y - 2 = 0$ 1

અથવા

$$f'(x) = 4\sin^3x\,\cos x - 4\cos^3x\,\sin x$$
$$= -4\sin x\cos x\,(\cos^2x - \sin^2x)$$
$$= -\sin 4x$$ 1

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{4}$. વળી, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

હવે, $0 < x < \frac{\pi}{4}$ હોવાથી $f'(x) < 0$ 1

$\therefore$ f એ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ માં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે. $1\frac{1}{2}$

તે જ પ્રમાણે, આપણે બતાવી શકીએ કે f એ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ માં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે. $1\frac{1}{2}$

17. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^4 x \, cos^3 x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^4 x (1 - sin^2 x) \, cos \, x \, dx$ 1

$= \int_0^{\frac{1}{2}} t^4 (1 - t^2) \, dt$ ($sin \, x = t$ લેતાં) 1

$= \int_0^{\frac{1}{2}} (t^4 - t^6) \, dt$

$= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_0^{\frac{1}{2}}$ 1

$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{28}\right) = \frac{23}{4480}$ 1

18. $I = \int \frac{3x+1}{2x^2 - 2x + 3} dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x-2) + \frac{5}{2}}{2x^2 - 2x + 3} dx$ 1

$= \frac{3}{4} \int \frac{4x - 2}{2x^2 - 2x + 3} dx + \frac{5}{4} \int \frac{1}{x^2 - x + \frac{3}{2}} dx$

$= \frac{3}{4} \log |2x^2 - 2x + 3| + \frac{5}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$ $1\frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} \log |2x^2 - 2x + 3| + \frac{5}{4} \times \frac{2}{\sqrt{5}} tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + c$ $1\frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} \log |2x^2 - 2x + 3| + \frac{\sqrt{5}}{2} tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + c$

અથવા

$$I = \int x(\log x)^2 dx$$

$$= \int (\log x)^2 \, x \, dx$$ 1

$$= (\log x)^2 \frac{x^2}{2} - \int 2\log x \times \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} dx$$ $\frac{1}{2}$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int \log x \cdot x \, dx$$ $1\frac{1}{2}$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \left[\log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx\right]$$ 1

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + c$$ $\frac{1}{2}$

19. અહીં આપેલ વિકલ સમીકરણ

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x e^{\frac{x}{y}} - y}{2y.e^{\frac{x}{y}}}$$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. $\frac{1}{2}$

હવે, આદેશ $\frac{x}{y} = v$ લેતાં, $x = vy \Rightarrow \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$ $\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,ye^v - y}{2ye^v} = \frac{2ve^v - 1}{2e^v}$$ $\frac{1}{2}$

$$y\frac{dv}{dy} = \frac{2ve^v - 1}{2e^v} - v$$ 1

$$\therefore \quad 2e^v dv = -\frac{dy}{y}$$

$$\therefore \quad 2e^v = -\log|y| + c$$ 1

$$\therefore \quad 2e^{\frac{x}{y}} = -\log|y| + c$$

હવે, $x = 0, \quad y = 1$

$\Rightarrow c = 2$

તેથી, વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ $2e^{\frac{x}{y}} = -\log|y| + 2$ $\frac{1}{2}$

20. $\vec{b} + \vec{c} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ 1

$\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$(\vec{b} + \vec{c})$ નો $\vec{a}$ પરનો પ્રક્ષેપ $= \frac{(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{6 - 2 + 1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{5}{3}$ એકમ 1 + 1 + 1

21. બંને રેખાઓને લંબ સદિશ

$$(3\hat{i}-16\hat{j}+7\hat{k}) \times (3\hat{i}+8\hat{j}-5\hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -16 & 7 \\ 3 & 8 & -5 \end{vmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

$= 24\hat{i}+36\hat{j}+72\hat{k}$ અથવા $12(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ 1

માંગેલ રેખાનું સમીકરણ

$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ $1\frac{1}{2}$

22. ધારો કે ઘટના E_1: પ્રથમ અસમતોલ સિક્કો પસંદ થાય છે.

E_2: બીજો અસમતોલ સિક્કો પસંદ થાય છે.

E_3: ત્રીજો સમતોલ સિક્કો પસંદ થાય છે.

$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$

ઘટના A : સિક્કા પર છાપ આવે.

$\therefore \quad P(A \mid E_1) = \frac{40}{100}, \quad P(A \mid E_2) = \frac{75}{100}, \quad P(A \mid E_3) = \frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$

$$P(E_3 \mid A) = \frac{P(E_3)P(A|E_3)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)}$$ $\frac{1}{2}$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{40}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{75}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{10}{33}$$ $1\frac{1}{2}$

વિભાગ C

23. $|A| = 4(-3) - 1(-7) + 3(-1) = -12 + 7 - 3 = -8$ 1

$A_{11} = -3 \qquad A_{12} = 7 \qquad A_{13} = -1$ $1\frac{1}{2}$

$A_{21} = 5 \qquad A_{22} = -17 \qquad A_{23} = -1$

$A_{31} = -2 \qquad A_{32} = 2 \qquad A_{33} = 2$

$$\therefore \quad A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 7 & -17 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ $\frac{1}{2}$

આપેલ સમીકરણ સંહતિને નીચેના સ્વરૂપે લખી શકાય :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ A'\cdot X = B \Rightarrow X = (A')^{-1} B$ 1

$$= (A^{-1})' B$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 5 & -17 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6+7-5 \\ 10-17-5 \\ -4+2+10 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

$\therefore\quad x = \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2},\ z = -1$ $\frac{1}{2}$

અથવા

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$ $\frac{1}{2}$

$R_2 \to R_2 + R_1$ કરતાં $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ 1

$R_2 \to R_2 + 2R_3$ કરતાં $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ 1

$R_3 \to R_3 + 2R_2$ કરતાં $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A$ 1

$R_1 \to R_1 + 2R_3$ કરતાં $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A$ 1

$$R_1 \to R_1 - 2R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} A$$ 1

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ $\frac{1}{2}$

24. ઘનફળ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\frac{1}{2}$

$l^2 = h^2 + r^2$ $1\frac{1}{2}$

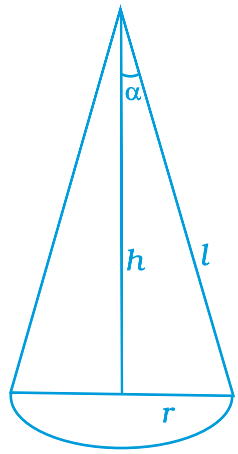
$V = \frac{1}{3}\pi (l^2 - h^2)\ h = \frac{1}{3}\pi (l^2 h - h^3)$ $\frac{1}{2}$

$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}(l^2 - 3h^2) = 0$ $1\frac{1}{2}$

$l = \sqrt{3}h,\ r = \sqrt{2}h$

$tan\,\alpha = \frac{r}{h} = \sqrt{2}$

$\alpha = tan^{-1}\sqrt{2}$



આકૃતિ 2.1

$\frac{d^2V}{dh^2} = -2\pi h < 0$ 1

$\therefore$ ઘનફળ મહત્તમ થશે.

25. $I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 5)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx$

$= \lim_{h \to o} h\left[f(1) + f(1+h) + f(1+2h) + \ldots.. + f(1+(n-1)h)\right]$ ... (i) 1

જ્યાં, $h = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

હવે, $f(1) = 3 + 2 + 5 = 10$

$f(1+h) = 3 + 3h^2 + 6h + 2 + 2h + 5 = 10 + 8h + 3h^2$

$f(1+2h) = 3 + 12h^2 + 12h + 2 + 4h + 5 = 10 + 8 \cdot 2 \cdot h + 3 \cdot 2^2 \cdot h^2$ $1\frac{1}{2}$

$f(1+(n-1)h) = 10 + 8(n-1)\ h + 3(n-1)^2 \cdot h^2$

$I = \lim_{n \to \infty} h\left[10n + 8h\frac{n(n-1)}{2} + 3h^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$ $1\frac{1}{2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[10n + \frac{16}{n}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{12}{n^2}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[10n + 8(n-1) + \frac{2}{n}(n-1)(2n-1)\right] \qquad \frac{1}{2}$$

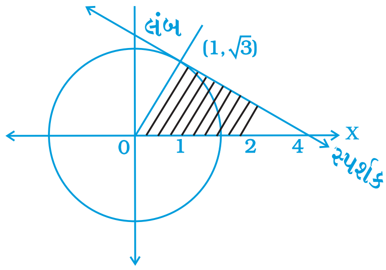
$$= \lim_{n\to\infty} 2\left[10 + 8\left(1-\frac{1}{n}\right) + 2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right] \qquad 1$$

$$= 2\,[10 + 8 + 4] = 44 \qquad \frac{1}{2}$$

નોંધ : $n \to \infty$ એ શ્રેણીલક્ષની સંકલ્પના છે, જે અભ્યાસક્રમમાં નથી.

26. $x^2 + y^2 = 4$ ના $(1, \sqrt{3})$ આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ $x + \sqrt{3}y = 4$

$\therefore \quad y = \dfrac{4-x}{\sqrt{3}}$ છે. $\qquad 1$



આકૃતિ 2.2

અભિલંબનું સમીકરણ $y = \sqrt{3}x$ $\qquad 1$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= \int_0^1 \sqrt{3}\,x\,dx + \int_1^4 \frac{4-x}{\sqrt{3}}\,dx$ $\qquad 1$

$$= \left(\sqrt{3}\,\frac{x^2}{2}\right)_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)_1^4 \qquad 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[8 - \frac{7}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ ચો.એકમ} \qquad 2$$

27. માંગેલ સમતલનું સમીકરણ

$(x + 3y + 6) + \lambda\,(3x - y - 4z) = 0$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

$\therefore \quad (1 + 3\lambda)\,x + (3 - \lambda)\,y - 4\lambda\,z + 6 = 0$ $\qquad \frac{1}{2}$

ઊગમબિંદુથી સમતલનું લંબઅંતર $\qquad 1\frac{1}{2}$

$$\frac{6}{\sqrt{(1+3\lambda)^2 + (3-\lambda)^2 + (-4\lambda)^2}} = 1$$

અથવા $36 = 1 + 9\lambda^2 + 6\lambda + 9 + \lambda^2 - 6\lambda + 16\lambda^2$

અથવા $26\lambda^2 = 26 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\therefore$ માંગેલ સમતલનાં સમીકરણો

$4x + 2y - 4z + 6 = 0$ અને $-2x + 4y + 4z + 6 = 0$ $1\frac{1}{2}$

અથવા $2x + y - 2z + 3 = 0$ અને $x - 2y - 2z - 3 = 0$ 1

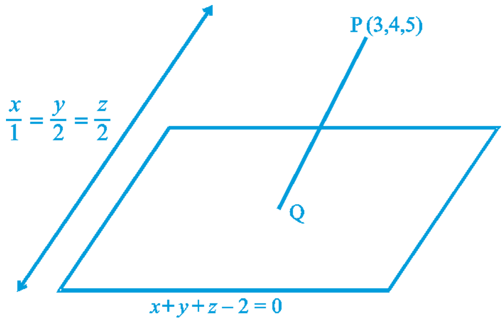
અથવા

આપેલ રેખાનું સમીકરણ $2x = y = z$ એટલે, $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

અથવા $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ 1

રેખા PQ નું સમીકરણ 2

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2} = \lambda$$ 1



આકૃતિ 2.3

Q $(\lambda+3,\ 2\lambda+4,\ 2\lambda+5)$ સમતલ પર છે. $1\frac{1}{2}$

તેથી, $\lambda + 3 + 2\lambda + 4 + 2\lambda + 5 - 2 = 0$ $1\frac{1}{2}$

અથવા $5\lambda = -10$. તેથી $\lambda = -2$.

તેથી, Q ના યામ (1, 0, 1) થશે. P(3, 4, 5) છે.

$\therefore \quad PQ = \sqrt{4+16+16} = 6$ એકમ

28. ધારો કે, x એ ખામીવાળા ગોળાની સંખ્યા દર્શાવે છે. 1

$$P(X=0) = \frac{{}^6C_4}{{}^{10}C_4} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{1}{14}$$ 1

$$P(X=1) = \frac{{}^6C_3\,{}^4C_1}{{}^{10}C_4} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot4}{10\cdot9\cdot8\cdot7}\,4 = \frac{8}{21}$$ 1

$$P(X=2) = \frac{{}^6C_2\,{}^4C_2}{{}^{10}C_4} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{10\cdot9\cdot8\cdot7}\cdot6 = \frac{3}{7}$$ 1

$$P(X=3) = \frac{{}^6C_1\,{}^4C_3}{{}^{10}C_4} = \frac{6\cdot4\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8\cdot7}\cdot4 = \frac{4}{35}$$ 1

$$P(X=4) = \frac{{}^4C_4}{{}^{10}C_4} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8\cdot7} = \frac{1}{210}$$ 1

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

1

29. ધારો કે, એક અઠવાડિયામાં x નંગ ખુરશી અને y નંગ ટેબલનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે છે.

તેથી આપણે,

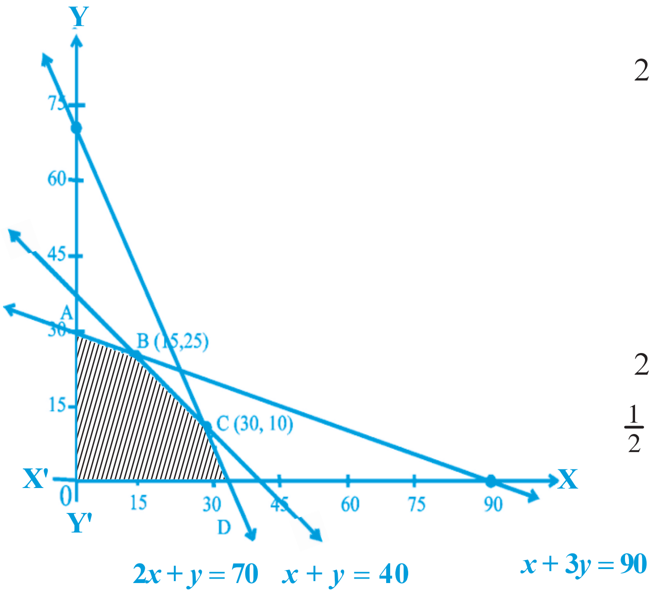
$2x + y \leq 70$ 2

$x + y \leq 40$

$x + 3y \leq 90$

$x \geq 0,\ y \geq 0$ શરતોને અધીન.

$P = 30x + 60y$ નું મૂલ્ય મહત્તમ કરીશું.



આકૃતિ 2.4

શક્ય ઉકેલ પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ,   2

A(0,30), B(15, 25), C(30,10), D(35, 0) $\frac{1}{2}$

A આગળ, $P = 30\ (60) = 1800$

B આગળ, $P = 30\ (15 + 50) = 1950$

C આગળ, $P = 30\ (30 + 20) = 1500$

D આગળ, $P = 30\ (35) = 1050$

$\therefore$ 15 ખુરશી અને 25 ટેબલનું ઉત્પાદન કરે તો, P મહત્તમ મળે. $1\frac{1}{2}$

(શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ સીમિત છે.)

ધોરણ-12 (વિજ્ઞાન પ્રવાહ) ગણિત (050)

વાર્ષિક પરીક્ષા

પ્રશ્નપત્રનું પરિરૂપ (GSEB)

સમય : 3 કલાક **કુલ ગુણ : 100**

નોંધ : આ પરિરૂપ વિદ્યાર્થીઓ, શિક્ષકો, પ્રાશ્નિકો, મોડરેટર્સ વગેરેના માર્ગદર્શન માટે છે. જે તે વિષયોના પ્રાશ્નિક તેમજ મોડરેટર્સને માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણના બૃહદ્ હાર્દ/ઉદ્દેશને સુસંગત રહી પ્રશ્નપત્રની સંરચના બાબતે ફેરફાર કરવાની છૂટ રહેશે.

હેતુઓ પ્રમાણે ગુણભાર :

હેતુઓ	જ્ઞાન (K)	સમજ (U)	ઉપયોજન(A)	ઉચ્ચ વૈચારિક કૌશલ્ય		કુલ ગુણ
				સંયોજન/વિશ્લેષણ	અનુમાન/મૂલ્યાંકન	
PART-A ગુણ	10	15	13	10	2	50
PART-B ગુણ	10	15	13	9	3	50
કુલ ગુણ	20	30	26	19	5	100

પ્રશ્નના પ્રકાર પ્રમાણે ગુણભાર (PART-A) :

ક્રમાંક	પ્રશ્નોનું સ્વરૂપ	પ્રશ્નોની સંખ્યા	કુલ ગુણ
1.	હેતુલક્ષી પ્રશ્નો	50	50

પ્રશ્નના પ્રકાર પ્રમાણે ગુણભાર (PART-B)

ક્રમાંક	પ્રશ્નોનું સ્વરૂપ	પ્રશ્નોની સંખ્યા	કુલ ગુણ
1.	ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (SA-I)	08	16
2.	ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (SA-II)	06	18
3.	વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (LA)	04	16
	કુલ	**18 પ્રશ્નો**	**50 ગુણ**

પ્રકરણદીઠ - યુનિટદીઠ ગુણભાર : આપેલ નમૂનાના પ્રશ્નપત્રનો યુનિટદીઠ ગુણભાર.

ક્રમ	પાઠ/પ્રકરણનું નામ	પ્રકરણદીઠ ગુણભાર	યુનિટદીઠ ગુણભાર	યુનિટ નંબર
1.	સંબંધ અને વિધેય	06	12	I
2.	ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો	06		
3.	શ્રેણિક	07	14	II
4.	નિશ્ચાયક	07		
5.	સાતત્ય અને વિકલનીયતા	08	44	III
6.	વિકલિતના ઉપયોગો	08		
7.	સંકલન	14		
8.	સંકલનનો ઉપયોગ	07		
9.	વિકલ સમીકરણો	07		
10.	સદિશ બીજગણિત	08	16	IV
11.	ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ	08		
12.	સુરેખ આયોજન	06	06	V
13.	સંભાવના	08	08	VI
	કુલ ગુણ	**100**	**100**	

નોંધ : પ્રકરણદીઠ ગુણભાર નમૂનાના પ્રશ્નપત્ર મુજબનો છે. જે બદલાઈ શકે છે. પરંતુ યુનિટદીઠ ગુણભાર બદલાવો જોઈએ નહિ.

ધોરણ-12 (વિજ્ઞાન પ્રવાહ) ગણિત (050)
વાર્ષિક પરીક્ષા
પ્રશ્નપત્રનું પરિરૂપ

સમય : 3 કલાક **કુલ ગુણ : 100**

પ્રશ્ન ક્રમ	વિભાગ તથા પ્રશ્નની વિગત	ગુણ
	PART - A	
1 થી 50	બહુવિકલ્પ પ્રકારના 1 ગુણના 50 પ્રશ્નો	50
	PART - B	
	SECTION - A	
1 થી 8	ટૂંક જવાબી પ્રકારના 2 ગુણના 8 પ્રશ્નો ● આ વિભાગમાં 2 પ્રશ્નમાં આંતરિક વિકલ્પ આપવા. (કુલ-2)	16
	SECTION - B	
9 થી 14	ટૂંકજવાબી પ્રકારના 3 ગુણના 6 પ્રશ્નો આ વિભાગમાં 2 પ્રશ્નમાં આંતરિક વિકલ્પ આપવા. (કુલ-2)	18
	SECTION - C	
15 થી 18	વિસ્તૃત જવાબ પ્રકારના 4 ગુણના કુલ 4 પ્રશ્નો આ વિભાગમાં એક પ્રશ્નમાં આંતરિક વિકલ્પ આપવો. (કુલ-1)	16
	કુલ ગુણ	**100**

નોંધ :
- Part : A નો સમય 1 કલાકનો રહેશે.
- Part : B નો સમય 2 કલાકનો રહેશે.
- પ્રથમ પરીક્ષા માટે પ્રથમ પરીક્ષા સુધીનો અભ્યાસક્રમ લેવાનો રહેશે. જેનું પરિરૂપ વાર્ષિક પરીક્ષાના પરિરૂપ પ્રમાણે 100 ગુણનું રહેશે.
- પ્રિલિમિનરી પરીક્ષામાં સંપૂર્ણ અભ્યાસક્રમ આવરી લેવાનો રહેશે અને તેનું પરિરૂપ વાર્ષિક પરીક્ષાના પરિરૂપ પ્રમાણેનું 100 ગુણનું રહેશે.

નમૂનાનું પ્રશ્નપત્ર

ગણિત : ધોરણ XII (GSEB)

સમય : 3 કલાક **કુલ ગુણ : 100**

સમય : 1 કલાક **ભાગ : A** **કુલ ગુણ : 50**

આ પ્રશ્નપત્રના ભાગ A માં 50 હેતુલક્ષી પ્રકારના પ્રશ્નો છે. બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે. દરેક પ્રશ્નનો 1 ગુણ છે.

1. ગણ A = {1, 2, 3} પર વ્યાખ્યાયિત સામ્ય સંબંધોની સંખ્યા .... છે.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

2. $f : \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{3x+2}{5x-3}$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત હોય, તો નીચેના પૈકી .... સત્ય હોય.

(A) $f^{-1}(x) = f(x)$ (B) $f^{-1}(x) = -f(x)$

(C) $(fof)(x) = x^2$ (D) $f^{-1}(x) = \frac{1}{19} f(x)$

3. જો Q^+ પર $a * b = \frac{ab}{100}$ હોય, તો 0.1નો વ્યસ્ત .... છે.

(A) 1,00,000 (B) 10,000 (C) 1000 (D) 10

4. જો વિધેય $f : A \to [0, \pi]$ પરનું વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય તથા $f(x) = cos^{-1}(2x - 1)$ હોય તો A = ...

(A) [0, 1] (B) [–1, 1] (C) (–1, 1] (D) [0, π]

5. $sin\ (2tan^{-1}\ (0.75))$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0.75 (B) 1.5 (C) 0.96 (D) $sin\ 15^{\circ}$

6. જો $cos^{-1}\alpha + cos^{-1}\beta + cos^{-1}\gamma = 3\pi$, તો $\alpha(\beta + \gamma) + \beta(\gamma + \alpha) + \gamma(\alpha + \beta) =$ ....

(A) 0 (B) 1 (C) 6 (D) 12

7. $sec^2\ (tan^{-1} 2) + cosec^2\ (cot^{-1} 5) =$ ....

(A) 29 (B) 30 (C) 32 (D) 31

8. જો $m \times n$ કક્ષાવાળા શ્રેણિક A અને કોઈક શ્રેણિક B માટે AB′ અને B′A બંને વ્યાખ્યાયિત હોય, તો B ની કક્ષા .... છે.

(A) $m \times m$ (B) $n \times n$ (C) $n \times m$ (D) $m \times n$

9. $\begin{bmatrix} \frac{1}{25} & 0 \\ x & \frac{1}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -a & 5 \end{bmatrix}^{-2}$ હોય, તો $x =$ ....

(A) $\frac{a}{125}$ (B) $\frac{2a}{25}$ (C) $\frac{2a}{125}$ (D) $\frac{a}{25}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો AA' .... શ્રેણિક છે.

(A) સંમિત (B) વિસંમિત (C) એકમ (D) એક પણ નહિ

11. જો B = $|A| A^{-1}$ અને $|A| = -2$, તો $|B|$ = ..., જ્યાં A એ 3×3 શ્રેણિક છે.

(A) 1 (B) –2 (C) 8 (D) 4

12. નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} a-b & b+c & a \\ b-a & c+a & b \\ c-a & a+b & c \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $a^3 + b^3 + c^3$ (B) $3\ bc$

(C) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

13. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta & 1 \\ 1+\cos\theta & 1 & 1 \end{vmatrix}$ નું મહત્તમ મૂલ્ય .... છે. (θ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.)

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{4}$

14. જો $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & yz & x \\ 1 & zx & y \\ 1 & xy & z \end{vmatrix}$ અને $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ હોય, તો ....

(A) $D_1 + 2D_2 = 0$ (B) $2D_1 + D_2 = 0$

(C) $D_1 + D_2 = 0$ (D) $D_1 = D_2$

15. પ્રત્યેક x અને y માટે $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ તથા $f(3) = 3$ અને $f'(0) = 11$ હોય, તો $f'(3)$ = ...

(A) 22 (B) 44 (C) 28 (D) 0

16. વિધેય $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in [1, 3]$ માટે, મધ્યકમાન પ્રમેય લાગુ કરવામાં આવે, તો c ની કિંમત .... મળે.

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$

(C) 2 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ.

17. જો $f(x) = \log_7 (\log_3 x)$ તો $f'(x)$ = ...

(A) $\frac{1}{x \log 7 \log 3}$ (B) $\frac{1}{x \cdot \log x \cdot \log 7}$ (C) $\frac{1}{x \cdot \log 3 \cdot \log x}$ (D) $\frac{1}{x \log x}$

18. એક પથ્થરને ઉપર શિરોલંબ દિશામાં ફેંકતાં તેની ગતિનું સમીકરણ $s = 80t - 16t^2$ છે, તો તેને મહત્તમ ઉંચાઈ પ્રાપ્ત કરતાં લાગતો સમય .... સેકન્ડ છે.

(A) 2.5 (B) 2 (C) 3.5 (D) 4

19. જો વર્તુળના ક્ષેત્રફળમાં 4 % ત્રુટિ હોય, તો તેની ત્રિજ્યામાં .... ત્રુટિ હોય.

(A) 1 % (B) 2 % (C) 3 % (D) 4 %

20. .... માટે $y = x(x - 3)^2$ ઘટતું વિધેય છે.

(A) $1 < x < 3$ (B) $x < 0$ (C) $x > 0$ (D) $0 < x < \frac{3}{2}$

21. વક્ર $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ નો મહત્તમ ઢાળ .... છે.

(A) 0 (B) 12 (C) 16 (D) 32

22. $\int e^{x \log a} \cdot e^x \, dx$ = ...

(A) $a^x e^x$ (B) $\frac{(ae)^x}{1+\log a}$ (C) $\frac{e^x}{\log (ae)}$ (D) $\frac{a^x}{1+\log a}$

23. જો $\int \frac{7^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = m \cdot 7^{\frac{1}{x}}$, તો m = ...

(A) $\frac{-1}{\log 7}$ (B) $-\log 7$ (C) -1 (D) $\frac{1}{7}$

24. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx$ = ...

(A) $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + c$ (B) $\log (e^{2x} - 1) - x + c$

(C) $\log (e^{2x} + 1) + c$ (D) $\frac{1}{2} \log (e^{2x} + 1) + c$

25. $\int \frac{x^3+4x-3}{x^2+4} dx = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}tan^{-1}\frac{x}{2} + \mathrm{C}$ તો A + B = ... જ્યાં, A, B $\in$ R.

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) -1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

26. $\int \frac{dx}{4\,sin^2 x + 5\,cos^2 x}$ = ... + c

(A) $\frac{1}{\sqrt{5}} tan^{-1}\left(\frac{2tan\,x}{\sqrt{5}}\right)$ (B) $\frac{1}{\sqrt{5}} tan^{-1}\left(\frac{tan\,x}{\sqrt{5}}\right)$

(C) $\frac{1}{2\sqrt{5}} tan^{-1}\left(\frac{2tan\,x}{\sqrt{5}}\right)$ (D) $\frac{2}{\sqrt{5}} tan^{-1}\left(\frac{2tan\,x}{\sqrt{5}}\right)$

27. $\int (sin\,(\log\,x) + cos\,(\log\,x))\,dx$ = ...

(A) $x \cdot cos\,(\log\,x) + c$ (B) $sin\,(\log\,x) + c$

(C) $cos\,(\log\,x) + c$ (D) $x \cdot sin\,(\log\,x) + c$

28. $\int (x^6 + 7x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)\,e^x\,dx$ = ... + c.

(A) $\sum\limits_{i=1}^{7} x^i e^x$ (B) $\sum\limits_{i=1}^{6} x^i e^x$ (C) $\sum\limits_{i=0}^{6} x^i e^x$ (D) $\sum\limits_{i=0}^{6} (xe)^i$

29. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,x \cdot e^{sin\,x} dx$ = ...

(A) $e - 1$ (B) $1 - e$ (C) e^e (D) e

30. વક્ર $y = 2x - x^2$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\frac{3}{5}$ (B) 2 (C) 8 (D) $\frac{4}{3}$

31. પરવલય $y^2 = 4ax$ અને તેના નાભિલંબ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\frac{4}{3}a^2$ (B) $\frac{8}{3}a^2$ (C) $\frac{16}{3}a^2$ (D) $\frac{32}{3}a^2$

32. વક્ર $y = |5 - x|$; X-અક્ષ અને રેખા $x = 0$ અને $x = 1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ .... છે.

(A) $\frac{9}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) 9 (D) 5

33. વિકલ સમીકરણ $(1 - y^2)\frac{dx}{dy} + yx = ay$ $(-1 < y < 1)$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) $\frac{1}{y^2 - 1}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$ (C) $\frac{1}{1 - y^2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$

34. વિકલ સમીકરણ $\sqrt[3]{\frac{dy}{dx}} - 4\frac{d^2y}{dx^2} - 7x = 0$ ના કક્ષા તથા પરિમાણ અનુક્રમે a અને b હોય, તો $a + b =$ ....

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 2

35. જો કોઈ વક્રને કોઈ પણ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ એ તે બિંદુના x-યામ તથા y-યામના ગુણોત્તર જેટલો હોય, તો તે વક્ર .... દર્શાવે.

(A) ઉપવલય (B) પરવલય (C) વર્તુળ (D) લંબાતિવલય

36. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ એકમ સદિશો હોય અને $\vec{a}$ તથા $\vec{b}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ θ હોય, તો $\theta =$ ....

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

37. A(–1, –2, 3) અને B(1, 2, –1) હોય, તો $\overrightarrow{AB}$ ની દિક્કોસાઈન .... થાય.

(A) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$ (B) 2, 4, –4 (C) $\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}$ (D) $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}$

38. જો α, β, γ એ સદિશ $\bar{x}$ ના દિક્ખૂણાઓ હોય, તો $1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma =$ ....

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) 2

39. સદિશ (–4, –2, 4) નો (2, 1, 1) પરનો પ્રક્ષેપ સદિશ .... છે.

(A) (–2, 1, 1) (B) (–2, –1, –1) (C) (1, –1, –2) (D) (–1, 1, 2)

40. જો $|x| = |y| = 1$ અને $\bar{x} \perp \bar{y}$, તો $|\bar{x} - \bar{y}| =$ ....

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 1 (D) 0

41. જો $|\bar{a}| = 1$ તથા $\bar{a} \times \bar{b} = (1, 2, 3)$, તો $\bar{a} \times [\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b})] =$ ....

(A) (1, 2, 3) (B) (–1, –2, –3) (C) (0, 0, 0) (D) (1, 0, 0)

42. ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતી અને જેના દિક્ખૂણાઓ $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ હોય, તે રેખાનું સમીકરણ .... છે.

(A) $-x = \frac{y}{-\sqrt{2}} = z$ (B) $\frac{x}{-1} = \frac{y}{-\sqrt{2}} = z$ (C) $x = \frac{y}{-\sqrt{2}} = -z$ (D) $x = \frac{y}{\sqrt{2}} = z$

43. ઊગમબિંદુથી સમતલ પરનો લંબપાદ (a, b, c) હોય, તો સમતલનું સમીકરણ .... છે.

(A) $ax + by + cz = a + b + c$ (B) $ax + by + cz = abc$

(C) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (D) $ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$

44. (1, 1, 1), (1, –1, 1) અને (–1, 3, –5) માંથી પસાર થતું સમતલ જો $(k, 1, 2)$ માંથી પસાર થાય, તો k = ...

(A) $-\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{3}{4}$

45. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્નમાં શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 2), (3, 0), (6, 0), (6, 8) અને (0, 5) છે. $F = 4x + 6y$ હેતુલક્ષી વિધેય છે.

F નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય .... આગળ મળે.

(A) ફક્ત (0, 2)

(B) ફક્ત (3, 0)

(C) (0, 2) અને (3, 0) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુ

(D) (0, 2) અને (3, 0) જોડતા કોઈ પણ બિંદુ

46. સુરેખ મર્યાદા પદ્ધતિ દ્વારા નક્કી કરેલ શક્ય પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 3), (1, 1) અને (3, 0) છે. $Z = px + qy$ જ્યાં, $p, q > 0$. p અને q ની શરત પ્રમાણે Z નું ન્યૂનતમ મૂલ્ય (3, 0) અને (1, 1) આગળ થાય તો,

(A) $p = 2q$ (B) $p = \frac{q}{2}$ (C) $p = 3q$ (D) $p = q$

47. સુરેખ આયોજનના પ્રશ્ન માટે $x + 2y \geq 10$, $3x + 4y \leq 24$ અને $x \geq 0$, $y \geq 0$ શરતોને અધીન .... બિંદુએ સીમિત શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનું શિરોબિંદુ નથી.

(A) (0, 5) (B) (4, 3) (C) (3, 4) (D) (0, 6)

48. જો બે બાળકો ધરાવતાં કુટુંબમાં ગમે તે એક બાળક છોકરી હોય તો, બીજું બાળક પણ છોકરી હોય તેની સંભાવના .... છે.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

49. ત્રણ વિદ્યાર્થીઓ A, B અને C ને એક પ્રશ્ન આપવામાં આવે છે. A, B અને C આ પ્રશ્ન ઉકેલી શકે તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{4}$ છે. તો આ પ્રશ્ન ઉકેલી શકાય તેની સંભાવના .... છે.

(A) (B) (C) (D)

50. જો A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ તો $P(A | A \cup B)$ = ...

(A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{2}{3}$

સમય : 2 કલાક **ભાગ : B** **કુલ ગુણ : 50**

આ પ્રશ્નપત્રના ભાગ B માં ત્રણ વિભાગ છે અને કુલ 1 થી 18 પ્રશ્નો આપેલા છે. બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે. આંતરિક વિકલ્પો આપેલા છે.

વિભાગ A

નીચે આપેલ 1થી 8 પ્રશ્નોની ગણતરી કરી ટૂંકમાં જવાબ આપો : (દરેક પ્રશ્નના 2 ગુણ છે.) **16**

1. સાબિત કરો : $cos\left(2tan^{-1}\frac{1}{7}\right) = sin\left(4tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$

2. જો $x^y = e^{x-y}$, તો સાબિત કરો કે $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log x}{\{\log (xe)\}^2}$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{cos\,(x-a)\,cos\,(x-b)}\,dx$ મેળવો.

4. વક્ર $y^2 = 9x$ અને રેખા $y = 3x$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

5. વક્ર $y = x^2 - x - 6$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

અથવા

વક્ર $y = |x - 3|$, X-અક્ષ અને રેખા $x = 0$, $x = 1$ વડે આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

6. જો ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ A, B, C ની સામેની બાજુઓના માન a, b, c હોય, તો સાબિત કરો કે

$$cos\text{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

7. જે રેખાઓની દિક્કોસાઈન સમીકરણ $l + m + n = 0$ અને $l^2 + m^2 - n^2 = 0$ થી મળે, તે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો શોધો.

8. પાસાની રમતમાં, એક ખેલાડી દાવમાં દરેક વખતે પાસો ઉછાળે ત્યારે ₹ 1 ચૂકવે છે. જો પાસા પર મળતો અંક 3 હોય, તો તે ₹ 5 મેળવે છે. જો પાસા પર 1 અથવા 6 મળે, તો તે ₹ 2 મેળવે છે અન્યથા કશું ન મળે. પ્રયત્નોની લાંબી શૃંખલા બાદ ખેલાડીને મળતા નફાનું અપેક્ષિત મૂલ્ય શોધો.

અથવા

એક પેટીમાં 5 વાદળી અને 4 લાલ દડા છે. યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે અને તેને પરત મૂકવામાં આવતો નથી. તેનો રંગ પણ નોંધવામાં આવતો નથી. ત્યાર બાદ યાદચ્છિક રીતે બીજો દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. બીજો દડો વાદળી રંગનો હોય તેની સંભાવના શું છે ?

વિભાગ B

નીચે આપેલ પ્રશ્નો 9 થી 14 ના માગ્યા પ્રમાણે ગણતરી કરી જવાબ આપો : (દરેક પ્રશ્નના 3 ગુણ છે.) 18

9. વિધેય $f : R^+ \to (-5, \infty)$, $f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે f વ્યસ્ત સંપન્ન છે. fનું પ્રતિવિધેય શોધો.

10. પ્રાથમિક પ્રક્રિયાઓની મદદથી $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો.

અથવા

જો $A = \begin{bmatrix} 0 & -tan\frac{\alpha}{2} \\ tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ અને I એ 2 કક્ષાવાળો એકમ શ્રેણિક હોય, તો સાબિત કરો કે,

$I + A = (I - A) \begin{bmatrix} cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{bmatrix}$

11. જો $y = x \cdot \log\left(\frac{x}{a + bx}\right)$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $x^3y_2 = (xy_1 - y)^2$.

12. બિંદુ (2, 3, –8) માંથી રેખા $\frac{4-x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{3}$ પરનો લંબપાદ શોધો. આપેલા બિંદુથી રેખા સુધીનું લંબઅંતર પણ શોધો.

13. એક કંપની 1200 પૅકેજનું પરિવહન મોટી અને નાની વાનની મદદથી કરે છે. દરેક મોટી વાન 200 પૅકેજ લઈ જઈ શકે છે અને દરેક નાની વાન 80 પૅકેજ લઈ જઈ શકે છે. દરેક મોટી વાનનો ખર્ચ ₹ 400 અને નાની વાનનો ખર્ચ ₹ 200 છે. ખર્ચ ₹ 3000 થી વધવો જોઈએ નહિ અને મોટી વાનની સંખ્યા નાની વાનની સંખ્યા કરતાં વધવી જોઈએ નહિ. આ પ્રશ્નને સુરેખ આયોજનની રીતે ગાણિતીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો કે જેથી ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય.

14. ત્રણ પાત્રોમાં અનુક્રમે 2 સફેદ અને 3 કાળા દડા, 3 સફેદ અને 2 કાળા દડા, 4 સફેદ અને 1 કાળો દડો છે. દરેક પાત્ર પસંદ થવાની સંભાવના સમાન છે. પસંદ થયેલ પાત્રમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવે, તો તે સફેદ માલૂમ પડે છે તો, તે બીજા પાત્રમાંથી આવ્યો હોય તેની સંભાવના શોધો.

વિભાગ C

નીચે આપેલ પ્રશ્નો 15 થી 28 ના માગ્યા પ્રમાણે ગણતરી કરી જવાબ આપો : (દરેક પ્રશ્નના 4 ગુણ છે.) 16

15. $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ના ગુણાકારનો ઉપયોગ કરી સમીકરણ સંહતિ $x - 2y - 2z = 9$ અને $2x + y + 3z = 1$ નો ઉકેલ મેળવો.

16. લંબચોરસ આધાર તથા પૃષ્ઠો ધરાવતી એક ખૂલ્લી ટાંકીની ઊંડાઈ 2 મીટર તથા ઘનફળ 8 (મીટર)^3 છે. જો આ ટાંકીના આધારના બાંધકામની કિંમત ₹ 70 પ્રતિ(મીટર)^2 તથા પૃષ્ઠોના બાંધકામની કિંમત ₹ 45 પ્રતિ(મીટર)^2 હોય, તો ટાંકી બનાવવા માટે થતો ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધો.

અથવા

એક બારી લંબોચરસ પર અર્ધવર્તુળ ગોઠવેલ હોય તે આકારની છે. બારીની કુલ પરિમિતિ 10 મીટર છે. બારીમાંથી મહત્તમ પ્રકાશ પ્રવેશી શકે તે માટે બારીનાં પરિમાણ શોધો.

17. સાબિત કરો કે : $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{tan\, x} + \sqrt{cot\, x})\, dx = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

18. જો વક્રના કોઈ પણ બિંદુ (x, y) આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ એ આ બિંદુના x-યામ અને x તથા y યામના ગુણાકારના સરવાળા બરાબર હોય તથા બિંદુ (0, 1)માંથી પસાર થાય તો તે વક્રનું સમીકરણ શોધો.

◆

જવાબો

નમૂનાનું પ્રશ્નપત્ર (GSEB)

ભાગ : A

1. D	**2.** A	**3.** A	**4.** A	**5.** C
6. C	**7.** D	**8.** D	**9.** C	**10.** A
11. D	**12.** D	**13.** A	**14.** C	**15.** D
16. B	**17.** B	**18.** A	**19.** B	**20.** A
21. B	**22.** B	**23.** A	**24.** B	**25.** B
26. C	**27.** D	**28.** B	**29.** A	**30.** D
31. B	**32.** A	**33.** D	**34.** C	**35.** D
36. D	**37.** A	**38.** A	**39.** B	**40.** A
41. B	**42.** C	**43.** D	**44.** C	**45.** D
46. B	**47.** C	**48.** C	**49.** A	**50.** A

ભાગ : B

3. $\frac{1}{sin\,(a-b)} \log \left|\frac{cos\,(x-a)}{cos\,(x-b)}\right| + C$ **4.** $\frac{1}{2}$ **5.** $\frac{125}{6}$ અથવા $\frac{5}{2}$ ચો. એકમ

7. $\frac{\pi}{3}$ **8.** ₹ 0.50 **9.** $\frac{\sqrt{x+6}-1}{3}$ **10.** $\begin{bmatrix} -7 & -9 & 10 \\ -12 & -15 & 17 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

12. $(2, 3, -2), \sqrt{45}$ **13.** $5x + 2y \geq 30,\ 2x + y < 15,\ x \leq y,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z = 400x + 200y.$

14. $\frac{1}{3}$ **15.** $x = 3,\ y = -2$ અને $z = -1$

16. ₹ 1000 **અથવા** **16.** લંબાઈ $= \frac{20}{\pi+4}$ મીટર, પહોળાઈ $= \frac{10}{\pi+4}$ મીટર **18.** $y = -1 + 2e^{\frac{x^2}{2}}$

◆

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.3

1. (b,b), (c,c), (a,c) **2.** $[-5,5]$ **3.** $4x^2 + 4x - 1$

4. $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ **5.** $f^{-1} = \{(b,a), (d,b), (a,c), (c,d)\}$

6. $f(f(x)) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$ **7.** $\alpha = 2$, $\beta = -1$

8. (i) વિધેય દર્શાવે. જે વ્યાપ્ત વિધેય છે, પરંતુ એક-એક વિધેય નથી.

(ii) વિધેય દર્શાવતું નથી.

9. $fog = \{(2,5), (5,2), (1,5)\}$

12. (i) f, વિધેય નથી. (ii) g, વિધેય છે. (iii) h, વિધેય છે. (iv) k, વિધેય નથી.

14. $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

17. R નો પ્રદેશ = {1, 2, 3, 4, ... 20} અને

R નો વિસ્તાર = {1, 3, 5, 7, 9,.....39}. R એ સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત નથી.

21. (i) f એક-એક વિધેય છે, પરંતુ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

(ii) g એક-એક વિધેય નથી તથા વ્યાપ્ત વિધેય નથી

(iii) h એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય છે.

(iv) k એક-એક તથા વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

22. (i) સંમિત નથી, પરંપરિત, સ્વવાચક નથી (ii) સ્વવાચક નથી, સંમિત, પરંપરિત નથી (iii) સ્વવાચક, સંમિત અને પરંપરિત (iv) સ્વવાચક નથી, પરંપરિત નથી, સંમિત નથી

23. $[(2,5)] = \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8), (6,9)\}$

25. (i) $(fog)(x) = 4x^2 - 6x + 1$ (ii) $(gof)(x) = 2x^2 + 6x - 1$

(iii) $(fof)(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5$ (iv) $(gog)(x) = 4x - 9$

26. (ii) અને (iv)

27. (i)	**28.** C	**29.** B	**30.** D
31. B	**32.** B	**33.** A	**34.** C
35. C	**36.** D	**37.** D	**38.** A
39. B	**40.** B	**41.** A	**42.** A
43. C	**44.** B	**45.** D	**46.** A

47. B **48.** $R = \{(3,8), (6,6), (9,4), (12,2)\}$

49. $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (5,5)\}$

50. $gof = \{(1,3), (3,1), (4,3)\}$ અને $fog = \{(2,5), (5,2), (1,5)\}$

51. $(fofof)(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$ **52.** $f^{-1}(x) = 7 + (4-x)^{\frac{1}{3}}$

53. અસત્ય	**54.** અસત્ય	**55.** અસત્ય	**56.** અસત્ય
57. સત્ય	**58.** અસત્ય	**59.** અસત્ય	**60.** સત્ય
61. અસત્ય	**62.** અસત્ય		

સ્વાધ્યાય 2.3

1. 0 **2.** -1 **4.** $\dfrac{-\pi}{12}$ **5.** $-\dfrac{\pi}{3}$

7. $0, -1$ **8.** $\dfrac{14}{15}$ **11.** $\dfrac{-3}{4}, \dfrac{3}{4}$

13. $tan^{-1}\dfrac{4}{3} - x$ **17.** $\dfrac{\pi}{4}$ **19.** $\dfrac{a_n - a_1}{1 + a_1 a_n}$

20. C	**21.** D	**22.** B	**23.** D	**24.** A
25. A	**26.** B	**27.** C	**28.** A	**29.** B
30. A	**31.** D	**32.** D	**33.** B	**34.** A
35. C	**36.** A	**37.** C		
38. $\dfrac{2\pi}{3}$	**39.** $\dfrac{2\pi}{5}$	**40.** $\sqrt{3}$	**41.** ϕ	**42.** $\dfrac{\pi}{3}$
43. $\dfrac{2\pi}{3}$	**44.** 0	**45.** 1	**46.** $(-2\pi, 2\pi)$	**47.** $xy > -1$
48. $\pi - cot^{-1}x$	**49.** અસત્ય	**50.** અસત્ય	**51.** સત્ય	**52.** સત્ય
53. સત્ય	**54.** અસત્ય	**55.** સત્ય		

સ્વાધ્યાય 3.3

1. 28×1, 1×28, 4×7, 7×4, 14×2, 2×14. જો શ્રેણિકને 13 ઘટકો હોય, તો તે શ્રેણિક 13×1 અથવા 1×13 પ્રકારનો હશે.

2. (i) 3×3 (ii) 9 (iii) $a_{23} = x^2 - y$, $a_{31} = 0$, $a_{12} = 1$

3. (i) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} e^x \sin x & e^x \sin 2x \\ e^{2x} \sin x & e^{2x} \sin 2x \\ e^{3x} \sin x & e^{3x} \sin 2x \end{bmatrix}$ **5.** $a = 2$, $b = 2$ **6.** અશક્ય

7. (i) $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $2X - 3Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -11 & -10 & -18 \end{bmatrix}$ (iii) $Z = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 2 \\ -12 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

8. $x = 4$ **10.** -2, -14

11. $A^{-1} = \frac{-1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ **12.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

13. $A = [-1 \;\; 2 \;\; 1]$

15. $AB = \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 7 & 8 & 16 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ **17.** હા **18.** $x = 1$, $y = 2$

19. $X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} k \\ 2k \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} k & k \\ 2k & 2k \end{bmatrix}$ વગેરે.

જ્યાં k કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

24. $A = [-4]$ **30.** જ્યારે AB = BA ત્યારે સત્ય

37. (i) $\frac{1}{22}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) અશક્ય

38. $x = 2$, $y = 4$ અથવા $x = 4$, $y = 2$, $z = -6$, $w = 4$

39. $\begin{bmatrix} -24 & -10 \\ -28 & -38 \end{bmatrix}$ **40.** O, $A^3 = \begin{bmatrix} 187 & -195 \\ -156 & 148 \end{bmatrix}$

41. $a = 2$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 3$ **42.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} 18 & 8 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}$ **44.** α ની તમામ વાસ્તવિક કિંમતો માટે સત્ય.

45. $a = -2$, $b = 0$, $c = -3$ **50.** $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

51. (i) $\begin{bmatrix} -7 & -9 & 10 \\ -12 & -15 & 17 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) વ્યસ્ત શ્રેણિકનું અસ્તિત્વ નથી. (iii) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

52. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-3}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

53. A **54.** D **55.** B **56.** D

57. D **58.** D **59.** A **60.** B

61. C **62.** D **63.** A **64.** A

65. D **66.** D **67.** A **68.** શૂન્ય શ્રેણિક

69. વિસંમિત શ્રેણિક **70.** –1 **71.** 0

72. લંબચોરસીય શ્રેણિક **73.** વિભાજન

74. સંમિત શ્રેણિક **75.** સંમિત શ્રેણિક

76. (i) $B'A'$ (ii) kA' (iii) $k(A'-B')$ **77.** વિસંમિત શ્રેણિક

78. (i) વિસંમિત શ્રેણિક

(ii) સંમિત કે વિસંમિત પૈકી કોઈ પણ શ્રેણિક નથી.

79. સંમિત શ્રેણિક **80.** AB = BA **81.** અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

82. અસત્ય **83.** અસત્ય **84.** અસત્ય **85.** સત્ય

86. સત્ય **87.** અસત્ય **88.** અસત્ય **89.** સત્ય

90. અસત્ય **91.** અસત્ય **92.** અસત્ય **93.** અસત્ય

94. સત્ય **95.** અસત્ય **96.** અસત્ય **97.** અસત્ય

98. સત્ય **99.** અસત્ય **100.** સત્ય **101.** સત્ય

સ્વાધ્યાય 4.3

1. $x^3 - x^2 + 2$ **2.** $a^2 (a + x + y + z)$ **3.** $2x^3y^3z^3$

4. $3(x + y + z)(xy + yz + zx)$ **5.** $16(3x + 4)$ **6.** $(a + b + c)^3$

12. $\theta = n\pi$ અથવા $n\pi + (-1)^n \left(\frac{\pi}{6}\right)$ **13.** $x = 0, -12$ **18.** $x = 0, y = -5, z = -3$

19. $x = 1, y = 1, z = 1$ **20.** $x = 2, y = -1, z = 4$

22. $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^2$

24. C **25.** C **26.** B **27.** D

28. C | **29.** A | **30.** A | **31.** A
32. C | **33.** D | **34.** D | **35.** D

36. B **37.** C **38.** $27|A|$ **39.** $\frac{1}{|A|}$

40. શૂન્ય **41.** $\frac{1}{2}$ **42.** $(A^{-1})^2$ **43.** 9

44. નિશ્ચાયકની કિંમત **45.** $x = 2$ $y = 7$

46. $(y - z)$ $(z - x)$ $(y - x + xyz)$ **47.** શૂન્ય **48.** સત્ય

49. અસત્ય **50.** અસત્ય **51.** સત્ય **52.** સત્ય

53. સત્ય **54.** અસત્ય **55.** સત્ય **56.** સત્ય

57. સત્ય **58.** સત્ય

સ્વાધ્યાય 5.3

1. $x = 1$ આગળ સતત **2.** અસતત **3.** અસતત **4.** સતત

5. અસતત **6.** સતત **7.** સતત **8.** અસતત

9. સતત **10.** સતત **11.** $k = \frac{7}{2}$ **12.** $k = \frac{1}{2}$

13. $k = -1$ **14.** $k = \pm 1$ **16.** $a = 1,\ b = -1$

17. $x = -2$ અને $x = \frac{-5}{2}$ આગળ અસતત **18.** $x = 1,\ \frac{1}{2}$ અને 2 આગળ અસતત

20. $x = 2$ આગળ વિકલનીય નથી. **21.** $x = 0$ આગળ વિકલનીય છે.

22. $x = 2$ આગળ વિકલનીય નથી. **25.** $-(\log 2) \cdot \sin 2x \cdot 2^{\cos^2 x}$

26. $\frac{8^x}{x^8}\left[\log 8 - \frac{8}{x}\right]$ **27.** $\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$ **28.** $\frac{5}{x \log(x^5)\ \log(\log x^5)}$

29. $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ **30.** $n(2ax+b)\sin^{n-1}(ax^2+bx+c)\ \cos(ax^2+bx+c)$

31. $\frac{-1}{2\sqrt{x+1}}\ \sin\left(\tan\sqrt{x+1}\right)\ \sec^2\left(\sqrt{x+1}\right)$

32. $2x\cos(x)^2 + 2x\sin(2x^2) + \sin 2x$ **33.** $\frac{-1}{2\sqrt{x}\left(x+1\right)}$

34. $(\sin x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \log \sin x\right]$ **35.** $\sin^m x \cos^n x\left(-n\tan x + m\cot x\right)$

36. $(x+1)(x+2)^2(x+3)^3\left[9x^2+34x+29\right]$

37. -1 **38.** $\frac{1}{2}$ **39.** $\frac{1}{2}$ **40.** -1

41. $\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ **42.** $\frac{3a}{a^2+x^2}$ **43.** $\frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}$ **44.** $\frac{t^2+1}{t^2-1}$

45. $e^{-2\theta}\left(\frac{-\theta^3+\theta^2+\theta+1}{\theta^3+\theta^2+\theta-1}\right)$ **46.** $\cot\theta$ **47.** 1

48. t **51.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ **52.** $\frac{\tan x - x}{\sin^2 x}$ **53.** $\frac{1}{2}$

54. $\frac{2xy^2 - y^3\cos(xy) - y}{xy^2\cos(xy) - x + y^2}$ **55.** $\frac{y - \sec(x+y)\tan(x+y)}{\sec(x+y)\tan(x+y) - x}$

56. $\frac{-x}{y}$ **57.** $\frac{y-4x^3-4xy^2}{4yx^2+4y^3-x}$ **64.** $-2\sin y\cos^3 y$ **65.** $\frac{1}{3}$ **66.** $\frac{\pi}{4}$ **67.** 0

68. -2 **69.** 0 **70.** f એ $x = 1$ આગળ વિકલનીય નથી, તેથી લાગુ પડતું નથી.

71. $(\pi, -2)$ **72.** $(2, -4)$ **73.** $\frac{1+3\sqrt{5}}{4}$ **74.** $\frac{1}{3}$ **75.** $\cos^{-1}\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$ **76.** $\sqrt{15}$

77. $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right)$ **78.** $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

79. $p = 3,\ q = 5$ **82.** $x^{\tan x}\left(\sec^2 x \log x + \frac{\tan x}{x}\right) + \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}$ **83.** D

84. C **85.** B **86.** A **87.** A

88. A **89.** C **90.** B **91.** B

92. A **93.** A **94.** B **95.** A

96. B **97.** $|x| + |x-1|$ **98.** $\frac{2}{3x}$ **99.** $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

100. $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ **101.** -1 **102.** અસત્ય **103.** સત્ય

104. સત્ય **105.** સત્ય **106.** અસત્ય

સ્વાધ્યાય 6.3

3. 8 મી/સે. **4.** $\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)v$ એકમ/સેકન્ડ **5.** $\theta = \frac{\pi}{3}$ **6.** 31.92

7. 0.018π સેમી^{3} **8.** પ્રકાશ તરફ $2\frac{2}{3}$ મી/સે., -1 મી/સે.

9. 2000 લિટર/સેકન્ડ, 3000 લિટર/સેકન્ડ **11.** $2x^2 - 3x + 1$

12. $k^2 = 8$ **14.** (4, 4) **15.** $\tan^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$ **17.** $x + 3y = \pm 8$

18. (3, 2), (–1, 2) **23.** (1, – 16), મહત્તમ ઢાળ = 12

26. x = 1 આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે; સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય = 0

x = 3 આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે; સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય = –28

x = 0 નતિબિંદુ છે.

27. ₹ 100 **30.** 6 સેમી, 12 સેમી, 864π સેમી^{3}

31. 1:1 **33.** ₹ 1920 **34.** $\frac{2}{3}x^3\left(1 + \frac{2\pi}{27}\right)$

35. C	**36.** B	**37.** **A**	**38.** C
39. D	**40.** A	**41.** A	**42.** D
43. B	**44.** B	**45.** C	**46.** B
47. D	**48.** A	**49.** B	**50.** C
51. A	**52.** C	**53.** B	**54.** C
55. B	**56.** D	**57.** B	**58.** B
59. C	**60.** (3, 34), $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-74}{9}\right)$	**61.** $x + y = 0$	**62.** $(-\infty, -1)$
63. $(1, \infty)$	**64.** $2\sqrt{ab}$		

સ્વાધ્યાય 7.3

3. $\frac{x^2}{2} - x + 3\log|x+1| + c$ **4.** $\frac{x^3}{3} + c$ **5.** $\log|x + \sin x| + c$

6. $\tan\frac{x}{2} + c$ **7.** $\frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^3 x}{3} + c$ **8.** $x + c$

9. $-2\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} + c$ **10.** $2\left[\frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \log\left|\sqrt{x} + 1\right|\right] + c$

11. $-a\left[\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right] + c$ **12.** $\frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \log\left|1 + x^{\frac{3}{4}}\right|\right] + c$

13. $\frac{-1}{3}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + c$ **14.** $\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{4} + c$

15. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4t-3}{3}\right) + c$ **16.** $3\sqrt{x^2+9} - \log\left|x + \sqrt{x^2+9}\right| + c$

17. $\frac{x-1}{2}\sqrt{5-2x+x^2} + 2\log\left|x-1+\sqrt{5-2x+x^2}\right| + c$

18. $\frac{1}{4}\left\{\log\left|x^2-1\right| - \log\left|x^2+1\right|\right\} + c$

19. $\frac{1}{4}\left\{\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right\} - \frac{1}{2}tan^{-1}x + c$

20. $\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + c$

21. $\frac{x\,sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} + \log\left|\sqrt{1-x^2}\right| + c$

22. $-\left(\frac{1}{2}sin\,2x + sin\,x\right) + c$

23. $tan\,x - cot\,x - 3x + c$

24. $\frac{2}{3}sin^{-1}\sqrt{\frac{x^3}{a^3}} + c$

25. $2sin\,x + x + c$

26. $\frac{1}{2}sec^{-1}(x^2) + c$

27. $\frac{26}{3}$

28. $e^2 - 1$

29. $tan^{-1}e - \frac{\pi}{4}$

30. $\frac{\log m}{m^2-1}$

31. π

32. $\sqrt{2} - 1$

33. $\frac{\pi}{3}$

34. $\frac{\sqrt{2}}{2}tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{3}$

35. $\frac{1}{7}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \frac{\sqrt{3}}{7}tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + c$

36. $\frac{1}{a^2-b^2}\left\{a\,tan^{-1}\frac{x}{a} - b\,tan^{-1}\frac{x}{b}\right\} + c$

37. π

38. $\log\left|\frac{\sqrt{x-3}}{(x-1)^{\frac{1}{6}}(x+2)^{\frac{1}{3}}}\right| + c$

39. $x \cdot e^{tan^{-1}x} + c$

40. $a\left[\frac{x}{a}tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{x}{a}} + tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\right] + c$

41. $\frac{3}{2}$

42. $\frac{e^{-3x}}{24}[sin\,3x - cos\,3x] + \frac{3e^{-3x}}{40}[sin\,x - 3cos\,x] + c$

43. $\frac{1}{\sqrt{2}}tan^{-1}\left(\frac{tan\,x-1}{\sqrt{2\,tan\,x}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{tan\,x-\sqrt{2\,tan\,x}+1}{tan\,x+\sqrt{2\,tan\,x}+1}\right| + c$

44. $\frac{\pi}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}\right)$

45. $\frac{3}{8}\log 3$

46. $\frac{\pi^2}{2}\log\frac{1}{2}$

47. $\frac{\pi}{8}\log\frac{1}{2}$

48. A **49.** C **50.** A **51.** A

52. D **53.** C **54.** D **55.** D

56. D **57.** A **58.** D **59.** $e - 1$

60. $\dfrac{e^x}{x+4} + c$ **61.** $\frac{1}{2}$ **62.** $\dfrac{-1}{2\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\dfrac{2\cos x}{\sqrt{3}}\right) + c$ **63.** 0

સ્વાધ્યાય 8.3

1. $\frac{1}{2}$ ચોરસ એકમ **2.** $\frac{4}{3}p^2$ ચોરસ એકમ **3.** 10 ચોરસ એકમ **4.** $\frac{16}{3}$ ચોરસ એકમ

5. $\frac{27}{2}$ ચોરસ એકમ **6.** $\frac{9}{2}$ ચોરસ એકમ **7.** $\frac{32}{3}$ ચોરસ એકમ **8.** 2π ચોરસ એકમ

9. $\frac{4}{3}$ ચોરસ એકમ **10.** 96 ચોરસ એકમ **11.** $\frac{16}{3}$ ચોરસ એકમ **12.** $\frac{\pi a^2}{4}$ ચોરસ એકમ

13. $\frac{1}{6}$ ચોરસ એકમ **14.** $\frac{9}{2}$ ચોરસ એકમ **15.** 9 ચોરસ એકમ **16.** $2\left[\pi - \frac{8}{3}\right]$ ચોરસ એકમ

17. 4 ચોરસ એકમ **18.** $\frac{15}{2}$ ચોરસ એકમ **19.** $\frac{4}{3}\left(\sqrt{3}+4\pi\right)a^2$ ચોરસ એકમ

20. 6 ચોરસ એકમ **21.** $\frac{15}{2}$ ચોરસ એકમ **22.** 8 ચોરસ એકમ **23.** 16 ચોરસ એકમ

24. C **25.** D **26.** A **27.** B

28. A **29.** A **30.** D **31.** A

32. B **33.** A **34.** C

સ્વાધ્યાય 9.3

1. $2^{-x} - 2^{-y} = k$ **2.** $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ **3.** $\dfrac{e^6+9}{2}$

4. $y(x^2-1) = \frac{1}{2}\log\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right) + k$ **5.** $y = c \cdot e^{x-x^2}$

6. $(a+m)\,y = e^{mx} + ce^{-ax}$ **7.** $(x - c)\ e^{x+y} + 1 = 0$

8. $y = kxe^{\frac{-x^2}{2}}$ **9.** $y = \tan\left(x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ **10.** $x = y(y^2 + c)$ **11.** $\frac{1}{3}$

13. $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 2 = 0$ **14.** $(x^2 - y^2)\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$

15. $y = \dfrac{4x^3}{3(1+x^2)}$ **16.** $\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log|x| + c$

17. $2xe^{\tan^{-1}y} = e^{2\tan^{-1}y} + c$

18. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \log y = c$

19. $x + y = k\,e^{x-y}$

20. $x^2(y+3)^3 = e^{y+2}$

21. $y\sin x = \frac{-\cos 2x}{2} + \frac{3}{2}$

22. $xy\,y'' + x(y')^2 - yy' = 0$

23. $\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}x\right)^2 + \log\left(1+y^2\right) = c$

24. $(x-1) + (y-2)\frac{dy}{dx} = 0$

25. $y = -\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2} + \frac{x\log x}{3} - \frac{x}{9} + cx^{-2}$

26. $x(\sin y + \cos y) = \sin y + c\,e^{-y}$

27. $\log\left|1 + \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| = x + c$

28. $y = -\left[\frac{3\sin 2x + 2\cos 2x}{13}\right] + ce^{3x}$

29. $2\left(x^2 - y^2\right) = 3x$

30. $(y-1)(x+1) + 2x = 0$

31. $ke^{2x}(1 - x + y) = 1 + x - y$

32. $xy = 1$	**33.** $\log\left(\frac{x}{y}\right) = cx$	**34.** D	**35.** D
36. A	**37.** C	**38.** B	**39.** C
40. C	**41.** D	**42.** A	**43.** C
44. D	**45.** B	**46.** B	**47.** C
48. C	**49.** D	**50.** A	**51.** A
52. B	**53.** B	**54.** B	**55.** B
56. C	**57.** B	**58.** A	**59.** A
60. C	**61.** C	**62.** D	**63.** C
64. C	**65.** A	**66.** D	**67.** D
68. C	**69.** D	**70.** A	**71.** A
72. A	**73.** C	**74.** B	**75.** A

76. (i) અવ્યાખ્યાયિત (ii) 2 (iii) 3

(iv) સુરેખ

(v) $x\,e^{\int p_1 dy} = \int\left(Q_1 \times e^{\int p_1 dy}\right)dy + c$

(vi) $y = \frac{x^2}{4} + cx^{-2}$

(vii) $3y(1+x^2) = 4x^3 + c$

(viii) $xy = Ae^{-y}$

(ix) $y = ce^{-x} + \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2}$

(x) $x = c\sec y$

(xi) $\frac{e^x}{x}$

77. (i) સત્ય (ii) સત્ય (iii) સત્ય (iv) સત્ય

(v) અસત્ય (vi) અસત્ય (vii) સત્ય (viii) સત્ય

(ix) સત્ય (x) સત્ય (xi) સત્ય

સ્વાધ્યાય 10.3

1. $\frac{1}{3}\left(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}\right)$ 2. (i) $\frac{1}{3}\left(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{37}}\left(\hat{j}+6\hat{k}\right)$

3. $\frac{1}{7}\left(-2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}\right)$ 4. $\vec{c} = \frac{3\vec{a}-\vec{b}}{2}$ 5. $k = -2$ 6. $\pm 2\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)$

7. $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}; 4\hat{i}, 6\hat{j}, -12\hat{k}$ 8. $-2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ 9. $cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{156}}\right)$

10. $\overline{a}, \overline{b}$ અને $\overline{c}$ પૈકી કોઈ પણ બે પાસપાસેની બાજુઓ તરીકે લેતાં બનતાં સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ સમાન છે.

11. $\frac{2}{\sqrt{7}}$ 12. $\sqrt{21}$ 13. $\frac{\sqrt{274}}{2}$

16. $\hat{n} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right|}$ 17. $\frac{\sqrt{62}}{2}$ 18. $\frac{1}{3}\left(5\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$

19. C 20. D 21. C 22. B

23. D 24. A 25. D 26. D

27. D 28. A 29. C 30. A

31. C 32. C 33. B

34. જો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સમાન માનવાળા સદિશો હોય.

35. 0 36. $\frac{\pi}{4}$ 37. $k \in (-1, 1) k \neq -\frac{1}{2}$ 38. $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$

39. 3 40. $\vec{a}$ 41. અસત્ય 42. સત્ય

43. સત્ય 44. અસત્ય 45. અસત્ય

સ્વાધ્યાય 11.3

1. $5\hat{i} + 5\sqrt{2}\,\hat{j} + 5\hat{k}$ 2. $(x-1)\hat{i} + (y+2)\hat{j} + (z-3)\hat{k} = \lambda(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$

3. $(-1, -1, -1)$ 4. $cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

7. $x + y + 2z = 19$ 8. $x + y + z = 9$

9. $3x - 2y + 6z - 27 = 0$ 10. $7x + 3y - z - 17 = 0$

11. $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ અને $\frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ 12. $60°$

14. દિક્કોસાઈન : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$

16. $(2, 6, -2)$; $3\sqrt{5}$ 17. 7 18. $\sqrt{6}$, $\left(0, \frac{5}{2}, 0\right)$

19. $(x-3)\hat{i} + y\hat{j} + (z-1)\hat{k} = \lambda(-2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})$

20. $18x + 17y + 4z = 49$ **21.** 14 **22.** $51x + 15y - 50z + 173 = 0$

24. $2x + y - 2z - 3 = 0$ અને $-x + 2y + 2z - 3 = 0$

26. $3\hat{i} + 8\hat{j} + 3\hat{k},\ -3\hat{i} - 7\hat{j} + 6\hat{k}$ **29.** D **30.** D

31. A **32.** D **33.** D **34.** A

35. D **36.** C **37.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

38. $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}$ **39.** $(x-5)\hat{i} + (y+4)\hat{j} + (z-6)\hat{k} = \lambda(3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$

40. $(x-3)\hat{i} + (y-4)\hat{j} + (z+7)\hat{k} = \lambda(-2\hat{i} - 5\hat{j} + 13\hat{k})$ **41.** $x + y - z = 2$

42. સત્ય **43.** સત્ય **44.** અસત્ય **45.** અસત્ય

46. અસત્ય **47.** સત્ય **48.** અસત્ય **49.** સત્ય

સ્વાધ્યાય 12.3

1. 42 **2.** 4 **3.** 47 **4.** –30

5. 196 **6.** 43 **7.** 21 **8.** 47

9. ન્યૂનતમ કિંમત = 3 **10.** મહત્તમ કિંમત = 9, ન્યૂનતમ કિંમત = $3\frac{1}{7}$

11. મહત્તમ $Z = 50x + 60y$,

$2x + y \le 20,\ x + 2y \le 12,\ x + 3y \le 15,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

12. ન્યૂનતમ $Z = 400x + 200y$

$5x + 2y \ge 30$

$2x + y \le 15$

$x \le y,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

13. મહત્તમ $Z = 100x + 170y$

$3x + 2y \le 3600,\ x + 4y \le 1800,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

14. મહત્તમ $Z = 200x + 120y$

$x + y \le 300,\ 3x + y \le 600,\ y \le x + 100,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

15. મહત્તમ $Z = x + y$

$2x + 3y \le 120,\ 8x + 5y \le 400,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

16. પ્રકાર A : 6, પ્રકાર B : 3; મહત્તમ નફો = ₹ 480

17. 3000 **18.** 138600

19. દરેક પ્રકારના 150 સ્વેટર્સ અને મહત્તમ નફો = ₹ 48,000

20. $54\frac{2}{7}$ કિમી **21.** $3\frac{10}{11}$

22. મૉડેલ X : 25, મૉડેલ Y : 30 અને મહત્તમ નફો = ₹ 40,000

23. ટિકડી X : 1, ટિકડી Y : 6

24. ફૅક્ટરી I : 80 દિવસ, ફૅક્ટરી II : 60 દિવસ

25. મહત્તમ : 12, ન્યૂનતમનું અસ્તિત્વ નથી.

26. B 27. B 28. A 29. D

30. C 31. D 32. D 33. A

34. B 35. સુરેખ મર્યાદાઓ 36. સુરેખ 37. અસીમિત

38. મહત્તમ 39. સીમિત 40. છેદગણ 41. બહિર્મુખ

42. સત્ય 43. અસત્ય 44. અસત્ય 45. સત્ય

સ્વાધ્યાય 13.3

1. નિરપેક્ષ 2. નિરપેક્ષ નથી 3. 1.1 4. $\frac{25}{56}$

5. $P(E) = \frac{1}{12}$, $P(F) : \frac{5}{18}$, $P(G) = \frac{7}{36}$, કોઈ પણ જોડ નિરપેક્ષ નથી.

7. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{4}$ (iv) $\frac{5}{8}$ 8. $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{10}$

9. (i) E_1 અને E_2 ઉદ્‌ભવે

(ii) E_2 ઉદ્‌ભવે, પરંતુ E_1 ન ઉદ્‌ભવે

(iii) કાં તો E_1 અથવા E_2, અથવા E_1 અને E_2 બંને ઉદ્‌ભવે

(iv) કાં તો E_1 અથવા E_2 ઉદ્‌ભવે પરંતુ બંને ન ઉદ્‌ભવે

10. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{23}{18}$ 12. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 13. ₹ 0.50 14. $\frac{1}{10}$

15. ગાણિતિક અપેક્ષા = ₹ 0.65 16. $\frac{5}{9}$ 17. $\frac{7}{15}$

18. $\frac{5}{9}$ 19. $\frac{1}{270725}$ 20. $\frac{5}{16}$ 21. $\frac{7}{128}$

22. $\frac{4547}{8192}$ 23. $1-\left(\frac{9}{10}\right)^8$ 24. (i) 0.361875 (ii) 1.4475

25. (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{14}{15}$, $\frac{1}{15}$ (iii) 1 26. 0.7 27. 0.18

28. $\frac{1}{2}$

29.

X	0	1	2
P(X)	.54	.42	.04

31. (i) $\left(\frac{49}{50}\right)^{10}$ (ii) $\frac{45(49)^8}{(50)^{10}}$ (iii) $\frac{59(49)^9}{(50)^{10}}$

32. $\frac{1}{3}$ 33. $\frac{9}{44}$ 34. $\frac{p-1}{n-1}$

35.

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

; મધ્યક $= \frac{161}{36}$

36. $p = \frac{1}{2}$ **37.** $\frac{665}{324}$ **38.** $\frac{775}{7776}$

39. નિરપેક્ષ નથી. **41.** (i) $\frac{7}{18}$ (ii) $\frac{11}{18}$ **42.** (i) $\frac{2}{11}$ (ii) $\frac{9}{11}$

43. (i) 0.49 (ii) 0.65 (iii) .314 **44.** $\frac{7}{11}$ **45.** $\frac{11}{21}$

46. $\frac{1}{3}$ **47.** $\frac{110}{221}$ **48.** $\frac{5}{11}$

49. (i) $\frac{1}{50}$ (ii) 5.2 (iii) 1.7 (આશરે) **50.** (i) 3 (ii) 10.41

51. (i) 4.32 (ii) 61.9 (iii) $\frac{15}{22}$ **52.** 10

53. મધ્યક $= \frac{2}{13}$, પ્રમાણિત વિચલન $= 0.377$ **54.** $\frac{1}{2}$

55. મધ્યક $= 6$, વિચરણ $= 3$

56. C **57.** A **58.** D **59.** C

60. C **61.** D **62.** B **63.** D

64. C **65.** D **66.** D **67.** D

68. C **69.** D **70.** D **71.** D

72. C **73.** C **74.** C **75.** B

76. B **77.** D **78.** C **79.** A

80. D **81.** B **82.** C **83.** C

84. A **85.** B **86.** A **87.** C

88. D **89.** D **90.** A **91.** B

92. D **93.** D **94.** અસત્ય **95.** સત્ય

96. અસત્ય **97.** અસત્ય **98.** સત્ય **99.** સત્ય

100. સત્ય **101.** સત્ય **102.** અસત્ય **103.** સત્ય

104. $\frac{1}{3}$ **105.** $\frac{10}{9}$ **106.** $\frac{1}{10}$

107. $\Sigma p_i x_i^2 - (\Sigma p_i x_i)^2$ **108.** નિરપેક્ષ