ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1215/178/છ, તા. 24-11-2016-થી મંજૂર

आंकडाशास्त्र

(भाग 1)

इयत्ता 12

प्रतिज्ञापत्र

भारत माझा देश आहे.
सारे भारतीय माझे बंधुभगिनी आहेत.
माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या
परंपरांचा मला अभिमान आहे.
त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी
यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन
मी माझ्या पालकांचा, गुरूजनांचा आणि वडीलधाऱ्या
माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन
माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करतो त्यांचे
कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यातच माझे-सौख्य समावलेले आहे.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

तमसो मा ज्योतिर्गमय

गुजरात राज्य शाळा पाठ्यपुस्तक मंडळ
'विद्यायन', सेक्टर 10-ए, गांधीनगर-382 010

विषय-सल्लागार

डॉ. आर. टी. रताणी

लेखन-संपादन

डॉ. एम. एन. पटेल (कन्वीनर)
डॉ. चिराग जे. त्रिवेदी
डॉ. पराग बी. शाह
डॉ. यतिन ए. परीख
प्रो. शुभा ए. लागवणकर
डॉ. कुंजल एच. शाह
श्री महेशभाई ए. पटेल

अनुवाद

श्री विजयकुमार डी. कुलकर्णी

समीक्षा

श्रीमती गीता किशनराव कोष्टी
श्री एम. एच. पाटील
श्री डी. एम. पवार
श्री प्रज्ञावंत निरभवणे

भाषाशुद्धी

श्रीमती सुदेष्णा मुरलीधर कदम

चित्रांकन

मीडिया ग्राफिक्स

संयोजन

डॉ. चिराग एन. शाह
(विषय-संयोजक : कॉमर्स)

निर्माण-संयोजन

श्री हरेन शाह
(नायब नियामक : शैक्षणिक)

मुद्रण-आयोजन

श्री हरेश एस. लीम्बाचीया
(नायब नियामक : उत्पादन)

प्रस्तावना

राष्ट्रीय अभ्यासक्रमाच्या अनुसंधाने गुजरात माध्यमिक आणि उच्चत्तर माध्यमिक शिक्षण बोर्डाने नवीन अभ्यासक्रम तयार केलेला आहे. हा अभ्यासक्रम गुजरात सरकार द्वारा मान्य करण्यात आला आहे.

गुजरात सरकार द्वारे मंजूर करण्यात आलेला **इयत्ता 12, आंकडाशास्त्र (भाग 1)** विषयाचा नव्या अभ्यासक्रमानुसार तयार करण्यात आलेले हे पाठ्यपुस्तक विद्यार्थ्यांसमोर सादर करतांना गुजरात राज्य शाळा पाठ्यपुस्तक मंडळ आनंद अनुभवत आहे.

या पाठ्यपुस्तकाचे लेखन तसेच समीक्षा निष्णात शिक्षक आणि प्राध्यापकांकडून करण्यात आले आहे. समीक्षकांच्या सुचनेनुसार हस्तप्रतामध्ये योग्य सुधारणा केल्यानंतर हे पाठ्यपुस्तक प्रसिद्ध करण्यात आलेले आहे.

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तकाला रसप्रद, उपयोगी आणि क्षतिरहित बनविण्यासाठी मंडळाने पुर्ण काळजी घेतली आहे. तरी सुद्धा शिक्षण क्षेत्रात आवड असलेल्या व्यक्तिंकडून पुस्तकाची गुणवत्ता वाढेल, अशा सूचना आवकार्य आहे.

पी. भारती (IAS)
नियामक
दिनांक : 16-11-2019

कार्यवाह प्रमुख
गांधीनगर

प्रथम आवृत्ती : 2017, पुन: मुद्रण : 2018, 2020
प्रकाशक : गुजरात राज्य शाळा पाठ्यपुस्तक मंडळ, 'विद्यायन', सेक्टर 10-ए, गांधीनगर साठी पी. भारती, नियामक
मुद्रक :

मूलभूत कर्तव्य

भारताच्या प्रत्येक नागरिकाचे कर्तव्य खालीलप्रमाणे आहेत. *

(क) घटनेचे पालन करणे आणि तिचे आदर्श व संस्थाचा राष्ट्रध्वज व राष्ट्रगीत यांचा आदर करणे;

(ख) ज्यांमुळे आपल्याला राष्ट्रीय स्वातंत्र्यलढ्यास स्फुर्ती मिळाली त्या उदात्त आदर्शाची जोपासना करुन त्यांचे अनुकरण करणे;

(ग) भारताची सार्वभौमता, एकता व एकात्मता उन्नत राखणे व त्यांचे संरक्षण करणे;

(घ) आवाहन केले जाईल तेव्हा देशाचे संरक्षण करणे व राष्ट्रीय सेवा बजावणे;

(च) धार्मिक भाषिक व प्रादेशिक किंवा वर्गीय भेदांच्या पलीकडे जाऊन अखिल भारतीय जनतेमध्ये एकोपा व भ्रातृभाव वाढीला लावणे, स्त्रियांच्या प्रतिष्ठेला उणेपणा आणणाऱ्या प्रथा सोडून देणे;

(छ) आपल्या संमिश्र संस्कृतीच्या वारशाचे मोल जाणून ते जतन करणे;

(ज) अरण्ये, सरोवरे, नद्या व वन्य जीवसृष्टी यांसह नैसर्गिक पर्यावरणाचे रक्षण करणे, त्यात सुधारणा करणे, आणि सजीव प्राण्यांविषयी दयाबुध्दी बाळगणे;

(झ) विज्ञाननिष्ठ दृष्टिकोन, मानवतावाद आणि शोधबुध्दी व सुधारणावाद यांचा विकास करणे;

(ञ) सार्वजनिक संपत्तीचे रक्षण करणे व हिंसाचाराचा निग्रहपूर्वक त्याग करणे;

(ट) राष्ट्र सतत पुरूषार्थ व सिध्दी यांच्या चढत्या श्रेणी गाठत जाईल अशा प्रकारे सर्व व्यक्तिगत व सामुदायिक कार्यक्षेत्रात पराकाष्ठतेचे यश संपादन करण्यासाठी झटणे, हे प्रत्येक नागरिकाचे कर्तव्य आहे;

(ठ) आई वडील किंवा पालकांनी 6 वर्ष ते 14 वर्षा पर्यंतच्या मुलांना किंवा पाल्यांना शिक्षणाची संधी पुरविण्याचा प्रयत्न करणे.

* भारतीय घटना कलम 51-क

अनुक्रमणिका

●

1

सूचक अंक
(Index Number)

विषयवस्तू :

1.1 सूचक अंकाची व्याख्या आणि अर्थ

1.2 सूचक अंकाची लक्षणे

1.3 सूचक अंकाचे उपयोग

1.4 आधार वर्ष

1.4.1 अचल आधाराची रीत, गुण आणि मर्यादा

1.4.2 परंपरित आधाराची रीत, गुण आणि मर्यादा

1.5 अचल आधारामधून परंपरित आधार आणि परंपरित आधारमधून अचल आधारामध्ये परिवर्तन

1.6 सूचक अंकाची मोजणी

1.6.1 लास्पेयरचे सूत्र

1.6.2 पाशेचे सूत्र

1.6.3 फिशरचे सूत्र

1.7 जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक

1.7.1 समजूती आणि रचना

1.7.2 उपयोग आणि मर्यादा

1.1 सूचक अंकाची व्याख्या आणि अर्थ

काळाप्रमाणे वस्तूची किंमत, राष्ट्रीय उत्पन्न, पुरवठा, उत्पादन, रोजगारी, बेकारी, गुंतवणुक, आयात-निर्यात, जीवननिर्वाहाचा खर्च, देशाची लोकसंख्या, जन्मदर आणि मृत्यूदर वगैरे मध्ये सतत फरक होत असतो. सामान्यपणे अशा फरकाचे प्रमाण आणि दिशा देखील बदलत असते. काळाच्या परिवर्तना बरोबर वस्तूची किंमत, मूल्य किंवा साठ्यात होणारा फरकाचा अभ्यास देखील महत्त्वाचा ठरतो. अशा फरकाच्या माहितीमुळे भविष्याचे आयोजन योग्य प्रकारे करता येते. अशाप्रकारे कोणत्याही चलराशिच्या मध्ये दोन भिन्न वेळी असणारा फरक खालील प्रकारे मोजता येईल :

(1) निरपेक्षमापा (फरकाची) ची पद्धती आणि (2) सापेक्ष मापा (गुणोत्तर) ची पद्धती.

खालील उदाहरणाद्वारा ह्याची कल्पना मिळवू या.

समजा दोन वस्तू गहू आणि तांदूळाचा वर्ष 2015 आणि 2016 चा प्रति किलोग्राम एखाद्या महिन्यातील सरासरी भावाविषयी माहिती खालीलप्रमाणे आहे.

वस्तू	**प्रति किलोग्राम भाव ₹**	
	वर्ष 2015	वर्ष **2016**
गहू	24	30
तांदूळ	40	46

गहू आणि तांदूळाच्या भावात होणारा फरक दोन्ही पद्धतीने समजावून घेऊ.

(1) निरपेक्ष मापाची (फरकाची) पद्धती : गव्हाचा भाव जेव्हा वर्ष 2015 मध्ये ₹ 24 होता तो वाढून वर्ष 2016 मध्ये भाव प्रति किलोग्रामला ₹ 30 झाला आहे. त्यामुळे वर्ष 2015 च्या सापेक्षात वर्ष 2016 मध्ये भाव प्रति किलोग्रामला ₹ 6 वाढला आहे. त्याचप्रमाणे तांदूळाचा भाव पण ₹ 6 ने वाढतो आहे. हे निरपेक्ष फरकावरून नक्की झाले. यावरून असे सांगता येईल की, दोन्ही वस्तूमधील भाववाढ समान आहे. परंतु खरोखर असे सत्य नाही. कारण की दोन्ही वस्तूचा भाव वर्ष 2015 मध्ये प्रति एकक सारखा नाही. म्हणजेच वर्ष 2016 च्या भावाचा तुलनात्मक अभ्यास करण्याचा आधार वेगवेगळा आहे. अशा प्रकारे चलात होणाऱ्या फरकाची तुलना करण्यासाठी ही पद्धती योग्य नाही. अशा परिस्थितीत सापेक्ष मापाची पद्धती उपयोगात घेतात. आता तिचा अभ्यास करूया.

(2) सापेक्ष मापा (गुणोत्तर) ची पद्धती : ह्या पद्धतीत वर्ष 2016 मध्ये वस्तूच्या भावात होणारा सापेक्ष फरक समजण्यासाठी वस्तूच्या वर्ष 2016 च्या भावाचा वर्ष 2015 च्या भावाशी गुणोत्तर घेण्यात येते.

अशाप्रकारे गव्हाच्या भावाचे गुणोत्तर $= \frac{30}{24} = 1.25$

तांदूळाच्या भावाचे गुणोत्तर $= \frac{46}{40} = 1.15$

ह्या गुणोत्तरावरून लक्षात येथे की वर्ष 2016 मधील गहू आणि तांदूळाच्या भावात होणारी सापेक्ष वाढ समान नाही. वर्ष 2016 मध्ये गव्हाचा भाव, वर्ष 2015 च्या भावापेक्षा 1.25 पट झाला होता. तर तांदूळाच्या भावात 1.15 पट वाढ झाली म्हणजे गव्हाच्या भावात होणारा फरक तांदूळाच्या भावात होणाऱ्या फरकापेक्षा जास्त आहे असे म्हणतात.

येथे गहू आणि तांदूळाच्या भावाचे गुणोत्तर दोन वेगवेगळ्या वेळीच्या भावातील फरक दर्शवितो. त्याला सापेक्ष फरक (Relative Change) किंवा भाव सापेक्ष (Price Relative) असे देखील म्हणतात. आता सामान्य पणे तुलना करणे सोपे जावे त्यासाठी गुणोत्तराला टक्केवारीत दर्शविण्यात येते. त्यामुळे येथे,

गव्हाच्या भावात होणारी सापेक्ष टक्कवारी फरक $= 1.25 \times 100 = 125$ आणि

तांदूळाच्या भावात होणारी सापेक्ष टक्केवारी फरक $= 1.15 \times 100 = 115$

फरकाची ही सापेक्ष टक्केवारी माप आहे अशा सापेक्ष मापाला सूचक अंक म्हणतात.

अशाप्रकारे, **एखाद्या वस्तूशी संबंधित चलराशीची दिलेल्या (चालू) काळात किंमतीत निश्चीत (आधार) काळात त्याच्या किमंतीतीच्या सापेक्षात होणाऱ्या टक्केवारी फरकाला सूचक अंक म्हणतात.**

आता आपण परस्पर संबंधित ह्या दोन वस्तूच्या भावात होणाऱ्या फरकाला एकत्र करून एक सापेक्ष माप मिळवू या. संपूर्ण फरकाचे एक माप मिळविण्यासाठी निरपेक्ष पद्धती उपयुक्त ठरत नाही. कारण बऱ्याचदां अस होते की, दोन वस्तूच्या भावात दर्शविणारे फरक एकम वेग-वेगळे असतात त्यामुळे त्या वस्तूच्या भावात होणारे फरक एकत्र करणे शक्य होत नाही. अशा परिस्थितीत सापेक्ष मापाची पद्धती उपयोगात येते. सापेक्ष मापाची पद्धती एकमापासून मुक्त असल्याने दोन्ही वस्तूंमधील होणारे फरक एकत्र करता येतील आणि त्यावरून वस्तूच्या भावात होणारा फरकाचे एक गणितीक माप मिळविणे अनुकुल असते. आता आपण धान्य म्हणजे की गहू आणि तांदूळ यांच्या भावातील फरक घेऊन समग्र फरकाचे सापेक्ष माप घेऊया. वर्ष 2016 च्या भावाला p_1 आणि वर्ष 2015 च्या भावाला p_0 दर्शवू. p_0 ला आधार वर्षाच्या भाव आणि p_1 ला चालू वर्षाचा भाव म्हणूया. गुणोत्तर $\frac{p_1}{p_0}$ ला वस्तूचा भाव सापेक्ष म्हणूया. ही गोष्ट कोष्टकाने समजावून घेऊया.

वस्तू	आधार वर्ष 2015 चा भाव (₹) p_0	चालु वर्ष 2016 चा भाव (₹) p_1	भाव सापेक्ष किंवा सापेक्ष फरक $= \frac{p_1}{p_0}$	भाव सापेक्ष टक्केवारी $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$
गहु	24	30	$\frac{30}{24} = 1.25$	125
तांदूळ	40	46	$\frac{46}{40} = 1.15$	115
एकूण			**2.40**	**240**

वस्तूचा भाव सापेक्षावरून ह्या गोष्टीचा अभ्यास करता येईल की दोन्ही वस्तूचा चालू वर्षाचा भाव सापेक्ष 100 ने गुणल्याने मिळणारा अंक हा त्या वस्तूचा चालू वर्षाचा भाव सूचक अंक (Price Index Number) म्हणतात त्याला I ने दर्शवितात अशाप्रकारे,

$$\text{गहू आणि तांदूळाचा चालू वर्षाचा भाव सूचक अंक} = \frac{\text{गव्हाचा भाव सापेक्ष} + \text{तांदूळाचा भाव सापेक्ष}}{\text{वस्तूची संख्या}} \times 100$$

$$= \frac{1.25 + 1.15}{2} \times 100$$

$$= 120$$

त्यामुळे गहू आणि तांदूळाचा चालु वर्षाच्या भावाचा सूचक अंक $I = 120$ होईल. अशाप्रकारे गहू आणि तांदूळाचा भाव सूचक अंक $I = 120$ वरून वर्ष 2015 चा त्या भावाच्या तुलनेत वर्ष 2016 मध्ये दोन्ही वस्तूच्या भावात समग्रपणे 20 टक्काने वाढ झाली आहे. सूचक अंक गुणोत्तर आधारित सापेक्ष माप आहे. त्याचप्रमाणे दोनापेक्षा वेग-वेगळ्या चलाच्या किमंतीत होणारा फरक एकत्र करून फरकाचे समग्र माप सापेक्ष पद्धतीने मिळविता येईल. आपण समूहाच्या सामान्य सूचक अंकाला पुढिलपणे व्याख्याईत करू.

''कोणत्याही एक किंवा एकापेक्षा जास्त वस्तूची दिलेल्या (चालू) काळातील चलाच्या किमंतीत एखादी निश्चित (आधार) काळाची त्या वस्तूची चल किमंतीच्या **सापेक्षात होणारी टक्केवारी** फरकाच्या सरासरीला समूहाचा सामान्य सूचक अंक म्हणतात.''

समूहाचा सामान्य सूचक अंक $I = \dfrac{\Sigma\left[\dfrac{p_{1i}}{p_{0i}}\right]}{n} \times 100$

येथे, समूहाचा सामान्य सूचक अंक I = चालू काळाच्या तुलनेत काळाच्या सापेक्षात मिळविलेला सूचक अंक

p_{1i} = चालू काळासाठी चल i ची किमंत $\left(i = 1, 2, 3, ..., n\right)$

p_{0i} = तुलनेच्या काळासाठी चलाची किमंत $\left(i = 1, 2, 3, ..., n\right)$

n = चलाची संख्या.

येथे दिलेल्या n वस्तूच्या समुहाचा सामान्य सूचक अंक I च्या व्याख्येत साधी सरासरी किंवा साध्या मध्यकाचा उपयोग केला आहे. परंतु सामान्य सूचक अंक I च्या व्याख्येत भारित मध्यक अथवा गुणोत्तर मध्यकाचा देखील उपयोग करता येईल. ह्या विषयीची चर्चा या प्रकरणात नंतर करू या.

व्यवहारामध्ये भाव सूचक अंक मिळविण्यासाठी अनेक परस्पर संबंधित वस्तूंचा समावेश करून त्याच्या भावाविषयी माहिती मिळवावी लागते. उदा., आहाराच्या चीजवस्तूंच्या समूहात गहू, तांदूळ, कडधान्ये, डाळ, तेल, तूप, गूळ, मीरे-मसाला, पालेभाज्या वस्तू वगैरेचा समावेश होतो. अशारितीने खाद्यान्नाचा भाव सूचक अंक हा संबंध असणाऱ्या वेगवेगळ्या वस्तूंच्या भावात होणारा सापेक्ष बदल किंवा भाव सापेक्ष सोबत जोडलेला अंक आहे.

आता जर अशा परस्पर संबंधित n वस्तूच्या समूहाला घेतले तर या समूहात आलेल्या प्रत्येक वस्तू साठीच्या भावात होणाऱ्या फरक साठीचा अंक शोधून समग्रपणे प्रस्तुत केल्यास मिळालेल्या सरासरी मापाला समूहासाठीच्या भावाचा सूचक अंक म्हणतात. सूत्रात खालीलपणे दर्शविता येईल.

समूहाच्या भावाचा सूचक अंक $I = \dfrac{\Sigma\left[\dfrac{p_{1i}}{p_{0i}}\right]}{n} \times 100$

जेथे, p_{1i} = चालू काळासाठी चीजवस्तूचा i चा भाव $\left(i = 1, 2, 3, ..., n\right)$

p_{0i} = आधार काळासाठी चीजवस्तू i चा भाव $\left(i = 1, 2, 3, ..., n\right)$

n = चीजवस्तूंची संख्या.

आता तर अशा परस्पर संबंधित n वस्तूंच्या समूहास घेतले असता ह्या समूहात आलेल्या प्रत्येक वस्तूसाठीच्या साठ्यामध्ये सापेक्ष फरकासाठीचा अंक शोधून समग्रपणे प्रस्तुत केल्यास मिळालेल्या सरासरी मापाला त्या समूहासाठीचा साठा सूचक अंक म्हणतात येतो.

नोंद : उत्पादन, आयात निर्यात, बेकारी, औद्योगिक उत्पादने यासारख्याचा सूचक अंक वरील सूत्राने मिळविता येतो.

1.2 सूचक अंकांची लक्षणे

सूचक अंकाच्या व्याख्येवरून त्याची काही लक्षणे लक्षात येतात ती खालीलप्रमाणे दिलेल आहेत.

(1) सूचक अंक एक सापेक्ष माप असल्याने ते एककापासून मुक्त आहे.

(2) वेग-वेगळ्या एककाच्या चल राशिच्या किंमतीत होणारे फरक सूचक अंकाद्वारा तुलना करता येतात. त्यामुळे सूचक अंक तुलनात्मक माप आहे.

(3) सूचक अंक टक्केवारी फरक दर्शविणारे एक सापेक्ष माप आहे.

(4) सूचक अंक एक विशिष्ट सरासरी माप आहे त्यात सरासरीची सर्वच लक्षणे आढळतात.

(5) सूचक अंकाच्या मदतीने दोन वेग-वेगळ्या काळातील परिस्थितीच्या गुणोत्तराद्वारा प्रमाणित (आधार) काळाबरोबर तुलना करण्यात येते.

1.3 सूचक अंकाचा उपयोग

सूचक अंकाविषयी एक सामान्य कल्पना अशी आहे की, सूचक अंक मात्र चलराशिच्या किमंती तसेच भावसपाटीमधील सामान्य वाढ-घट शोधण्यासाठी वापरतात. परंतु आता, त्याचा उपयोग भावसपाटीमधील होणारी वाढ-घट अभ्यास पूरता मर्यादित राहिलेला नाही. परंतु वर्तमान परिवर्तनशील युगात सूचक अंकाचा उपयोग विविध क्षेत्रात पहावयास मिळतो. सूचक अंक निर्दिष्ट आर्थिक, राजकिय, सामाजिक किंवा औद्योगिक प्रवृत्तिमध्ये होणाऱ्या फरकाचा अभ्यास करणारे उपयुक्त आंकडाशास्त्रीय साधन आहे. देशाची आर्थिक आणि औद्योगिक परिस्थिती मध्ये होणाऱ्या फरकाचा तुलनात्मक अभ्यास करून सूचक अंक आर्थिक विकास योजनेत महत्त्वाचे मार्गदर्शन पूरविते. सूचक अंकाचे काही उपयोग खालीलप्रमाणे आहे :

(1) व्यापारी परिस्थितीचा सूचक अंक : हा सूचक अंक देशातील धंदा आणि व्यापाराची आर्थिक आणि व्यापारी प्रवृत्तिच्या सामान्य परिस्थितीचा अभ्यास करण्यासाठी उपयुक्त मार्गदर्शन पूरविते.

(2) घाऊक भावाचा सूचक अंक : हा सूचक अंक देशाच्या मान्य भावसपाटीत होणारे फरक योजतो. हा सूचक अंक सरकार, उत्पादक तसेच व्यापाऱ्यांना नितीविषयक निर्णय उदा., अर्थतंत्रात वस्तूंची मागणी आणि पुरवठा, भविष्यातील किमंतीचे अनुमान करण्यासाठी तसेच भविष्यातील योजना घडविण्यासाठी उपयोगी ठरतो. ह्या सूचक अंकाच्या मदतीने भावसपाटीत होणारे फरक अभ्यासद्वारा भारतीय रिझर्व बँक फुगवटा नियंत्रणसाठी आवश्यक ते पाऊले उचलण्यासाठी उपयोगी आहे. फुगवट्याचा दर खालीलप्रमाणे शोधता येईल. ज्यात घाऊक भावाचा सूचक अंक उपयोगी ठरतो, अशाप्रकारे,

$$\text{फुगवटा दर} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{चालू वर्षाचा घाऊक भावाचा}\\ \text{सूचक अंक}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{मागील वर्षाचा घाऊक भावाचा}\\ \text{सूचक अंक}\end{array}\right)}{\text{मागील वर्षाचा घाऊक भावाचा सूचक अंक}} \times 100$$

(3) जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक : हा सूचक अंक वेग-वेगळ्या स्तरातील लोकांचा जीवननिर्वाह खर्चात होणाऱ्या फरकाचा अभ्यास करण्यासाठी उपयोगी आहे. हा सूचक अंक पैश्याची खरेदीशक्ती नक्की करण्यासाठी. कर्मचाऱ्याचा पगार, महागाईभत्ता, बोनस, वास्तविक वेतनाची मोजणी करण्यासाठी तसेच सरकारला करनीतीचा आराखडा तयार करण्यासाठी उपयोगी ठरतो.

(4) मानवविकासाचा सूचक अंक : ह्या सूचक अंकाने मानवविकासाची कक्षा, जीवनधोरण, अपेक्षित आयुष्य आणि शिक्षणस्तर नक्की करण्यात उपयोगी आहे. आणि त्यावरून मानविय शक्तिच्या विकासासाठीची माहिती मिळते.

(5) राष्ट्रीय उत्पन्नाचा सूचक अंक : हा सूचक अंक देशाची आर्थिक परिस्थितीचे मूल्यांकन करण्यासाठी तसेच सरकारचे पंचवार्षिक योजनांचे लक्षांक नक्की करण्यासाठी उपयोगी असतो. देशाची राष्ट्रीय उत्पन्नात होणाऱ्या फरकाचा अभ्यास करून देशाचे राष्ट्रीय उत्पन्न, उत्पादन आणि दरडोई उत्पन्न वगैरे सुधारण्यासाठीच्या सूचना देखील सूचक अंकाच्या मदतीते करता येतात.

(6) औद्योगिक उत्पादनाचा सूचक अंक : हा सूचक अंक वेग-वेगळ्या वेळी औद्योगिक आणि कलाकौशल्य क्षेत्रातील उत्पादनातील फरकाचा अभ्यासासाठी खूपच उपयोगी आहे. त्याचप्रमाणे देशाचा विकास दर वाढाविण्यासाठी औद्योगिक आणि व्यापारीप्रवृत्तिचे आयोजन करण्यासाठी हा सूचक अंक मदतरूप ठरतो.

(7) कृषि उत्पादनाचा सूचक अंक : हा सूचक अंक कृषि उत्पादनातील भावामधील फरकाचा अभ्यास करण्यासाठी उपयोगी आहे. ह्या सूचक अंकाच्या मदतीने सरकार कृषि विषयक नीतीचे आयोजन करते त्याचप्रमाणे शेतकऱ्यांना त्याच्या उत्पादनासाठी योग्य भाव मिळेल अशाप्रकारच्या नीती घडविण्यात सूचक अंक मदतरूप होतो.

(8) आयात निर्यात सूचक अंक : हा सूचक अंक आयात निर्यात नीती, हुंडणावळीचा दर, परकीय हुंडणावळीची आवश्यकता आणि मालावरील जकातीचा दर नक्की करण्यासाठी तसेच आवश्यक सूचना करण्यासाठी उपयोगी आहे.

(9) धंदा-रोजगारीचा सूचक अंक : हा सूचक अंक देशातील प्रवर्तमान रोजगारी बेरोजगारी परिस्थितीची कल्पना देते आणि त्यावरून बेरोजगारी प्रश्न जाणून मानवशक्तिचे आयोजन करता येईल.

(10) गुंतवणुकीचा सूचक अंक : ह्या सूचक अंक वरून शेर-स्टॉक, डिबेंचर, सरकारी जामिनगीरी वगैरेच्या भावात वाढ-घट आणि गुंतवणुकीची गतीशीलतेच्या अभ्यास होऊ शकतो. त्याचप्रमाणे शेर-स्टॉकच्या भावाच्या वळणाचे अनुमान करता येते.

(11) कच्चा माल सूचक अंक : हा सूचक अंक व्यापारी, उद्योगपति, अर्थशास्त्रज्ञ वगैरेना उत्पादन विक्री नीतीमध्ये आवश्यक मार्गदर्शन पूरवितो.

ज्याप्रमाणे बॅरोमीटर हवामान, हवेचा दाब, वादळ, पाऊस यांचा अंदाज करण्यासाठी उपयोगी असतो, त्याचप्रमाणे सूचक अंक देशाच्या संपूर्ण आर्थिक प्रवृत्ती, व्यापारी आणि सामाजिक प्रवृत्तिमध्ये होणारा फरक मोजण्यासाठी त्याप्रमाणे तुलनात्मक अभ्यास करण्याचे एक आवश्यक साधन आहे. त्यामुळे सूचक अंकाला देशाच्या अर्थतंत्राचे बॅरोमीटर म्हणतात.

1.4 आधार वर्ष (Base Year)

सूचक अंकाच्या रचनेत एखाद्या चलाची वर्तमान काळातील किमंतीला एखाद्या निश्चित काळातील (सामान्यपणे भूतकाळात) चलाच्या किमंतीशी तुलना करण्यात येते. तो निश्चित काळ किंवा वर्षाला आधार वर्ष म्हणतात. भूतकाळाचे निश्चित वर्ष आधीचे वर्ष किंवा त्याआधीचे वर्ष असू शकते. ज्या काळाला किंवा वर्षाच्या किमंतीला आधार वर्ष किंवा काळाच्या किमंती बरोबर तुलना करावयाची असेल त्या वर्षाला चालू वर्ष किंवा प्रवर्तमान वर्ष (Current Year) किंवा समय म्हणतात. उदा. वर्ष 2016 च्या काळातील एखाद्या वस्तूच्या किमंतीचे तुलना करण्याचे वर्ष 2015 च्या त्या वस्तूच्या किमंतीशी तुलना करावयाची असेल, तर 2015 ला आधार वर्ष आणि वर्ष 2016 ला चालू वर्ष म्हणतात.

ज्या वर्षाला आधार वर्ष म्हणून निवडण्यात आले ते वर्ष प्रामाण्य किंवा सामान्य असेल पाहिजे. ते वर्ष अतिवृष्टी, अनावृष्टी, भूकंप या सारख्या नैसर्गिक आपत्ति, युद्ध बंडखोरी, हुल्लड, हडताल-आंदोलन सारख्या असामान्य मानवनिर्मित घटना, राजकिय घटना, आर्थिक उलाढाल किंवा ईतर अपघाती घटनापासून मुक्त असले पाहिजे. त्यामुळे आधार वर्ष दूरच्या भूतकाळातले वर्ष नसावे हे आवश्यक आहे. जर असामान्य परिस्थितिचे वर्ष आधार वर्ष म्हणून निवडावयाचे असेल आणि चलाची किमंत असामान्यपणे जास्त कमी असेल तर सूचक अंकाचा परिणाम चूकीच्या मार्गाने नेईल त्यामुळे वर्तमान परिस्थितीत खरी परिस्थिती समजू शकत नाही. अशाप्रकारे, सूचक अंकाच्या रचनेसाठी आधार वर्षाची निवड काळजीपूर्वक करावी हे आवश्यक आहे.

आधार वर्षाची निवड दोन प्रकारे करता येईल : (1) अचल आधाराची पद्धत (Fixed Base Method) (2) परंपरित आधाराची पद्धत (Chain Base Method).

1.4.1 अचल आधाराची पद्धती :

ह्या पद्धतीत सामान्य घटना किंवा परिस्थितीच्या काळ किंवा वर्षाला स्थिर मानून प्रामाण्य वर्ष किंवा आधार वर्ष म्हणून घेण्यात येते. परंतु काही वेळा प्रामाण्य किंवा आधार वर्ष निश्चित करणे कठिण होते. अशापरिस्थितीत काही वर्षांची सरासरी किमंतीला आधार वर्षाची चल किमंत म्हणून घेण्यात येते. आधार वर्षाची चल किमंतीशी वर्तमानकाळाची चल किमंतीची तुलना करून सूचक अंक मिळविण्यात येतो. आधार वर्ष खूप दूरच्या भूतकाळाचे वर्ष होणार नाही त्यासाठी समयांतराते आधार वर्ष बदलावे. अशाप्रकारे अचल आधाराच्या पद्धतीत सूचक अंक खालील सूत्राने मिळवितात.

$$\text{सूचक अंक } I = \frac{\text{चालू वर्षा (समय)ची चल किमंत}}{\text{आधार वर्षा (समय)ची चल किमंत}} \times 100$$

$$= \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

येथे, p_1 = चालू वर्षा (समय)ची चल किमंत

p_0 = आधार वर्षा (समय)ची चल किमंत

उदाहरण 1 : एका विस्तारातील गव्हाच्या घाऊक भावाची माहिती खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून वर्ष 2005 ला आधार घेऊन बाकीच्या वर्षासाठी वस्तूच्या भावाचा सूचक अंक तयार करा. ह्या सूचक अंकावरून गव्हाचा वर्ष 2013 च्या भावातील झालेली टक्केवारी वाढ सांगा.

वर्ष	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
प्रति क्विंटल भाव (₹)	1650	1690	1730	1750	1810	1850	1870	1900	1950

येथे वर्ष 2005 ला आधार वर्ष म्हणून घेतलेले असल्याने अचल आधाराच्या पद्धतीने सूचक अंक मिळवू. येथे आधार वर्ष 2005 चा गव्हाच्या भावाचा सूचक अंक 100 घेऊ.

वर्ष	**गव्हाचा प्रति क्विंटल भाव (₹)**	**सूचक अंक** $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$
2005	1650	$\frac{1650}{1650} \times 100 = 100$
2006	1690	$\frac{1690}{1650} \times 100 = 102.42$
2007	1730	$\frac{1730}{1650} \times 100 = 104.85$
2008	1750	$\frac{1750}{1650} \times 100 = 106.06$
2009	1810	$\frac{1810}{1650} \times 100 = 109.70$
2010	1850	$\frac{1850}{1650} \times 100 = 112.12$
2011	1870	$\frac{1870}{1650} \times 100 = 113.33$
2012	1900	$\frac{1900}{1650} \times 100 = 115.15$
2013	1950	$\frac{1950}{1650} \times 100 = 118.18$

वर्ष 2013 मधील गव्हाच्या भावात वर्ष 2005 सापेक्षात झालेली टक्केवारी वाढ (118.18 – 100) = 18.18 % एवढी झाली असे म्हणता येईल.

उदाहरण 2 : सहा खाद्यपदार्थांचे वर्ष 2014 आणि 2015 मधील प्रति एकक भाव (₹) खालील कोष्टकात दर्शविल्याप्रमाणे आहे. 2014 वर्षाला आधार वर्ष मानून खाद्यपदार्थांच्या भावाचा सामान्य सूचक अंक शोधा आणि ह्या खाद्यपदार्थांच्या भावात समग्रपणे किती वाढ झाली ते सांगा.

वस्तू	**एकक**	**वस्तूचे प्रति एकक भाव (₹)**	
		वर्ष 2014	**वर्ष 2015**
ब्रेड	पॅकेट	25	28
अंडे	डझन	30	35
तूप	टिन	375	380
दूध	लीटर	36	40
चीझ	किलोग्राम	440	500
लोणी	किलोग्राम	265	300

आता आधार वर्ष 2014 घेऊन चालू वर्ष 2015 साठी वस्तूच्या भावाचा सामान्य सूचक अंक मिळवावयाचा आहे. आधार वर्षाच्या भावाला p_0 आणि चालू वर्षाच्या भावाला p_1 ने दर्शवून भाव सापेक्ष $\frac{p_1}{p_0}$ मिळवू या. ही मोजणी खालील कोष्टकात दर्शविली आहे.

वस्तू	**वस्तूचा भाव (₹)**		**भाव सापेक्ष = $\frac{p_1}{p_0}$**
	p_0	p_1	
ब्रेड	25	28	$\frac{28}{25}$ = 1.1200
अंडे	30	35	$\frac{35}{30}$ = 1.1666
तूप	375	380	$\frac{380}{375}$ = 1.0133
दूध	36	40	$\frac{40}{36}$ = 1.1111
चीझ	440	500	$\frac{500}{440}$ = 1.1364
लोणी	265	300	$\frac{300}{265}$ = 1.1321
एकूण			**= 6.6795**

सहा अन्नपदार्थांच्या भावाचा सामान्य सूचक अंक $I = \dfrac{\Sigma\left[\dfrac{p_1}{p_0}\right]}{n} \times 100$

$$= \frac{6.6795}{6} \times 100$$

$$= 111.33$$

$\therefore$ अन्नपदार्थाचा सामान्य भाव सूचक अंक I = 111.33 मिळतो.

सूचक अंक I च्या किमंतीवरून लक्षात येईल की, वर्ष 2014 च्या तुलनेत वर्ष 2015 च्या वर्षात अन्नपदार्थाच्या भावात समग्रपणे (111.33 – 100) = 11.33 % एवढी वाढ झाली आहे असे म्हणतात.

उदाहरण 3 : एक साखर उत्पादक कंपनीचा वर्ष 2008 ते 2015 पर्यंतच्या साखर उत्पादनाचे आंकडे खालीलप्रमाणे आहे. ह्या माहितीवरून वर्ष 2009, 2010 आणि 2011 च्या सरासरी उत्पादनाला आधार वर्षाचे उत्पादन घेऊन अचल आधाराच्या पद्धतीने सूचक अंक तयार करा.

वर्ष	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
उत्पादन (हजार टन)	186	196	202	214	220	216	226	230

येथे वर्ष 2009, 2010 आणि 2011 चे सरासरी उत्पादन = $\dfrac{196 + 202 + 214}{3} = \dfrac{612}{3} = 204$

वर्ष	**उत्पादन (हजार टन)**	**अचल आधाराच्या पद्धतीने सूचक अंक** $= \dfrac{p_1}{p_0} \times 100$
2008	186	$\dfrac{186}{204} \times 100 = 91.18$
2009	196	$\dfrac{196}{204} \times 100 = 96.08$
2010	202	$\dfrac{202}{204} \times 100 = 99.02$
2011	214	$\dfrac{214}{204} \times 100 = 104.90$
2012	220	$\dfrac{220}{204} \times 100 = 107.84$
2013	216	$\dfrac{216}{204} \times 100 = 105.88$
2014	226	$\dfrac{226}{204} \times 100 = 110.78$
2015	230	$\dfrac{230}{204} \times 100 = 112.75$

अचल आधाराच्या पद्धतीचे गुण आणि मर्यादा

गुण : (1) ह्या पद्धतीत आधार वर्ष अचल असल्याने वेग-वेगळ्या वेळी चल किमंतीत सापेक्ष फरकाच्या मोजणीत आणि तुलनेत एकसूत्रता आढळतो.

(2) चलाच्या किमंतीत होणारा दूरगामी फरकाच्या तुलनेसाठी ही पद्धती उपयोगी आहे.

(3) ही पद्धती समजण्यास आणि मोजण्यास सरळ आहे.

मर्यादा : (1) वेळेप्रमाणे ग्राहकाची आवड, सवय, फॅशन बदलणारी असते. त्यामुळे ग्राहकाच्या वापरावयाच्या वस्तू देखील बदलतात परंतु ह्या पद्धतीत वापर कमी झालेल्या अशा आधी वापरलेल्या वस्तू दूर करता येत नाही.

(2) आधार वर्ष म्हणून सामान्य परिस्थितिचे प्रामाण्य वर्ष मिळविणे कधीच शक्य नसते. त्यामुळे आधार वर्ष निवडण्याचे काम कठिण असते. जर आधार वर्षाची निवड योग्यप्रकारे न झाल्यास तर सूचक अंकाची विश्वसनीयता कमी होते.

(3) चलाच्या किमंतीत होणाऱ्या अल्प काळातील फरकाची तुलना करण्यासाठी ही पद्धती अनुकुल नाही.

(4) निवडलेल्या वस्तूंच्या गुणवत्तेत फरक होत असतो. त्यामुळे त्याच्या भारात आवश्यक फरक ह्या पद्धतीत शक्य नाही.

(5) खूपच दूरच्या भूतकाळाचे वर्ष आधार वर्ष म्हणून घेण्यात आले तर तुलना करणे योग्य म्हणता येणार नाही.

1.4.2 परंपरित आधाराची पद्धती :

ह्या पद्धतीत एखादे निश्चित वर्ष किंवा समयाला आधार वर्ष किंवा समय मोजण्यात येत नाही. परंतु प्रत्येक वर्षासाठी त्याच्यानंतरचे लगेचचे किंवा पूर्वीचे (आधीचे) वर्ष आधार वर्ष म्हणून घेण्यात येते. उदा. 2016 च्या सूचक अंकासाठी वर्ष 2015 ला आधार वर्ष म्हणून घेण्यात येते. ह्या पद्धतीत आधार वर्ष बदलत असते अशाप्रकारे आधार वर्ष वारंवार बदलत असल्याने ह्या पद्धतीला परंपरित आधाराची पद्धती म्हणतात. ह्या पद्धतीत वर्तमान स्थितीला त्याच्या जवळच्या भूतकाळाशी तुलना करण्यात येते. ह्या पद्धतीप्रमाणे सूचक अंक खालील सूत्राने मिळवितात.

$$\text{सूचक अंक} = \frac{\text{चालू वर्षा (समय)ची चल किमंत}}{\text{आधीच्या वर्षा (समय)ची चल किमंत}} \times 100$$

$$\therefore \quad I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

उदाहरण 4 : एका कंपनीच्या 2014 वर्षाच्या प्रत्येक दोन महिन्याच्या शेवटी शेअरच्या बंद भावाविषयीची माहिती खाली दिलेली आहे. त्यावरून परंपरित पद्धतीने सूचक अंक मिळवा.

महिना	जानेवारी	मार्च	मे	जूलै	सप्टेबर	नोव्हेबर
भाव (₹)	22	21.20	22	23	24.70	26.00

येथे वर्ष 2014 च्या जानेवारी महिन्याच्या आधीच्या महिण्याचा भाव दिलेला नाही. त्यामुळे वर्ष 2014 च्या जानेवारी महिन्याचा सूचक अंक 100 घेऊ. बाकीच्या महिन्यांसाठी परंपरित पद्धतीद्वारा मिळणाऱ्या सूचक अंक खालील कोष्टकात दाखविले आहेत.

महिना	शेअरचा भाव (₹)	परंपरित आधाराने सूचक अंक $= \frac{\text{चालु महिन्याची चल किंमत}}{\text{या आधीच्या महिन्याची चल किंमत}} \times 100$
जानेवारी	22.00	= 100
मार्च	21.20	$\frac{21.20}{22.00} \times 100 = 96.36$
मे	22.00	$\frac{22.00}{21.20} \times 100 = 103.77$
जूलै	23.00	$\frac{23.00}{22.00} \times 100 = 104.55$
सप्टेंबर	24.70	$\frac{24.70}{23.00} \times 100 = 107.39$
नोव्हेंबर	26.00	$\frac{26.00}{24.70} \times 100 = 105.26$

परंपरित आधार पद्धतीचे गुण आणि मर्यादा :

गुण : (1) ह्या पद्धतीत आधार वर्षाची निवडीचा प्रश्नच रहात नाही कारण की ज्या-त्या समयाच्या आधीचे वर्ष (समय) आधार वर्ष (समय) म्हणून घेतात.

(2) ह्या पद्धतीमध्ये आधीच्या वर्षाशी तुलना होत असल्याने ग्राहकाची आवड आणि निवडीप्रमाणे नव्या वस्तूचा समावेश करणे शक्य आहे. कमी वापरातील अशा आधीच्या वस्तूंना दूर करता येऊ शकतात.

(3) परंपरित आधाराच्या पद्धतीत जवळच्या भूतकाळातील वेळेशी वर्तमान वेळेच्या किंमतीची तुलना करावयाची असल्याने आर्थिक, व्यापार आणि वाणिज्यक्षेत्रात या पद्धतीचा उपयोग होतो.

मर्यादा : (1) ह्या पद्धतीत आधीच्या वर्षाला आधार वर्ष म्हणून घेण्यात येत असल्याने चलाच्या किंमतीत मात्र अल्प काळातील फरकाची तुलना करण्यासाठी ही पद्धती आधिक उपयुक्त असत नाही.

(2) ह्या पद्धतीत एखाद्या वर्षाच्या सूचक अंकाच्या मोजणीत चूक झाली तर त्या वर्षाच्या सूचक अंकाच्या अर्थघटनेत चुकीचा परिणाम चालूच राहिल.

(3) ह्या पद्धतीने मिळविलेल्या सूचक अंकाच्या मोजणीत एकसूत्रता रहात नाही.

(4) जर एखाद्या वर्षाची माहिती उपलब्ध नसेल, तर त्यानंतरच्या वर्षाचा सूचक अंक मिळविणे शक्य नाही.

उदाहरण **5 : खाद्यतेलाच्या मिलमध्ये वर्ष 2008 ते 2015 मध्ये भूईमूगाची केलेल्या खरेदी विषयीची माहिती खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून 2008 ला आधार वर्ष घेऊन अचल आधारे, परंपरित आधाराने तसेच 2010 आणि 2011 च्या खरेदीच्या सरासरी साठ्याला आधार वर्षाची खरेदी घेऊन सूचक अंक तयार करा.**

वर्ष	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
भूईमूगाची खरेदी (टनात)	230	250	230	250	270	280	300	300

वर्ष	साठा भूईमूगांची खरेदी (टनात)	वर्ष 2008चा आधार अचल आधार सूचक अंक $= \frac{\text{चालु वर्षाची चल किमंत}}{\text{आधार वर्षाची चल किमंत}} \times 100$	परंपरित आधार सूचक अंक $= \frac{\text{चालु वर्षाची चल किमंत}}{\text{आधीच्या वर्षाची चल किमंत}} \times 100$	वर्ष 2010 आणि 2011चा साठयाची सरासरी $= \frac{230 + 250}{2} = 240$ ला आधार वर्षाचा साठा घेऊन मिळविलेला सूचक अंक
2008	230	$= 100$	$= 100$	$\frac{230}{240} \times 100 = 95.83$
2009	250	$\frac{250}{230} \times 100 = 108.70$	$\frac{250}{230} \times 100 = 108.70$	$\frac{250}{240} \times 100 = 104.17$
2010	230	$\frac{230}{230} \times 100 = 100$	$\frac{230}{250} \times 100 = 92.00$	$\frac{230}{240} \times 100 = 95.83$
2011	250	$\frac{250}{230} \times 100 = 108.70$	$\frac{250}{230} \times 100 = 108.70$	$\frac{250}{240} \times 100 = 104.17$
2012	270	$\frac{270}{230} \times 100 = 117.39$	$\frac{270}{250} \times 100 = 108$	$\frac{270}{240} \times 100 = 112.5$
2013	280	$\frac{280}{230} \times 100 = 121.74$	$\frac{280}{270} \times 100 = 103.70$	$\frac{280}{240} \times 100 = 116.67$
2014	300	$\frac{300}{230} \times 100 = 130.43$	$\frac{300}{280} \times 100 = 107.14$	$\frac{300}{240} \times 100 = 125$
2015	300	$\frac{300}{230} \times 100 = 130.43$	$\frac{300}{300} \times 100 = 100$	$\frac{300}{240} \times 100 = 125$

उदाहरण 6 : एका फ्लोर मिलमध्ये तिन धान्य गहू, बाजरी आणि चण्याचे पीठ वर्ष 2011 ते 2015 पर्यंतच्या विक्रीविषयीची माहिती खालीलप्रमाणे आहे. ह्या माहितीवरून साध्या सरासरीचा उपयोग करून (i) अचल आधार पद्धती (आधार वर्ष 2011 घेऊन) आणि (ii) परंपरित आधारची पद्धतीने विक्रीचा सामान्य सूचक अंकाची मोजणी करा.

वर्ष → / धान्याचे पीठ	विक्री (लाख ₹)				
	2011	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
गव्हाचे पीठ	40	46	50	56	64
बाजरीचे पीठ	20	30	36	42	54
चण्याचे पीठ	50	64	80	96	112

(i) अचल आधाराची पद्धती :

अचल आधार सूचक अंक $I = \frac{\text{चालु वर्षाची (समय) चल किमंत}}{\text{आधार वर्षाची (समय) चल किमंत}} \times 100$

वर्ष / धान्याचे पीठ	2011	2012	2013	2014	2015
गव्हाचे पीठ	100	$\frac{46}{40}\times 100 = 115$	$\frac{50}{40}\times 100 = 125$	$\frac{56}{40}\times 100 = 140$	$\frac{64}{40}\times 100 = 160$
बाजरीचे पीठ	100	$\frac{30}{20}\times 100 = 150$	$\frac{36}{20}\times 100 = 180$	$\frac{42}{20}\times 100 = 210$	$\frac{54}{20}\times 100 = 270$
चण्याचे पीठ	100	$\frac{64}{50}\times 100 = 128$	$\frac{80}{50}\times 100 = 160$	$\frac{96}{50}\times 100 = 192$	$\frac{112}{50}\times 100 = 224$
बेरीज	300	393	465	542	654
विक्रीचा सामान्य सूचक अंक $= \frac{\text{बेरीज}}{3}$	$\frac{300}{3}$ $=100$	$\frac{393}{3}$ $=131$	$\frac{465}{3}$ $=155$	$\frac{542}{3}$ $=180.67$	$\frac{654}{3}$ $=218$

(ii) परंपरित आधारच्या पद्धतीने विक्रीचा सामान्य सूचक अंक :

परंपरित आधारे सूचक अंक $I = \frac{\text{चालु वर्षाची (समय) चल किमंत}}{\text{आधीच्या वर्षाची (समय) चल किमंत}} \times 100$

वर्ष / धान्याचे पीठ	2011	2012	2013	2014	2015
गव्हाचे पीठ	100	$\frac{46}{40}\times 100 = 115$	$\frac{50}{46}\times 100 = 108.70$	$\frac{56}{50}\times 100 = 112$	$\frac{64}{56}\times 100 = 114.29$
बाजरीचे पीठ	100	$\frac{30}{20}\times 100 = 150$	$\frac{36}{30}\times 100 = 120$	$\frac{42}{36}\times 100 = 116.67$	$\frac{54}{42}\times 100 = 128.57$
चण्याचे पीठ	100	$\frac{64}{50}\times 100 = 128$	$\frac{80}{64}\times 100 = 125$	$\frac{96}{80}\times 100 = 120$	$\frac{112}{96}\times 100 = 116.67$
बेरीज	300	393	353.7	348.67	359.53
विक्रीचा सामान्य सूचक अंक $= \frac{\text{बेरीज}}{3}$	$\frac{300}{3}$ $=100$	$\frac{393}{3}$ $=131$	$\frac{353.7}{3}$ $=117.90$	$\frac{348.67}{3}$ $=116.22$	$\frac{359.53}{3}$ $=119.84$

उदाहरण 7 : एका शहरांतील झालेल्या गुन्हाविषयी खालील माहिती प्राप्त झालेली आहे. वर्ष 2010 ला आधार वर्ष मानून अचल आधाराच्या पद्धतीने सामान्य सूचक अंक शोधा.

वर्ष / गुन्हाचा प्रकार	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
खून	110	128	134	129
जबरदस्ती आणि बलात्कार	30	45	40	48
लूट	610	720	770	830
मालमत्तेची चोरी	2450	2630	2910	2890

अचल आधारे सूचक अंक $I = \frac{\text{चालु वर्षाची (समय) चल किंमत}}{\text{आधार वर्षाची (समय) चल किंमत}} \times 100$

वर्ष / गुन्हाचा प्रकार	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
खून	$\frac{110}{129} \times 100 = 85.27$	$\frac{128}{129} \times 100 = 99.22$	$\frac{134}{129} \times 100 = 103.88$	$\frac{129}{129} \times 100 = 100$
जबरदस्ती आणि बलात्कार	$\frac{30}{48} \times 100 = 62.5$	$\frac{45}{48} \times 100 = 93.75$	$\frac{40}{48} \times 100 = 83.33$	$\frac{48}{48} \times 100 = 100$
लूट	$\frac{610}{830} \times 100 = 73.49$	$\frac{720}{830} \times 100 = 86.75$	$\frac{770}{830} \times 100 = 92.77$	$\frac{830}{830} \times 100 = 100$
मालमत्तेची चोरी	$\frac{2450}{2890} \times 100 = 84.78$	$\frac{2630}{2890} \times 100 = 91.00$	$\frac{2910}{2890} \times 100 = 100.69$	$\frac{2890}{2890} \times 100 = 100$
बेरीज	306.04	370.72	380.67	400
गुन्हाचा सामान्य सूचक अंक $= \frac{\text{बेरीज}}{4}$	$\frac{306.04}{4} = 76.51$	$\frac{370.72}{4} = 92.68$	$\frac{380.67}{4} = 95.17$	$\frac{400}{4} = 100$

स्वाध्याय 1.1

1. एका शहरातील कारखान्यात काम करणाऱ्या कामागाराच्या समूहाच्या वर्ष 2008 ते 2015 दरम्यान दैनिक सरासरी वेतनाविषयीची माहिती खालीलप्रमाणे आहे, त्यावरून (1) अचल आधाराची पद्धती (आधार वर्ष 2008 घेऊन) (2) परंपरित आधाराची पद्धती आणि (3) वर्ष 2011 ते 2013 च्या दैनिक सरासरी वेतनाला सरासरी आधार वर्षचा वेतन घेऊन अचल आधारे सूचक अंक मिळवा.

वर्ष	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
दैनिक सरासरी वेतन (₹)	275	284	289	293	297	313	328	345

2. एका शहरातील साखरेचा छूटक-भावाविषयीची खालील माहितीवरून (1) वर्ष 2008 ला आधार वर्ष घेऊन अचल आधाराच्या पद्धतीने (2) परंपरित आधाराच्या पद्धतीने आणि (3) वर्ष 2009 आणि 2010 च्या साखरेच्या भावाला सरासरी आधार वर्षाचा भाव घेऊन साखरेच्या भावाचा सूचक अंक मोजा.

वर्ष	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
साखरेचा भाव प्रतिकिलो (₹)	28	28.50	29.50	30	31	32	34	36

3. एका शहरातील घाऊक बाजारातील गहू, तांदूळ आणि साखरेच्या वार्षिक सरासरी भावाविषयीची माहिती खालीलप्रमाणे मिळाली आहे. त्यावरून वर्ष 2011 ला आधार वर्ष म्हणून घेऊन अचल आधार आणि परंपरित आधाराने तिन्ही वस्तूंच्या भावाचा सामान्य सूचक अंक मोजा.

वर्ष / वस्तू	2011	2012	2013	2014	2015
गहू	18	18.50	18.90	19	19.50
तांदूळ	30	36	38	38	39
साखर	30	31	32	34	36

4. ईंधन म्हणून पाच वस्तूचे वर्ष 2012 आणि वर्ष 2014 चे भाव **(₹)** खालीलप्रमाणे आहेत. वर्ष 2012 ला आधार वर्ष घेऊन ईंधनांच्या वस्तूच्या भावाचा सामान्य सूचक अंकाची मोजणी करा आणि ईंधनाच्या वस्तूच्या भावात समग्रपणे किती वाढ झाली ते समजवा.

वस्तू	विज	गॅस	आगपेटी	केरोसीन	लाकूड
एकम	युनिट	सिलिंडर	पेटी	लीटर	किलोग्राम
वर्ष 2012 चा भाव ₹	3	345	1.00	15	12
वर्ष 2014 चा भाव ₹	3.5	370	1.50	20	15

*

1.5 अचल आधारातून परंपरित आधारात आणि परंपरित आधारातून अचल आधारात परिवर्तन

सामान्यपणे जेव्हा चलाच्या किमंतीला मूळ माहितीच्या ऐवजी फक्त त्याच्यावरून अचल आधाराला किंवा परंपरित आधारे मिळविलेला सूचक अंकच प्राप्त असेल, तर खालील कारणाने आधारे परिवर्तनाची आवश्यकता असते. जर चलाच्या किमंतीत अल्प काळासाठी होणारा फरक समजून घ्यावयाची आवश्यक उत्पन्न झाली तर अचल आधारे मिळविलेल्या सूचक अंकावरून ते समजणे कठिण असते. त्यामुळे अचल आधारे मिळविलेल्या सूचक अंकाला परंपरित आधाराच्या सूचक अंकात परिवर्तीत करून त्यावरून अल्प काळाच्या झालेल्या फरकविषयी समजणे खूप सरळ होते.

काहीवेळा चलाच्या किमंतीच्या श्रेणीत केव्हाही एका वेळी चलाच्या किमंतीची तुलना दुसऱ्या वेळेच्या किमंतीशी करावयाची असेल आणि फक्त त्याचा परंपरित सूचक अंक प्राप्त असेल हे शक्य नसते. अशा परिस्थितीत परंपरित आधार सूचक अंकाला अचल आधाराच्या सूचक अंकात परिवर्तन केले तर त्या सूचक अंकावरून तुलना शक्य होते. अशा परिस्थितीत परंपरित आधाराचा सूचक अंकाला अचल आधाराच्या सूचक अंकात परिवर्तन करण्याची आवश्यकता उत्पन्न होते. त्यासाठी खालीलप्रमाणे आधार परिवर्तन करण्यात येते.

अचल आधाराच्या सूचक अंकाचे परंपरित आधाराच्या सूचक अंकात परिवर्तन : अचल आधाराच्या सूचक अंकाचे परंपरित आधाराच्या सूचक अंकात परिवर्तन करण्याचे सूत्र खालीलप्रमाणे आहे.

$$\text{परंपरित आधारे सूचक अंक} = \frac{\text{चालू वर्षाच्या अचल आधारे सूचक अंक}}{\text{आधीच्या वर्षाच्या अचल आधारे सूचक अंक}} \times 100$$

नोंद : जर आधार वर्षाचा उल्लेख करण्यात आला नसेल तर प्रथम वर्षासाठीचा सूचक अंक 100 घेऊ या. जर आधाराचा उल्लेख करण्यात आला तर प्रथम वर्षाला अचल आधाराच्या सूचक अंकालाच प्रथम वर्षाचा परंपरित आधाराचा सूचक अंक म्हणून घेऊ या.

उदाहरण 8 : एका राज्यात हुन्नर उद्योगातील उत्पादनांचे खालील दिलेल्या अचल आधाराच्या पद्धतीने मिळविवेल्या सूचक अंकाला परंपरित आधाराचा सूचक अंकात परिवर्तन करा.

वर्ष	2009	2010	2011	2012	2013	2014
अचल आधार सूचक अंक	120	132	96	144	138	108

येथे आधार वर्षाचा उल्लेख करण्यात आलेला नसल्याने प्रथमवर्षासाठी परंपरित आधारे सूचक अंक 100 घेऊ या.

$$\text{परंपरित आधारे सूचक अंक} = \frac{\text{चालू वर्षाच्या अचल आधारे सूचक अंक}}{\text{आधीच्या वर्षाच्या अचल आधारे सूचक अंक}} \times 100$$

वर्ष	**सूचक अंक**	**परंपरित आधाराचा सूचक अंक**
2009	120	= 100
2010	132	$\frac{132}{120} \times 100 = 110$
2011	96	$\frac{96}{132} \times 100 = 72.73$
2012	144	$\frac{144}{96} \times 100 = 150$
2013	138	$\frac{138}{144} \times 100 = 95.83$
2014	108	$\frac{108}{138} \times 100 = 78.26$

उदाहरण 9 : वर्ष 2007-08 च्या आधारे वस्तूच्या साठ्याचा भावाचा सूचक अंक खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून परंपरित आधारे सूचक अंक मोजा.

वर्ष	2008-09	2009-10	2010-11	2011-12	2012-13	2013-14	2014-15	2015-16
साठ्याच्या भावाचा सूचक अंक	126	130.8	143.3	156.1	167.6	177.6	181.2	177.2

येथे आधार वर्ष 2007-08 चा उल्लेख करण्यात आला आहे. त्यामुळे 2008-09 च्या वर्षासाठीच्या अचल आधारे जो सूचक अंक दिलेला असेल त्याला परंपरित आधाराचा सूचक अंक म्हणून घेऊ या. त्यामुळे प्रथम वर्षाचा परंपरित आधारे सूचक अंक 126 होईल.

$$\text{परंपरित आधारे सूचक अंक} = \frac{\text{चालू वर्षाच्या अचल आधारे सूचक अंक}}{\text{आधीच्या वर्षाच्या अचल आधारे सूचक अंक}} \times 100$$

वर्ष	**वस्तूचा घाऊक भावाचा सूचक अंक**	**परंपरित आधारे सूचक अंक**
2008-09	126	= 126
2009-10	130.8	$\frac{130.8}{126} \times 100 = 103.81$
2010-11	143.3	$\frac{143.3}{130.8} \times 100 = 109.56$
2011-12	156.1	$\frac{156.1}{143.3} \times 100 = 108.93$
2012-13	167.6	$\frac{167.6}{156.1} \times 100 = 107.37$
2013-14	177.6	$\frac{177.6}{167.6} \times 100 = 105.97$
2014-15	181.2	$\frac{181.2}{177.6} \times 100 = 102.03$
2015-16	177.2	$\frac{177.6}{181.2} \times 100 = 97.79$

परंपरित सूचक अंकाचे अचल आधाराच्या सूचक अंकात परिवर्तन : जर वर्षाप्रमाणे परंपरित आधाराचा सूचक अंक दिलेला असेल, तर त्याच्यावरून अचल आधाराच्या सूचक अंक शोधता येईल. अचल आधाराचा सूचक मिळविल्यासाठी त्या वर्षाच्या परंपरित आधाराच्या सूचक अंकाला त्यांच्या आधीच्या वर्षाच्या अचल आधाराच्या सूचक अंकाला 100 ने भागण्यात येते.

$$\text{अशाप्रकारे चालु वर्षाचा अचल आधाराचा सूचक अंक} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{चालु वर्षाचा परंपरित}\\ \text{आधारे सूचक अंक}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{चालु वर्षाच्या आधीच्या वर्षाचा}\\ \text{अचल आधारे सूचक अंक}\end{array}\right)}{100}$$

आता ही पद्धती उदाहरणाद्वारा समजावून घेऊ.

उदाहरण 10 : वर्ष 2008-09 ते 2015-16 पर्यंत खाद्य पदार्थांचे भाव परंपरित आधारे मिळविलेले सूचक अंक खालीलप्रमाणे आहे, त्यावरून अचल आधारे सूचक अंक मोजा. (आधार वर्ष 2007-08 घ्या.)

वर्ष	2008 – 09	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15	2015 – 16
खाद्य पदार्थांचा सूचक अंक	134.8	115.28	115.57	107.29	109.91	112.80	106.24	102.48

येथे वर्ष 2007-08 ला आधार वर्ष घ्यावयाचे आहे. त्यामुळे वर्ष 2008-09 साठी अचल आधारे सूचक अंक बदलणार नाही.

$$\text{चालु वर्षाचा अचल आधारे सूचक अंक} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{चालु वर्षाचा परंपरित}\\ \text{आधारे सूचक अंक}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{चालु वर्षाच्या आधीच्या वर्षाचा}\\ \text{अचल आधारे सूचक अंक}\end{array}\right)}{100}$$

वर्ष	**खाद्य पदार्थांचा सूचक अंक**	**अचल आधारे सूचक अंक**
2008-09	134.8	$= 134.8$
2009-10	115.28	$\frac{115.28 \times 134.8}{100} = 155.40$
2010-11	115.57	$\frac{115.57 \times 155.40}{100} = 179.60$
2011-12	107.29	$\frac{107.29 \times 179.60}{100} = 192.69$
2012-13	109.91	$\frac{109.91 \times 192.69}{100} = 211.79$
2013-14	112.80	$\frac{112.80 \times 211.79}{100} = 238.9$
2014-15	106.24	$\frac{106.24 \times 238.9}{100} = 253.81$
2015-16	102.48	$\frac{102.48 \times 253.81}{100} = 260.10$

स्वाध्याय 1.2

1. एका राज्याच्या वर्ष 2008 ते 2014 पर्यंत कृषी-उत्पादनाच्या परंपरित आधारे मिळविलेले सूचक अंक खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून अचल आधारे सूचक अंक मोजा. (आधार वर्ष 2007 घ्या.)

वर्ष	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
कृषी उत्पादनाचा सूचक अंक	100	110	95	108	120	106	110

2. वर्ष 2007-08 ला आधार वर्ष घेऊन खालील दिलेली यंत्र आणि यंत्र सामग्री घाऊक भावाच्या अचल आधाराच्या सूचक अंकावरून परंपरित आधाराचा सूचक अंक मिळता.

वर्ष	2008 – 09	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15
यंत्र आणि यंत्र सामग्रीचा सूचक अंक	117.4	118	121.3	125.1	128.4	131.6	134.6

3. अमदावादच्या औद्योगिक कामगारांसाठी वर्ष 2015 च्या जानेवारी पासून ऑक्टोबर महिन्या पर्यंत आहाराचा अचल आधारे सूचक अंक खालीलपणे दिलेला आहे. त्यावरून परंपरित आधारे सूचक अंक मोजा.

महिना	जाने.	फेब्रु.	मार्च	एप्रिल	मे	जून	जूलै	ऑगष्ट	सप्टे.	ऑक्टो.
आहाराचा सूचक अंक	271	270	268	268	278	283	283	293	293	299

4. वर्ष 2010 ते 2015 पर्यंतच्या एका स्कूटरच्या विक्रीचे परंपरित आधारे मिळविलेला सूचक अंक खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून अचल आधारे सूचक अंक मोजा.

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014	2015
विक्रीचा सूचक अंक	110	112	109	108	105	111

*

1.6 सूचक अंकाच्या मोजणीसाठी काही विशिष्ट सूत्रे

आपण, एखाद्या वस्तूंच्या चलराशीच्या किमंतीत किंवा वस्तूंच्या समूहाच्या चलराशीच्या किमंतीत होणाऱ्या फरकाचा अभ्यास करण्यासाठी सूचक अंकाचा उपयोग होतो हे पाहिले. सूचक अंकाच्या रचनेत साधी सरासरी वापरतात आणि प्रत्येक वस्तूला एक समान महत्त्व देण्यात येते परंतु व्यवहारात सामान्यपणे प्रत्येक वस्तूचे महत्त्व समान नसते. ज्याप्रमाणे खाद्यपदार्थाला जेवढे महत्त्व आहे, तेवढे महत्त्व भाजी, कडधान्य किंवा खाद्यतेलांना देण्यात आलेले नाही. त्यामुळे ज्या वस्तूचे जेवढे महत्त्व असेल त्याप्रमाणे त्याच्या भावाला भार देण्यात येतो, तेव्हाच खाद्यपदार्थांचा सूचक अंक वास्तविक आणि अर्थपूर्ण होतो.

वेगवेगळ्या प्रकारच्या सूचक अंकाच्या रचनेत समाविष्ट वस्तूंचा भार नक्की करण्यात येतो. सूचक अंकाच्या रचनेत वस्तूंचा भार सामान्यपणे त्याच्या वापरावयाच्या साठ्याच्या आधारे नक्की करतात. ह्या गोष्टीला लक्षांत ठेवून सूचक अंकाच्या रचनेत भार निवडण्याच्या वेगवेगळ्या पद्धतीच्या आधारे सूचक अंकाच्या मोजणीसाठी काही वेगवेगळी सूत्रे आहेत. आता आपण त्याचा अभ्यास करूया.

भारित सरासरीची पद्धती : समजा की गहू, तांदूळ आणि कडधान्य वस्तूचा समूह (किंवा वस्तू) पैकी i च्या समूहासाठी सूचक अंक I_i असेल आणि त्याला अनुरूप भार W_i असेल, तर ह्या समूहाचा सामान्य सूचक अंक खालील सूत्राने मिळविता येईल.

सामान्य सूचक अंक $I = \dfrac{\Sigma I_i W_i}{\Sigma W_i} = \dfrac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

नोंद : मोजणीच्या सरळतेसाठी आता यानंतर ह्या सूत्रात आपण अनुग (Suffix) 'i' ला टाळू.

उदा. जर या समूहाचा सूचक अंक अनुक्रमे 120, 150 आणि 300 असेल आणि त्यांचा अनुरूप भार अनुक्रमे 3, 2 आणि 1 असेल तर त्या वस्तूच्या समूहाचा सामान्य सूचक अंक $I = \dfrac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$$= \frac{120 \times 3 + 150 \times 2 + 300 \times 1}{3 + 2 + 1}$$

$$= \frac{360 + 300 + 300}{6}$$

$$= \frac{960}{6}$$

$$= 160$$

लास्पेयरचे सूत्र (Laspeyre's Formula)

सूचक अंक शोधण्याची ही पद्धती लास्पेयरद्वारा देण्यात आली आहे. सूचक अंक शोधण्याची ही एक महत्त्वाची पद्धती आहे. ह्या पद्धतीमध्ये वस्तूच्या आधार वर्षाच्या भावाला p_0 आणि साठ्याला (जथ्था) q_0 ने दर्शविण्यात येते तसेच वस्तूच्या चालु वर्षाच्या भावाला p_1 ने दर्शविण्यात येते. भाव सापेक्ष $\dfrac{p_1}{p_0}$ ला खर्च $p_0 q_0$ जेवढा भार देण्यात येतो. ह्या पद्धतीने मिळविलेल्या भारित सरासरीच्या सूत्राला **लास्पेयरच्या सूचक अंकाचे** सूत्र म्हणतात आणि त्याला संकेतात I_L ने दर्शवितात. लास्पेयरचे सूत्र खालीलप्रमाणे आहे.

लास्पेयरचा सूचक अंक $$I_L = \frac{\Sigma\left[\dfrac{p_1}{p_0}\right] \times p_0 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma \dfrac{p_1}{p_0} \times p_0 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

$$\therefore \quad I_L = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

पाशेचे सूत्र (Passche's Formula)

ही पद्धत पाशे नावाच्या आंकडाशास्त्रज्ञाने दिली आहे. जर p_0 ला आधार वर्षाचा भाव, p_1 ला चालु वर्षाचा भाव आणि q_1 ला चालु वर्षाचा साठा म्हटल्यास, तर भाव सापेक्ष $\dfrac{p_1}{p_0}$ ला खर्च $p_0 q_1$ एवढा भार देण्यात येतो. ह्या पद्धतीने मिळालेल्या भारित सरासरीच्या सूत्राला पाशेचे सूचक अंकाचे सूत्र म्हणतात. त्याला संकेतात I_P ने दर्शवितात. पाशेचे सूचक अंक सूत्र खालीलप्रमाणे आहे.

पाशेचे सूचक अंक $$I_P = \frac{\Sigma\left[\dfrac{p_1}{p_0}\right] \times p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma \dfrac{p_1}{p_0} \times p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$

$$\therefore \quad I_P = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$

फिशरचे सूत्र (Fisher's Formula)

लास्पेयर आणि पाशेच्या पद्धतीत अनुक्रमे आधार वर्ष आणि चालु वर्षाच्या साठ्याला (जथ्याला) भाराच्या मोजणीत लक्षात घेतात. प्रो. इरविंग फिशरने दोन्ही वर्षाच्या साठ्याला लक्षात घेऊन ह्या सूचक अंकाची रचना केली. लास्पेयर आणि पाशेच्या सूचक अंकाचा गुणोत्तर मध्यकाला फिशरचा सूचक अंक म्हणतात. त्याला संकेतात I_F ने दर्शवितात. फिशरच्या सूचक अंकाचे सूत्र खालीलप्रमाणे आहे.

फिशरचा सूचक अंक $I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$ किंवा

फिशरचा सूचक अंक $I_F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$

फिशरच्या सूचक अंकाला खालील कारणामुळे आदर्श सूचक अंक म्हणतात :

(1) सूचक अंकाच्या रचनेत आधार वर्ष आणि चालु वर्ष अशा दोन्ही वर्षाच्या साठ्याला मोजणीत घेण्यात येते.

(2) सूचक अंकाचे दोन मूलभूत परिक्षण समय (काळ) विपर्यास आणि पद विपर्यास यांचे हा सूचक अंक समाधान करतो.

(3) ह्या सूचक अंकाच्या मोजणीत गुणोत्तर मध्यकाचा उपयोग होतो म्हणून ही सूचक अंकाच्या रचनेसाठी श्रेष्ठ सरासरी आहे.

(4) हा सूचक अंक पक्षपातमुक्त आहे कारण तो लास्पेयर आणि पाशेच्या सूचक अंकातील दोषांना समतोल करतो.

अशाप्रकारे फिशरचा सूचक अंक आदर्श अंक आहे.

उदाहरण 11 : पाच वेगवेगळ्या वस्तूंचा भाव आणि भार या विषयीची खालील माहितीवरून वर्ष 2011 च्या आधारे 2016 चा सूचक अंक भारित सरासरीच्या पद्धतीने मोजा.

वस्तू	भार	भाव (₹)	
		वर्ष 2011	वर्ष 2016
A	40	160	200
B	25	400	600
C	5	50	70
D	20	10	18
E	10	2	3

येथे वेग-वेगळे भार दिलेले आहे वर्ष 2011 च्या भावाच्या आधारे वर्ष 2016 चा भाव सापेक्ष मिळवून सामान्य सूचक अंकाची मोजणी करू.

वस्तू	भार W	भाव (₹) p_0	भाव (₹) p_1	$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	IW
A	40	160	200	$\frac{200}{160} \times 100 = 125$	5000
B	25	400	600	$\frac{600}{400} \times 100 = 150$	3750
C	5	50	70	$\frac{70}{50} \times 100 = 140$	700
D	20	10	18	$\frac{18}{10} \times 100 = 180$	3600
E	10	2	3	$\frac{3}{2} \times 100 = 150$	1500
एकूण	**100**				**14,550**

वर्ष 2016 चा सूचक अंक $I = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$= \frac{14550}{100}$

$= 145.50$

अशाप्रकारे आधार वर्ष 2011 च्या तुलनेत वर्ष 2016 च्या भावात (145.50 – 100) = 45.5 % एवढी वाढ झाली असे म्हणतात.

उदाहरण 12 : खालील दिलेल्या खाद्य पदार्थाच्या वस्तूंचे भाव आणि वापर याविषयीच्या माहितीवरून 2015 वर्षाला आधार वर्ष घेऊन, वर्ष 2016 साठी लास्पेयर, पाशे आणि फिशरचा सूचक अंक शोधा.

वस्तू	एकक	वर्ष 2016		वर्ष 2015	
		भाव (₹)	साठा (जथ्या)	भाव (₹)	साठा (जथ्या)
तांदूळ	किलोग्राम	40	1.5 किलोग्राम	39	1 किलोग्राम
दूध	लीटर	44	10 लीटर	40	12 लीटर
ब्रेड	किलोग्राम	50	1.5 किलोग्राम	45	2 किलोग्राम
केळी	डझन	36	1.5 डझन	30	2 डझन

येथे आधार वर्षाचा भाव p_0 आणि साठा q_0, चालु वर्षाचा भाव p_1 आणि साठा q_1 म्हणून घेऊ या.

वस्तू	**एकक**	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
तांदूळ	किलोग्राम	39	1	40	1.5	40	39	60	58.5
दूध	लीटर	40	12	44	10	528	480	440	400
ब्रेड	किलोग्राम	45	2	50	1.5	100	90	75	67.5
केळा	डझन	30	2	36	1.5	72	60	54	45
एकूण						**740**	**669**	**629**	**571**

लास्पेयरचा सूचक अंक $I_L = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$

$= \frac{740}{669} \times 100$

$= 110.6128$

$\simeq 110.61$

अशाप्रकारे आधार वर्ष 2015 च्या सापेक्षात वर्ष 2016 च्या एकूण खर्चात (110.61 – 100) = 10.61 % एवढी भाव वाढ झाली आहे.

पाशेचा सूचक अंक $I_P = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$

$= \frac{629}{571} \times 100$

$= 110.1576$

$\simeq 110.16$

अशाप्रकारे आधार वर्ष 2015 च्या सापेक्षात वर्ष 2016 च्या एकूण खर्चात (110.16 – 100) = 10.16 % एवढी भाव वाढ झाली आहे.

फिशरचा सूचक अंक $I_F = \sqrt{I_L \times I_P} \times 100$

$= \sqrt{110.61 \times 110.16}$

$= 110.3847$

$\simeq 110.38$

अशाप्रकारे आधार वर्ष 2015 च्या सापेक्षात वर्ष 2016 च्या एकूण खर्चात (110.38 – 100) = 10.38 % एवढी भाव वाढ झाली आहे.

उदाहरण 13 : खालील दिलेल्या माहितीवरून 2015 ला आधार वर्ष म्हणून घेऊन वर्ष 2016 साठी लास्पेयर, पाशे आणि फिशरचा सूचक अंक मोजा.

वस्तू	एकक	भाव (₹)		साठा (वापर)	
		वर्ष 2015	वर्ष 2016	वर्ष 2015	वर्ष 2016
A	20 किलोग्राम	300	440	5 किलोग्राम	8 किलोग्राम
B	क्विन्टल	500	700	10 किलोग्राम	15 किलोग्राम
C	किलोग्राम	60	75	1200 ग्राम	2000 ग्राम
D	मीटर	14.25	15	15 मीटर	25 मीटर
E	लीटर	32	36	18 लीटर	30 लीटर
F	डझन	30	36	8 नग	10 नग

येथे आधार वर्ष 2015 आणि चालु वर्ष 2016 आहे. त्यामुळे वर्ष 2015 चा भाव p_0 आणि साठा q_0, वर्ष 2016 चा भाव p_1 आणि साठा q_1 घेऊ या.

येथे वस्तू A साठी भाव प्रति 20 किग्राचा आहे तर त्याच्या साठ्याचा एकम किग्रा आहे. वस्तू B साठी भाव प्रति क्विंटल आहे तर त्याचा साठ्याचा एकम किलोग्राम आहे. वस्तू C चा भाव प्रति किग्रा आहे तर त्याचा साठ्याचा एकम ग्राम आहे. वस्तू F चा भाव डझनाचा आहे तर साठयाचा एकम नग आहे. ह्या चार वस्तूसाठी प्रति एकक भावाची मोजणी खालीलप्रमाणे करूया.

वर्ष 2015 मध्ये वस्तू A चा भाव प्रति 20 किग्रा ₹ 300 आहे. त्यामुळे त्याचा भाव प्रति किग्रा = $\frac{300}{20}$ = ₹ 15 मिळतो.

त्याचप्रमाणे 2016 मध्ये वस्तू A चा भाव प्रति किग्रा $\frac{440}{20}$ = ₹ 22 मिळतो.

वस्तू B साठी प्रति क्विंटल पेक्षा प्रति किग्रा दर्शविणे अनुकुल होईल.

त्यामुळे वर्ष 2015 चा प्रति किग्रा भाव = $\frac{500}{100}$ = ₹ 5 आणि वर्ष 2016 मध्ये प्रति किग्रा भाव $\frac{700}{100}$ = ₹ 7 मिळतो.

वस्तू C चा साठ्याचा भाव प्रति किग्रा आहे. त्यामुळे साठ्याचा एकक प्रति किग्रा दर्शविणे अनुकुल होईल.

त्यामुळे वर्ष 2015 चा साठा = $\frac{1200}{1000}$ = 1.2 किग्रा आणि वर्ष 2016 मधील साठा = $\frac{2000}{1000}$ = 2 किग्रा होईल.

वस्तू F चा भाव डझनात दर्शविला आहे, तो भाव प्रति नग दर्शविणे अनुकुल होईल. त्यामुळे वर्ष 2015 चा प्रति नग भाव = $\frac{30}{12}$ = ₹ 2.5 आणि वर्ष 2016 चा प्रति नग भाव = $\frac{36}{12}$ = ₹ 3 होईल.

आता यानंतरची सूचक अंकाची मोजणी खालीलप्रमाणे करू या.

वस्तू	एकक	वर्ष 2015		वर्ष 2016		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
		p_0	q_0	p_1	q_1				
A	किग्रा	15	5	22	8	110	75	176	120
B	किग्रा	5	10	7	15	70	50	105	75
C	किग्रा	60	1.2	75	2	90	72	150	120
D	मीटर	14.25	15	15	25	225	213.75	375	356.25
E	लीटर	32	18	36	30	648	576	1080	960
F	नग	2.5	8	3	10	24	20	30	25
एकूण						**1167**	**1006.75**	**1916**	**1656.25**

लास्पेयरचा सूचक अंक $\quad I_L = \dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$

$$= \frac{1167}{1006.75} \times 100$$
$$= 115.9175$$
$$\simeq 115.92$$

अशाप्रकारे वर्ष 2015 च्या तुलनेत वर्ष 2016 च्या एकूण खर्चात (115.92 – 100) = 15.92 % एवढी वाढ झाली असे म्हणता येईल.

पाशेचा सूचक अंक $\quad I_P = \dfrac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$

$$= \frac{1916}{1656.25} \times 100$$
$$= 115.6830$$
$$\simeq 115.68$$

अशाप्रकारे वर्ष 2015 च्या तुलनेत वर्ष 2016 च्या एकूण खर्चात (115.68 – 100) = 15.68 % एवढी वाढ झाली असे म्हणता येईल.

फिशरच्या सूचक अंक $\quad I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$

$$= \sqrt{115.92 \times 115.68}$$
$$= 115.7999$$
$$\simeq 115.80$$

अशाप्रकारे वर्ष 2015 च्या तुलनेत वर्ष 2016 च्या एकूण खर्चात (115.80 – 100) = 15.8 % एवढी वाढ झाली असे म्हणता येईल.

उदाहरण 14 : खालील दिलेल्या माहितीवरून वर्ष 2015 साठी आदर्श सूचक अंक मोजा.

वस्तू	आधार वर्ष 2014		चालु वर्ष 2015	
	भाव (₹)	साठा	भाव (₹)	साठा
A	16	10	20	11
B	20	9	24	9
C	32	16	40	17

फिशरच्या सूचक अंकाला आदर्श सूचक अंक मानतात त्यामुळे. येथे फिशरचा सूचक अंक शोधू वर्ष आणि आधार वर्षाचा भाव p_0 आणि साठा q_0 तसेच चालु वर्षाच भाव p_1 आणि साठा q_1 घेऊ.

वस्तू	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	16	10	20	11	200	160	220	176
B	20	9	24	9	216	180	216	180
C	32	16	40	17	640	512	680	544
एकूण					**1056**	**852**	**1116**	**900**

फिशरचा सूचक अंक $I_F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$

$= \sqrt{\frac{1056}{852} \times \frac{1116}{900}} \times 100$

$= \sqrt{1{\cdot}5369} \times 100$

$= 1.2397 \times 100$

$I_F = 123.97$

अशाप्रकारे आधार वर्ष 2014 च्या सापेक्ष चालु वर्षात 2015 च्या खर्चात $(123.97 - 100) = 23.97$ % एवढी वाढ झाली असे म्हणता येईल.

उदाहरण 15 : पाच भिन्न वस्तूचा वापर आणि एकूण खर्च याविषयी माहिती खाल दिलेली आहे. 2014 ला आधार वर्ष घेऊन वर्ष 2015 साठी फिशरचा सूचक अंक शोधा.

वस्तू	आधार वर्ष 2014		चालु वर्ष 2015	
	वापर	एकूण खर्च	वापर	एकूण खर्च
A	50 किग्रा	2500	60 किग्रा	4200
B	120 किग्रा	600	140 किग्रा	700
C	30 लीटर	330	20 लीटर	200
D	20 किग्रा	360	15 किग्रा	300
E	5 किग्रा	40	5 किग्रा	50

येथे वस्तूचा वापर आणि खर्च दिलेला आहे.

वस्तूचा एकूण खर्च = (वस्तूचा प्रति एकक भाव) $\times$ (वस्तूचा वापराचा साठा)

वस्तूचा प्रति एकक भाव = $\dfrac{\text{वस्तूचा एकूण खर्च}}{\text{वस्तूचा वापराचा साठा}}$

वरील सूत्राचा उपयोग करून प्रत्येक वस्तूचा वापराचा प्रति एकक मिळवू.

वस्तू	आधार वर्ष 2014		चालु वर्ष 2015		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	साठा	$p_0 = \dfrac{\text{एकूण खर्च}}{q_0}$	साठा	$p_1 = \dfrac{\text{एकूण खर्च}}{q_1}$				
	q_0	p_0	q_1	p_1				
A	50	$\frac{2500}{50} = 50$	60	$\frac{4200}{60} = 70$	3500	2500	4200	3000
B	120	$\frac{600}{120} = 5$	140	$\frac{700}{140} = 5$	600	600	700	700
C	30	$\frac{330}{30} = 11$	20	$\frac{200}{20} = 10$	300	330	200	220
D	20	$\frac{360}{20} = 18$	15	$\frac{300}{15} = 20$	400	360	300	270
E	5	$\frac{40}{5} = 8$	5	$\frac{50}{5} = 10$	50	40	50	40
एकूण					**4850**	**3830**	**5450**	**4230**

फिशरचा सूचक अंक $I_F = \sqrt{\dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \dfrac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$

$= \sqrt{\dfrac{4850}{3830} \times \dfrac{5450}{4230}} \times 100$

$= \sqrt{1\cdot6315} \times 100$

$= 1.2773 \times 100$

$I_F \simeq 127.73$

अशाप्रकारे वर्ष 2014 च्या तुलनेत वर्ष 2015 च्या एकूण खर्चात (127.73 – 100) = 27.73 % वाढ झाली आहे असे म्हणता येईल.

उदाहरण 16 : एका औद्योगिक विस्तारातील औद्योगिक एकमात काम करणारे आणि त्याच विस्तारात रहाणाऱ्या कर्मचाऱ्यांच्या आरोग्यास नुकसानकारक रासायनिक प्रक्रियेमुळे कॅन्सर होणाची शक्यता निवारण्यासाठी आरोग्य विभागाद्वारा वर्ष 2003 मध्ये औद्योगिक एककासाठी निश्चित नीतीचा अंमल करण्यात आलेला आहे. त्या नीतीचा परिणाम पहाण्यासाठी केलेल्या तपासात ह्या विस्तारात वर्ष 2003 आणि 2008 च्या वेग-वेगळ्या वयोगटात कॅन्सरच्या रोगाने मृत्यू पावलेल्या व्यक्तिची माहिती खालीलप्रमाणे आहे. ह्या औद्योगिक विस्ताराच्या वर्ष 2003 च्या लोकसंख्येला भार घेऊन. भारित सरासरीच्या पद्धतीने कॅन्सरने होणाऱ्या मृत्यूचा सूचक अंक मोजा आणि अर्थघटन करा.

वयोगट (वर्ष)	वर्ष 2003 ची लोकसंख्या (हजारात)	वर्ष 2003 मध्ये झालेले मृत्यू	वर्ष 2008 मध्ये झालेले मृत्यू
< 5 वर्ष	10	200	65
5-15 वर्ष	8	145	100
15-40 वर्ष	48	610	480
40-60 वर्ष	38	350	225
> 60 वर्ष	14	550	465

येथे वेग-वेगळ्या वयोगटाला लोकसंख्येचा भार घेऊन वर्ष 2003 आणि वर्ष 2008 मध्ये कॅन्सरने मृत्यू पावलेल्या व्यक्तिची मृत्यूची सापेक्ष टक्केवारी मिळवून सामान्य सूचक अंक मिळवू या.

वयगर (वर्ष)	वर्ष 2003 ची लोकसंख्या (हजार) W	वर्ष 2003 मध्ये झालेले मृत्यू p_0	वर्ष 2008 मध्ये झालेले मृत्यू p_1	$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	IW
< 5 वर्ष	10	200	65	$\frac{65}{200} \times 100 = 32.5$	325
5-15 वर्ष	8	145	100	$\frac{100}{145} \times 100 = 68.97$	551.76
15-40 वर्ष	48	610	480	$\frac{480}{610} \times 100 = 78.69$	3777.12
40-60 वर्ष	38	350	225	$\frac{225}{350} \times 100 = 64.29$	2443.02
> 60 वर्ष	14	550	465	$\frac{465}{550} \times 100 = 84.55$	1183.7
एकूण	**118**				**8280.6**

वर्ष 2008 चा सूचक अंक $I = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$$= \frac{8280.6}{118}$$

$$= 70.1745$$

$$\simeq 70.17$$

अशाप्रकारे वर्ष 2003 च्या तुलनेत वर्ष 2008 मध्ये कॅन्सरच्या रोगाने झालेल्या मृत्यूच्या दरात (100 – 70.17) = 29.83 % एवढी घट झाली अस म्हणतात.

स्वाध्याय 1.3

1. एका इलेक्ट्रानिक्स वस्तूच्या उत्पादनात वापरल्या जाणाऱ्या सहा भिन्न वस्तूंची माहिती खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून सूचक अंक शोधा आणि त्याचे अर्थघटन करा.

वस्तू	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
भार	5	10	10	30	20	25
भाव सापेक्ष टक्केवारी	290	315	280	300	315	320

2. एका फर्निचर उत्पादनात वापरल्या जाणाऱ्या सहा भिन्न वस्तूंची माहिती खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून वर्ष 2014 च्या आधारे वर्ष 2015 च्या सूचक अंक मोजा आणि त्याचे अर्थघटन करा.

वस्तू	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
भार	17	15	22	16	12	18
वर्ष 2014 भाव (₹)	30	20	50	32	40	16
वर्ष 2015 भाव (₹)	24	24	70	40	48	24

3. खालील माहितीच्या आधारे 2014 ला आधार वर्ष घेऊन वर्ष 2015 साठी लास्पेयर, पाशे आणि फिशरचा सूचक अंक मोजा.

वस्तू		गहु	तांदूळ	डाळ	तेल	कापड	केरोसीन
	एकक	किग्रा	किग्रा	किग्रा	किग्रा	मीटर	लीटर
वर्ष 2014	**साठा**	20	10	10	6	15	18
	भाव (₹)	15	20	26.50	24.80	21.25	21
वर्ष 2015	**साठा**	30	15	15	8	25	30
	भाव (₹)	18	31.25	29.50	30	25	28.80

4. खालील माहितीच्या आधारे 2014 ला आधार वर्ष घेऊन वर्ष 2015 साठी लास्पेयर, पाशे आणि फिशरचा सूचक अंक मोजा.

वस्तू	**एकक**	**भाव (₹)**		**साठा (वापर)**	
		वर्ष 2014	**वर्ष 2015**	**वर्ष 2014**	**वर्ष 2015**
A	20 किग्रा	80	120	5 किग्रा	7 किग्रा
B	किग्रा	20	24	2400 ग्राम	4000 ग्राम
C	क्विंटल	2000	2800	10 किग्रा	15 किग्रा
D	डझन	48	72	30 नग	35 नग

5. खालील दिलेल्या माहितीवरून वर्ष 2015 साठीचा आदर्श सूचक अंक मोजा.

वस्तू	एकम	आधार वर्ष 2014		चालु वर्ष 2015	
		भाव (₹)	साठा (जथ्या)	भाव (₹)	साठा (जथ्या)
A	20 किग्रा	120	10 किग्रा	280	15 किग्रा
B	5 डझन	120	3 डझन	140	48 नंग
C	किग्रा	4	5000 ग्राम	8	4 किग्रा
D	5 लीटर	52	15 लीटर	58	20 लीटर

6. खालील दिलेल्या माहितीवरून वर्ष 2014 ला आधार वर्ष घेऊन वर्ष 2015 साठीचा पाशे आणि फिशरचा सूचक अंक मोजा.

वस्तू		*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
वर्ष 2014	भाव (₹)	100	100	150	180	250
	एकूण खर्च	400	500	600	1080	1000
वर्ष 2015	भाव (₹)	120	120	160	200	300
	एकूण खर्च	720	600	800	1000	1200

*

1.7 जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक (Cost of Living Index Number)

भावात होणाऱ्या वाढ-घटीमुळे समाजातील वेगवेगळ्या वर्गाच्या लोकाच्या जीवननिर्वाह खर्चात होणारा फरक मोजण्यासाठी आणि त्याचा अभ्यास करण्यासाठी जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंकाची रचना करण्यात आली आहे. अशाप्रकारे ''समाजातील एखाद्या वर्गातील लोकांच्या एखाद्या वेळी जीवननिर्वाह खर्चात आधार वर्षा (समय)च्या तुलनेत चालु वर्षात होणारा सापेक्ष टक्केवारी फरक दर्शविणाच्या अंकाला जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक म्हणतात.''

जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक समाजातील वेगवेगळ्या वर्गासाठी आणि प्रदेशासाठी वेग-वेगळा तयार करण्यात आला आहे.

उदा. एका कुटुंबाद्वारा वर्ष 2012 मध्ये स्व:ताच्या जीवननिर्वाहासाठी मासिक ₹ 15,000 खर्च करण्यात येत होते आणि ते कुटुंब ज्याप्रकारची जीवनशैली धारण करत असेल तर ते वर्ष 2014 साठी जीवननिर्वाहसाठी ₹ 18,000 खर्च करण्यात येतात तर त्याचा जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक खालीलप्रमाणे मिळविता येईल.

$$\text{जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक} = \frac{\text{चालु वर्ष (समय)चा मासिक खर्च}}{\text{आधार वर्ष (समय)चा मासिक खर्च}} \times 100$$

$$= \frac{18000}{15000} \times 100$$

$$= \frac{600}{5}$$

$$= 120$$

अशाप्रकारे आधार वर्ष 2012 च्या तुलनेत चालु वर्ष 2014 च्या मासिक खर्चात (120 – 100) = 20 % एवढी वाढ झाली असे म्हणतात.

1.7.1 जीवननिर्वाह खर्चाच्या सूचक अंकाची रचना

जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक तयार करताना खालील मुद्दे-लक्षात घ्यावेत.

(1) हेतू : कोणाताही सूचक अंकाची रचना करण्याआधी त्याच्या हेतूचे स्पष्टीकरण केले पाहिजे. समाजातील कोणत्या वर्गातील लोकांसाठी जीवननिर्वाह सूचक अंकाची रचना करावयाची आहे ते नक्की केले पाहिजे. कामगार वर्ग आणि अतिश्रीमंत वर्गाच्या लोकांच्या गरजा वेग-वेगळ्या असतात. उदा. अन्नधान्याच्या किमंतीतील भाव वाढ अतिश्रीमंत लोकाच्या जीवननिर्वाह खर्चावर अधिक परिणाम करत नाही. त्यामुळे जीवननिर्वाह खर्चाच्या सूचक अंकाच्या रचनेसाठीचा हेतू स्पष्ट करणे आवश्यक आहे.

(2) कौटुंबिक अंदाजपत्रक तपास : ज्या वर्गातील लोकांसाठी जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक तयार करावयाचा असेल त्या वर्गातील कुटुंबापैकी यादच्छिक पद्धतीने काही कुटुंबांचा निदर्श घेण्यात येतो. निदर्शात निवडलेल्या कुटुंबाच्या बजेटचा अभ्यास करण्यात येतो. त्याद्वारा वापरण्यात येणाऱ्या वस्तूची यादी, वापरण्याचे प्रमाण, किरकोळ भावाची यादी, वापरण्यासाठी करण्यात येणारा खर्च आणि खरेदी स्थळ वगैरे विषयी माहिती मिळविण्यात येते. ह्या प्रकारच्या तपासाला निदर्श कौटुंबिक अंदाजपत्र तपास म्हणतात.

ह्या तपासाच्या माहितीवरून निदर्शात समाविष्ट कुटुंबाची मिळणारी माहिती सामान्यपणे खालील पाच विभागात रचण्यात येते : (a) अन्न पदार्थ (b) कपडे (c) घरभाडे (d) ईंधन आणि विज (e) किरकोळ.

अशाप्रकारे निदर्श कौटुंबिक अंदाजपत्र तपासाद्वारा जीवननिर्वाह खर्चात वेगवेगळ्या वस्तू किती महत्त्वाच्या आहेत ते समजू शकते. त्यामुळे सूचक अंकाच्या रचनेत निवडलेल्या प्रत्येक वस्तूच्या समूहाचे महत्त्व आणि प्रत्येक समूहाचे एकूण खर्चात किती महत्त्व आहे ते नक्की करता येते.

(3) वस्तूची भावप्राप्ति : ज्या वर्गाच्या लोकासाठी जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक मिळवावयाचा आहे त्या वर्गाचे लोक ज्या विस्तारात रहात असतील त्या विस्तारातून वस्तूंना किरकोळ भाव मिळविण्यात येतो. असा भाव शक्यतोवर प्रमाणित किंवा सरकार मान्य दुकानातून मिळविला पाहिजे. जेव्हा वेगवेगळ्या दुकानातून वेग-वेगळ्या वेळी वेगवेगळा भाव मिळत असेल, तर त्या भावाची सरासरी लक्षात घ्यावी.

(4) आधार वर्ष : आधार वर्ष म्हणून सामान्य वर्ष निवडावे. सामान्य वर्षात किरकोळ भावाला आधार वर्षाचा भाव म्हणून घेऊन प्रत्येक वस्तूसाठी भाव सापेक्ष खालीलप्रमाणे मिळवितात :

$$\text{भाव सापेक्ष} \quad I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

येथे, p_1 = चालु वर्षाचा वस्तूचा किरकोळ भाव

p_0 = आधार वर्षाचा वस्तूचा किरकोळ भाव

(5) सरासरी : वेगवेगळ्या वस्तूच्या भाव सापेक्षावरून एक सामान्य भाव सापेक्ष मिळविणे आवश्यक आहे. त्यासाठी योग्य सरासरीचा उपयोग करावा लागतो. सैद्धांतिकपणे गुणोत्तर मध्यक सूचक अंक रचनेसाठी श्रेष्ठ सरासरी आहे. परंतु त्याची मोजणी कठीण असल्याने व्यवहारात सूचक अंकाच्या रचनेसाठी भारित सरासरी प्रचलित आहे.

(6) भार : जीवननिर्वाह खर्चाच्या सूचक अंकाच्या रचनेसाठी निवडलेल्या वेगवेगळ्या वस्तूंचे महत्त्व एकसारखे नसते. त्यामुळे वस्तूच्या महत्त्वाच्या प्रमाणात जो अंक नक्की करण्यात आला आहे त्याला भार म्हणतात. अशा भाराचे दोन प्रकार आहेत : (i) गर्भित भार (ii) स्पष्ट भार.

(i) गर्भित भार : भार देण्याची ही अप्रत्यक्ष पद्धती आहे. ह्या पद्धतीप्रमाणे सूचक अंकाच्या रचनेत एखाद्या वस्तूच्या जितक्या जाती निवडण्यात येतील तेवढा त्याचा भार मोजतात. ह्या प्रकारच्या भाराला संख्येत दर्शविणे शक्य नसल्याने या पद्धतीला गर्भित भाराची पद्धती म्हणतात.

(ii) स्पष्ट भार : भार देण्याची ही प्रत्यक्ष पद्धती आहे. वस्तूच्या महत्त्वाच्या प्रमाणात त्याला भार स्पष्टपणे संख्येत दर्शविण्यात येतो. ह्या पद्धतीत वस्तूच्या भाराला वापर, विक्री, उत्पादन किंवा वस्तूमागील होणाऱ्या खर्चाच्या प्रमाणात नक्की करण्यात येतो. अशाप्रकारे वस्तूंना त्याच्या महत्त्वाच्या प्रमाणात जो भार देण्यात येतो त्याला स्पष्ट भार म्हणतात.

स्पष्ट भार देण्याच्या दोन प्रचलित पद्धती खालीलप्रमाणे आहे.

(1) एकूण खर्चाची पद्धती (2) कौटुंबिक अंदाजपत्राची पद्धती.

(1) एकूण खर्चाची पद्धती : ह्या पद्धतीत वस्तूच्या वापरण्याच्या साठ्याच्या वस्तूच्या भावाला भार म्हणून घेण्यात येते. आधार वर्ष आणि चालु वर्षात प्रत्येक वस्तूसाठीचा खर्च मिळवून चालु वर्षातील सर्वच वस्तूंचा एकूण खर्च शोधण्यात येतो. चालु वर्षातील एकूण खर्च आणि आधार वर्षातील एकूण खर्चाच्या टक्केवारी गुणोत्तराला एकूण खर्चाच्या पद्धतीने मिळणारा सूचक अंक म्हणतात.

समजा, p_0 = आधार वर्षाचा भाव, q_0 = आधार वर्षाचा साठा

p_1 = चालु वर्षाचा भाव, q_1 = चालु वर्षाचा साठा आहे.

चालु आणि आधार वर्षाचा एकूण खर्च शोधण्यासाठी आधार वर्षाच्या साठ्याचा उपयोग केल्यास,

Σp_1q_0 = चालु वर्षाचा एकूण खर्च आणि Σp_0q_0 = आधार वर्षाचा एकूण खर्च होईल.

सूचक अंक $I = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$ हे लास्पेयरचे सूचक अंकाचे सूत्र आहे.

चालु आणि आधार वर्षाचा एकूण खर्च शोधण्यासाठी चालु वर्षाच्या साठ्याचा उपयोग केल्यास,

Σp_1q_1 = चालु वर्षाचा एकूण खर्च आणि Σp_0q_1 = आधार वर्षाचा एकूण खर्च होईल.

सूचक अंक $I = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$ हे सूत्र पाशेच्या सूचक अंकाचे सूत्र आहे.

कौटुंबिक अंदाजपत्रकाची पद्धती : ह्या पद्धतीत सर्वप्रथम प्रत्येक वस्तूचा भाव सापेक्ष I मिळविण्यात येतो.

येथे $I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$ आहे. येथे p_1 = चालु वर्षाचा भाव आणि p_0 = आधार वर्षाचा भाव. त्यानंतर प्रत्येक वस्तूचे आधार वर्षाचा खर्च p_0q_0 शोधून त्याचा भाव सापेक्ष I चा भार W म्हणून घेण्यात येतो. $W = p_0q_0$ घेऊन भारित सरासरीच्या मदतीने कौटुंबिक बजेट पद्धतीते मिळणारा सूचक अंकाचे सूत्र खालीलप्रमाणे आहे.

$$\text{सूचक अंक } I = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$$

$$= \frac{\Sigma\left[\frac{p_1}{p_0} \times p_0q_0\right]}{\Sigma p_0q_0} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$$

अशाप्रकारे कौटुंबिक अंदाजपत्रक पद्धतीने मिळविलेला सूचक अंक खरोखर लास्पेयरचा सूचक अंकच आहे.

उदाहरण **17 : जीवननिर्वाह खर्चाच्या वस्तूंचा वेग-वेगळ्या समूहाचा सूचक अंक आणि त्यांच्या भारा विषयीची खालील दिलेल्या माहितीवरून कौटुंबिक अंदाजपत्रक पद्धतीने जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक मोजा.**

समूह	खाद्य पदार्थ	कापड	विज-ईंधन	घरभाडे	किरकोळ
सूचक अंक	281	177	178	210	242
भार	46	10	7	12	25 vv

येथे वेग-वेगळ्या समूहाचा सूचक अंक आणि त्याचा भार दिलेला आहे. त्यामुळे कौटुंबिक बजेट पद्धतीने किंवा भारित सरासरीचा उपयोग करू या.

समूह	**सूचक अंक *I***	**भार *W***	***IW***
खाद्य पदार्थ	281	46	12,926
कापड	177	10	1770
विज ईंधन	178	7	1246
घरभाडे	210	12	2520
किरकोळ	242	25	6050
एकूण		**100**	**24,512**

सूचक अंक $I = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$= \frac{24512}{100}$

$= 245.12$

अशाप्रकारे, आधार वर्षाच्या तुलनेत चालु वर्षाच्या एकूण खर्चात (245.12 – 100) = 145.12 % एवढी वाढ झालेली आहे असे म्हणतात.

उदाहरण 18 : खालील माहितीवरून वर्ष 2014 च्या आधारे वर्ष 2015 चा एकूण खर्चाच्या पद्धतीने तसेच कौटुंबिक अंदाजपत्रक पद्धतीने जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंकाची मोजणी करा.

वस्तू	गहू	तांदुळ	तूर डाळ	तेल	कापड	केरोसीन
एकक	क्विंटल	किग्रा	किग्रा	लीटर	मीटर	लीटर
वर्ष 2014 चा साठा	35 किग्रा	25 किग्रा	20 किग्रा	10 लीटर	20 मीटर	15 लीटर
वर्ष 2014 चा भाव (₹)	1600	40	60	80	30	28
वर्ष 2015 चा भाव (₹)	1800	45	120	90	45	35

येथे आधार वर्ष 2014 आहे. त्यामुळे p_0 = 2014 चा भाव, q_0 = 2014 चा साठा आणि p_1 = 2015 च्या वर्षाचा भाव घेऊ या. भाव आणि साठ्याचा एकक प्रत्येक वस्तूसाठी समान करूया.

एकूण खर्चाची पद्धती :

वस्तू	एकक	वर्ष 2014		वर्ष 2015	p_1q_0	p_0q_0
		q_0	p_0	p_1		
गहू	किग्रा	35	16	18	630	560
तांदूळ	किग्रा	25	40	45	1125	1000
तूर डाळ	किग्रा	20	60	120	2400	1200
तेल	लीटर	10	80	90	900	800
कापड	मीटर	20	30	45	900	600
केरोसीन	लीटर	15	28	35	525	420
एकूण					**6480**	**4580**

एकूण खर्चाच्या पद्धतीने सूचक अंक $= \dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$

$$= \frac{6480}{4580} \times 100$$
$$= 141.4847$$
$$\simeq 141.48$$

अशाप्रकारे आधार वर्ष 2014 च्या तुलनेत वर्ष 2015 च्या एकूण खर्चात (141.48 – 100) = 41.48 % एवढी वाढ झाली आहे.

कौटुंबिक अंदाजपत्रक पद्धती :

वस्तू	एकम	वर्ष 2014		वर्ष 2015	$I = \dfrac{p_1}{p_0} \times 100$	$W = p_0q_0$	IW
		q_0	p_0	p_1			
गहू	किग्रा	35	16	18	$\frac{18}{16} \times 100 = 112.5$	560	63,000
तांदूळ	किग्रा	25	40	45	$\frac{45}{40} \times 100 = 112.5$	1000	1,12,500
तूर डाळ	किग्रा	20	60	120	$\frac{120}{60} \times 100 = 200$	1200	2,40,000
तेल	लीटर	10	80	90	$\frac{90}{80} \times 100 = 112.5$	800	90,000
कापड	मीटर	20	30	45	$\frac{45}{30} \times 100 = 150$	600	90,000
केरोसीन	लीटर	15	28	35	$\frac{35}{28} \times 100 = 125$	420	52,500
एकूण						**4580**	**6,48,000**

कौटुंबिक अंदाजपत्रकाचा सूचक अंक = $\dfrac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$= \dfrac{648000}{4580}$

$= 141.4847$

$\simeq 141.48$

नोंद : येथे आपण पाहू शकतो की, चालु वर्षाचा एकूण खर्चाच्या पद्धतीने आणि कौटुंबिक अंदाजपत्रकाच्या पद्धतीने मिळणारा सूचक अंक समान आहे.

उदाहरण **19 : एका शहराच्या कामगार वर्गाशी संबंधीत माहिती खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून वर्ष 2014 आणि 2015 च्या वर्षासाठी सामान्य सूचक अंक शोधा. जर ह्या कामगारांच्या वेतनात वर्ष 2014 च्या तुलनेत वर्ष 2015 मध्ये 5 % वाढ करण्यात आली तर त्याचे जीवनधोरण टिकविण्यासाठी ही वेतनवाढ पुरेशी आहे का ?**

समूह	अन्न	कापड	ईंधन आणि वीज	घरभाडे	किरकोळ
भार	48	18	8	12	14
वर्ष 2014 चा समूह सूचक अंक	210	220	210	200	210
वर्ष 2015 चा समूह सूचक अंक	230	225	220	200	235

समूह	**भार** W	**वर्ष 2014 चा समूह सूचक अंक** I_1	**वर्ष 2015 चा समूह सूचक अंक** I_2	I_1W	I_2W
अन्न	48	210	230	10,080	11,040
कापड	18	220	225	3960	4050
ईंधन आणि वीज	8	210	220	1680	1760
घरभाडे	12	200	200	2400	2400
किरकोळ	14	210	235	2940	3290
एकूण	**100**			**21,060**	**22,540**

वर्ष 2014 साठीचा सूचक अंक $= \dfrac{\Sigma I_1W}{\Sigma W} = \dfrac{21060}{100} = 210.60$

वर्ष 2015 साठीचा सूचक अंक $= \dfrac{\Sigma I_2W}{\Sigma W} = \dfrac{22540}{100} = 225.40$

आधार वर्षाच्या तुलनेत वर्ष 2014 पेक्षा वर्ष 2015 च्या कामगारांच्या जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंकात $(225.40 - 210.60) = 14.80$ % एवढी वाढ झाली आहे.

त्यामुळे, वर्ष 2014 च्या तुलनेत 2015 चा जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंकात होणारी टक्केवारीतील वाढ $\frac{14.80}{210.60} \times 100 = 7.03$.

त्यामुळे वर्ष 2014 च्या वेतनात झालेली 5% वेतन वाढ कामगाराचे जीवनधोरण वर्ष 2015 मध्ये टिकविण्यासाठी पुरेसे नाही.

उदाहरण **20 : मध्यम वर्गाच्या कुटुंब अंदाजपत्र तपासातून खालील माहिती मिळाली. वर्ष 2014 च्या आधार वर्षाच्या सापेक्षात वर्ष 2015 च्या चालु वर्षाच्या जीवननिर्वाह खर्चात किती फरक होतो ते सूचक अंक मिळवून सांगा. जर 2014 च्या वर्ष दरम्यान एखाद्या कुटुंबाची खर्चपात्र सरासरी मासिक उत्पन्न ₹ 30,000 आणि 2015 च्या वर्ष दरम्यान सरासरी खर्च पात्र मासिक उत्पन्न आवक ₹ 35,000 असेल तर त्या कुटुंबाला आधार वर्षाच्या तुलनेत जीवनधोरण टिकविण्यासाठी कौटुंबिक अंदाजपत्रकाच्या सूचक अंका प्रमाणे सरासरी खर्चपात्र मासिक उत्पन्न किती वाढवावे लागेल ?**

समूह	अन्न पदार्थ	कपडे	भाडे	ईंधन	किरकोळ
भार	45	20	15	10	10
2015 च्या वर्षाची समूह खर्चाची भाव सापेक्ष टक्केवारी	130	150	120	160	120

येथे, वर्ष 2015 चा भार W आणि समूह खर्चाचा भाव सापेक्ष I आहे. त्यावरून कौटुंबिक अंदाजपत्रक पद्धतीने सूचक अंकाची मोजणी करू या.

समूह	अन्न पदार्थ	कपडे	भाडे	ईंधन	किरकोळ	**एकूण**
भाव सापेक्षाची I टक्केवारी	130	150	120	160	120	
भार W	45	20	15	10	10	**100**
IW	5850	3000	1800	1600	1200	**13,450**

कौटुंबिक अंदाजपत्रकाच्या पद्धतीने सूचक अंक I $= \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$= \frac{13450}{100}$

$= 134.50$

येथे वर्ष 2014 च्या तुलनेत वर्ष 2015 च्या जीवननिर्वाह खर्चात (134.50 – 100) = 34.50 % वाढ झाली असे म्हणतात.

वर्ष 2015 च्या कौटुंबिक अंदाजपत्राच्या सूचक अंकाप्रमाणे खरोखर आधार वर्षाच्या तुलनेत जीवनधोरण टिकविण्यासाठी.

खर्चपात्र सरासरी मासिक उत्पन्न $= \frac{\text{चालु वर्षाचा सूचक अंक}}{\text{आधार वर्षाचा सूचक अंक}} \times 100$

$= \frac{134.50}{100} \times 30,000$

$=$ ₹ 40,350

कुटुंबाला जीवनधोरण टिकविण्यासाठी वाढवावे लागणारे खर्चपात्र सरासरी उत्पन्न = ₹ 40,350 – ₹ 35,000

= ₹ 5350

1.7.2 जीवननिर्वाह खर्चाच्या सूचक अंकाचे उपयोग आणि मर्यादा :

हा सूचक अंक वेगवेगळ्या वर्गातील लोकाच्या जीवननिर्वाह खर्चात होणाचा फरकाच्या अभ्यासावरून तयार करण्यात येतो. अशाप्रकारे जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंकाचा वेग-वेगळ्या हेतूसाठी खालीलप्रमाणे उपयोग करण्यात येतो.

(1) जीवननिर्वाह खर्चाच्या सूचक अंकाच्या मदतीने ज्या त्या वर्गातील लोकांची पैश्यांची खरेदीशक्तिमधील होणारा फरक मोजू शकतो. वेतन वाढल्याने वस्तूची भाववाढ तीव्र होते आणि कमविणाऱ्यांचे वास्तविक वेतन घटते आणि परिणामी त्याची खरेदीशक्ति घटते. अशाप्रकारे पैश्याची खरी खरेदीशक्ति आणि वास्तविक वेतन शोधण्यासाठी जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक उपयोगी होतो. पैश्याची खरेदीशक्ति आणि वास्तविक वेतन खालील सूत्राने मिळविता येईल.

(i) पैश्यांची खरेदीशक्ति $= \frac{1}{\text{जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक}} \times 100$

(ii) वास्तविक वेतन $= \frac{\text{वेतन}}{\text{जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक}} \times 100$

(2) ज्या-त्या वर्गासाठी मिळविलेला जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक ज्या-त्या वर्गाच्या लोकांची वास्तविक आर्थिक परिस्थिती दर्शविते. त्यामुळे त्या वर्गाच्या लोकांना दिले जाणारे वेतन, महागाई भत्ता, बोनस वगैरे मध्ये फरक सुधरविण्यास ह्या अंकाचा उपयोग करण्यात येतो.

(3) हा सूचक अंक वस्तूच्या किरकोळ भावाची लोकाच्या जीवननिर्वाहावर होणारा परिणाम मोजतो. त्यामुळे सरकारला कोणत्या वस्तूला आवश्यक कलमाद्वारे अंकुश ठेवावा आणि कोणती वस्तू मुक्त व्यापारात ठेवावी हे त्याचे मार्गदर्शन या प्रकारच्या सूचक अंकाद्वारा मिळते.

(4) जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक सरकारला करनीती घडविण्यात, भाव नियंत्रण आणि भाडे नियंत्रण सारख्या बाबतीत सामान्य नीती घडविण्यात निर्देशक म्हणून मदतरूप होते. याशिवाय एखाद्या वस्तूवर कर टाकल्याने वेगवेगळ्या वर्गातील लोकांच्या जीवननिर्वाहावर काय परिणाम होईल ते देखील समजू शकते. आणि त्याप्रमाणे करनीतीचे आयोजन करता येईल.

(5) वेग-वेगळ्या वर्गातील लोकांचे जीवनधोरण उच्चविण्यासाठी कोणत्या प्रकारच्या विशिष्ट सोईंची आवश्यकता आहे, ते नक्की करण्यासाठी सरकारी संस्था किंवा जाहीर संस्था त्याचा आधार घेऊ शकतात.

जीवननिर्वाह सूचक अंकाच्या मर्यादा :

(1) समाजातील सर्वच वर्गासांठी एक सामान्य जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक रचता येणे शक्य नाही.

(2) एखाद्या प्रदेशातील एखाद्या वर्गाच्या लोकांसाठी मिळविलेला जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक दुसऱ्या प्रदेशातील किंवा त्याच वर्गातील लोकांसाठी बिनउपयोगी ठरतो.

(3) जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक एखाद्या वर्गाच्या खर्चात होणारी सरासरी टक्केवारी फरक दर्शविते. त्यामुळे व्यक्तिगत जीवननिर्वाह खर्चात होणारा फरक मोजता येत नाही.

(4) वेग-वेगळ्या वर्गाच्या लोकांसाठी आणि वेग-वेगळ्या प्रदेशासाठी वेग-वेगळ्या सूचक अंकाची रचना करावी लागेल.

(5) एकाच वर्गातील लोकांचा खर्च त्यांच्या कुटुंबाचा आकार, चैन, आवड, राहणीमान वगैरे वर आधारित आहे. एकाच वर्गातील सर्वच कुटुंबाचे खर्चाचे प्रमाण एकसारखे नसते.

(6) त्याच्या मोजणीत आधार वर्षाच्या तुलनेत चालु वर्षाच्या कुटुंबाच्या रहाणीमानात फरक पडत नसेल अशी धारणा करण्यात येते. खरोखर समय बदलल्याने लोकांची आवड, शोक, निवड वगैरे बदलतात. त्यामुळे नियमित समयात कौटुंबिक अंदाजपत्रक तपासून वस्तूच्या आणि त्याच्या भारात फरक करणे आवश्यक आहे.

स्वाध्याय 1.4

1. मध्यम वर्गाच्या कुटुंबाचे अंदाजपत्रक तपासावरून खालील माहिती मिळाली त्यावरून वर्ष 2013 च्या सापक्षतेत वर्ष 2015 च्या जीवननिर्वाह खर्चात किती फरक पडतो हे सूचक अंक मिळवून सांगा आणि जर वर्ष 2013 मध्ये एखाद्या कुटुंबाची खर्चपात्र सरासरी मासिक उत्पन्न ₹ 15,000 असेल, तर वर्ष 2015 च्या दरम्यान आवश्यक खर्चपात्र सरासरी उत्पन्नाचा अंदाज मिळवा.

समूह	अन्न	ईंधन-विज	भाडे	कपडे	किरकोळ
भार	45	15	10	20	10
2013 चा खर्च (₹)	3000	1450	1500	600	1600
2015 चा खर्च (₹)	3900	1850	2400	900	1920

2. खाद्य पदार्थाचा भाव आणि वापराची खालील माहितीवरून कौटुंबिक अंदाजपत्रकाच्या रितीने 2014 चा सूचक अंक मोजा आणि त्याचे अर्थघटन करा.

वस्तू	**वर्ष 2010**		**वर्ष 2014**
	साठा (जथ्था)	**भाव (₹)**	**भाव (₹)**
गहू	60	15	18
तांदूळ	40	32	40
बाजरी	15	12	14
तुरडाळ	25	50	70

3. खालील माहितीवरून एकूण खर्चाच्या रितीने वर्ष 2015 साठी जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक मोजा.

वस्तू	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
एकक	क्विंटल	20 किग्रा	10 लीटर	डझन	मीटर
वर्ष 2014 चा साठा	50 किग्रा	18 किग्रा	12 लीटर	20 नग	14 मीटर
वर्ष 2014 चा भाव (₹)	1200	340	30	15	12
वर्ष 2015 चा भाव (₹)	1700	380	40	24	16

4. खालील माहितीच्या आधारे उत्पादनाचा सूचक अंक मोजा.

वस्तू	सुती कापड	अन्न	साखर	पोलाद	तांबे	सिमेंट
भार	15	23	15	25	10	12
उत्पादनाचा सूचक अंक	220	225	190	215	198	220

5. एका विस्तारातील कामगारवर्गासाठी कापड समूहाच्या खर्चाचा तपशील खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून एकूण खर्च आणि कौटुंबिक बजेट पद्धतीने कापड समूहाचा सूचक अंक मोजा.

वस्तू	साडी	धोतर	शर्टींग	ईतर
एकक	नग	नग	मीटर	मीटर
वर्ष 2014 चा साठा	5	8	20	15
वर्ष 2010 चा भाव (₹)	300	70	32.40	20.90
वर्ष 2014 चा भाव (₹)	400	100	38	23.80

*

काही उदाहरणे :

उदाहरण **21 : पांच वस्तूपैकी तीन वस्तू *A*, *B* आणि *C* च्या भावात वर्ष 2010 च्या सापेक्षात वर्ष 2015 मध्ये अनुक्रमे 90%, 120% आणि 70% वाढ झाली. आणि दोन वस्तू *D* आणि *E* च्या भावात अनुक्रमे 2% आणि 5% घट झाली. वस्तू *A*, वस्तू *B* पेक्षा चारपट महत्त्वाची आहे आणि वस्तू *C*, वस्तू *A* पेक्षा सहापट महत्त्वाची आहे. वस्तू *D* आणि वस्तू *E* चे महत्त्व *B* च्या पेक्षा अडीच पट आहे. तर पाचही वस्तूंचा वर्ष 2015 साठीचा भावाचा सामान्य सूचक अंक मोजा.**

येथे वस्तूंच्या भावात वाढ किंवा घट टक्केवारीत देण्यात आली आहे. त्याचप्रमाणे वस्तूचे सापेक्ष महत्त्व दर्शविणारे अंक वस्तूचा भार W नक्की करतात.

समजा वस्तू B चे सापेक्ष महत्त्व 1 आहे. त्यामुळे वस्तू A चे महत्त्व 4 होईल आणि C चे महत्त्व 24 होईल तसेच वस्तू D आणि E चे महत्त्व अनुक्रमे 2.5 आणि 2.5 होईल.

भावाच्या सामान्य सूचक अंकाची मोजणी खालीलप्रमाणे करू या.

वस्तू	**टक्केवारी वाढ (+) घट (–)**	**सूचक अंक I = (100 + वाढ) = (100 – घट)**	**भार W**	**IW**
A	+ 90	100 + 90 = 190	4	760
B	+ 120	100 + 120 = 220	1	220
C	+ 70	100 + 70 = 170	24	4080
D	– 2	100 – 2 = 98	2.5	245
E	– 5	100 – 5 = 95	2.5	237.5
एकूण			**34**	**5542.5**

भावाचा सामान्य सूचक अंक $= \dfrac{\Sigma IW}{\Sigma W}$

$= \dfrac{5542.5}{34}$

$= 163.0147$

$\simeq 163.01$

अशाप्रकारे, आधार वर्ष 2014 च्या तुलनेत चालु वर्ष 2015 च्या एकूण खर्चात (163.01 – 100) = 63.01 % एवढी वाढ झाली असे म्हणतात.

उदाहरण 22 : एका विस्तारातील कामगाराच्या समूहासाठी ईंधन खर्चाचा तपशील खालीलप्रमाणे दिलेला आहे.

वस्तू	आधार वर्ष 2012		वर्ष 2014
	साठा	प्रति एकक भाव (₹)	प्रति एकक भाव (₹)
कोळसा	5 किलोग्राम	25	30
केरोसीन	20 लीटर	40	45
लाकुड	5 किलोग्राम	22	25
आगपेटी	10 पेटी	0.90	1

ह्या माहितीवरून ईंधन खर्चाचा समूहाचा सूचक अंक तयार करा. जर अन्न, कापड, घरभाडे आणि किरकोळ समूहासाठीचा खर्च वर्ष 2012 पेक्षा वर्ष 2014 मध्ये अनुक्रमे 3, 2.5, 4.5 आणि 3.25 पट झाला असेल आणि ह्या समूहासाठी एकूण खर्च 42 %, 15 %, 10 % आणि 12 % होत असेल तर कामगाराचा जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक तयार करा.

सर्वप्रथम खर्चाच्या तपशीलावरून ईंधन खर्चाच्या समूहाचा सूचक अंक तयार करू या. आधार वर्ष 2012 घेऊ या आणि एकूण खर्चाच्या पद्धतीने सूचक अंक मिळवू या.

नोंद : येथे मोजणीसाठी कौटुंबिक अंदाजपत्रकाची पद्धतीचा देखील उपयोग करता येईल.

वस्तू	वर्ष 2012		वर्ष 2014	p_1q_0	p_0q_0
	q_0	p_0	p_1		
कोळसा	5	25	30	150	125
केरोसीन	20	40	45	900	800
लाकूड	5	22	25	125	110
आगपेटी	10	0.90	1	10	9
एकूण				**1185**	**1044**

ईंधन खर्चाच्या समूहाचा सूचक अंक $= \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$

$= \frac{1185}{1044} \times 100$

$= 113.5057$

$\simeq 113.51$

आता अन्न, कापड, घरभाडे आणि किरकोळ समूहाचे खर्च अनुक्रमे 3, 2.5, 4.5 आणि 3.25 पट झाला आहे. ह्या चार समूहांचा सूचक अंक अनुक्रमे $(3 \times 100) = 300$; $(2.5 \times 100) = 250$; $(4.5 \times 100) = 450$ आणि $(3.25 \times 100) = 325$ होईल. त्याचप्रमाणे ईंधन खर्चाचा समूहाचा सूचक अंक 113.51 मिळालेला आहे. ह्या पांचही समूहांच्या सूचक अंकावरून जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक मिळविण्यासाठी वेग-वेगळ्या समूहासाठीचा खर्चाची टक्केवारी भार म्हणून घेऊ या.

येथे अन्न, कापड, घरभाडे आणि किरकोळ समूहाचा खर्च अनुक्रमे एकूण खर्चाच्या 42 %, 15 %, 10 % आणि 12 % दिलेला आहे. जर अनुक्रमे त्याचा सूचक अंकाचा भार W मोजण्यात येईल. एकूण खर्च 100 % असेल तर ईंधन खर्चाचा सूचक अंका साठीचा भार $100 - (42 + 15 + 10 + 12) = 21$ % होईल.

आता जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंकाची मोजणी खालीलप्रमाणे करू या.

समूह	अन्न	कापड	घरभाडे	किरकोळ	ईंधन	**एकूण**
सूचक अंक I	300	250	450	325	113.5	
भार W	42	15	10	12	21	**100**
IW	12,600	3750	4500	3900	2383.71	**27,133.71**

$$\text{जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक} = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$$

$$= \frac{27133.71}{100}$$

$$= 271.3371$$

$$\simeq 271.34$$

अशाप्रकारे आधार वर्षाच्या तुलनेत चालु वर्षाच्या जीवननिर्वाह खर्चात $(271.34 - 100) = 171.34$ % एवढी वाढ झाली असे म्हणता येईल.

उदाहरण 23 : एका शहराच्या कामगार वर्गाचे सरासरी मासिक वेतन आणि जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंका (आधार वर्ष 2001) विषयीच्या माहितीवरून त्याच्या वास्तविक वेतनाची मोजणी करा. वर्ष 2001 ला आधार वर्ष घेऊन वर्ष 2015 साठी पैश्याची खरेदीशक्ति शोधा आणि ह्या परिणामाचे महत्त्व काय आहे हे समजवा.

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014	2015
सरासरी मासिक वेतन (₹)	15,000	15,600	16,200	17,000	18, 000	20,000
जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक	192	203	228	268	270	287

येथे, वेतन आणि जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंकावरून वास्तविक वेतनाची मोजणी खालीलप्रमाणे करता येईल.

$$\text{वास्तविक वेतन} = \frac{\text{सरासरी मासिक वेतन}}{\text{जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक}} \times 100$$

वर्ष	सरासरी मासिक वेतन (₹)	जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक	वास्तविक वेतन (₹)
2010	15,000	192	$\frac{15000}{192} \times 100 = 7812.5$
2011	15,600	203	$\frac{15600}{203} \times 100 = 7684.73$
2012	16,200	228	$\frac{16200}{228} \times 100 = 7105.26$
2013	17,000	268	$\frac{17000}{268} \times 100 = 6343.28$
2014	18,000	270	$\frac{18000}{270} \times 100 = 6666.67$
2015	20,000	287	$\frac{20000}{287} \times 100 = 6968.64$

रूपयात पैश्याची खरेदीशक्ति नेहमी आधार वर्षाच्या तुलनेत चालु वर्षाच्या जीवननिर्वाह खर्चाच्या सूचक अंकाच्या व्यस्त असते.

$\therefore$ वर्ष 2001 च्या आधार वर्षाच्या सापेक्ष वर्ष 2015 ची पैश्याची खरेदीशक्ति = $\frac{100}{287} = 0.3484 \simeq 0.35$ आहे असे म्हणतात.

नाण्याचा एकक रूपया असेल, तर आधार वर्ष 2001 च्या तुलनेत वर्ष 2015 च्या रूपयाचे मूल्य 35 पैसे एवढे असेल असे म्हणतात.

अशाप्रकारे ह्या वर्गाच्या कामगार आधार वर्ष 2001 च्या सरासरी मासिक वेतनापेक्षा वर्ष 2015 मधील सरासरी मासिक वेतन रूपयात जास्त धारण करतो. परंतु खरोखर आधार वर्षाच्या तुलनेत त्याची खर्चपात्र उत्पन्न ₹ 6968.64 एवढे सांगता येईल.

उदाहरण 24 : खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(1) वर्ष 2014 मध्ये गव्हाचा भाव प्रति क्विंटल ₹ 1600 आणि वर्ष 2015 मध्ये भाव प्रति क्विंटल ₹ 1800 होता. 2014 च्या वर्षाच्या आधारे 2015 च्या वर्षाचा गव्हाच्या भावाचा सूचक अंक शोधा आणि त्याचे अर्थघटन करा.

$\therefore$ वर्ष 2015 चा गव्हाच्या भावाचा सूचक अंक $I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$

$$= \frac{1800}{1600} \times 100$$

$$= 112.5$$

अशाप्रकारे, वर्ष 2014 च्या तुलनेत वर्ष 2015 मध्ये गव्हाचा भावात प्रति क्विंटल (112.5 – 100) = 12.5 % एवढी वाढ झाली असे म्हणतात.

(2) लास्पेयरचा सूचक अंक फिशरच्या सूचक अंकाच्या $\frac{8}{9}$ पट आहे. जर फिशरचा सूचक अंक 180 असेल, तर पाशेचा सूचक अंक शोधा.

येथे लास्पेयरचा सूचक अंक फिशरच्या सूचक अंकाच्या $\frac{8}{9}$ पट आहे.

$$\therefore \ I_L = \frac{8}{9} \times I_F$$

$$\therefore \quad I_L = \frac{8}{9} \times 180$$

$$I_L = 160$$

आता, $I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$

$$180 = \sqrt{160 \times I_P}$$

$$(180)^2 = 160 \times I_P$$

$$\therefore \quad I_P = \frac{180 \times 180}{160} = 202.5$$

(3) वर्ष 2015 मध्ये एका वस्तूचे उत्पादन आधार वर्षाच्या उत्पादनापेक्षा तिनपट वाढले असेल, तर वर्ष 2015 च्या उत्पादनाचा सूचक अंक शोधा.

जर आधार वर्षाच्या उत्पादनाचा सूचक अंक 100 घेतल्यास आणि वर्ष 2015 मध्ये उत्पादन तिनपट वाढले आहे.

वर्ष 2015 च्या उत्पादनाचा सूचक अंक = आधार वर्षाचा सूचक अंक + चालु वर्षातील झालेला सूचक अंकातील वाढ

$$= 100 + (3 \times 100)$$

$$= 100 + 300 = 400$$

(4) जर $\Sigma p_1q_0 : \Sigma p_0q_0 = 3:2$ आणि $\Sigma p_1q_1 : \Sigma p_0q_1 = 5:3$ असेल तर I_L, I_P आणि I_F शोधा.

$$\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} = \frac{3}{2}$$

$$I_L = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$$

$$= \frac{3}{2} \times 100 = 150$$

$$\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} = \frac{5}{3}$$

$$I_P = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{5}{3} \times 100 = 166.67$$

$$I_F = \sqrt{I_L \times I_P} = \sqrt{150 \times 166.67} = \sqrt{25000.5} = 158.12$$

(5) जर 2014 च्या वर्षासाठी मध्यम वर्गाच्या कुटुंबाची खर्चपात्र सरासरी मासिक आवक ₹ 14,400 आहे आणि जर त्या वर्गाचा वर्ष 2014 च्या आधारे वर्ष 2015 चा जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक 115 असेल तर 2015 च्या वर्षासाठी त्या कुटुंबाची खर्चपात्र सरासरी मासिक उत्पन्नाची मोजणी करा.

येथे 2014 च्या आधार वर्षाच्या तुलनेत 2015च्या वर्षाच्या मध्यम वर्गाच्या कुटुंबाची खर्चपात्र सरासरी उत्पन्नाचा सूचक अंक 115 आहे. त्यामुळे आधार वर्षाच्या तुलनेत सूचक अंक (115 – 100) = 15 % वाढ झाली आहे. अशाप्रकारे मध्यम वर्गाच्या कुटुंबाचे खर्चपात्र सरासरी उत्पन्नात 15 % वाढ झाली पाहिजे.

$\therefore$ कुटुंबाचे सरासरी खर्चपात्र मासिक उत्पन्न $= 14400 + (14400 \times \frac{15}{100})$

$$= 14400 + 2160 = 16560$$

त्यामुळे वर्ष 2015 मध्ये कुटुंबाचे खर्चपात्र सरासरी मासिक उत्पन्न ₹ 16560 असले पाहिजे.

(6) जर चालु वर्षाचा जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक आधार वर्षाच्या सूचक अंक 100 पासून वाढून 180 झाला असेल आणि कामगाराचे सरासरी उत्पन्न ₹ 6000 पासून वाढून ₹ 9000 झाले असेल, तर काय कामगाराची खरेदीशक्ति वाढली की घटली ? किती ?

येथे सूचक अंक 100 ने वाढून 180 झाला म्हणजे त्यात 80 % वाढ झाली त्यामुळे उत्पन्नात देखील 80 % ची वाढ झाली पाहिजे.

सरासरी उत्पन्न $= 6000 + (6000 \times \frac{80}{100})$

$= 6000 + 4800 = ₹\ 10{,}800$

त्यामुळे कामगाराचे सरासरी उत्पन्न ₹ 10,800 असले पाहिजे परंतु कामगाराचे उत्पन्न वाढून ₹ 9000 झाले आहे. त्यामुळे कामगाराच्या सरासरी उत्पन्नात सूचक अंकाच्या संदर्भात (10800 – 9000) = ₹ 1800 ने घट झालेली आहे. त्यामुळे त्याच्या खरेदीशक्तित घट झाली आहे असे म्हणतात.

(7) वर्ष 2015 आणि वर्ष 2016 घाऊक भावाचा सूचक अंक अनुक्रमे 150.2 आणि 165.7 मिळाला आहे. ह्या दोन्ही वर्षाच्या सूचक अंकाचा उपयोग करून फुगवट्याचा दर शोधा.

येथे वर्ष 2015 चा सूचक अंक 150.2 आणि वर्ष 2016 म्हणजे चालु वर्षाचा सूचक अंक 165.7 आहे.

फुगवट्याच्या दराचे खालील सूत्र वापरू या.

$$\text{फुगवट्याच्या दर} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{चालु वर्षाचा घाऊक भावाचा}\\ \text{सूचक अंक}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{आधीच्या वर्षाचा घाऊक}\\ \text{सूचक अंक}\end{array}\right)}{\text{आधीच्या वर्षाच्या घाऊक भावाचा सूचक अंक}} \times 100$$

$$= \frac{165.7 - 150.2}{150.2} \times 100$$

$$= \frac{15.5}{150.2} \times 100$$

$$= 10.3196$$

$$\simeq 10.32$$

अशाप्रकारे फुगवट्याचा दर 10.32 % आहे.

(8) जर तिन वस्तूच्या भाव सापेक्ष अंकात होणारी वाढ अनुक्रमे 250 %, 265 % आणि 300 % आहे आणि जर ह्या वस्तूचे महत्त्व 8 : 7 : 5 असेल तर भावाचा सामान्य सूचक अंक शोधा.

येथे सूचक अंक (सापेक्ष भाव) I मध्ये टक्केवारी वाढ आणि सापेक्ष महत्त्व W दिलेल आहे.

सूचक अंकाची मोजणी करू या.

वस्तू	सूचक अंक (I) (आधार वर्षाचा सूचक अंक + वाढ)	भार W	IW
A	100 + 250 = 350	8	2800
B	100 + 265 = 365	7	2555
C	100 + 300 = 400	5	2000
एकूण		**20**	**7355**

सामान्य सूचक अंक $= \frac{\Sigma IW}{\Sigma W} = \frac{7355}{20} = 367.75$

सामान्य सूचक अंक = 367.75

अशाप्रकारे आधार वर्षाच्या तुलनेत चालु वर्षात वस्तूंच्या भावात (367.75 – 100) = 267.75 % एवढी वाढ झाली आहे.

सारांश

- एखाद्या वस्तूचा भाव, उत्पादन, मागणी, पुरवठा, साठा वगैरेना त्या वस्तूची चलराशी म्हणतात.
- चलराशीच्या किमंतीत दोन वेगवेगळ्या वेळी होणाऱ्या फरकाची तुलना दोन प्रकारे होत असते : (1) निरपेक्ष मापा (फरका)ची पद्धती आणि (2) सापेक्ष मापा (गुणोत्तर)ची पद्धती.
- कोणत्याही चलराशीच्या दोन वेगवेगळ्या वेळात मूल्यात होणाऱ्या फरकाच्या गुणोत्तराला सापेक्ष फरक म्हणतात.
- एखाद्या वस्तूच्या दोन वेग-वेगळ्या समयात भावात होणाऱ्या सापेक्ष फरकाला टक्केवारीत दर्शविलेल्या मापाला भावाचा सूचक अंक म्हणतात.
- एखाद्या वस्तूच्या दोन वेग-वेगळ्या काळात साठ्यात होणाऱ्या सापेक्ष फरकाला टक्केवारीत दर्शविणाऱ्या मापाला साठ्याचा सूचक अंक म्हणतात.
- कोणत्याही एक किंवा त्यापेक्षा जास्त वस्तूच्या दिलेल्या समयाच्या चलाच्या किमंतीत एका निश्चित (आधार) समयात त्या वस्तूच्या चल किमंतीच्या सापेक्षतेत होणाऱ्या टक्केवारीतील फरकाच्या सरासरीला समूहाचा सामान्य सूचक अंक म्हणतात.
- जेव्हा एखाद्या वस्तूच्या भावात होणारा फरक भूतकाळातील एखाद्या निश्चित वर्षाच्या त्याच वस्तूच्या भावाशी तुलना करण्यात आली तर त्या निश्चित वर्षाला आधार वर्ष म्हणतात.
- वस्तूच्या ज्या वर्षाच्या भावाला त्या वस्तूच्या आधार वर्षाच्या भावाशी तुलना करावयाची असेल त्या वर्षाला चालु किंवा प्रवर्तमान वर्ष म्हणतात.
- आधार वर्षाची निवड दोन प्रकारे होते : (1) अचल आधाराची पद्धती (2) परंपरित आधाराची पद्धती.
- वस्तूंचा भाव सापेक्ष $\frac{p_1}{p_0}$ ला खर्च p_0q_0 एवढा भार देण्यात येतो. या पद्धतीने मिळविलेल्या भारित सरासरी सूत्राला लास्पेयरचा सूचक अंकाचे सूत्र म्हणतात.
- वस्तूच्या भाव सापेक्ष $\frac{p_1}{p_0}$ ला खर्च p_0q_1 एवढा भार देण्यात येतो. या पद्धतीने मिळविलेल्या भारित सरासरी सूत्राला पाशेचा सूचक अंकाचे सूत्र म्हणतात.
- लास्पेयर आणि पाशेच्या सूचक अंकाच्या गुणोत्तर मध्यकाला फिशरचा सूचक अंक म्हणतात.
- समाजाच्या एखाद्या वर्गातील लोकांचा एका वेळी जीवननिर्वाह खर्चाच्या आधार वर्ष (समय)च्या तुलनेत चालु वर्षा (समय) होणाऱ्या सापेक्ष टक्केवारी फरक दर्शविणाऱ्या अंकाला जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक म्हणतात.
- जीवननिर्वाह खर्चाच्या सूचक अंकाच्या रचनेचे मुद्दे : हेतू, कौटुंबिक बजेटाचा तपास, वस्तूची भाव प्राप्ति, आधार वर्षाची निवड, सरासरीची निवड आणि भाराची निवड.
- सूचक अंकाच्या रचनेत निवड झालेल्या वस्तूंना त्याच्या महत्त्वाच्या प्रमाणात जो अंक नक्की करण्यात येतो त्याला वस्तूचा भार म्हणतात.
- भारचे दोन प्रकार : (i) गर्भित भार (ii) स्पष्ट भार.
- गर्भित भार : वस्तूच्या निवडीत भार समाविष्ट असेल आणि ज्याला संख्येत दर्शवू शकत नाही अशा भार देण्याच्या अप्रत्यक्ष पद्धतीना गर्भित भार म्हणतात.
- स्पष्ट भार : वस्तूच्या महत्त्वाच्या प्रमाणात नक्की होतो आणि ज्याला संख्येत दर्शवू शकतो असा भार देण्यात आला तर त्याला स्पष्ट भार म्हणतात.
- स्पष्ट भार देण्याच्या दोन पद्धती प्रचलित : (i) एकूण खर्चाची पद्धती (ii) कौटुंबिक अंदाजपत्रकाची पद्धती.

सूत्रांची यादी

(1) भाव सापेक्ष $= \dfrac{\text{चालु वर्षा (समय)चा भाव}}{\text{आधार वर्षा (समय)चा भाव}}$

$$= \frac{p_1}{p_0}$$

(2) सूचक अंक $I = \dfrac{\text{चालु वर्षा (समय)ची चल किमंत}}{\text{आधार वर्षा (समय)चा भाव}} \times 100$

$$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

(3) n वस्तूंच्या भाव सापेक्षाच्या आधारे सूचक अंक $= \dfrac{\Sigma\left[\dfrac{p_1}{p_0}\right]}{n} \times 100$

(4) अचल आधाराच्या पद्धतीने सूचक अंक $= \dfrac{\text{चालु वर्षा (समय)ची चल किमंत}}{\text{आधार वर्षा (समय)ची चल किमंत}} \times 100$

$$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

(5) परंपरित आधारच्या पद्धतीने सूचक अंक $= \dfrac{\text{चालु वर्षा (समय)ची चल किमंत}}{\text{आधीचा वर्षा (समय)ची चल किमंत}} \times 100$

$$I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

(6) अचल आधारच्या सूचक अंकाचे परंपारित आधाराचे सूचक अंकात परिवर्तन :

परंपरित आधाराच्या सूचक अंक $= \dfrac{\text{चालु वर्षा अचल आधारे सूचक अंक}}{\text{आधीच्या वर्षा अचल आधारे सूचक अंक}} \times 100$

(7) परंपरित आधाराच्या सूचक अंकाचे अचल आधाराच्या सूचक अंकात परिवर्तन :

अचल आधारे सूचक अंक $= \dfrac{\text{(चालु वर्षाच्या परंपरित आधारे सूचक अंक)} \times \text{(आधीच्या वर्षाच्या अचल आधाराच्या सूचक अंक)}}{100}$

(8) लास्पेयरचा सूचक अंक $I_L = \dfrac{\Sigma\, p_1 q_0}{\Sigma\, p_0 q_0} \times 100$

(9) पाशेचा सूचक अंक $I_P = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$

(10) फिशरचा सूचक अंक $I_F = \sqrt{I_L \times I_P}$ किंवा

$$I_F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$$

(11) जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक

[1] एकूण खर्चाची पद्धती :

जेव्हा आधार वर्षाचा साठा (q_0) दिलेला असेल तेव्हा,

सूचक अंक $= \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$ (**नोंद :** हा लास्पेयरचा सूचक अंक आहे.)

जेव्हा चालु वर्षाचा साठा (q_1) दिलेला असेल तेव्हा,

सूचक अंक $= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$ (**नोंद :** हा पाशेचा सूचक अंक आहे.)

[2] कौटुंबिक बजेटची पद्धती (सापेक्ष किमंतीत भारित सरासरी)चे सूत्र

सूचक अंक $= \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$ येथे $I = \frac{p_1}{p_0} \times 100$

$W = p_0 q_0$

(12) पैश्याची खरेदीशक्ति $= \frac{1}{\text{जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक}} \times 100$

(13) वास्तविक वेतन $= \frac{\text{वेतन}}{\text{जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक}} \times 100$

स्वाध्याय 1

विभाग A

खालील दिलेल्या वैकल्पिक प्रश्नासाठी सत्य विकल्प निवडा :

1. चल राशीच्या किमंतीत होणारा दिर्घकालीन फरकाची तुलनेसाठी कोणती पद्धती उपयोगी आहे ?

(a) परंपरित आधाराची पद्धती (b) लास्पेयरची पद्धती

(c) अचल आधाराची पद्धती (d) पाशेची पद्धती

2. लास्पेयरच्या सूचक अंकाच्या मोजणीत कोणाचा वापर करतात ?

(a) आधार वर्षाची सरासरी (b) चालु वर्षाची सरासरी

(c) सरासरी वर्षाची सरासरी (d) कोणत्याही वर्षाची सरासरी

3. जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंकाच्या रचनेत कोणता भाव लक्षात घेतात ?

(a) बाजार भाव (b) घाऊक भाव (c) सरासरी भाव (d) किरकोळ भाव

4. कौटुंबिक बजेट पद्धतीत वस्तूचा कोणता खर्च भार म्हणून घेतात ?

(a) निवडलेल्या वर्षाचा खर्च (b) सरासरी वार्षिक खर्च

(c) आधार वर्षाचा खर्च (d) चालु वर्षाचा खर्च

5. सूचक अंकाच्या रचनेत कोणाची सरासरी श्रेष्ठ सरासरी समजण्यात येते ?

(a) हरात्मक मध्यक (b) समांतर मध्यक (c) भारित मध्यक (d) गुणोत्तर मध्यक

6. कोणता सूचक अंक लोकांच्या जीवनधोरणाची कल्पना देतो ?

(a) औद्योगिक उत्पादनाचा सूचक अंक (b) साठ्याचा सूचक अंक

(c) फिशरचा सूचक अंक (d) जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक

7. एका वस्तूचा भाव आधार वर्षाच्या तुलनेत चालु वर्षात 4.5 पट वाढला, तर भाव सूचक अंक किती झाला ?

(a) 45 (b) 450 (c) 550 (d) 350

8. जर आधार वर्ष 2015 च्या सापेक्ष वर्ष 2016 मध्ये पैश्याची खरेदीशक्ति 0.75 आलेली असेल तर वर्ष 2016 साठीचा भावाचा सूचक अंक किती असेल ?

(a) 750 (b) 175 (c) 133.33 (d) 275

9. जर वर्ष 2010 च्या सापेक्ष वर्ष 2016 चा एका वर्गातील लोकाचा जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक 200 झाला, तर खालीलपैकी कोणते विधान सत्य आहे ?

(a) त्या वर्गाद्वारा वापरण्यात येणाऱ्या वस्तूंच्या चालु वर्षाच्या भावात 200% सरासरी वाढ झाली

(b) त्या वर्गाद्वारा वापरण्यात येणाऱ्या वस्तूंच्या चालु वर्षाच्या भावात 100% सरासरी घट झाली

(c) पैश्याची खरेदीशक्ति ₹ 0.5 आहे.

(d) त्या वर्गाद्वारा वापरण्यात येणाऱ्या वस्तूंचा चालु वर्षाचा भाव स्थिर आहे.

10. जर $I_P = I_F$ असेल तर खालीलपैकी कोणते विधान सत्य आहे ?

(a) $I_P = 2I_L$ (b) $I_F = \frac{I_L}{2}$ (c) $I_F = I_P = I_L$ (d) $4I_F = I_L$

11. जर वर्ष 2013 साठी एका कुटुंबाची खर्चपात्र सरासरी उत्पन्न ₹ 20,000 असेल आणि जर त्या वर्गाची 2013 च्या वर्षाच्या आधारे 2015 च्या वर्षासाठी जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक 130 असेल तर 2015 च्या वर्षासाठी ह्या वर्गाच्या कुटुंबाची खर्चपात्र सरासरी उत्पन्न किती होईल ?

(a) ₹ 26,000 (b) ₹ 20,130 (c) ₹ 20,000 (d) ₹ 14,000

12. पाशेच्या सूचक अंकाचे सूत्र मिळविण्यासाठी वस्तूच्या भाव सापेक्ष $\frac{p_1}{p_0}$ ला खर्चाचा कोणता भार देण्यात येतो ?

(a) p_0q_0 (b) p_1q_1 (c) p_0q_1 (d) p_1q_0

विभाग B

खालील प्रश्नांची एका वाक्यात उत्तरे द्या :

1. भाव सापेक्ष म्हणजे काय ?

2. चल राशिच्या दोन भिन्न वेळी होणाऱ्या फरकांची तुलना करण्यासाठी कोणत्या पद्धतीचा उपयोग करणे अनुकुल ठरेल ?

3. एका वस्तूसाठी साठ्याचा एका वर्षाचा सूचक अंक 130 असेल, तर त्याचे अर्थघटन करा.

4. आधार वर्ष म्हणजे काय ?

5. परंपरित आधार सूचक अंकाचे अचल आधार सूचक अंकात परिवर्तनासाठी कोणते सूत्र वापरतात ?

6. सूचक अंकाची व्याख्या द्या.

7. जीवननिर्वाह खर्चाच्या सूचक अंकाची व्याखा द्या.

8. भार म्हणजे काय ?

9. गर्भित भार कोणास म्हणतात ?

10. सूचक अंकाच्या महत्त्वाच्या परिक्षणाचे नाव सांगा.

11. परंपरित आधाराच्या पद्धतीने सूचक अंक म्हणजे काय ?

12. 'तेलाच्या भावाचा सूचक अंक ₹ 500 आहे' हे विधान सत्य की असत्य ते सांगा. असत्य असल्यास सत्य विधान लिहा.

13. फुगवटा दर शोधण्यासाठी कोणत्या सूचक अंकाचा उपयोग करण्यात येतो ? फुगवटा दर शोधण्याचे सूत्र लिहा.

14. भारतात महागाई भत्याचा दर शोधण्यासाठी कोणत्या सूचक अंकाचा उपयोग होतो ?

15. अचल आधाराची पद्धती आणि परंपरित आधाराची पद्धती यामधील मुख्य फरक सांगा.

16. कोणत्या पद्धतीत आधार वर्ष प्रत्येक वर्षी बदलते ?

17. सूचक अंकाच्या रचनेत कोणती सरासरी प्रचलित आहे ?

18. सूचक अंकाच्या मोजणीत आधार वर्ष कसे असले पाहिजे ?

विभाग C

खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या :

1. आधार वर्ष म्हणजे काय ? त्याची निवड करताना मुख्य कोणत्या गोष्टी लक्षात घेतात ?

2. सूचक अंकाची लक्षणे सांगा.

3. साठा सूचक अंक म्हणजे काय ?

4. सूचक अंकाच्या रचनेत भार म्हणजे काय ? भाराचे प्रकार सांगा.

5. फिशरच्या सूचक अंकाला आदर्श सूचक अंक का म्हणतात ?

6. स्पष्ट भार आणि गर्भित भार यातील मुख्य फरक सांगा.

7. एका समयगाळ्यात जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक 280 हून वाढून 340 झाला आणि वेतन ₹ 13,500 हून वाढून ₹ 14,750 झाले असेल तर कामगाराला खरोखर किती फायदा किंवा नुकसान झाले ते शोधा.

8. वर्ष 2010 ते 2013 पर्यंत जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक आणि सरासरी वेतन खालीलप्रमाणे दिलेला आहे. त्यावरून प्रत्येक वर्षासाठी वास्तविक वेतन शोधा.

वर्ष	2010	2011	2012	2013
सरासरी मासिक वेतन (₹)	35,000	40,000	42,000	50,000
जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक	120	150	130	160

9. वर्ष 2014 आणि वर्ष 2015 च्या साठ्याच्या भावाचा सूचक अंक अनुक्रमे 177.6 आणि 181.2 मिळाला आहे. ह्या दोन्ही वर्षाच्या सूचक अंकाचा उपयोग करून फुगवटा दर शोधा.

10. तिन वस्तूंच्या भाव सापेक्ष अंकात झालेली टक्केवारी वाढ अनुक्रमे 315, 328 आणि 390 आहे. जर ह्या वस्तूचे महत्त्व 5 : 7 : 8 असेल, तर सामान्य सूचक अंक शोधा.

11. जर वर्ष 2014 साठी एका कुटुंबाची खर्चपात्र सरासरी आवक ₹ 25,000 असेल आणि जर त्या वर्गाचा वर्ष 2014 च्या आधारे 2016 च्या जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक 120 असेल, तर वर्ष 2016 साठी ह्या वर्गातील कुटुंबाची खर्चपात्र सरासरी उत्पन्नाचे अनुमान करा.

12. एका कामगाराचे वर्ष 2015 मध्ये मासिक सरासरी उत्पन्न ₹ 16,000 होते आणि वर्ष 2016 मध्ये वाढून ₹ 20,000 झाले, वर्ष 2015 च्या तुलनेत वर्ष 2016 साठी उत्पन्नाचा सूचक अंक शोधा.

13. जर एका वस्तूचे उत्पादन वर्ष 2016 च्या आधार वर्षाच्या तुलनेत $\frac{9}{5}$ पट वाढले, तर वर्ष 2016 साठी उत्पादनाचा सूचक अंक शोधा.

14. जर $I_L = 221.5$ आणि $I_F = 222$ असेल, तर I_P शोधा.

विभाग D

खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या :

1. अचल आधारे सूचक अंक शोधण्याचा पद्धतीचे गुण आणि मर्यादा सांगा.

2. परंपरित आधारे सूचक अंक शोधण्याच्या पद्धतीचे गुण आणि मर्यादा सांगा.

3. अचल आधार आणि परंपरित आधाराच्या पद्धतीमधील फरक सांगा.

4. जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंकाचा अर्थ घेऊन त्याची रचना करताना लक्षात घेण्याचे मुद्दे सांगा.

5. जीवननिर्वाह खर्चाच्या सूचक अंकाचा उपयोग सांगा.

6. जीवननिर्वाह खर्चाच्या सूचक अंकाच्या मर्यादा सांगा.

7. ईंधनाच्या पाच वस्तूपैकी तिन वस्तूंच्या भावात आधार वर्ष 2014 च्या तुलनेत वर्ष 2015 मध्ये अनुक्रमे 50 %, 90 %, 110 % ची वाढ झालेली आहे. इतर दोन वस्तूंच्या भावात अनुक्रमे 5 % आणि 2 % घट झाली आहे. जर पाच वस्तूंच्या सापेक्ष महत्त्व 5 : 4 : 3 : 2 : 1 प्रमाणात असेल, तर वर्ष 2015 चा ईंधनाच्या भावाचा सूचक अंक शोधा.

8. एका कंपनीत काम करणाऱ्या कर्मचाऱ्यांची वर्ष 2008 ते वर्ष 2014 पर्यंत वार्षिक उत्पन्ना विषयीची खालील माहितीवरून अचल आधार पद्धतीने सूचक अंक शोधा.
(आधार वर्ष 2008 घ्या.)

वर्ष	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
सरासरी वार्षिक उत्पन्न (₹ 10,000)	36	40	48	52	60	80	95

9. एका कंपनीच्या शेअरचा जानेवारी 2014 च्या आधारे वेग-वेगळ्या महिन्याचे सरासरी बंद भावाविषयी सूचक अंक खालीलप्रमाणे आहे, त्यावरून परंपरित आधारे सूचक अंक मोजा.

महिना	जानेवारी '14	फेब्रूवारी '14	मार्च '14	एप्रिल '14	मे '14	जून '14
अचल आधार सूचक अंक	100	104	105	108	109	127

10. खालील दिलेल्या परंपरित आधारे मिळविलेला सूचक अंकावरून अचल आधाराचा सूचक अंक मिळवा.

वर्ष	2011	2012	2013	2014
सूचक अंक	120	90	140	125

11. एका वस्तूंच्या भावाविषयी खालील माहितीवरून परंपरित आधार पद्धतीने सूचक अंक मिळवा.

वर्ष	2009	2010	2011	2012	2013	2014
भाव ₹	40	45	48	55	60	70

12. औद्योगिक कामगाराच्या जीवननिर्वाहाच्या वस्तूंच्या समूहाचा सूचक अंक आणि भार विषयीची वर्ष 2015 च्या एप्रिल माहिन्याची दिलेल्या माहितीवरून जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक मिळवा.

समूह	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
सूचक अंक	247	167	259	196	212	253
भार	44	20	16	6	10	4

13. जर $\Sigma p_1q_0 : \Sigma p_0q_0 = 5:3$ आणि $\Sigma p_1q_1 : \Sigma p_0q_1 = 3:2$ असेल, तर लास्पेयर, पाशे आणि फिशरचा सूचक अंक मोजा.

14. जर लास्पेयर आणि पाशेच्या सूचक अंकाचे गुणोत्तर 4 : 5 असेल आणि फिशरचा सूचक अंक 150 असेल तर पाशेचा सूचक अंक मोजा.

विभाग E

खालील उदाहरणे सोडवा :

1. वर्ष 2010 ला आधार वर्ष घेऊन वर्ष 2012 च्या वेगवेगळ्या वस्तूंच्या भावाची खालील माहितीचा उपयोग करून सामान्य सूचक अंक शोधा.

वस्तू	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
एकक	क्विंटल	किलोग्राम	डझन	मीटर	लीटर
वर्ष 2010 चा भाव (₹)	110	50	40	80	20
वर्ष 2012 चा भाव (₹)	120	70	60	90	20

2. खालील माहितीवरून एकूण खर्चाच्या पद्धतीने वर्ष 2010 च्या आधारे वर्ष 2015 साठी सूचक अंक मिळवा.

वस्तू	*A*	*B*	*C*	*D*
वर्ष 2010 चा भाव (₹)	10	30	40	20
वर्ष 2015 चा भाव (₹)	14	42	80	26
वर्ष 2010 चा साठा	8	4	4	16

3. खालील दिलेल्या माहितीवरून वर्ष 2013 ला आधार वर्ष घेऊन वर्ष 2014 साठी एकूण खर्चाच्या पद्धतीने सूचक अंक मोजा.

वस्तू	**वर्ष 2014**		**वर्ष 2013**
	वापर (साठा)	**भाव (₹)**	**भाव (₹)**
गहू	15 किग्रा	24	20
तांदूळ	10 किग्रा	45	40
बाजरी	5 किग्रा	20	16
तूरडाळ	3 किग्रा	90	80

4. खालील माहितीवरून (i) 2008 च्या वर्षाला आधार वर्ष म्हणून घेऊन अचल आधारे सूचक अंक (ii) वर्ष 2008 आणि 2009 च्या सरासरी भावाला आधार भाव घेऊन सूचक अंक शोधा.

वर्ष	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
भाव (₹)	32	38	40	42	45	60	65

5. एका शहरातील औद्योगिक उत्पादनच्या वेगवेगळ्या समूहाचा सूचक अंक तसेच समूहाचा भार खालीलप्रमाणे दिलेला आहे. त्यावरून औद्योगिक उत्पादनाचा सूचक अंक मिळवा.

समूह	**सूचक अंक**	**भार**
लोखंड	390.2	30
टेक्सटाईल	247.6	31
केमिकल उद्योग	510.2	18
इंजिनिअरींग माल सामान	403.3	17
सिमेंट	624.4	4

6. वर्ष 2010 च्या सापेक्षात वर्ष 2015 चा गव्हाचा भाव 70 % वाढतो आणि तांदूळाचा भाव 40 % ने वाढतो. बाजरीचा भाव 25 % ने घटतो तेलाचा भाव 40 % वाढतो आणि तुपाचा भाव 5 % कमी होतो. जर तुपापेक्षा तेलाचे महत्त्व तिनपट असेल आणि तांदूळाचे महत्त्व दुप्पट असेल आणि गहू तसेच बाजरी प्रत्येकाचे महत्त्व तांदूळापेक्षा दुप्पट असेल, तर खाद्य पदार्थाच्या पाचही वस्तूचा समूह भावाचा सूचक अंक शोधा आणि त्याचे अर्थघटन करा.

7. कामगार वर्गाच्या मासिक वेतनाची माहितीवरून त्याच्या वास्तविक वेतनाची मोजणी करा. वर्ष 2008 ला आधार वर्ष मानून वर्ष 2015 ची पैश्यांची खरेदीशक्ति शोधा.

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014	2015
सरासरी मासिक वेतन (₹)	15,000	18,000	19,000	20,000	22,000	25,000
जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक (आधार वर्ष 2008)	120	180	205	220	235	260

विभाग F

खालील उदाहरणे सोडवा :

1. खालील माहितीच्या आधारे वर्ष 2014 ला आधार वर्ष म्हणून घेऊन वर्ष 2015 साठी लास्पेयर आणि पाशेचा सूचक अंक मिळवा. त्याशिवाय फिशरचा सूचक अंक मिळवून त्याचे अर्थघटन करा.

वस्तू	आधार वर्ष 2014		चालु वर्ष 2015	
	प्रति एकम भाव (₹)	एकूण खर्च (₹)	प्रति एकक भाव (₹)	एकूण खर्च (₹)
गहू	16	224	18	270
तांदूळ	35	140	40	200
तूरडाळ	100	200	120	360
तेल	108	432	120	600

2. चार वेग-वेगळ्या वस्तूचा वापरण्याचा साठा आणि एकूण खर्च खालीलप्रमाणे दिलेला आहे. वर्ष 2013 च्या तुलनेत वर्ष 2015 साठी पाशे आणि फिशरचा सूचक अंक मोजा.

वस्तू	आधार वर्ष 2013		चालु वर्ष 2015	
	एकूण खर्च (₹)	वापर (साठा)	एकूण खर्च (₹)	वापर (साठा)
A	360	60 किग्रा	375	25 किग्रा
B	160	10 लीटर	416	20 लीटर
C	480	15 किग्रा	613.2	6 किग्रा
D	336	3 किग्रा	400	2.5 किग्रा

3. सहा वेगवेगळ्या वस्तूच्या विषयी खालील दिलेल्या माहितीवरून वर्ष 2015 साठी फिशरचा सूचक अंक मोजा.

वस्तू	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
एकक	20 किग्रा	क्विंटल	किग्रा	लीटर	मीटर	डझन
वर्ष 2013 साठा	5 किग्रा	10 किग्रा	1200 ग्राम	30 लीटर	12 मीटर	20 नग
वर्ष 2013 भाव (₹)	600	1600	60	52	8	30
वर्ष 2015 साठा	12 किग्रा	12 किग्रा	2000 ग्राम	36 लीटर	20 मीटर	16 नग
वर्ष 2015 भाव (₹)	880	2400	75	32	12	36

4. खालील दिलेल्या माहितीवरून वर्ष 2015 साठी लास्पेयर, पाशे आणि फिशरचा सूचक अंक मोजा.

वस्तू	साठा		भाव (₹)	
	वर्ष 2014	वर्ष 2015	वर्ष 2014	वर्ष 2015
A	25 किग्रा	32 किग्रा	42	45
B	15 लीटर	20 लीटर	28	30
C	10 नग	20 नग	30	36
D	8 मीटर	15 मीटर	20	25
E	30 लीटर	36 लीटर	60	65

5. खालील दिलेल्या माहितीवरून एकूण खर्चाच्या पद्धतीने आणि कौटुंबिक अंदाजपत्रक पद्धतीने वर्ष 2015 चा सूचक अंक मोजा आणि दोन्ही सूचक अंक समान आहेत की काय ते सांगा.

वस्तू	एकक	वर्ष 2013	वर्ष 2013	वर्ष 2015
		वापर (साठा)	भाव (₹)	भाव (₹)
गहू	क्विंटल	100 किग्रा	1800	2400
तांदूळ	20 किग्रा	40 किग्रा	700	800
साखर	किग्रा	40 किग्रा	30	36
तेल	किग्रा	60 किग्रा	108	120
डाळ	20 किग्रा	40 किग्रा	2000	2400
तूप	किग्रा	36 किग्रा	400	480

6. अमदाबाद शहराच्या वर्ष 2014 आणि वर्ष 2015 च्या औद्योगिक कामगारांचा आणि जीवननिर्वाहच्या वस्तूंच्या समूहाचा सूचक अंक आणि भार याविषयी माहिती खालीलप्रमाणे दिलेली आहे. त्यावरून औद्योगिक कामगारांचा जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक शोधा आणि ज्या कामगारांच्या वेतनात वर्ष 2014 च्या तुलनेत वर्ष 2015 मध्ये 5 % वाढ करण्यात आली तर काय वर्ष 2015 च्या भाववाढी समोर रक्षण मिळण्यास पूरेसा आहे ?

समूह	अन्न	ईंधन आणि विज	निवास	कापड	किरकोळ खर्च
भार	31	14	22	10	23
वर्ष 2014 चा सूचक अंक	270	168	205	174	303
वर्ष 2015 चा सूचक अंक	281	178	210	177	337

7. एका शहराच्या वर्ष 2014 च्या औद्योगिक कामगारांच्या जीवननिर्वाहाच्या वस्तूंचा सूचक अंक आणि भार याविषयी माहिती खाली दिलेली आहे. त्यावरून औद्योगिक कामगारांचा जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक शोधा. ह्या कामगारांना वर्ष 2012 मध्ये मिळालेला सरासरी मासिक पगार ₹ 6,000 असेल तर वर्तमान जीवनधोरण टिकविण्यासाठी चालु वर्षी 2014 चा सरासरी मासिक पगार किती असला पाहिजे ?

समूह	अन्न	ईंधन आणि विज	निवास	कापड	किरकोळ खर्च
वर्ष 2014 चा भावांक (आधार वर्ष 2012)	255	174	234	153	274
भार	42	8	12	18	20

8. खालील दिलेल्या वर्ष 2015 च्या औद्योगिक उत्पादन साठा आणि भार याविषयीच्या माहितीवरून औद्योगिक उत्पादनाचा सूचक अंक मोजा आणि त्याचे अर्थघटन करा.

उद्योग	एकक	वर्ष 2013 उत्पादन	वर्ष 2015 उत्पादन	भार
खाण	लाख टन	10	15	4
टेक्स्टाईल	करोड मीटर	20	25	6
इंजिनिअरींग	लाख टन	30	25	30
केमिकल्स	शंभर टन	40	50	3
खाद्य पदार्थ	लाख टन	50	60	4

9. चार वेग-वेगळ्या वस्तूंचे वर्ष 2014 आणि वर्ष 2015 मध्ये प्रति एकम भाव आणि भारा विषयी माहिती खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून वर्ष 2015 चा सूचक अंक मोजा.

वस्तू	भार	वर्ष 2014	वर्ष 2015
		प्रति एकम भाव (₹)	प्रति एकम भाव (₹)
A	40	32	40
B	25	80	100
C	20	24	30
D	15	4	6

10. वर्ष 2015 मध्ये जीवननिर्वाह खर्चाच्या वेग-वेगळ्या समूहापैकी अन्न आणि कापडाचा सूचक अंक अनुक्रमे 150 आणि 224.7 आहे ईंधनाच्या भावात 220 % वाढ झाली आहे. भाड्याचा खर्च ₹ 4000 वरून वाढून ₹ 6000 आणि किरकोळ खर्च 1.75 पट वाढला आहे आणि प्रथम चार समूहासाठी करण्यात येणारा खर्च अनुक्रमे 40 %, 18 %, 12 % आणि 20 % असेल तर वर्ष 2015 च्या जीवननिर्वाह खर्चाचा सामान्य सूचक अंक मोजा आणि त्याचे अर्थघटन करा.

Irving Fisher
(1867 – 1947)

Irving Fisher was an American economist, statistician, inventor and Progressive social campaigner. He was one of the earliest American neoclassical economists. He was described as "The greatest economist the United States has ever produced.

Fisher made important contributions to utility theory and general equilibrium. He was also a pioneer in the rigorous study of intertemporal choice in markets, which led him to develop a theory of capital and interest rates. His research on the quantity theory of money inaugurated the school of macroeconomic thought known as "Monetarism". Fisher was also a pioneer of econometrics, including the development of index numbers. Some concepts named after him include the Fisher equation, the Fisher hypothesis, the international Fisher effect, the Fisher separation theorem and Fisher market.

●

"Can we say, in this case, that the cause of a cause is the relevant cause ?"

– Johnny Rich

2

सुरेख सहसंबंध
(Linear Correlation)

विषयवस्तू :

2.1 प्रस्तावना

आपण इयत्ता 11 मध्ये मध्यवर्ती स्थितीचे माप, प्रसारमान, विषमता वगैरे सारख्या प्रकरणात फक्त एका चलाच्या लक्षणांचा अभ्यास केला. आतापर्यंत आपला अभ्यास एका वितरणपूरता मर्यादीत होता. परंतु बऱ्यायेवळा अशी परिस्थिती उत्पन्न होते की. ज्यात दोन किंवा आधिक चलाचा संयुक्त अभ्यास ईच्छनीय आणि आवश्यक असतो. उदा. आपण एखाद्या कंपनीच्या एखाद्या वस्तूच्या वार्षिक विक्रीचा अभ्यास करत असतो तेव्हा बरोबर कंपनीच्या नफ्याविषयी देखील जावून घेण्याची ईच्छा दर्शवितो कारण की त्यावरून ह्या चलामधील ''उत्पादित वस्तूची विक्री'' आणि ''त्यामुळे होणारा नफा'' संबंध कसा आणि किती आहे हे समजते. एखाद्या विस्तारातील वार्षिक पर्जन्यमान आणि भाताचे उत्पन्न वस्तूचा भाव आणि त्याची मागणी, कुटुंबाचे उत्पन्न आणि खर्च. 'पिता आणि पूत्राची उची, पति पत्नीचे वय वगैरे प्रसिद्ध उदाहरणे आहेत ज्यात चलाच्या जोडीतील संबंध पहावयास मिळतो.' त्याचप्रमाणे अनेक परिस्थितीत आपण पाहू शकू की त्या दोन चलांमध्ये संबंध असतो.

आपण ह्या प्रकरणात आणि त्यानंतरच्या प्रकरणात दोन परस्पर संबंधित चलाविषयी माहिती मिळवू.

नोंद :

- एका चलाविषयी माहिती एकत्र करून मिळविलेल्या वितरणाला एकचलीय (Univariate) वितरण म्हणतात. उदा. एखाद्या विषयात विद्यार्थ्याने मिळविलेले गुण, एखाद्या कंपनीत काम करणाऱ्या व्यक्तिचे मासिक उत्पन्न, स्टेट ट्रान्सपोर्ट (ST) च्या बस ड्रायव्हरचे वय - याचे वितरण.
- एखाद्या एककाच्या दोन वेग-वेगळ्या लक्षणांची एकाचवेळी एकत्र केलेली माहिती द्विचल आहे आणि त्यावरून मिळविलेल्या वितरणाला द्विचल (Bivariate) वितरण म्हणतात. उदा. वस्तूचा भाव आणि त्याचा पुरवठा, एखाद्या समूहातील कुटुंबांचा मासिक खर्च आणि बचत, पतिचे वय आणि पत्नीचे वय याचे वितरण.
- दोनापेक्षा आधिक चलाच्या किंमतीत एकाचवेळी होणाऱ्या फरकाचा अभ्यास बहुचलीय आणि आंशिक सहसंबंधद्वारा होऊ शकतो. परंतु येथे आपण मात्र दोन चलाच्या सहसंबंधाचा अभ्यास करू या.

2.2 सुरेख सहसंबंधाचा अर्थ आणि व्याख्या

सर्वप्रथम आपण सहसंबंधाचा अर्थ समजावून घेऊ. आता आपणास माहिती आहे की, अनेकदा दोन चलाच्या किंमतीत एकाचवेळी फरक पहावयास मिळतो, हा फरक प्रामुख्याने दोन प्रकारचा असू शकतो.

जेव्हा,

(1) दोन चलातील कार्य कारण संबंध.

(2) दुसऱ्या इतर कारणांमुळे दोन्ही चलाच्या किंमतीत होणारा फरक.

एखाद्या विस्तारातील वार्षिक पर्जन्यमान आणि तांदूळाचे उत्पन्न उदाहरणात मोठ्या प्रमाणात पाऊस वाढल्यास (अमुक पर्याये पर्यंत) तर तांदूळाचे उत्पन्न वाढते आणि पाऊस कमी पडल्यास तांदूळाचे उत्पन्न घटते. येथे पाऊस हे 'कारण' आहे तर 'तांदूळाचे उत्पन्न' हे कार्य आहे. त्याप्रमाणे व्यक्तिचे उत्पन्न सारखेच असले तरी त्याचा खर्च वाढल्यास बचत कमी होते आणि खर्च कमी झाल्यास बचत वाढते. येथे खर्च हे कारण तर बचत हे कार्य आहे. वरील दोन उदाहरणात दोन्ही चलात होणारा फरक कार्य-कारण संबंध दर्शवितो. काहीवेळा दोन्ही चले परस्परांवर आधारित असतात म्हणजे एका चलनाला 'कार्य' आणि दुसऱ्याला 'कारण' असे निश्चितपणे सांगू शकत नाही. सामान्यपणे आर्थिक चल (Economic Variables) च्या बाबतीत असे घडू शकते. उदा. मागणी आणि पुरवठावर मागणी वाढली तर पुरवठा वाढविण्याची आवश्यकता भासते. (हे नेहेची शक्य होत नाही) आणि जेव्हा पुरवठा वाढतो तेव्हा भाव कमी व्हावयास लागतात आणि त्यामुळे मागणी वाढते. अशाप्रकारे मागणी आणि पुरवठा परस्परांवर आधारित आहे. त्याचप्रमाणे पति आणि पत्नीचे वय अशा परिस्थितीचे उदाहरण आहे.

रेनकोटची विक्री आणि पावसाळी पादत्राणे विक्री उदाहरणांत दोन्ही चलाच्या किंमती पावसाळ्यात वाढतात. येथे दोन्ही चलामध्ये प्रत्यक्ष कार्य-कारण संबंध नाही परंतु रेनकोटची विक्री आणि पावसाठी पादत्राणे यांची विक्रीत होणारा फरक तिसरा चल पावसाळ्यावर अवलंबून आहे. हे अप्रत्यक्ष कार्य-कारण संबंधाचे उदाहरण आहे.

दोन चलामधील संबंध उदाहरणे पाहिल्यानंतर आपणास सहसंबंधाची व्याख्या खालीलप्रमाणे देता येईल. जर दोन चलाच्या किंमतीत प्रत्यक्ष किंवा अप्रत्यक्ष कार्य–कारणामुळे एकाचवेळी फेरबदल होत असेल, तर दोन चलातील संबंधाला सहसंबंध म्हणतात. जेव्हा दोन सहसंबंधित चलाच्या जोडीच्या किंमतीला आलेखपत्रावर दाखविले आणि आलेखातील बिंदू एकाच सरळ रेषेवर असतील किंवा रेषेच्या जवळ असतील अशा सह संबंधाला सुरेख सहसंबंध म्हणतात. दुसऱ्या शब्दात सांगीतले तर दोन सहसंबंधित चलाच्या किंमतीत होणारा फरक अचल प्रमाणात असेल, तर दोन चलात सुरेख सहसंबंध आहे असे म्हणतात.

सामान्यपणे गणित आणि भौतिकशास्त्रात दोन चलामध्ये संपूर्ण सुरेख संबंध आढळतो. म्हणजे एका चलातील फेरबदलाने दुसऱ्या चलाच्या किंमतीत अचल प्रमाणात फेरबदल होतो.

उदा., (1) वर्तुळाची त्रिज्या आणि परिघ

आपणास माहित आहे की एखाद्या वर्तुळाची त्रिज्या r एकक असेल, तर त्याचा परिघ $2\pi r$ होतो. अशाप्रकारे त्रिज्येच्या मापाला 2π (अचल)ने गुणण्याने वर्तुळाच्या परिघाचे माप मिळते. येथे सांगता येईल की त्रिज्येमधील फरकाने वर्तुळाच्या परिघाच्या मापात अचल प्रमाणात फरक होतो. जे खालील कोष्टकावरून स्वयं स्पष्ट आहे.

त्रिज्या (r)	2	3	5	10
परिघ $(2\pi r)$	4π	6π	10π	20π

(2) अचल गतिने एखाद्या पदार्थाने कापलेल्या अंतराला लागणारा वेळ आणि पदार्थाने कापलेले अंतर.

जर एखाद्या पदार्थ एका तासाला 50 किमि वेगाने गती करत असेल तर त्याला लागणारा वेळ निश्चित अचल प्रमाणातच अंतर आपेल. जे खालील कोष्टकावरून सहज समजू शकते.

पदार्थाला अंतर कापण्यासाठी लागणारा वेळ (तास)	2	3	6	10
पदार्थाने कापलेले अंतर (किमि)	100	150	300	500

परंतु सामान्यपणे वाणिज्य, अर्थशास्त्र आणि सामाजिक विज्ञानात दोन चलाच्या किंमतीत होणारा फरक अचल प्रमाणात नसतो. उदा. सतत दोन वर्ष आधीच्या वर्षापेक्षा चालू वर्षी पाऊसात 10 % वाढ झाली तर हे काही आवश्यक नाही की पिकाचे उत्पादन दोन्ही वर्षी सारख्या प्रमाणात वाढले. असे होण्याचे कारण दोन्ही चले पाऊस आणि पिक दुसऱ्या अनेक घटकाच्या परिणामामुळे बदलतात आणि त्यां दोन्ही चलात होणारा फेरबदल अपघात (Chance) तत्व असते. त्यामुळे दोन सहसंबंधित चलाच्या जोडीला अनुरूप बिंदू एकच रेषा नसून सुरेख्याच्या आसपास असू शकते.

ह्या प्रकरणात आपण सुरेख सहसंबंधाचा अभ्यास करू. या पुढे आपण सुरेख सहसंबंधाला आपण सहसंबंधच म्हणू.

सहसंबंधाचे मुख्यत्वे दोन प्रकार आहेत : (1) धन सहसंबंध (2) ऋण सहसंबंध.

(1) धन सहसंबंध : जेव्हा दोन्ही सहसंबंधित चलाच्या किंमतीत होणारा फरक एकाच दिशेत होत असेल तेव्हा दोन चलात धन सहसंबंध आहे असे म्हणतात.

वस्तूचा भाव व पुरवठा, व्यक्तिचे उत्पन्न आणि खर्च, पतिचे वय आणि पत्नीचे वय, एखाद्या रस्त्यावरील वाहनांची संख्या आणि अपघातांची संख्या, एखाद्या वस्तूची विक्री आणि नफा, एखाद्या विस्तारातील पाऊस आणि पिकाचे उत्पन्न ही धन सहसंबंधाची उदाहरणे आहेत.

(2) ऋण सहसंबंध : जेव्हा दोन सहसंबंधित चलाच्या किंमतीतील होणारा फरक एकमेकाच्या विरुद्ध दिशेत असेल तर त्या दोघांमध्ये ऋण सहसंबंध आहे असे म्हणतात.

वस्तूचा भाव आणि मागणी, व्यक्तिचा खर्च आणि बचत, हिवाळ्यातील लघुतम तापमान आणि गरम कपड्यांची विक्री, समुद्रसपाटीपासून एखाद्या स्थळाची उंची आणि त्या स्थळाच्या हवेतील ऑक्सिजनचे प्रमाण ही ऋण सहसंबंधाची काही उदाहरणे आहेत.

2.3 सहसंबंध आणि सहसंबंधांक

आपण याआधी सहसंबंधाचा अर्थ आणि व्याख्येची चर्चा केली. आता आपण त्याचे एक माप सहसंबंधांक याविषयी पाहू या.

दोन चलातील सुरेख सहसंबंधाच्या घनिष्ठतेतचा (Strength) मापाला सहसंबंधांक म्हणतात. त्याला संकेतात r ने दर्शवितात. सहसंबंधांक हे दोन सहसंबंधित चलामधील सुरेख संबंधांची घनिष्ठता किंवा मात्रा (degree) दर्शविणारे संख्यात्मक माप आहे. हे माप सर्वप्रथम कार्ल पियर्सने सूचविले.

सहसंबंधाच्या अभ्यासाच्या पद्धती

दोन चलामधील असलेल्या सहसंबंधाचे स्वरूप आणि त्या संबंधाची घनिष्ठता जाणण्यासाठी मुख्यत्वे खालील पद्धतीचा उपयोग होतो :

(1) विकिर्ण आकृती पद्धती (Scatter Diagram Method)

(2) कार्ल पियर्सनची गुणप्रधान पद्धती (Karl Pearson's Product moment Method)

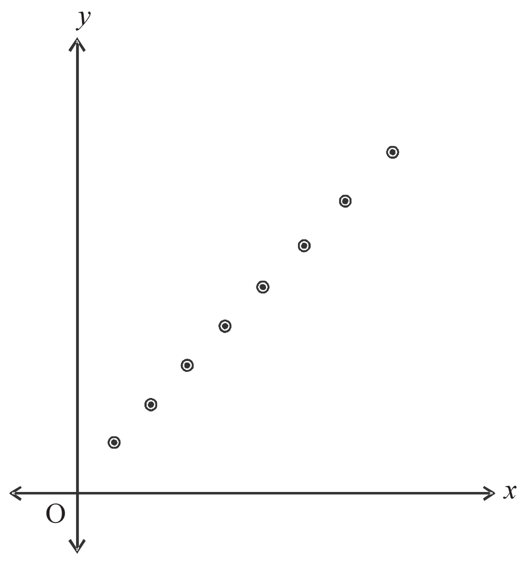
(3) स्पिअरमेनची क्रमांक सहसंबंधांची पद्धती (Spearman's Rank Correlation Method)

2.4 विकिर्ण आकृती पद्धती

दोन संबंधित चलामधील सहसंबंधाच्या स्वरूपाला आकृतीद्वारा व्यक्त करण्याची ही एक सोपी पद्धती आहे. दोन चलातील सहसंबंधाचे स्वरूप ह्याच एका पद्धतीचा व्यापक उपयोग होतो. त्याशिवाय पद्धतीद्वारा मोठ्या प्रमाणात दोन चलातील सहसंबंधाच्या घनिष्ठतेचा अंदाज येतो.

समजा, चल X आणि Y च्या n किंमतींच्यी क्रमिक जोड्या $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n)$ आहेत. चलाच्या किंमतीना X–अक्षावर आणि चल Y च्या किंमतीना Y-अक्षावर योग्य मापप्रमाण घेऊन आलेखात निरूपण करण्यात येते. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ...,(x_n, y_n)$ ला अनुरूप बिंदूना आलेखात दर्शविल्याने मिळणाऱ्या आकृतीला विकिर्ण आकृती म्हणतात.

विकिर्ण आकृतीत दर्शविलेल्या बिंदूची ढब (pattern) वरून सहसंबंधाचे प्रकार (किंवा स्वरूप) समजते आणि थोड्या कमी जास्त प्रमाणात सहसंबंधाच्या घनिष्ठतेची कल्पना देखील येते. आता विकिर्ण आकृतीद्वारा दोन चलातील सहसंबंधाच्या स्वरूप आणि घनिष्ठता कशाप्रकारे मिळवितात ते आपण पाहू या.



जर विकिर्ण आकृतीत सर्वच बिंदू एकाच सरळ रेषेवर असतील आणि ती सुरेख डाव्याबाजूकडून उजव्याबाजूकडे वरच्या दिशेत जात असेल तर त्या दोन चल X आणि Y मध्ये संपूर्णपणे धन सहसंबंध आहे असे दर्शविते.

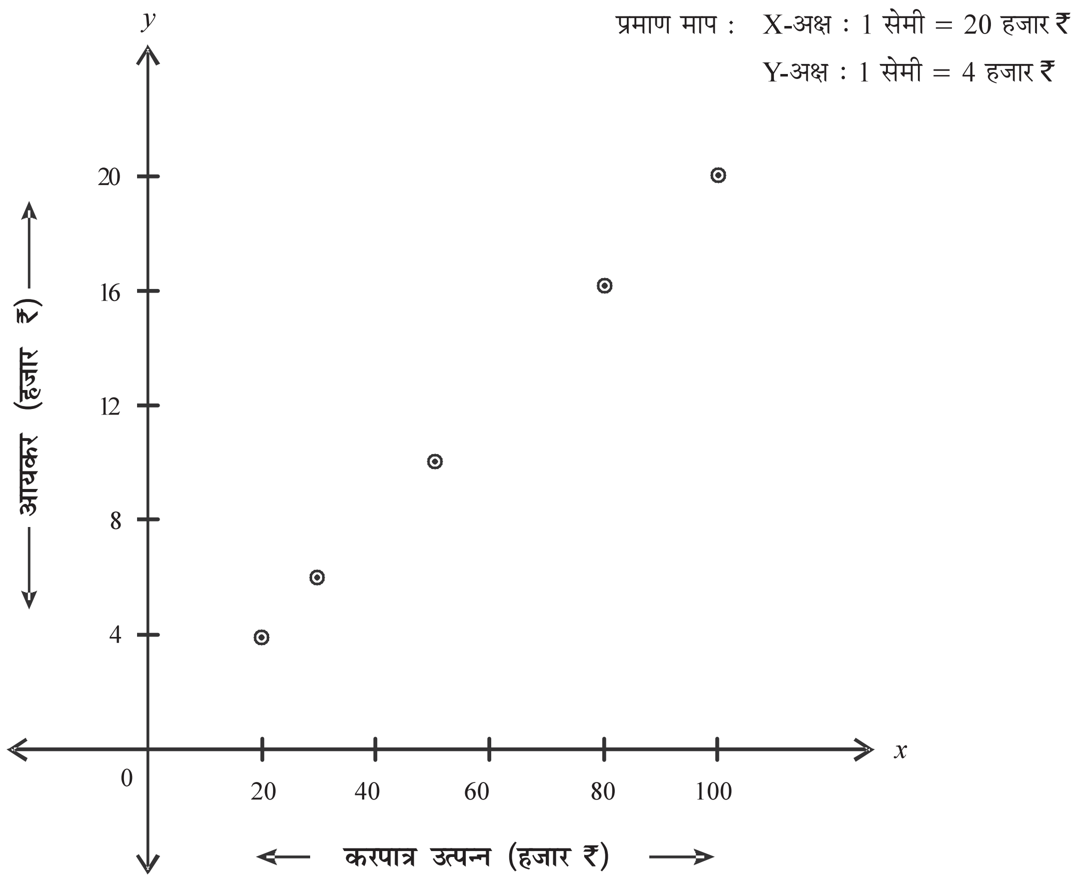
जर दोन्ही चलाच्या किंमतीत होणारा फरक एकाच दिशेत आणि अचल प्रमाणात होत असेल तर आपणास ह्या प्रकारची विकिर्ण आकृती मिळते ही गोष्ट समजण्यासाठी आपण एक उदाहरण घेऊ या.

उदाहरण 1 : एकूण उत्पन्नातून ₹ 3,00,000 मूळ कपात (Standard deduction) केल्यानंतर उरलेल्या रकमेवर 20% दराने आयकर उत्पन्न कर (income tax) लागतो. खाली पांच व्यक्तिचे वार्षिक करपात्र (taxable) उत्पन्न आणि त्यावर लागणारा उत्पन्न कर याविषयीची माहिती दिलेली आहे.

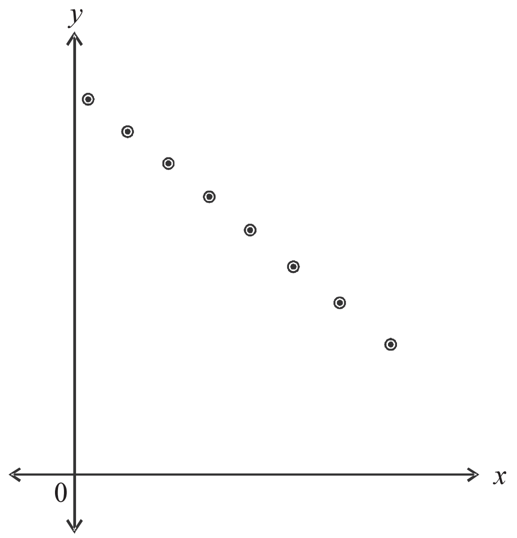
व्यक्ति	1	2	3	4	5
करपात्र उत्पन्न (हजार ₹) x	50	30	80	20	100
उत्पन्न कर (हजार ₹) y	10	6	16	4	20

ह्या माहितीवरून विकिर्ण आकृती काढा आणि सहसंबंधाविषयी चर्चा करा.

x आणि y च्या क्रमिक जोड्या $(50, 10)$, $(30, 6)$, $(80, 16)$, $(20, 4)$ आणि $(100, 20)$ च्या अनुरूप बिंदूना आलेख पत्रावर दर्शविल्यास आपण खालीलप्रमाणे विकिर्ण आकृती मिळते.



आपण पाहिले की, विकिर्ण आकृतीत सर्वच बिंदू एकाच सुरेखेवर आहेत आपणास हे पण लक्ष्यात येते की, जस-जशी चल X ची किंमत बदलते तसे-तसे चल Y ची किंमत देखील त्याच दिशेत आणि अचल प्रमाणात बदलत आहे. (पहा की जेव्हा X च्या किंमतीला 0.2 (20 %) ने गुणले तर त्याची क्रमिक जोडीतील त्याला अनुरूप Y ची किंमत मिळते. त्यामुळे येथे दोन्ही चल X आणि Y मध्ये समप्रमाणात फरक होतो.) त्यामुळे चल X आणि Y मध्ये संपूर्ण धन सहसंबंध आहे असे सांगता येईल.



जर विकिर्ण आकृतीत सर्वच बिंदू एकाच सुरेखेवर असतील आणि ती सुरेखा डाव्याबाजूकडून उजव्याबाजूस खालील दिशेत जात असेल तर दोन चल X आणि Y मध्ये संपूर्ण ऋण सहसंबंध आहे असे दर्शविले जाते.

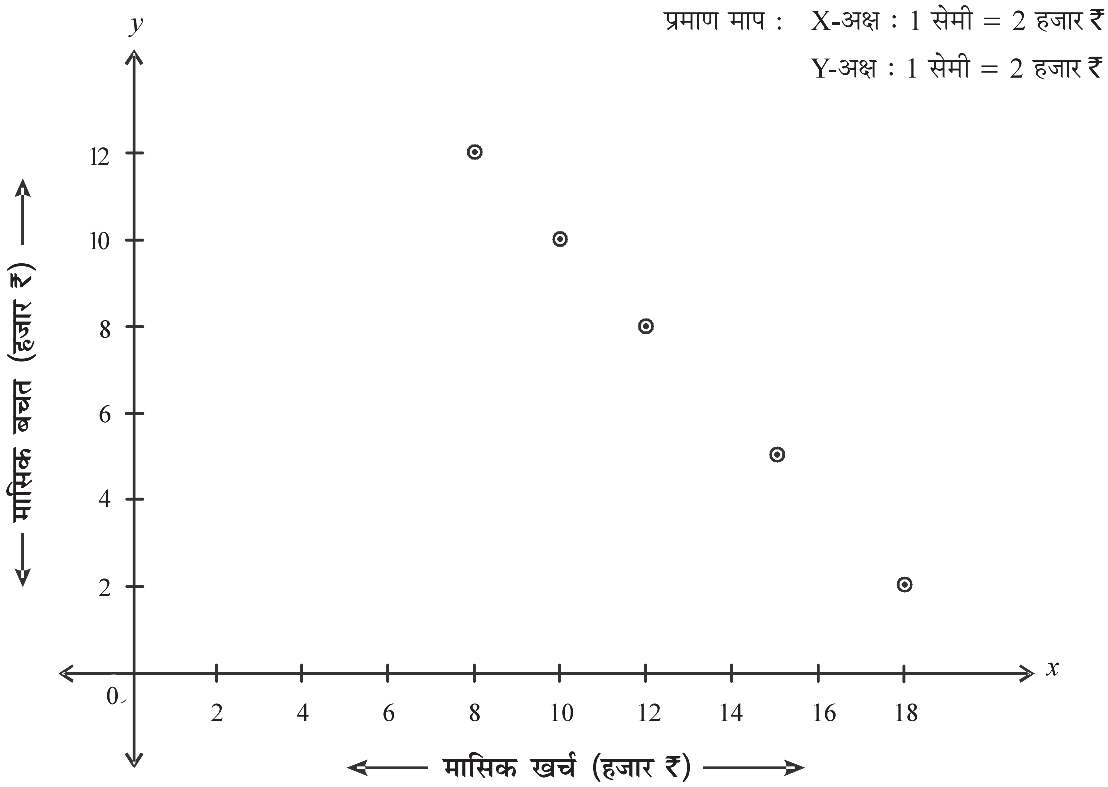
जेव्हा दोन्ही चलाच्या किंमतीतील फरक एकमेकाच्या विरूद्ध दिशेत आणि अचल प्रमाणात होत असेल तेव्हा आपणास ह्या प्रकारची विकिर्ण आकृती मिळते. ही गोष्ट समजण्यासाठी आपण एक उदाहरण घेऊ या.

उदाहरण 2 : मध्यम वर्गातील कुटुंबाचा मासिक खर्च आणि मासिक बचत यामधील संबंध समजण्यासाठी 5 कुटुंबाचा खर्च आणि बचतीविषयी तपशील खालीलप्रमाणे आहे.

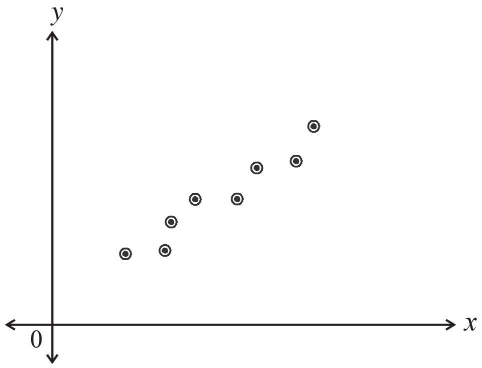
मासिक खर्च (हजार ₹) x	15	18	8	10	12
मासिक बचत (हजार ₹) y	5	2	12	10	8

ह्या माहितीवरून खर्च आणि बचतमधील संबंध दर्शविणारी विकिर्ण आकृती काढा आणि त्या सहसंबंधांविषयी चर्चा करा.

x आणि y च्या क्रमिक जोड्या $(15, 5)$, $(18, 2)$, $(8, 12)$, $(10, 10)$ आणि $(12, 8)$ ला अनुरूप बिंदूना आलेखपत्रावर दर्शविल्यास आपणास खालील प्रकारची विकिर्ण आकृती मिळते.



आपण पाहिले की विकिर्ण आकृतीत सर्वच बिंदू एकाच सुरेखेवर आहेत. आपण हे देखील पाहू शकतो की जस-जशी चल Xची किंमत बदलते त्याप्रमाणे Yची किंमत त्याच्या विरूद्ध दिशेत निश्चित प्रमाणात बदलते (तपासा की मासिक उत्पन्न स्थिर असल्याने मासिक खर्चात वाढ (किंवा घट) मुळे मासिक बचतीत अचल प्रमाणात घट (किंवा वाढ) पहावयास मिळते त्यामुळे म्हणता येईल की, दोन चल X आणि Y मध्ये संपूर्ण ऋण सहसंबंध आहे.



जर विकिर्ण आकृतीत सर्वच बिंदू एकाच सुरेखेवर नसतील परंतु त्या सुरेखेच्या आसपास असतील आणि ती सुरेखा डाव्याबाजूकडून उजव्याबाजूकडे वरील दिशेत जात. असेल, तर दोन चल X आणि Y मध्ये आंशिक धन सहसंबंध आहे असे दर्शविते.

जेव्हा दोन चलतील किंमतीत होणारा फरक एकाच दिशेत असेल पण हा फरक अचल प्रमाणात नसेल तेव्हा याप्रकारची आकृती मिळते. हे आपण एका उदाहरणाद्वारा समजावरून घेऊ.

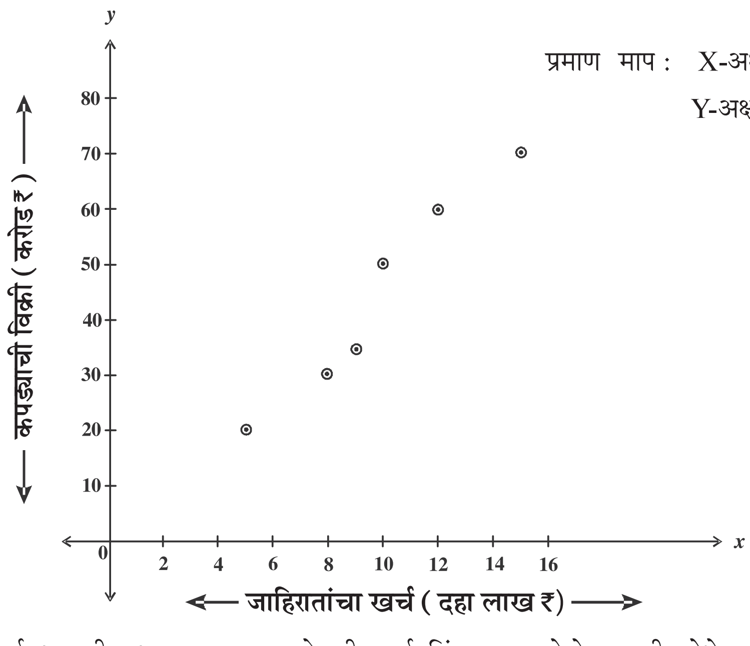
नोंद : समष्टीच्या चलामधील संबंध समजण्यासाठी सामान्यपणे त्यातील प्रमाणसर आकारमानाचा निदर्श घेऊन सहसंबंधांक मिळविण्यात येतो. परंतु आपणास मोजणीचा सरळतेसाठी निदर्शाचा आकार मर्यादित आणि लहान ठेवू.

उदाहरण 3 : एका तयार कपडे करण्याच्या कंपनीने केलेल्या शेवटच्या सहा माहिन्यातील जाहिरात खर्च (दहा लाख ₹ त) आणि कपड्यांची विक्री (करोड ₹ त) खालीलप्रमाणे आहे.

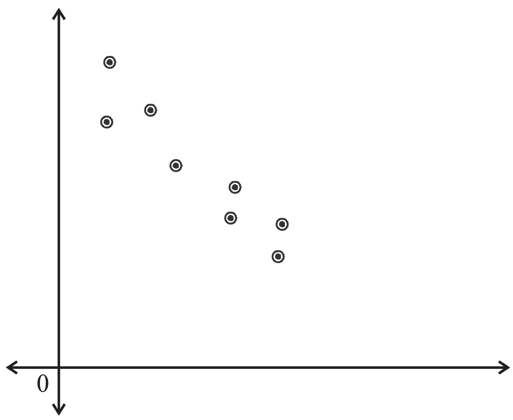
जाहिरात खर्च (दहा लाख ₹) x	5	8	10	15	12	9
कपड्याची बिक्री (करोड ₹) y	20	30	50	70	60	35

ह्या माहितीवरून विकिर्ण आकृती काढून त्याच्या सहसंबंधाची चर्चा करा.

चल x आणि yच्या क्रमिक जोड्या $(5, 20)$, $(8, 30)$, $(10, 50)$, $(15, 70)$, $(12, 60)$ आणि $(9, 35)$ ला अनुरूप बिंदू आलेखपत्रावर दर्शविल्यास आपणास खालीलप्रमाणे विकिर्ण आकृती मिळते.



विकिर्ण आकृतीत आपण पाहू शकतो की, सर्व बिंदू एका सुरेखेवर नाही. येथे जाहिरातीचा खर्च आणि विक्रीतील होणारा फरक एकाच वाढत जाणाऱ्या दिशेत आहे. परंतु हा फरक अचल प्रमाणात नाही. त्यामुळे सर्व बिंदू एकाच सुरेखेवर आलेले नाही. त्यामुळे आपण म्हणू शकतो की, दोन चल X आणि Y मध्ये आंशिक धन संबंध आहे.



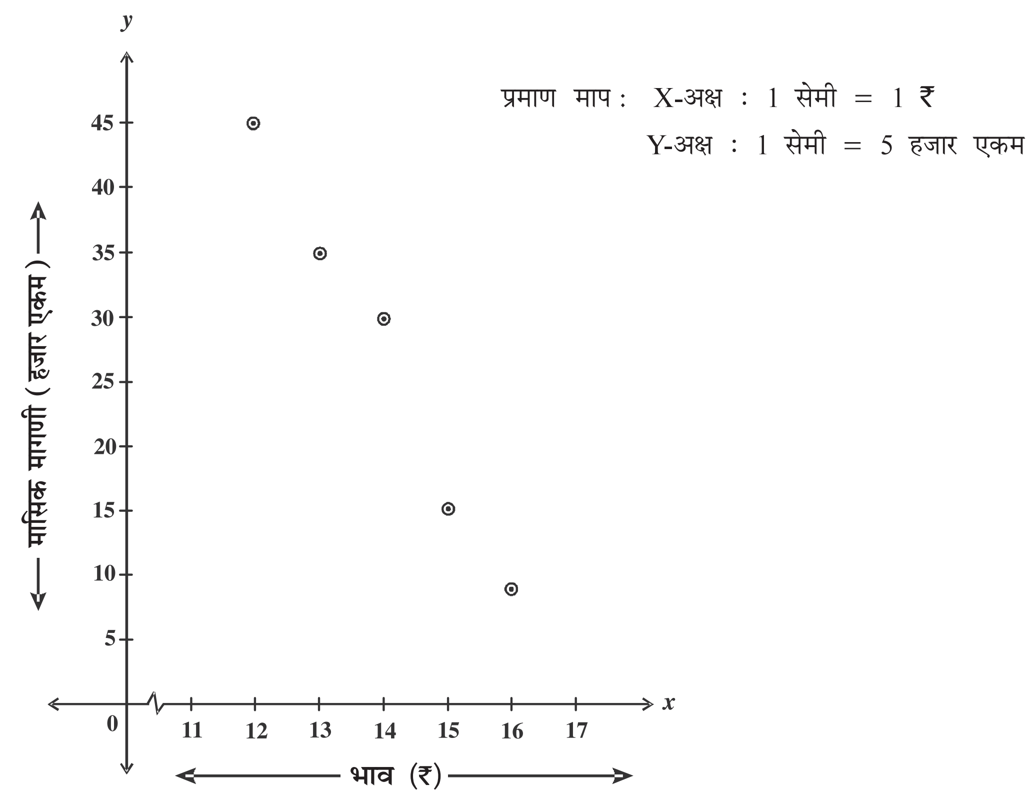
जर विकिर्ण आकृतीतील सर्व बिंदू एकाच सुरेखेवर नसतील परंतु त्या सुरेखेच्या आसपास डाव्याबाजूकडून उजव्याबाजूकडे खालील दिशेत जात असतील, तर त्या दोन चल X आणि Y मध्ये आंशिक ऋण सहसंबंध आहे असे दर्शविते.

जेव्हा दोन्ही चलाच्या किंमतीत फरक परस्परांच्या विरूद्ध दिशेत होत असेल पण फरक अचल प्रमाणात नसेल तर आपणास ह्या प्रकारची आकृती मिळते. ही गोष्ट आपण एका उदाहरण घेऊ.

उदाहरण **4 : वाहनाच्या स्पेरपार्टस तयार करणारी एक कंपनी रबराचे बुशर्सचा भाव त्याच्या मागणीवर होणारा परिणाम समजण्यासाठी शेवटच्या 5 महिन्यातील वेग-वेगळे भाव ठेवून त्याची मागणी विषयी खालीलप्रमाणे माहिती मिळविते. ह्या दिलेल्या माहितीवरून विकिर्ण आकृती काढा आणि सहसंबंधाच्या स्वरूपाची चर्चा करा.**

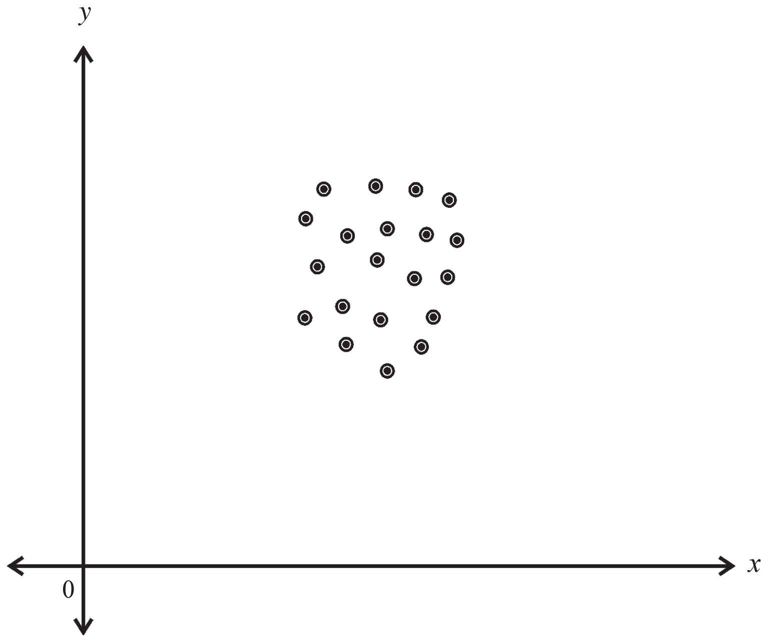
भाव (₹) x	12	13	14	15	16
मासिक मागणी (हजार एकम) y	45	35	30	15	10

x आणि y च्या क्रमिक जोड्या $(12, 45)$, $(13, 35)$, $(14, 30)$, $(15, 15)$ आणि $(16, 10)$ ला अनुरूप बिंदूना आलेखपत्रावर दर्शविल्यास आपणास खालील विकिर्ण आकृती मिळते.



विकिर्ण आकृती आपण पाहू शकतो, की सर्वच बिंदू एकाच सुरेखेवर नाही. येथे भाव आणि मागणीमध्ये होणारा फरक परस्पराच्या विरूद्ध दिशेत होतो पण हा फरक अचल प्रमाणात नाही. त्यामुळे सर्वच बिंदू एका सुरेखेवर आलेले नाही. त्यामुळे आपण सांगू शकतो की, दोन चल X आणि Y मध्ये आंशिक ऋण सहसंबंध आहे.

येथे नोंदनीय आहे की जेव्हा बिंदू एखाद्या सुरेखेच्या जवळ असतील, तर ते आधिक गाढ सहसंबंध दर्शवितात आणि जेव्हा बिंदू एखाद्या सुरेखेच्या आसपास दूर पर्यंत विस्तारलेले असतील तर कमी गाढ सहसंबंध सूचवितो.



जेव्हा विकिर्ण आकृतीत सर्वच बिंदू यादच्छिक रितीने विखुरलेले असतील आणि कोणताही निश्चित ढब (pattern) मध्ये नसेल तर त्यात सहसंबंधाचा अभाव सूचवितो. जर आपणास ह्या प्रकारची आकृती मिळाली तर सांगता येईल, की दोन चलामध्ये सुरेख संबंध आढळत नाही अर्थात त्याच्यात सुरेख सहसंबंधाचा अभाव आहे.

विकिर्ण आकृतीच्या पद्धतीचे गुण आणि मर्यादा :

गुण :

(1) दोन चलामधील सहसंबंधाचे स्वरूप समजण्याची ही एक सरळ पद्धती आहे.

(2) कमी गणिती ज्ञानाची आवश्यकता असते. कारण की आलेखात बिंदूच्या निरूपण विषयी समज फक्त आवश्यक आहे.

(3) ह्या पद्धतीने दोन चलामधील सहसंबंधाची घनिष्ठतेची देखील थोडी कल्पना येते.

(4) विकिर्ण आकृतीत बिंदूत कशाप्रकारे विखुरलेले असतात त्यावरून दोन चलात सुरेख संबंध आहे की नाही याची समज येते.

(5) माहितीतील काही अंतिम प्राप्तांक (extreme observations) असतील तरीपण सहसंबंधांचे स्वरूप समजण्यास अडचण पडत नाही.

मर्यादा :

ह्या पद्धतीने सहसंबंध स्वरूपा विषयी माहिती मिळते आणि संबंधाच्या घनिष्ठतेविषयी थोडी माहिती मिळते परंतु घनिष्ठेते विषयी निश्चित माप मिळविता येत नाही.

स्वाध्याय 2.1

1. एका बॉलपेन तयार करणाऱ्या कंपनीने त्याच्या सर्वात जास्त विकल्या जाणाऱ्या जेलपेनचा भाव (₹ त) आणि त्याचा पुरवठा (हजार एककात) यामधील संबंध समजण्यासाठी खालीलप्रमाणे माहिती एकत्र केली. त्यावरून विकिर्ण आकृती काढा आणि त्याचे अर्थघटन करा.

भाव (₹)	14	16	12	11	15	13	17
मासिक पुरवठा (हजार एकक)	32	50	20	12	45	30	53

2. एक वॉटर प्युरीफायर कंपनी कारखान्यासाठी आर.ओ. प्लॉन्ट तयार करते. त्याच्या विक्रीसाठी केलेल्या जाहिरातीच्या खर्च आणि आर.ओ. प्लॉन्टच्या विक्रीतून होणारा नफा याची माहिती खालीलप्रमाणे आहे.

जाहिरात खर्च (दहा हजार ₹)	5	6	7	8	9	10	11
नफा (लाख ₹)	8	7	9	10	13	12	13

या माहितीवरून विकीर्ण आकृती काढा तसेच जाहिरातीचा खर्च आणि आर.ओ. प्लान्टच्या विक्रीमुळे होणाऱ्या नफ्या मधील संबंधाचे स्वरूप सांगा.

3. थंडीत एका दिवसाचे वेग-वेगळ्या शहरातील न्यूनतम तपमान आणि गरम कपड्याची विक्रीमधील संबंध समजण्यासाठी खालील माहिती एकत्र करण्यात आली.

दैनिक न्यूनतम तपमान (सेल्सियस)	12	20	8	5	15	24
गरम कपड्याची विक्री (हजारएकक)	35	10	45	70	20	8

विकिर्ण आकृती काढून त्याचे अर्थघटन करा.

*

2.5 कार्ल पियर्सनची गुणनप्रघाताची पद्धती

आपण आधी पाहिले की दोन चलामधील सहसंबंधाची घनिष्ठता दर्शविणाऱ्या संख्यात्मक मापाला सहसंबंधांक म्हणतात. हा सहसंबंधांक सर्वप्रथम आंकडाशास्त्रज्ञ कार्ल पियर्सनने सूचविला. त्यामुळे त्याला ''पियर्सन सहसंबंधांक'' म्हणून ओळखले जाते त्यास ''गुणनप्रघात अंक'' म्हणूनही ओळखतात. त्याला r ने दर्शवितात.

समजा की दोन चल X आणि Y वर मिळविलेली एका निदर्शाची n अवलोकनांची जोडी $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ आहे. चल X आणि Y मधील सहसंबंधांक $r(x, y)$ किंवा फक्त r ने दर्शवितात आणि तो खालील पद्धतीने मिळविता येईल.

$$r = \frac{Cov\,(x, y)}{s_x \cdot s_y} = \frac{\text{सहविचरण } (x, y)}{(x \text{ चे प्र.वि.})\ (y \text{ चे प्र.वि.})}$$

येथे,

$$\text{सहविचरण } (x, y) = Cov\,(x, y) = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

$$x \text{ चे प्रमाणित विचलन} = s_x = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$y \text{ चे प्रमाणित विचलन} = s_y = \sqrt{\frac{\Sigma\,(y_i - \bar{y})^2}{n}}$$

$$x \text{ चा मध्यक} = \bar{x} = \frac{\Sigma\, x_i}{n}$$

$$y \text{ चा मध्यक} = \bar{y} = \frac{\Sigma\, y_i}{n}$$

नोंद : सरळतेसाठी, आता सहसंबंध आणि नियत संबंधाच्या अभ्यासात सर्वच सूत्रात अनुग (suffix) i ला टाळण्यात आलेले आहे. त्याप्रमाणे त्याच्या मोजणीत X एवेजी x आणि Y एवेजी y चा उपयोग केला आहे.

$Cov(x, y)$, s_x आणि s_y च्या उपर्युक्त किंमतीत r च्या वरील सूत्रात टाकल्यास, r चे खालील स्वरूप आपणास मिळते.

$$r = \frac{\Sigma(x - \bar{x})\ (y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y - \bar{y})^2}}$$

सामान्यपणे जेव्हा दोन्ही मध्यके $\bar{x}$ आणि $\bar{y}$ पूर्णांक असतील तर r च्या उपर्युक्त सूत्राचा उपयोग करावा.

खाली $Cov(x, y)$, s_x आणि s_y ची वैकल्पिक सूत्रे दिलेली आहे.

$$Cov(x, y) = \frac{\Sigma\, xy - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{n}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma\, x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n} - \overline{y}^2}$$

सहसंबंधांक r साठी दुसरे काही सूत्रे खालीलप्रमाणे आहे.

जेव्हा $\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})$, x चे प्र.वि. s_x, y चे प्र.वि. s_y आणि n या सारख्या मापाना आपण ओळखत असल्यास तेव्हा r चे खालील सूत्र वापरू शकतो.

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

जेव्हा Σxy, मध्यक $\overline{x}$ आणि $\overline{y}$, x आणि y चे प्र.वि. आणि n सारख्या मापांना आपण ओळखत असल्याने r चे नवीन खालील सूत्र वापरता येईल.

$$r = \frac{\Sigma xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

जेव्हा Σx, Σy, Σxy, Σx^2, Σy^2 आणि n सारख्या मापांना आपण ओळखत असल्यास r चे खालील सूत्र वापरता येईल.

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

सामान्यपणे जेव्हा मध्यक $\overline{x}$ किंवा $\overline{y}$ किंवा दोन्ही अपूर्णांक असतील तेव्हा वरील सूत्राचा उपयोग होतो.

कार्ल पियर्सनच्या सहसंबंधांकाच्या धारणा :

कार्ल पियर्सनचा सहसंबंधांक खालील धारणावर आधारित आहे.

(1) दोन चलामध्ये सुरेख संबंध आहे.

(2) दोन चलामध्ये कार्य-कारणाचा संबंध आहे. जर ह्या प्रकारचा संबंध नसेल, तर तो सहसंबंध अर्थहीन आहे.

2.6 सहसंबंधांकाचे गुणधर्म

(1) सहसंबंधाकाची किंमत -1 ते 1 पर्यंतच्या अंतराळात असते.

म्हणजे की, $-1 \le r \le 1$

(2) सहसंबंधांक एककाशिवायचे माप आहे.

दोन चलातील एकम कोणतेही असले तरी r ला कोणताही एकम नसतो.

(3) X आणि Y मधील सहसंबंधांक तसेच Y आणि X मधील सहसंबंधांक समान असतो.

म्हणजे की, $r(x, y) = r(y, x)$

(4) उगम बिंदू (origin) आणि माप (scale)च्या परिवर्तनाने सहसंबंधांक बदलत नाही.

समजूती : समजा चल X आणि Y मधील सहसंबंधांक मिळवावयाचा आहे. त्यासाठी आपण सर्वप्रथम नव्या चल u आणि v ला व्याख्याईत करू.

$$u = \frac{x-A}{c_x} \quad \text{आणि} \quad v = \frac{y-B}{c_y}$$

येथे A, B, c_x आणि c_y अनुकुल वास्तविक अचलांक आहे आणि $c_x > 0$ तसेच $c_y > 0$

आता सहसंबंधांकाच्या या गुणधर्मावरून सांगता येईल की u आणि v मधील सहसंबंधांक आणि X आणि Y मधील सहसंबंधांक सारखा असतो. म्हणजे की, $r(u, v) = r(x, y) = r$.

(5) $r(-x,\ y) = -r(x,\ y)$

$r(x,\ -y) = -r(x,\ y)$

म्हणजे की दोन्ही चलापैकी कोणत्याही एका चलाची किंमतीची चिन्हे बदलण्यात आली तर सहसंबंधांकाचे चिन्ह बदलतात.

$r(-x,\ -y) = r(x,\ y)$

म्हणजे दोन्ही चलाचे चिन्ह बदलण्यात आले, तर सहसंबंधांकाचे चिन्ह बदलत नाही.

समजूतीसाठी जास्तीची माहिती

जर चलाच्या किंमतीत एखादी अचलसंख्या मिळविल्यास किंवा वजा केल्यास त्याल्या उगमबिंदू परिवर्तन म्हणतात, कारण की असे केल्याने त्याला अनुरूप आलेखात उगमबिंदूचे स्थान बदलते. येथे बिंदू $(x,\ y)$च्या आलेखात स्थान बदलते परंतु त्याचे परस्पराचे सापेक्ष स्थान बदलत नाही त्यामुळे उगमबिंदू परिवर्तनाने r ची किंमत बदलत नाही.

त्याच प्रमाणे चलाच्या किंमती बरोबर एखादी धन अचल संख्येने गुणण्यात किंवा भागण्यात आले तर त्याला माप (Scale) परिवर्तन म्हणतात. कारण की, असे केल्याने त्याच्या अनुरूप आलेखात अक्षावरील प्रति एकम माप बदलते. असे केल्याने पण बिंदू $(x,\ y)$ चे परस्पराच्या सापेक्ष स्थान बदलत नाही त्यामुळे माप (स्केल) परिवर्तनाने सहसंबंधांक r ची किंमत बदलत नाही.

2.7 सहसंबंधांक किंमतीचे अर्थघटन

आपणास माहित आहे की सहसंबंधांक दोन चलातील सहसंबंधाचा प्रकार आणि घनिष्ठता दर्शविते. सहसंबंधांकाची किंमत मिळविल्यानंतर त्याचे अर्थघटन करणे आवश्यक आहे. सहसंबंधांकाच्या चिन्हावरून सहसंबंधाचा प्रकार आणि त्याच्या किंमतीवरून संबंधाची घनिष्ठता समजते.

सहसंबंधांकाच्या किंमतीचे अर्थघटन करतांना आपण ह्याकडे लक्ष ठेवावे की, सहसंबंधांकाची किंमत सहसंबंधाचा प्रकार आणि घनिष्ठता दाखविते. पण कार्य-कारण संबंधांचा निर्देश करत नाही. खरोखर तर आपण दोन चलातील कार्य-कारणाचा किंवा अन्य प्रकारचा संबंध आहे हे मानले आहे. r ची किंमत दोन चलातील कार्य-कारणाचा संबंध आहे हे दर्शवित नाही. ही गोष्ट लक्षात घेऊन आपण r च्या किंमतीचे अर्थघटन कशाप्रकारे करता येईल ते पाहू या.

$r = 1$ चे अर्थघटन :

जर $r = 1$ असेल तर आपण सांगू शकतो की, दोन चलांमध्ये संपूर्ण धन सहसंबंध आहे, जेव्हा एका चलाच्या किंमतीत होणारी वाढी (घटीमुळे) दुसऱ्या चलाच्या किंमतीत पण अचल प्रमाणात वाढ (घट) होत असेल तर $r = 1$ होते अशा चलांसाठी विकिर्ण आकृतीत आपणास सर्वच बिंदू वाढणाऱ्या दिशेत एकाच सुरेखेवर मिळतात (पहा उदाहरण 1).

$r = -1$ चे अर्थघटन :

जर $r = -1$ असेल, तर आपण सांगू शकतो की, दोन चलामध्ये संपूर्ण ऋण सहसंबंध आहे. जेव्हा एका चलाच्या किंमतीत वाढी (किंवा घटी) मुळे दुसऱ्या चलाच्या किंमतीत अचल घट (किंवा वाढ) होत असेल, तर $r = -1$ होईल. अशा चलासाठी विकिर्ण आकृतीत सर्वच बिंदू घटणाऱ्या दिशेत एकाच सुरेखेवर मिळतात (पहा उदाहरण 2).

$r = 0$ चे अर्थघटन :

जर $r = 0$ होत असेल तर आपण सांगू शकतो की दोन चलामध्ये सुरेख सहसंबंध नाही. दुसऱ्या शब्दात $r = 0$ हा सहसंबंधाचा अभाव दर्शवितो आणि त्यामुळे दोन चलांमध्ये सुरेख संबंध नाही असे म्हणतात. अशा चलासाठी विकिर्ण आकृतीत सर्वच बिंदू यादच्छिक पद्धतीने विखुरलेले (कोणत्याही सुरेखेवर किंवा तिच्या आसपास नाही) पहावयास मिळतात.

येथे लक्षात घ्या की, r ची किंमत फक्त सुरेख सहसंबंधाची घनिष्ठता दर्शविते. त्यामुळे जेव्हा $r = 0$ असेल, तर आपण फक्त सांगू शकतो की, दोन चलामधे सुरेख सहसंबंधांचा अभाव आहे. परंतु सुरेख शिवायचा दुसरा कोणताही सहसंबंध

असू शकतो. विकिर्ण आकृतीत सर्वच बिंदू कशाप्रकारे विखुरलेले आहे. त्यावरून सुरेख शिवायचा सहसंबंधाच्या प्रकाराविषयी थोडी कल्पना येते.

आंशिक सहसंबंधाचे अर्थघटन

($0 < r < 1$ आणि $-1 < r < 0$ चे अर्थघटन) :

जर r ची किंमत 0 ते 1 च्या दरम्यान किंवा –1 ते 0 च्या दरम्यान असेल, तर म्हणजे जर $|r| < 1$ असेल तर आपण म्हणू शकतो की दोन चलाच्या मध्ये आंशिक सहसंबंध आहे. जेव्हा $|r|$ ची किंमत 1 च्या जवळ असेल, तर आपण सांगू शकतो की, दोन चलामधील संबंध संपूर्ण सुरेख संबंधाच्या जवळ आहे. आणि संबंध आधिक गाढ प्रमाणात आहे. अशा संबंधाच्यावेळी आपण एका चलाच्या किंमतीत होणाऱ्या फरकाचा परिणाम दुसऱ्या चलाच्या किंमतीत कशाप्रकारे होतो त्याचा विश्वासनीय अंदाज मिळविता येतो. जेव्हा $|r|$ ची किंमत 0 च्या जवळ असेल तर आपण सांगू शकतो की, सुरेख सहसंबंधाची घनिष्ठता खूप कमी आहे आणि दोन चलामधील सुरेख संबंधाचा. जवळ-जवळ अभाव असतो. ह्या परिस्थितीत आपण एका चलाच्या किंमतीत होणारा फरक दुसऱ्या चलाच्या किंमतीवर कसा होतो ह्यांचा विश्वासनीय अंदाज आपण मिळवू शकत नाही.

सहसंबंधाक r चे अर्थघटन

आधिक गाढ ←	कमी गाढ →	← कमी गाढ	आधिक गाढ →

–1	0	1
↓	↓	↓
संपूर्ण ऋण सहसंबंध	सुरेख सहसंबंधाचा अभाव	संपूर्ण धन सहसंबंध

नोंद :

(1) सामान्यपणे आपण r च्या मोजणासाठीची सुरूवात मध्यक $\bar{x}$ आणि $\bar{y}$ शोधण्यापासून करतो, परंतु त्याची आवश्यकता नाही. आपण अचल A, B, c_x, c_y $(c_x > 0,\ c_y > 0)$ च्या अनुकुल किंमती घेऊन r ची मोजणी सुरू करू शकतो. आपणास माहित आहे की ह्या अचलांकाच्या कोणत्याही किंमती घेऊ शकतो. त्यामुळे r ची किंमत बदलत नाही.

(2) दोन चलाच्या दिलेल्या माहितीसाठी कार्ल पियर्सनच्या कोणत्याही सूत्राने सहसंबंधांक r ची किंमत सारखीच मिळते.

उदाहरण **5 : एका सामान्य ज्ञानाच्या स्पर्धात्मक परिक्षेसाठी परिक्षेआधी शेवटच्या दिवसाच्या तयारीचा परिक्षेचा परिणाम होणारा परिणाम जाणण्यासाठी समान बौद्धिक क्षमता असणाऱ्या सात उमेदवाराचा एक निदर्श घेऊन खालील माहिती एकत्र करण्यात आली आहे :**

शेवटच्या तीन दिवसातील वाचन (तासात)	25	38	30	28	34	40	36
परिक्षेत मिळविलेले गुण	65	75	68	70	72	79	75

ह्या माहितीवरून शेवटच्या तीन दिवसाच्या वाचनाचे तास आणि परिक्षेत मिळविलेले गुण यामधील सहसंबंधांक शोधा आणि त्याचे अर्थघटन करा.

येथे $n = 7$, वाचना(x) साठीचे तासाचा मध्यक $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{231}{7} = 33$, गुण$(y)$ साठी त्याचा मध्यक

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{504}{7} = 72$$

येथे दोन्ही मध्यके $\bar{x}$ आणि $\bar{y}$ पूर्णांक असल्याने r आपणास खालीलप्रमाणे मिळविता येईल.

	वाचन (तास) x	गुण y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
	25	65	–8	–7	56	64	49
	38	75	5	3	15	25	9
	30	68	–3	–4	12	9	16
	28	70	–5	–2	10	25	4
	34	72	1	0	0	1	0
	40	79	7	7	49	49	49
	36	75	3	3	9	9	9
एकूण	**231**	**504**	**0**	**0**	**151**	**182**	**136**

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{182}\cdot\sqrt{136}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{182\times 136}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{24752}}$$

$$= \frac{151}{157.3277}$$

$$= 0.9598$$

$$\therefore\ r \simeq 0.96$$

येथे आपल्या लक्षात येईल की r ची किंमत 1 च्या खूप जवळ आहे त्यामुळे वाचनाचे तास आणि गुण यात गाढ धन सहसंबंध आहे. त्यावरून सांगू शकतो की सामान्यपणे शेवटच्या दिवसात वाचनाचे तास आधिक असतील तर परिक्षेत आधिक गुण प्राप्त होतात.

उदाहरण 6 : एका शाळेच्या विद्यार्थ्यांची गुजराती विषयातील आवड आणि आंकडाशास्त्रातील आवड यामधील संबंधाचा अभ्यास करण्यासाठी सहा विद्यार्थ्यांचा निदर्श घेऊन खालील माहिती मिळवली.

गुजरातीचे गुण x	65	72	66	70	72	69
आंकडाशास्त्राचे गुण y	90	95	88	92	85	90

या माहितीवरून विद्यार्थ्यांचे दोन्ही विषयातील गुणांमधील सहसंबंधांक मोजा.

येथे $n=6$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{414}{6} = 69$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{540}{6} = 90.$

येथे दोन्ही मध्यक $\bar{x}$ आणि $\bar{y}$ पूर्णांक असल्याने r खालीलप्रमाणे मिळेल.

	गुजरातीमधील गुण x	आंकडाशास्त्रातील गुण y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
	65	90	–4	0	0	16	0
	72	95	3	5	15	9	25
	66	88	–3	–2	6	9	4
	70	92	1	2	2	1	4
	72	85	3	–5	–15	9	25
	69	90	0	0	0	0	0
एकूण	**414**	**540**	**0**	**0**	**8**	**44**	**58**

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{44}\cdot\sqrt{58}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2552}}$$

$$= \frac{8}{50.5173}$$

$$= 0.1584$$

$$\therefore\ r \simeq 0.16$$

येथे आपल्या लक्षात येईल की r ची किंमत 0 च्या जवळ आहे. त्यामुळे विद्यार्थ्यांचा दोन्ही विषयांच्या गुणात कमी गाढ धन सहसंबंध आहे असे म्हणता येईल.

उदाहरण 7 : **एका मोबाईल उत्पादन करणाऱ्या एका कंपनीने शेवटच्या सहा महिन्यात विकलेले मोबाईल (हजार एकम) आणि त्यावरील नफा (लाख ₹ त) यांचा तपशील खाली दिलेला आहे.**

विकलेल्या मोबाईलची संख्या (हजारात) x	3	8	12	5	7	5
नफा (लाख ₹) y	6	10	15	10	9	8

यावरून विकलेल्या मोबाईलची संख्या आणि नफा यातील सहसंबंधांक शोधा.

येथे $n=6,\ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{40}{6} = 6.67,\ \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{58}{6} = 9.67$

येथे $\bar{x}$ आणि $\bar{y}$ अपूर्णांक आहे आणि X आणि Y च्या किंमती फार मोठ्या नसल्याने त्यामुळे आपण r ची किंमत खालीलपणे मिळवू शकतो.

	विकलेल्या मोबाईलची संख्या (हजार एकम) x	नफा (लाख ₹) y	$x\ y$	x^2	y^2
	3	6	18	9	36
	8	10	80	64	100
	12	15	180	144	225
	5	10	50	25	100
	7	9	63	49	81
	5	8	40	25	64
एकूण	**40**	**58**	**431**	**316**	**606**

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{6(431) - (40)(58)}{\sqrt{6(316) - (40)^2} \cdot \sqrt{6(606) - (58)^2}}$$

$$= \frac{2586 - 2320}{\sqrt{1896 - 1600} \cdot \sqrt{3636 - 3364}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{296} \cdot \sqrt{272}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{80512}}$$

$$= \frac{266}{283.7464}$$

$$= 0.9375$$

$$\therefore\ r \simeq 0.94$$

येथे आपण पाहू शकतो की, r ची किंमत 1 च्या जवळ आहे त्यामुळे मोबाईलची विक्री आणि त्यावरील नफामध्ये आधिक गाढ सहसंबंध आहे.

उदाहरण **8 : उत्तर भारतात एका शहरात अठवड्यातील न्यूनतम तपमान (सेल्सियस) आणि पाच आठवड्यातील हीटरची झालेली विक्री (शंभर एकम) याची माहिती खालील दिलेल्यावरून न्यूनतम तपमान आणि हीटरच्या विक्री मधील सहसंबंधांक मोजा.**

न्यूनतम तपमान (सेल्सियस) x	3	4	6	7	9
हीटरची मागणी (शंभर एकम) y	16	15	14	11	9

येथे, $n = 5,\quad \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{29}{5} = 5.8,\quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{65}{5} = 13$

येथे एक मध्यक अपूर्णांकात आहे आणि x आणि y च्या किंमती खूप मोठ्या नसल्याते आपण r खालीलप्रमाणे मिळवू या.

	न्यूनतम तपमान (सेल्सियस) x	हिटरची मागणी (शंभर एकम) y	$x\,y$	x^2	y^2
	3	16	48	9	256
	4	15	60	16	225
	6	14	84	36	196
	7	11	77	49	121
	9	9	81	81	81
एकूण	**29**	**65**	**350**	**191**	**879**

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{5(350) - (29)(65)}{\sqrt{5(191) - (29)^2} \cdot \sqrt{5(879) - (65)^2}}$$

$$= \frac{1750 - 1885}{\sqrt{955 - 841} \cdot \sqrt{4395 - 4225}}$$

$$= \frac{-135}{\sqrt{114} \cdot \sqrt{170}}$$

$$= \frac{-135}{\sqrt{19380}}$$

$$= \frac{-135}{139.2121}$$

$$= -0.9697$$

$$\therefore\ r \simeq -0.97$$

येथे आपल्या लक्षात येईल की, r ची किंमत -1 च्या खूप जवळ आहे. त्यामुळे न्यूनतम तापमान आणि हीटरची विक्री मध्ये गाढ ऋण सहसंबंध आहे असे म्हणता येईल.

आपण उदाहरण (7) आणि उदाहरण (8) मध्ये पाहिले की दोन्ही मध्यके पूर्णांक नव्हते आणि चल x आणि y च्या किंमती खूप मोठ्या नव्हत्या. त्यामुळे आपण खालील सूत्राच्या मदतीने r ची मोजणी करू शकतो.

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

परंतु जेव्हा दोन्ही चलाची किंमत मोठी आणि / किंवा अपूर्णांक असेल तेव्हा xy, x^2, y^2 ची मोजणी खूपच कठीण होते आणि त्यामुळे r ची मोजणी कंटाळवाणी होते. त्यामुळे सहसंबंधांक r ची मोजणी सरळ होईल त्यासाठी एक संक्षिप्त पद्धतीचा उपयोग होतो ही पद्धती संक्षिप्त r चा गुणधर्म (नं. 4) वर आधारित आहे.

या गुणधर्मानुसार r च्या सूत्रात x च्या एवेजी u आणि y च्या एवेजी v ठेवल्याने सहसंबंधांक r शोधण्याचे सूत्र संक्षिप्त पद्धतीने खालीलप्रमाणे देता येईल

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

आता आपण ह्या संक्षिप्त पद्धतीने r शोधण्यासाठी काही उदाहरणे पाहू.

उदाहरण 9 : एका शाळेतील विद्यार्थ्यांची उंची (सेमी) आणि वजन (किग्रा) मधील संबंधाचा अभ्यास करण्यासाठी 6 विद्यार्थ्यांचा निदर्श घेऊन खालील माहिती मिळवली, त्यावरून विद्यार्थ्यांची उंची आणि वजनामधील सहसंबंधांक शोधा.

उंची (सेमी) x	155	165	158	162	153	160
वजन (किग्रा) y	53	63	56	60	52	60

येथे $n=6$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{953}{6} = 158.83$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{344}{6} = 57.33$

येथे दोन्ही मध्यके $\bar{x}$, $\bar{y}$ अपूर्णांक आहेत आणि चल X आणि Y च्या किंमती मोठ्या आहेत त्यामुळे आपण r ची किंमत काढण्यासाठी संक्षिप्त पद्धतीला अग्रीमता देऊ.

आपण उगमबिंदू परिवर्तनासाठी $A = 158$ आणि $B = 57$ घेऊ या. आणि प्रमाण माप बदलण्यासाठी अनुकुल किंमत दिलेली नाही त्यामुळे $c_x = 1$, $c_y = 1$ घेऊ या.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-158}{1} = x - 158$$

$$v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-57}{1} = y - 57$$

नोंद : येथे फक्त उगमबिंदू परिवर्तन केलेले आहे; परंतु मापाचे परिवर्तन केलेले नाही त्यामुळे आपण नवे चल u आणि v खालीलप्रमाणे व्याख्याईत करू.

$u = x - A = x - 158$; $v = y - B = y - 57$

	उंची (सेमी) x	**वजन (किग्रा) y**	**$u = x - 158$**	**$v = y - 57$**	**uv**	**u^2**	**v^2**
	155	53	–3	–4	12	9	16
	165	63	7	6	42	49	36
	158	56	0	–1	0	0	1
	162	60	4	3	12	16	9
	153	52	–5	–5	25	25	25
	160	60	2	3	6	4	9
एकूण	**953**	**344**	**5**	**2**	**97**	**103**	**96**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(97) - (5)(2)}{\sqrt{6(103) - (5)^2} \cdot \sqrt{6(96) - (2)^2}}$$

$$= \frac{582 - 10}{\sqrt{618 - 25} \cdot \sqrt{576 - 4}}$$

$$= \frac{572}{\sqrt{593} \cdot \sqrt{572}}$$

$$= \frac{572}{\sqrt{339196}}$$

$$= \frac{572}{582.4054}$$

$$= 0.9821$$

$$\therefore \; r \simeq 0.98$$

येथे आपल्या लक्षात येईल की, r ची किंमत 1 च्या खूप जवळ आहे. त्यामुळे विद्यार्थ्यांची उंची आणि वजन यात गाढ धन सहसंबंध आहे असे म्हणतात.

उदाहरण 10 : एका विस्तारातील समान वस्तूच्या उत्पादन करणाऱ्या सहा वेग-वेगळ्या फॅक्टरीच्या कामगाराचे मासिक सरासरी उत्पन्न (₹ त) आणि फॅक्टरीत ओव्हरटाईममुळे होणारे उत्पन्न (₹ त) मधील संबंध समजण्यासाठी खालीलप्रमाणे माहिती मिळविण्यात आली आहे. त्यावरून सरासरी मासिक उत्पन्न आणि ओव्हरटाईममुळे होणारे उत्पन्न यामधील सहसंबंधांक शोधा.

वर्ष	2011	2012	2013	2014	2015	2016
सरासरी मासिक उत्पन्न (₹) x	14,900	15,100	15,000	15,500	15,700	15,800
ओव्हरटाईममुळे होणारे उत्पन्न (₹) y	100	105	115	160	220	255

येथे $n = 6, \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{92000}{6} = 15333.33, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{955}{6} = 159.17$

आपल्या लक्षात येईल की, X च्या किंमती 100 चा पर्यंत गुणक तर Y च्या किंमती 5 चा गुणक आहे त्यामुळे आपण $A = 15{,}300$, $B = 160$, $c_x = 100$ आणि $c_y = 5$ घेऊ या.

आता नवे चल u आणि v खालीलप्रमाणे व्याख्याईत करू या.

आता $u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-15300}{100}$ आणि $v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-160}{5}$

नोंद : x किंमती 100 चा गुणक असल्याने A (= 15,300) पण 100 च्या गुणक पसंत करू या. त्याचप्रमाणे y च्या किंमती 5 च्या गुणकात असल्याने B (= 160) देखील 5 च्या गुणकातच निवडू या.

	सरासरी मासिक उत्पन्न (₹) x	ओव्हरटाईममुळे होणारे उत्पन्न (₹) y	$u = \frac{x-15300}{100}$	$v = \frac{y-160}{5}$	uv	u^2	v^2
	14,900	100	–4	–12	48	16	144
	15,100	105	–2	–11	22	4	121
	15,000	115	–3	–9	27	9	81
	15,500	160	2	0	0	4	0
	15,700	220	4	12	48	16	144
	15,800	255	5	19	95	25	361
एकूण	**92,000**	**955**	**2**	**–1**	**240**	**74**	**851**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(240) - (2)(-1)}{\sqrt{6(74) - (2)^2} \cdot \sqrt{6(851) - (-1)^2}}$$

$$= \frac{1440 + 2}{\sqrt{444 - 4} \cdot \sqrt{5106 - 1}}$$

$$= \frac{1442}{\sqrt{440} \cdot \sqrt{5105}}$$

$$= \frac{1442}{\sqrt{2246200}}$$

$$= \frac{1442}{1498.7328}$$

$$= 0.9621$$

$$\therefore \; r \simeq 0.96$$

येथे आपल्या लक्षात येईल की, r ची किंमत 1 च्या खूप जवळ आहे. त्यामुळे सरासरी मासिक उत्पन्न आणि ओव्हरटाईमचे उत्पन्न यांच्यात गाढ घन सहसंबंध आहे असे म्हणता येईल.

उदाहरण 11 : गुजरात राज्याच्या सहा शहरांमधील वसती घनता (प्रति चौ.मी.) आणि मृत्यूदर (प्रति हजार)चे आंकडे खालीलप्रमाणे आहे.

शहर	A	B	C	D	E	F
वसतीची घनता (प्रति चौ. मी.) x	200	500	400	700	600	300
मृत्यूदर (प्रति हजार) y	10	12	10	15	9	12

या माहितीवरून वसतीची घनता आणि मृत्युदर यामधील सहसंबंधांक मिळवा.

येथे $n=6$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{2700}{6} = 450$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{68}{6} = 11.33$

आपल्या हे देखील लक्षात येईल की, X च्या किंमती 100 चा गुणक आहेत आणि Y च्या किंमती लहान आहेत त्यामुळे आपण $A = 500$, $B = 12$, $c_x = 100$ आणि $c_y = 1$ घेऊ या.

आता नवे चल u અને v खालीलप्रमाणे व्याख्याईत करू या.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-500}{100} \text{ आणि } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-12}{1} = y - 12$$

	घनता (प्रति चौ.किमी.) x	मृत्यूदर (दर हजार) y	$u = \frac{x-500}{100}$	$v = y-12$	uv	u^2	v^2
	200	10	–3	–2	6	9	4
	500	12	0	0	0	0	0
	400	10	–1	–2	2	1	4
	700	15	2	3	6	4	9
	600	9	1	–3	–3	1	9
	300	12	–2	0	0	4	0
एकूण	**2700**	**68**	**–3**	**–4**	**11**	**19**	**26**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(11) - (-3)(-4)}{\sqrt{6(19) - (-3)^2} \cdot \sqrt{6(26) - (-4)^2}}$$

$$= \frac{66 - 12}{\sqrt{114 - 9} \cdot \sqrt{156 - 16}}$$

$$= \frac{54}{\sqrt{105} \cdot \sqrt{140}}$$

$$= \frac{54}{\sqrt{14700}}$$

$$= \frac{54}{121.2436}$$

$$= 0.4454$$

$$\therefore \ r \simeq 0.45$$

येथे आपल्या लक्षात येईल की, r ची किंमत 1 च्या खूप जवळ नाही. त्यामुळे वसतीची घनता (दाटपणा) आणि मृत्युदर यामधील सामान्यपेक्षा कमी गाढ धन सहसंबंध आहे असे म्हणतात.

उदाहरण 12 : ट्रकचे टायर उत्पादन करणाऱ्या कंपनींची विक्री (करोड टन) आणि नफा (हजार ₹ त) मधील अभ्यासासाठी मिळविलेली शेवटच्या वर्षाची माहिती खालीलप्रमाणे आहे.

विक्री (करोड ₹) x	1.6	2.2	1.9	2.0	2.3	1.7	2.4	1.8	2.1
नफा (हजार ₹) y	4200	5500	6000	6200	6100	4900	5900	5000	6700

यावरून विक्री आणि नफा यातील सहसंबंधांक मोजा.

येथे $n=9, \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{18}{9} = 2, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{50500}{9} = 5611.11$

येथे X च्या किंमती अपूर्णांकात आहेत. त्यात दशांश चिन्हानंतर एकच अंक आहे त्यामुळे आपण X च्या किंमतीला 10 ने गुणु (म्हणजे $\frac{1}{10} = 0.1$ ने भागू या.) त्यामुळे त्या किंमती पूर्णांक होतील. Y च्या किंमती 100 चा गुणक असल्याने $A = 2,\ B = 5600,\ c_x = 0.1,\ c_y = 100$ घेऊ या.

आता नवे चल u आणि v खालीलप्रमाणे व्याख्याईत करता योतील.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = 10\ (x - 2.0) = \frac{x-2.0}{0.1} \quad \text{आणि} \quad v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-5600}{100}$$

	विक्री (करोड ₹) x	**नफा (हजार ₹) y**	$u = 10(x-2.0)$	$v = \frac{y-5600}{100}$	uv	u^2	v^2
	1.6	4200	–4	–14	56	16	196
	2.2	5500	2	–1	–2	4	1
	1.9	6000	–1	4	–4	1	16
	2.0	6200	0	6	0	0	36
	2.3	6100	3	5	15	9	25
	1.7	4900	–3	–7	21	9	49
	2.4	5900	4	3	12	16	9
	1.8	5000	–2	–6	12	4	36
	2.1	6700	1	11	11	1	121
एकूण	**18**	**50,500**	**0**	**1**	**121**	**60**	**489**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{9(121) - (0)(1)}{\sqrt{9(60) - (0)^2} \cdot \sqrt{9(489) - (1)^2}}$$

$$= \frac{1089 - 0}{\sqrt{540 - 0} \cdot \sqrt{4401 - 1}}$$

$$= \frac{1089}{\sqrt{540} \cdot \sqrt{4400}}$$

$$= \frac{1089}{\sqrt{2376000}}$$

$$= \frac{1089}{1541.4279}$$

$$= 0.7065$$

$$\therefore \quad r \simeq 0.71$$

येथे आपल्या लक्षात येईल की, r ची किंमत 1 पासून साधारण दूर आहे. त्यामुळे आपण सांगू शकतो की विक्री आणि नफा यात सामान्यपेक्षा जास्त गाढ धन संबंध आहे.

प्रवृत्ती

वरील उदाहरण - 12 मध्ये दिलेले तपशीलावरून $A = 1.8$, $B = 6000$, $c_x = 0.05$ आणि $c_y = 100$ घेऊन पुन्हा सहसंबंधांकांची r मोजणी करा आणि तुमच्या लक्षात येईल की r ची किंमत सारखीच म्हणजे (= 0.71) च मिळते.

उदाहरण 13 : एका शाळेच्या परिक्षेत विद्यार्थ्यांनी आंकडाशास्त्रात मिळविलेले गुण (X) आणि अर्थशास्त्रात मिळविलेले गुण (Y) यामधील संबंधांचा अभ्यास करण्यासाठी दहा विद्यार्थ्यांचा निदर्श घेऊन खालीलप्रमाणे तपशील मिळाला.

$$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 120,\ \Sigma(x-\bar{x})^2 = 80,\ \Sigma(y-\bar{y})^2 = 500$$

ह्यावरून r ची किंमत शोधा.

येथे $n = 10$ आणि जो तपशील दिलेला आहे त्याप्रमाणे r चे सूत्र योग्य आहे.

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{120}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{500}}$$

$$= \frac{120}{\sqrt{40000}}$$

$$= \frac{120}{200}$$

$$\therefore \quad r = 0.6$$

उदाहरण 14 : खालील तपशीलावरून सहसंबंधांक r शोधा.

(1) $n = 20,\ Cov(x, y) = -50,\ s_x = 15,\ s_y = 8$

(2) $n = 10,\ \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 60,$ x चे विचरण = 25, y चे विचरण = 36

(3)

तपशील	x	y
अवलोकनांची संख्या	25	
मध्यक	40	50
मध्यकापासून घेतलेला विचलनाच्या वर्गाची बेरीज	120	160
मध्यकापासून घेतलेल्या विचलनाच्या गुणाकारांची बेरीज	100	

(4) $n = 10,\ \Sigma xy = 1500,$ X चा मध्यक = 12, Y चा मध्यक = 15, X चे प्र.वि. = 9, Y चे प्र.वि. = 5

(1) येथे $n = 20,\ Cov(x,\ y) = -50,\ s_x = 15,\ s_y = 8$

ह्या सर्व किंमतीना खालील सूत्रात ठेवल्यास,

$$r = \frac{Cov(x,\ y)}{s_x \cdot s_y}$$

$$= \frac{-50}{(15)\ (8)}$$

$$= \frac{-50}{120}$$

$$= -0.4167$$

$$\therefore\ r \simeq -0.42$$

(2) येथे $n = 10,\ \Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y}) = 60$

X चे विचरण $= s_x^2 = 25 \quad \therefore\ s_x = 5$

Y चे विचरण $= s_y^2 = 36 \quad \therefore\ s_y = 6$

आवश्यक किंमतीना योग्य सूत्रात ठेवल्यास,

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{n\, s_x s_y}$$

$$= \frac{60}{10(5)\ (6)}$$

$$= \frac{60}{300}$$

$$\therefore\ r = 0.2$$

(3) येथे $n = 25,\ \overline{x} = 40,\ \overline{y} = 50,\ \ \Sigma(x-\overline{x})^2 = 120,\ \Sigma(y-\overline{y})^2 = 160$ आणि $\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y}) = 100$

ह्या सर्व किंमतीता खालील योग्य सूत्रात ठेवल्यास,

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})\ (y-\overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\overline{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\overline{y})^2}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{120} \cdot \sqrt{160}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{19200}}$$

$$= \frac{100}{138.5641}$$

$$= 0.7217$$

$$\therefore\ r \simeq 0.72$$

(4) येथे $n = 10,\ \Sigma xy = 1500,\ \bar{x} = 12,\ \bar{y} = 15,\ s_x = 9$ आणि $s_y = 5$

ह्या सर्व किंमतीना खालील योग्य सूत्रात ठेवल्यास,

$$r = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

$$= \frac{1500 - 10\,(12)\,(15)}{10\,(9)\,(5)}$$

$$= \frac{1500 - 1800}{450}$$

$$= \frac{-300}{450}$$

$$= -0.6667$$

$$\therefore\ r \simeq -0.67$$

उदाहरण 15 : एका कंपनीच्या सहा वर्षाची विक्री आणि नफा यामधील संबंधांचा अभ्यास करण्यासाठी खालील माहिती एकत्र करण्यात आली.

X = वार्षिक विक्री (लाख ₹ त)

Y = वार्षिक नफा (दहा हजार ₹ त)

$\boldsymbol{n = 6,\ \Sigma x = 58,\ \Sigma y = 40,\ \Sigma xy = 431,\ \Sigma x^2 = 606,\ \Sigma y^2 = 316}$

ह्यावरून X आणि Y मधील सहसंबंधांक शोधा.

दिलेल्या किंमतीना खालील सूत्रात ठेवल्यास,

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{6(431) - (58)(40)}{\sqrt{6(606) - (58)^2} \cdot \sqrt{6(316) - (40)^2}}$$

$$= \frac{2586 - 2320}{\sqrt{3636 - 3364} \cdot \sqrt{1896 - 1600}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{272} \cdot \sqrt{296}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{80512}}$$

$$= \frac{266}{283.7464}$$

$$= 0.9375$$

$$\therefore\ r \simeq 0.94$$

कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीचे गुण आणि मर्यादा :

गुण :

(1) ह्या पद्धतीद्वारा दोन चलातील सहसंबंधांचा प्रकार त्याचप्रमाणे त्यामधील संबंधाची घनिष्ठता देखील समजते.

(2) दोन चलाच्या सुरेख सहसंबंधांना मोजण्यासाठीची प्रमाणित पद्धती आहे.

(3) त्या सहसंबंधांची घनिष्ठता (जास्त, सामान्य किंवा कमी)ला एका संख्येत दर्शविते.

मर्यादा :

(1) ही पद्धती, ह्या धारणेवर आधारित आहे की दोन चलामध्ये सुरेख सहसंबंध आहे त्यामुळे दोन चलामध्ये सुरेख सहसंबंध नसेल तरी सुद्धा ह्या पद्धतीचा उपयोग करून सहसंबंधांक शोधण्यात येतो आणि त्याच्या आधारे संबंधविषयी अर्थघटन करण्यात आले तर अर्थघटन गैरसमज निर्माण करते.

(2) सहसंबंधांच्या किंमतीवर अंतिम अवलोकने (सर्वात मोठा किंवा सर्वात लहान) चा खूपच परिणाम होतो.

(3) ह्या पद्धतीने मिळणारे सहसंबंधांक खूपच काळजीपूर्वक अर्थघटन होईल हे आवश्यक आहे. नाही तर दोन चलामधील संबंधाविषयी गैरसमज होण्याची शक्यता असते.

स्वाध्याय 2.2

1. एका सोसायटीत रहाणाऱ्या 7 कुटुंबातून मिळालेल्या निदर्शात पित्याची उंची (सेमी) आणि तरूण पुत्राची उंचीची (सेमी) माहिती खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून सहसंबंधांक शोधा.

पित्याची उंची (सेमी)	170	169	168	167	166	165	164
पुत्राची उंची (सेमी)	172	168	170	168	165	167	166

2. नास्ता तयार करणाऱ्या एक स्थानिक गृह उद्योग कंपनी 100 ग्रामच्या पॅकेट मध्ये नास्त्याची पॅकेट्स विकते. एका नव्या प्रकारच्या वेफर्सची किंमत नक्की करण्यासाठी त्याचा भाव आणि मागणीचा प्राथमिक अभ्यास केल्याने खालील प्रकारची माहिती मिळते.

वेफर्सचा भाव (₹)	24	26	32	33	35	30
मागणी (हजार पॅकेट)	27	24	22	20	15	24

ह्या माहितीवरून वेफर्सचा भाव आणि त्याची मागणी यातील सहसंबंधांक शोधा.

3. एका शाळेतील परिक्षेत दोन विषय नामा पद्धती आणि आंकडाशास्त्रात दहा विद्यार्थ्यांच्या निदर्शातून मिळालेल्या गुणाच्या माहितीवरून दोन विषयाच्या गुणामधील सहसंबंधांक शोधा.

नामा पद्धतीचे गुण	60	80	50	80	95	40	70	40	35	90
आंकडाशास्त्राचे गुण	50	75	60	85	90	40	65	30	45	70

4. एका शहरातील रहाणाऱ्या बालकांची गणित आणि तर्क या क्षमता मधील संबंध मिळविण्यासाठी एक शैक्षणिख संस्था वेग-वेगळ्या शाळातील निवडलेल्या सहा विद्यार्थ्यांना गणित आणि तर्क आधारीत वीस कूटप्रश्न सोडविण्यासाठी देतात. त्या बालकाद्वारा खरी उकल मिळविली असेल अशा कूटप्रश्नांची संख्या दिलेली आहे.

गणित आधारित उकल मिळाली असेल अशा कूटप्रश्नांची संख्या	12	8	9	10	8	11
तर्क आधारित उकल मिळाली असेल अशा कूटप्रश्नांची संख्या	11	10	4	7	13	16

ह्या माहितीवरून बालकांनी दोन प्रकारचे कूटप्रशन सोडविण्याची क्षमता मधील सहसंबंधांक शोधा.

5. खालील दिलेल्या माहितीवरून गुंतवणूक (करोड ₹ त) आणि नफा (लाख ₹ त) मधील सहसंबंधांक शोधा.

कंपनी	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
गुंतवणूक (करोड ₹)	15	22	12	10	17	20	14
नफा (दहा लाख ₹)	9	12	8	6	10	9	10

6. एका शाळेतील निवडलेल्या पाच विद्यार्थ्यांचा प्रतिदिन अभ्यासाचे तास आणि झोपेचे सरासरी तास यांची माहिती खालीलप्रमाणे प्राप्त आहे.

अभ्यासाचे तास	10	5	7	5	3
झोपेचे तास	6	9	7	8	10

यावरून अभ्यासाचे तास आणि झोपेचे तास यामधील सहसंबंधांक शोधा.

7. खालील दिलेले वय (वर्षात) रक्ताचा दाब (मिमी)ची माहितीवरून वय आणि रक्तदाब यामधील सहसंबंधांक शोधा.

वय (वर्ष)	58	55	65	52	48	68	62	56
रक्ताचा सिस्टोलिक दाब (मिमी)	130	150	150	130	140	158	155	140

8. एका ईंजिनिअर असोसिएशनने वेग-वेगळ्या फॅक्टरीत होणारे उत्पादन आणि प्रति एकम उत्पादन खर्च यामधील संबंध समजण्यासाठी सहा फॅक्टरीचे उत्पादन (हजार एकमात) आणि उत्पादनाचा प्रति एकम खर्चाची माहिती खालीलप्रमाणे मिळविली आहे.

उत्पादन (हजार एकम)	15	20	35	24	18	31
प्रति एकम उत्पादन खर्च (₹)	95	90	75	80	87	70

यावरून उत्पादन आणि प्रति एकम उत्पादन खर्च यातील सहसंबंधांक शोधा.

9. वेग-वेगळ्या सहा शहरातील लोकांची दरडोई वार्षिक उत्पन्न (₹ त) आणि भावाचा सूचकांकाची माहिती यावरून सहसंबंधांक शोधा.

शहर	*A*	B	*C*	*D*	*E*	*F*
दरडोई उत्पन्न (₹ त)	32,000	29,000	40,000	36,000	30,000	39,000
भावाचा सूचकांक	120	100	250	180	110	220

10. एका शहरातील कुटुंबात वाहन चालविणाऱ्या सभासदाची संख्या आणि त्याची अठवड्याचा पेट्रोल वापर (लीटर मध्ये) मधील अभ्यास करण्यासाठी खालील माहिती दिलेली आहे.

कुटुंबातील वाहन चालविणाऱ्या सभासदाची संख्या	3	5	2	4	3	6	1
आठवड्याचा पेट्रोल वापर (लीटर)	11.5	21	14.5	15.5	7	22.5	10

या माहितीवरून कुटुंबातील वाहन चालविणाऱ्या सभासदाची संख्या आणि पेट्रोलचा वापर यामधील सहसंबंधांक शोधा.

11. एका ग्राम्य विस्तारातील खताचा वापर आणि मक्याचे उत्पादन यामधील संबंध समजाण्यासाठी खालील माहिती एकत्र करण्यात आली आहे.

खताचा वापर (क्विंटल)	1.5	2.1	0.9	1.8	1.1	1.2
प्रति हेक्टर मक्याचे उत्पादन (क्विंटल)	60	95	50	75	45	75

यावरून खताचा वापर आणि मक्याचे उत्पादन यामधील सहसंबंधांक शोधा.

12. एका जिल्हातील शेवटच्या दहा वर्षात पडलेल्या पावसाला सेमी (X) आणि प्रति हेक्टर उत्पन्न टनात (Y) च्या माहितीवरून सहसंबंधांक शोधा.

$n = 10,\ Cov\ (x,\ y) = 30,\ X$ चे प्रमाणित विचलन $= 5$ आणि Y चे विचरण $= 144$

13. एका शाळेतील विद्यार्थ्यांच्यामधून दहा विद्यार्थ्यांचा निदर्श घेऊन त्याची उंची (X) आणि वजन (Y)ची माहितीवरून खालील माहिती मिळाली आहे.

$\overline{x} = 160,\ \overline{y} = 55,\ \Sigma xy = 90000,\ s_x = 25,\ s_y = 10$

यावरून उंची आणि वजन मधील सहसंबंधांकांची किंमत शोधा.

14. खालील माहितीवरून सहसंबंधांक शोधा.

(1) $\Sigma(x-\overline{x})^2 = 72,\ \Sigma(y-\overline{y})^2 = 32,\ \Sigma(x-\overline{x})\,(y-\overline{y}) = 45$

(2) $n = 6,\ \Sigma x = 16,\ \Sigma y = 51,\ \Sigma xy = 154,\ \Sigma x^2 = 52,\ \Sigma y^2 = 471$

15. खालील माहितवरून r ची किंमत शोधा.

माहिती	x	y
मध्यक	60	95
मध्यकापासून घेतलेल्या विचलनाच्या वर्गाची बेरोज	920	1050
मध्यकापासून घेतलेल्या विचलनाच्या गुणाकाराची बेरीज	-545	

*

2.8 स्पियरमॅनची क्रमांक सहसंबंधाची पद्धती

आपण दोन चलातील सहसंबंधांक शोधण्यासाठी कार्ल पियर्सनची पद्धतीच्या अभ्यास केला. स्पष्ट आहे की जेव्हा चल संख्यात्मक असेल तेव्हा म्हणजे जेव्हा दोन्ही चलांना संख्यात्मक पद्धतीने मोजता येईल तेव्हा ह्या पद्धतीचा उपयोग होतो. परंतु धंदाकीय, औद्योगिक आणि सामाजिक विज्ञानाच्या प्रश्नांमध्ये क्रित्येकदा अशी परिस्थिती येते की ज्याला आपण गुणात्मक चला (गुणधर्म)चा अभ्यास करावा लागतो उदा. सौंदर्य, प्रामाणिकपणा, पात्रता, नैतिकता, वक्तृत्व, संगीत, नृत्य कौशल्य वगैरे. अशा परिस्थितीत अशी लक्षणे (गुणात्मक चल किंवा गुणधर्म) संख्यात्मक स्वरूपात मोजता येत नाही. परंतु त्याच्या गुणवत्तेनुसार मांडून क्रम देता येतो. ह्या पद्धतीने मिळणाऱ्या दोन लक्षणांच्या जोडीवरून मिळविलेल्या चार्ल्स स्पियरमॅनने सूचविलेल्या स्पियरमॅनचा क्रमांक सहसंबंधांक म्हणतात.

सहसंबंधाचे माप समजण्यासाठी स्पियरमॅनचा क्रमांक सहसंबंधांकाच्या मोजणीची काही उदाहरणे खालीलप्रमाणे दिलेले आहेत :

(1) एका समूहातील व्यक्तिमधील प्रामाणिकता आणि वेळेच्या पालनाच्या नियमितेनुसार त्याना क्रम देऊन दोन गुणधर्मामधील संबंधाचा अभ्यास.

(2) एका सौंदर्य स्पर्धेत वेग-वेगळ्या स्पर्धाकांनी त्याच्या स्पर्धेतील देखावाच्या आधारे दोन निर्णयकांनी दिलेल्या क्रमावरून दोन्ही निर्णयकांच्या निर्णयांमधील संबंधांचा अभ्यास.

काही माहिती संख्यात्मक चल असेल (उंची, वजन) तरी सुद्धा त्याच्या अवलोकानाच्या किंमती अनुसार त्यांना क्रम देऊन क्रमांक सहसंबंधांक मिळविण्यात येतो. सामान्यपणे जेव्हा दोन चलातील किंमतीचा प्रसार जास्त असेल तेव्हा कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीने सहसंबंधांक मिळविण्या एवजी क्रमांक सहसंबंधांक मिळविण्यात येतो. कारण की जास्त प्रसाराच्या अवलोकनासाठी कार्ल पियर्सनचा सहसंबंधांकापेक्षा क्रमांक सहसंबंधांक जास्त स्थिर (stable) असतो.

पद्धती : समजा दोन गुणधर्म X आणि Y अवलोकनांच्या जोडीला खालीलप्रमाणे क्रमानुसार दिलेले आहे.

अवलोकने	1	2	....	i	....	n
***X* चा आधार क्रम**	R_{x_1}	R_{x_2}	....	R_{x_i}	....	R_{x_n}
***Y* चा आधार क्रम**	R_{y_1}	R_{y_2}	....	R_{y_i}	....	R_{y_n}

क्रमांक सहसंबंधांक शोधण्यासाठी खालील सूत्राचा उपयोग होतो.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

येथे $d_i = R_{x_i} - R_{y_i}$, i = 1, 2, 3, ... n च्या सरळते साठी आपण d_i ऐवजी d आणि R_{x_i} एवेजी R_x आणि R_{y_i} ऐवजी R_y लिहू या.

त्यामुळे क्रमांक सहसंबंधांक शोधण्याचे सूत्र खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

येथे $d = R_x - R_y = X$ आणि Y च्या क्रमांकांची वजाबाकी

$\Sigma d^2 = X$ आणि Y च्या क्रमांकांच्या वजाबाकीच्या वर्गाची बेरीज.

जेव्हा अवलोकनांच्या n जोड्या संख्यात्मक चलाच्या असतील तेव्हा सामान्यपणे एका चलाच्या सर्वात मोठ्या अवलोकनाला क्रम 1, त्यानंतर त्यापेक्षा लहान परंतु इतरांपेक्षा मोठ्या अवलोकनाला क्रम 2, अशाप्रकारे सर्वच अवलोकनाला क्रम देण्यात येतो, त्याचप्रमाणे दुसऱ्या चलाच्या किंमतीना क्रम देण्यात येतो. त्यानंतर या क्रमावरून क्रमांक सहसंबंधांक मिळविण्यात येतो.

आपण दोन संख्यात्मक चलांमधील संबंध शोधण्यासाठी क्रमांक सहसंबंधांक शोधतो पण कार्ल पियर्सनचा सहसंबंधांक जास्त निश्चित मानला जातो. कारण त्यात क्रमाचा नाही परंतु अवलोकनाचा उपयोग होतो.

येथे लक्षात घेणे आवश्यक आहे की, क्रमांक सहसंबंधांक हे दुसरे काही नाही परंतु दोन गुणधर्मा (किंवा संख्यात्मक चल) ला दिलेल्या क्रमामधील कार्ल पियर्सनचा सहसंबंधांक आहे. त्यामुळे कार्ल पियर्सनच्या प्रमाणेच क्रमांक सहसंबंधांकाचा ही अर्थघटन करता येईल.

सामान्यपणे स्पियरमॅनच्या पद्धतीने मिळविलेला सहसंबंधांक आणि कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीने मिळविलेला सहसंबंधांकाची किंमत समान असत नाही. परंतु जेव्हा दोन चलांच्या किंमती ह्या प्रथम n नैसर्गिक संख्याचीच रचना असेल तेव्हा कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीद्वारा आणि स्पियरमॅनच्या पद्धतीने मिळविलेल्या सहसंबंधांकाच्या किंमती समान असतात.

उदाहरण 16 : एका कंपनीचे दोन मॅनेजर त्यांच्या कंपनीत नोकरी करणाऱ्या व्यक्तिमधून त्यांच्या निवडलेल्या सात व्यक्तिंना कार्यक्षमतेच्या पात्रतेवरून खालीलप्रमाणे क्रम देतात.

व्यक्ती	A	B	C	D	E	F	G
मॅनेजर 1 ने दिलेला क्रम	6	7	5	4	3	2	1
मॅनेजर 2 ने दिलेला क्रम	7	6	5	2	4	1	3

ह्या माहितीवरून मॅनेजरने केलेल्या मूल्यांकांमधील क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

येथे n = 7 आणि क्रम दिलेलाच आहे, त्यामुळे क्रमांक सहसंबंधांक शोधण्यासाठी आपण खालीलप्रमाणे कोष्टक तयार करू या.

व्यक्ती	मॅनेजर 1 ने दिलेला क्रम R_x	मॅनेजर 2 ने दिलेला क्रम R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	6	7	–1	1
B	7	6	1	1
C	5	5	0	0
D	4	2	2	4
E	3	4	–1	1
F	2	1	1	1
G	1	3	–2	4
एकूण	**–**	**–**	**0**	**12**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(12)}{7(49-1)}$$

$$= 1 - \frac{72}{336}$$

$$= 1 - 0.2143$$

$$= 0.7857$$

$$\therefore \ r \simeq 0.79$$

येथे r ची किंमत 1 च्या जवळ आहे म्हणजे हा घनिष्ठ धन सहसंबंध दर्शवितो त्यामुळे दोन्ही मॅनेजरने नोकरी करणाऱ्या व्यक्तिमध्ये दिलेल्या क्रमामध्ये कमी साम्यता पहावयास मिळते.

उदाहरण 17 : वेग-वेगळ्या ब्रांडच्या मोबाईल फोनची विक्री करणाऱ्या एका विविध शाखा असणाऱ्या दुकानाच्या मालकाने मोबाईल फोनच्या निष्णात व्यक्तिंना 10 वेगवेगळे मोबाईल फोनचा कॅमेरा आणि त्याच्या बॅटरीची कार्यक्षमता तपासण्यासाठी त्याला क्रम देण्याचे काम सोपविले आणि त्या निष्णात व्यक्तिद्वारा वेग-वेगळ्या ब्रांडच्या मोबाईलला मिळालेला क्रम खालीलप्रमाणे आहे.

मोबाईल फोन	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
कॅमेरासाठी क्रम	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
बॅटरीसाठी क्रम	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

ह्या माहितीवरून मोबाईलचा कॅमेरा आणि बॅटरीची कार्यक्षमतामधील क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

येथे $n = 10$ आणि क्रम दिलेलाच आहे. त्यावरून क्रमांक सहसंबंधांक शोधण्यासाठी खालीलप्रमाणे कोष्टक तयार करूया.

मोबाईल फोन	**कॅमेरासाठी**	**बॅटरीसाठी R_x**	$d = R_x - R_y$ R_y	d^2
A	3	6	–3	9
B	5	4	1	1
C	8	9	–1	1
D	4	8	–4	16
E	7	1	6	36
F	10	2	8	64
G	2	3	–1	1
H	1	10	–9	81
I	6	5	1	1
J	9	7	2	4
एकूण	–	–	**0**	**214**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(214)}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{1284}{990}$$

$$= 1 - 1.2970$$

$$= -0.2970$$

$$\therefore\ r \simeq -0.30$$

येथे r ची किंमत ऋण आणि 0 च्या जवळ आहे त्यामुळे ते आंशिक ऋण सहसंबंध दर्शवितात. त्यामुळे सांगू शकतो की युवकांच्या मते त्यांनी तपासेल्या मोबाईल फोनचा कॅमेरा कार्यक्षम असेल, तर त्याची बॅटरी कमी कार्यक्षम असते. जेव्हा बॅटरी कार्यक्षम असते तेव्हा कॅमेरा कमी कार्यक्षम असतो.

उदाहरण 18 : एका शाळेतील प्रिन्सिपालांनी शाळेतील बालकांच्या गणिताचे ज्ञान आणि इतिहास विषयाचा तपशील लक्षात ठेवण्यासाठीचा वेळ जाणण्यासाठी पाच विद्यार्थ्यांचा एक निदर्श घेऊन त्याची दोन्ही विषयांची एक कसोटी घेतली. ह्या पाच विद्यार्थ्यांना गणित, इतिहास विषयांत मिळविलेल्या गुणांच्या आधारे खालीलप्रमाणे क्रम देण्यात आला. ह्या माहितीवरून दोन्ही विषयातील क्रमामधील क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

विद्यार्थी	A	B	C	D	E
गणितातील क्रम	2	5	1	4	3
इतिहासातील क्रम	4	1	5	2	3

येथे $n=5$ आणि क्रम दिलेलाच आहे त्यामुळे क्रमांक सहसंबंधांक शोधण्यासाठी खालीलप्रमाणे कोष्टक तयार करू या.

विद्यार्थी	R_x	R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	2	4	–2	4
B	5	1	4	16
C	1	5	–4	16
D	4	2	2	4
E	3	3	0	0
एकूण	–	–	**0**	**40**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(40)}{5(25-1)}$$

$$= 1 - \frac{240}{120}$$

$$= 1 - 2$$

$$\therefore \; r = -1$$

अशाप्रकारे पाच विद्यार्थ्यांचा गणित आणि इतिहासातील देखाव एकदम विरूद्ध दिशेत आहे त्यामुळे $r=-1$ मिळतो.

उदाहरण 19 : एका संगीत स्पर्धेत पाच गायक A, B, C, D आणि E यांची त्याच्या गाण्याच्या कुशलतेच्या आधारे दोन निर्णायक मूल्यांकन करतात. पाच गायकांचा क्रम खालीलप्रमाणे आहे.

क्रम	1	2	3	4	5
निर्णायक 1	C	A	B	E	D
निर्णायक 2	B	C	D	A	E

ह्यावरून दोन्ही निर्णायकांच्या निर्णयामधील साम्यता क्रमांक सहसंबंधांकावरून शोधा.

येथे $n=5$, पाच गायकानां मिळालेल्या क्रमानुसार दिलेली माहिती पुन्हा खालीलप्रमाणे रचना येईल.

गायक	A	B	C	D	E
निर्णायक 1 ने दिलेला क्रम	2	3	1	5	4
निर्णायक 2 ने दिलेला क्रम	4	1	2	3	5

गायक	R_x	R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	2	4	–2	4
B	3	1	2	4
C	1	2	–1	1
D	5	3	2	4
E	4	5	–1	1
एकूण	–	–	**0**	**14**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(14)}{5(25-1)}$$

$$= 1 - \frac{84}{120}$$

$$= 1 - 0.7$$

$$\therefore \ r = 0.3$$

येथे r ची किंमत धन आणि 0 च्या जवळ आहे त्यामुळे आंशिक धनसंबंध दर्शवितो. त्यामुळे असे म्हणू शकतो की दोन्ही निर्णायकाची सहमती कमी म्हणजे अभिप्राय प्रमाणात वेगळे पडतात.

उदाहरण 20 : एक शाळेच्या आंकडाशास्त्र आणि नामा पद्धती विषयाच्या शिक्षकांनी त्याच्या शाळेतील विद्यार्थ्यांमधून आठ विद्यार्थ्यांचा निदर्श घेऊन दोन्ही विषयांत विद्यार्थ्यांच्या आवडीमधील संबंध समजण्यासाठी खालीलप्रमाणे माहिती एकत्र केली.

विद्यार्थी	1	2	3	4	5	6	7	8
आंकडाशास्त्राचे गुण x	78	36	98	25	75	82	90	62
नामा पद्धतीचे गुण y	84	51	91	60	68	62	86	55

ह्या माहितीवरून विद्यार्थ्यांना मिळणाऱ्या आंकडाशास्त्राचे गुण आणि नामुचे गुण यामधील क्रमांक सहसंबंधांक सांगा.

येथे $n = 8$ आणि आपणास संख्यात्मक चल (दोन्ही विषयाचे गुण) दिलेले आहे. त्यामुळे सर्वप्रथम दोन्ही विषयाचे गुणानुसार क्रम द्यावा लागेल.

आंकडाशास्त्रात रोल नंबर 3 च्या विद्यार्थ्याला सर्वात जास्त 98 गुण त्यामुळे त्याला क्रम 1 देण्यात आला आहे त्याचप्रमाणे रोल नंबर 7 च्या विद्यार्थ्याला 90 गुण असल्यामुळे त्याला क्रम 2 अशाप्रकारे एकानंतर एक विद्यार्थ्यांना क्रम देण्यात आला आहे. त्याचप्रमाणे नामा पद्धतीच्या गुणाच्या आधारे देखील विद्यार्थ्यांना क्रम देण्यात आला आहे.

आता खालीलप्रमाणे कोष्टक बनवू या :

रोल नंबर	आंकडाशास्त्र		नामा पद्धती		$d = R_x - R_y$	d^2
	गुण	क्रम R_x	गुण	क्रम R_y		
1	78	4	84	3	1	1
2	36	7	51	8	–1	1
3	98	1	91	1	0	0
4	25	8	60	6	2	4
5	75	5	68	4	1	1
6	82	3	62	5	–2	4
7	90	2	86	2	0	0
8	62	6	55	7	–1	1
एकूण	–	–	–	–	**0**	**12**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(12)}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{72}{504}$$

$$= 1 - 0.1429$$

$$= 0.8571$$

$$\therefore \ r \simeq 0.86$$

येथे r ची किंमत 1 च्या खूप जवळ आहे त्यामुळे सांगता येईल की आंकडाशास्त्र आणि नामा पद्धतीच्या गुणावरून मिळविलेल्या क्रमामध्ये गाढ धन सहसंबंध आहे. म्हणजे की सामान्यपणे एखादा विद्यार्थी आंकडाशास्त्रात आधिक (कमी) गुण मिळविले असेल तर तो नामा पद्धतीत ही गुण जास्त (कमी) मिळवितो. (नेहेमी प्रत्येक विद्यार्थ्यांच्या बाबतीत असे होते असेही नाही.)

अवलोकनात गांठ (Tie) (जेव्हा अवलोकने समान असतील) :

जेव्हा चल X किंवा Y किंवा दोन्ही चलाच्या अवलोकनांच्या काही किंमती समान असतील त्यावेळी अशा अवलोकनांना क्रम देण्याची समस्या आपणास उदभवते. जेव्हा X किंवा Y चलाची अवलोकने समान असतील तेव्हा आपण गांठ (Tie) उदभवली असे म्हणू या. अशा वेळी पुनरावर्तीत होणाऱ्या सर्वच अवलोकनांना त्याच्या अनुरूप क्रमाची सरासरी (मध्यक) एवढा क्रम गांठमधील प्रत्येक अवलोकनाला देण्यात येतो आणि त्यानंतर येणाऱ्या अवलोकनांना सरासरी क्रमात उपयोग घेतलेल्या शेवटच्या क्रमातील नंतरचा क्रम देण्यात येतो. आपण एक उदाहरण घेऊन हे समजावून घेऊ. समजा एका चलाची अवलोकने 37, 60, 42, 78, 42, 50, 66, 42, 60 आहेत. येथे सर्वात मोठे अवलोकन 78 आहे, त्यामुळे त्यास आपण क्रम 1 देऊ या. त्यानंतरचे अवलोकन 66 ला क्रम 2 देऊ या. आता त्यानंतरचे अवलोकन 60 चे दोन वेळा पुनरावर्तन होते. त्यामुळे त्याचा अनुरूप क्रमा (क्रम 3 आणि 4) ची सरासरी $\frac{3+4}{2} = 3.5$ हा प्रत्येक अवलोकन (60) ला देऊ. त्यानंतरचा अवलोकन 50 आहे त्याला आपण 5 क्रम देऊ या. कारण 3 आणि 4 चा या आधी उपयोग झालेला आहे. त्यानंतरचे अवलोकन 42 चे तिन वेळा पुनरावर्तन होते. त्याचा अनुरूप क्रमाची (क्रम 6, क्रम 7, क्रम 8) सरासरी $\frac{6+7+8}{3} = 7$ हा प्रत्येक अवलोकन (42) ला देण्यात येईल. आता शेवटचे अवलोकन 37 ला क्रम 9 देण्यात येईल, कारण क्रम 6, क्रम 7, क्रम 8 याआधी उपयोगात घेतला आहे. याप्रमाणे दुसऱ्या चलाच्या किंमतीनाही असाच क्रम देण्यात यावा.

आता जेव्हा गांठ पडते (काही अवलोकने समान असतील) तेव्हा क्रमांक सहसंबंधांकची मोजणी करण्याच्या सूत्रात सुधारणा करण्याची आवश्यकता असते. अशी सुधारणा 'CF' (Correction Factor) ने करावयाचा असतो.

'CF' शोधण्यासाठी प्रत्येक पुनरावर्तीत अवलोकनांच्या प्रति समूह $\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$ पद Σd^2 मध्ये मिळविण्यात येते. येथे m = अवलोकनांची पुनरावर्तीत संख्या. अशा पुनरावर्तीत अवलोकनांच्या समूहासाठी मिळविलेले $\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$ पदाच्या बेरजेला 'CF' म्हणतात. म्हणजे $CF = \Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$.

अशाप्रकारे जेव्हा क्रम देण्यात गांठ उत्पन्न होते (काही अवलोकने समान असतील) तेव्हा क्रमांक सहसंबंधांकाचे सूत्र खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

येथे सुधारणा (CF) = $\Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$

आणि m = अवलोकनांची पुनरावर्तन संख्या.

उदाहरण 21 : उदाहरण 5 मध्ये दिलेल्या तपशीलावरून क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

आपण याआधी समजल्याप्रमाणे दोन्ही चलांना क्रम देऊ. येथे Y चलात अवलोकन 75 चे दोन वेळा पुनरावर्तन झालेले आहे. त्यामुळे सर्वात मोठे अवलोकन 79 ला क्रम 1 दिल्यावर त्यानंतर येणारे अवलोकन 75 ला क्रम 2 आणि 3 ची सरासरी $\frac{2+3}{2} = 2.5$ क्रम प्रत्येकास देऊ.

आता खालीलप्रमाणे कोष्टक तयार करू या.

	वाचन (तास) x	X चा क्रम R_x	गुण y	Y चा क्रम R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
	25	7	65	7	0	0
	38	2	75	2.5	–0.5	0.25
	30	5	68	6	–1	1
	28	6	70	5	1	1
	34	4	72	4	0	0
	40	1	79	1	0	0
	36	3	75	2.5	0.5	0.25
एकूण	–	–	–	–	**0**	**2.5**

'CF' मिळविण्याची मोजणी खालीलप्रमाणे आहे.

पुनरावर्तित अवलोकन	अवलोकनाचे किती वेळा पुनरावर्तन झाले ती संख्या (m)	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
75	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
–	–	$\text{CF} = \Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right) = \mathbf{0.5}$

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6[2.5 + 0.5]}{7(49-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(3)}{336}$$

$$= 1 - \frac{18}{336}$$

$$= 1 - 0.0536$$

$$= 0.9464$$

$$\therefore\ r \simeq 0.95$$

नोंद : येथे लक्षात येते की स्पियरमॅनची क्रमांक सहसंबंध पद्धतीते मिळविलेली r ची किंमत ही उदाहरण 5 मध्ये मिळविलेल्या कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीने मिळविलेल्या r ची किंमत वेगळी आहे.

उदाहरण 22 : विद्यार्थ्यांची अर्थशास्त्राची समज आणि नृत्य कलेमधील संबंध समजण्यासाठी आठ विद्यार्थ्यांचा निदर्श घेऊन त्याची कसोटी घेण्यात आली त्यात मिळविलेले गुण खालीलप्रमाणे आहे. ह्या माहितीवरून दोन्ही विषयातील गुणामधील क्रमांक सहसंबंधांकाची मोजणी करा.

अर्थशास्त्रातील गुण	60	30	10	20	30	50	30	40
नृत्य कलेतील गुण	80	20	60	40	12	28	20	15

अर्थशास्त्रातील गुणाच्या आधारे क्रम दिल्यास सर्वात जास्त गुण 60 आहे त्याला क्रम 1, 50 गुणानां क्रम 2, 40 क्रमाला गुण 3 होईल आता 30 गुणांचे तिन वेळा पुनरावर्तन झालेले असल्याने त्यास अनुरूप क्रमा (क्रम 4, क्रम 5, क्रम 6) ची सरासरी $\frac{4+5+6}{3}=5$ हा प्रत्येक 30 गुणाचा क्रम असेल त्यानंतरच्या 20 गुणाचा क्रम 7 आणि सर्वात लहान शेवटच्या 10 गुणाचा क्रम 8 असेल. त्याचप्रमाणे नृत्य कलेतील गुणाच्या आधारे सर्वात जास्त गुण 80 ला क्रम 1, 60 गुणाला क्रम 2, 40 गुणाला क्रम 3, 28 गुणाला क्रम 4. आता गुण 20 चे दोनवेळा पुनरावर्तन झालेले आहे त्यामुळे त्याला अनुरूप क्रमा (क्रम 5, क्रम 6) ची सरासरी $\frac{5+6}{2}=5.5$ हा प्रत्येक 20 गुणाचा क्रम असेल. त्यानंतरच्या 15 गुणाला क्रम 7 आणि शेवटच्या सर्वात कमी गुण 20 ला क्रम 8 असेल.

आता खालीलप्रमाणे कोष्टक बनवू.

	अर्थशास्त्रातील गुण x	**X चा क्रम R_x**	**नृत्यकलेतील गुण y**	**Y चा क्रम R_y**	**$d = R_x - R_y$**	**d^2**
	60	1	80	1	0	0
	30	5	20	5.5	–0.5	0.25
	10	8	60	2	6	36
	20	7	40	3	4	16
	30	5	12	8	–3	9
	50	2	28	4	–2	4
	30	5	20	5.5	–0.5	0.25
	40	3	15	7	–4	16
एकूण	–	–	–	–	**0**	**81.5**

'CF' मिळविण्याची मोजणी खालीलप्रमाणे.

पुनरावर्तीत अवलोकन	**अवलोकन किती वेळा पुनरावर्तीत झाली ती संख्या (*m*)**	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
30	3	$\left(\frac{3^3-3}{12}\right)=2$
20	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right)=0.5$
–	–	**CF = 2.5**

$$r = 1-\frac{6\left[\Sigma d^2+CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1-\frac{6[81.5+2.5]}{8(64-1)}$$

$$= 1-\frac{6(84)}{504}$$

$$= 1-\frac{504}{504}$$

$$= 1-1$$

$$= 0$$

येथे $r = 0$ मिळतो त्यामुळे असे सांगता येईल की विषयांच्या गुणाच्या क्रमामध्ये सुरेख सहसंबंधांचा अभाव आहे. म्हणजेच आपल्या समूहातील विद्यार्थ्यांना अर्थशास्त्र आणि नृत्यकलेत परीक्षा देखाव (performance) सुरेख संबंधाच्या दृष्टीते स्वतंत्र आहे.

उदाहरण 23 : एका इलेक्ट्रीक साधनांचे मार्केटिंग करणारी एजन्सी LED फिटिंग्सच्या विक्री आणि नफा यामधील संबंध समजण्यासाठी वेग-वेगळ्या इलेक्ट्रीक कंपनीच्या विक्री आणि नफ्याची माहिती खालीलप्रमाणे मिळविली. ह्या माहितीवरून विक्री (हजार एकमात) आणि नफा (लाख ₹ त) मधील क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

विक्री (हजार एकम)	25	58	215	72	58	25	90	162
नफा (लाख ₹)	65	140	500	115	65	65	220	340

येथे $n = 8$ आणि विक्रीचे अवलोकने 25 आणि 58 दोनवेळा पुनरावर्तीत होतात. नफ्याचे अवलोकन 65 तीनवेळा पुनरावर्तीत होते. त्यामुळे याआधीच्या उदाहरणात केलेल्या चर्चेप्रमाणे येथे विक्री आणि नफ्याच्या किंमतीच्या आधारे क्रम देऊन आपण खालीलप्रमाणे कोष्टक तयार करू.

	विक्री (हजार एकम) x	X चा क्रम R_x	नफा (लाख ₹) y	Y चा क्रम R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
	25	7.5	65	7	0.5	0.25
	58	5.5	140	4	1.5	2.25
	215	1	500	1	0	0
	72	4	115	5	–1	1
	58	5.5	65	7	–1.5	2.25
	25	7.5	65	7	0.5	0.25
	90	3	220	3	0	0
	162	2	340	2	0	0
एकूण	–	–	–	–	**0**	**6**

'CF' मिळविण्याची मोजणी खालीलप्रमाणे करा.

पुनरावर्तीत अवलोकन	अवलोकनाचे जेवढ्या वेळा पुनरावर्तन होते ती संख्या (m)	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
25	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
58	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
65	3	$\left(\frac{3^3-3}{12}\right) = 2$
–	–	**CF = 3**

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6[6+3]}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{54}{504}$$

$$= 1 - 0.1071$$

$$= 0.8929$$

$$\therefore \ r \simeq 0.89$$

येथे r ची किंमत 1 च्या खूप जवळ आहे त्यामुळे सांगता येईल की विक्री आणि नफ्याचा क्रमात गाढ धन संबंध आहे.

नोंद :

(1) क्रमांक R_x आणि R_y च्या फरकाची बेरीज नेहेमी शून्य होते म्हणजेच $\Sigma d = \Sigma(R_x - R_y) = 0$.

(2) जर दोन चल x आणि y च्या प्रत्येक जोडी साठी $R_x = R_y$ असेल तर d ची प्रत्येक किंमत 0 होईल त्यामुळे $\Sigma d^2 = 0$ अशावेळी r ची किंमत 1 येईल.

(3) जर x आणि y चलाचे क्रमांक परस्पराच्या उलट्या क्रमांक असेल (पहा उदाहरण 18) तर $r = -1$ होईल.

प्रवृत्ती

तुमच्या वर्गाच्या यादच्छिक पद्धतीने निवडलेल्या कोणत्याही दहा विद्यार्थ्यांनां आंकडाशास्त्र आणि अर्थशास्त्र विषयात प्रथम कसोटीत मिळविलेल्या गुणांची माहिती एकत्र करून त्यावरून दोन्ही विषयाच्या गुणांमध्ये कार्ल पियर्सन आणि स्पियरमॅनच्या पद्धतीने सहसंबंधांक शोधा आणि त्यांची तुलना करा.

उदाहरण 24 : एका ट्रान्सपोर्ट कंपनीसाठी ड्रायव्हरचा वाहन चालविण्याचा अनुभव (वर्षात) आणि त्याच्याद्वारा झालेल्या अपघाताची संख्या यामधील संबंध जाणण्यासाठी आठ ड्रायव्हरचा वाहन चालविण्याचा अनुभव (वर्ष) आणि अपघाताची संख्येला दिलेल्या क्रमावरून क्रमांकाच्या फरकाच्या वर्गाची बेरीज 126 असेल त्यावरून क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

येथे $n = 8$ आणि क्रमांकाच्या वजाबाकीच्या वर्गाची बेरीज 126 म्हणजे $\Sigma d^2 = 126$ आहे.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(126)}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{756}{504}$$

$$= 1 - 1.5$$

$$r = -0.5$$

उदाहरण 25 : एका जिल्हातील वेग-वेगळ्या शाळांमधून निवडलेल्या दहा विद्यार्थ्यांनी त्याच्या खेळाच्या प्रवृत्ती आणि सामान्य ज्ञान कौशल्य यावरून क्रम देण्यात आला त्या क्रमावरून क्रमांक सहसंबंधांक 0.2 मिळतो. नंतर लक्षात आले की एका विद्यार्थ्यांच्या दोन गुणधर्मांच्या क्रमांकाची वजाबाकी 2 एवेजी 3 घेतली गेली तर क्रमांक सहसंबंधांकाची खरी किंमत शोधा.

येथे $n = 10$

d ची चूकीची किंमत $= 3$

d ची खरी किंमत $= 2$

$$\text{आता} \quad r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$\therefore \quad 0.2 = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{10(100-1)}$$

$$\therefore \quad 0.2 = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{990}$$

$$\therefore \quad \frac{6\Sigma d^2}{990} = 1 - 0.2$$

$$\therefore \quad \frac{6\Sigma d^2}{990} = 0.8$$

$$\therefore \quad \Sigma d^2 = \frac{0.8 \times 990}{6}$$

$$\therefore \quad \Sigma d^2 = 132$$

आता फरक 2 च्या एवेजी 3 घेतला गेला त्यामुळे Σd^2 ची खरी किंमत खालीलप्रमाणे मिळेल :

$$\text{सुधारित} \quad \Sigma d^2 = 132 - (\text{चुकीचा } d)^2 + (\text{खरा } d)^2$$

$$= 132 - 3^2 + 2^2$$

$$= 132 - 9 + 4$$

$$= 127$$

$\therefore$ क्रमांक सहसंबंधांकाची खरी किंमत खालीलप्रमाणे मिळेल :

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(127)}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{762}{990}$$

$$= 1 - 0.7697$$

$$= 0.2303$$

$$\therefore r \simeq 0.23$$

स्पियरमॅनच्या क्रमांक सहसंबंधांच्या पद्धतीचे गुण आणि मर्यादा :

गुण :

(1) ही पद्धती समजण्यास सरळ आहे.

(2) क्रमांक सहसंबंधांकाची मोजणी कार्ल पियर्सनच्या सहसंबंधांकाच्या मोजणीपेक्षा सोपी आहे.

(3) गुणात्मक माहिती दिलेली असेल तेव्हा सहसंबंधांक शोधण्याची ही एकच पद्धती आहे.

(4) जेव्हा माहितीचा प्रसार आधिक असेल किंवा अंतिम अवलोकने माहितीत असतील तर कार्ल पियर्सनच्या पद्धती ऐवजी स्पियरमॅनची पद्धतीच्या उपयोगाला अग्रिमता देण्यात येते.

मर्यादा :

(1) अवलोकनांच्या मूळ किंमतीच्या ऐवजी त्याच्या क्रमांचा उपयोग होत असल्याने नेहेमी माहितीचा लोप होतो त्यामुळे ह्या पद्धतीने मिळणाऱ्या सहसंबंधांकाची किंमत कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीते मिळणारा सहसंबंधांका एवढा असूचक नसतो.

(2) जेव्हा अवलोकनांची संख्या जास्त असते आणि क्रम दिलेला नसेल तेव्हा क्रम देण्याचे काम कंटाळवाणे होते.

(3) माहिती द्विचल आवृत्ती वितरण स्वरूपात असेल तेव्हा ह्या पद्धतीचा उपयोग करत नाही. (ह्या परिस्थितीत कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीचा उपयोग होतो आणि उच्चतर कक्षेमध्ये तुम्ही त्याचा अभ्यास कराल.)

स्वाध्याय 2.3

1. दोन बाजार विश्लेषक, शेवटच्या काही काळातील केलेल्या विकासाच्या आधारे सहा कंपनींना खालीलप्रमाणे क्रम देतात.

कंपनी	A	B	C	D	E	F
विश्लेषक 1 द्वारा क्रम	5	2	1	4	3	6
विश्लेषक 2 द्वारा क्रम	6	4	3	2	1	5

त्यावरून दोन्ही विश्लेषकांच्या मूल्यांकनामधील सहसंबंधांक शोधा.

2. एका निदर्शात दिलेल्या वेग-वेगळ्या नऊ गावांना 'स्वच्छता अभियान' आणि 'बेटी बचाव अभियान' यावर केलेल्या कार्याच्या आधारे एक अधिकारी त्यांना खालीलप्रमाणे क्रम देतो.

गाव	1	2	3	4	5	6	7	8	9
स्वच्छता अभियानाचा क्रम	4	8	7	1	9	5	6	2	3
बेटी बचाव अभियानाचा क्रम	6	8	5	1	9	7	3	4	2

ह्यावरून दोन्ही अभियानाच्या कामगीरीमधील सहसंबंधांक शोधा.

3. एका राज्याच्या टाऊन प्लानिंग समितीचे केलेल्या सर्वेवरून खालील माहिती मिळते.

शहर	A	B	C	D	E
लोक संख्या (लाख)	57	45	14	18	8
वसती वाढीचा दर (दर हजाराला)	13	20	10	15	5

ह्या माहितीवरून शहराची लोक संख्या आणि वसती वाढीचा दरमधील सहसंबंधांक शोधा.

4. एका सायन्स कॉलेजच्या विद्यार्थ्यांमधून घेतलेल्या 10 विद्यार्थ्यांच्या निदर्शावरून खालील माहिती मिळाली.

विद्यार्थी	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
गणितातील गुण	39	65	62	90	82	75	25	98	36	78
आंकडाशास्त्रातील गुण	47	53	58	86	62	68	60	91	51	84

यावरून विद्यार्थ्यांनी मिळविलेल्या गणित आणि आंकडाशास्त्राच्या पात्रतेमधील सहसंबंधांक शोधा.

5. खालील दिलेल्या पति आणि पत्नी उंची विषयीच्या माहितीवरून त्याच्या उंचीतील क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

पतिची उंची (सेमी)	156	153	185	157	163	191	162
पत्नीची उंची (सेमी)	154	148	162	157	162	170	154

6. एका इंटरव्ह्यूमधील उमेदवाराचा देखावा (Performance)च्या आधारे दोन इंटरव्ह्यू घेणाऱ्यांनी खालीलप्रमाणे गुण दिलेत. त्यावरून इंटरव्ह्यू घेणाऱ्या दोन व्यक्तिच्या मूल्यांकनातील क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

उमेदवार	A	B	C	D	E	F	G	H
प्रथम व्यक्तिद्वारा दिलेले गुण	28	44	10	28	47	35	19	40
द्वितीय व्यक्तिद्वारा दिलेले गुण	32	45	25	32	41	32	24	38

7. दोन निर्णायक, दहा स्पर्धकांना एका सौंदर्य स्पर्धेत क्रम देतात. आणि त्यावरून त्यांच्या क्रमांकाच्या फरकाच्या वर्गाची बेरीज 214 मिळते त्यावरून क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

8. दहा विद्यार्थ्यांनी दोन विषयात मिळविलेल्या गुणांवरून क्रमांक सहसंबंधांक 0.5 मिळतो. नंतर लक्षात येते की, एका विद्यार्थीच्या क्रमाचा फरक 7 हवा होता, परंतु चुकीने 3 घेतला गेला. तर क्रमांक सहसंबंधांची सुधारलेली किंमत शोधा.

*

2.9 सहसंबंधांकाच्या अर्थघटनात घ्यावयाची काळजी

सहसंबंधांक हे दोन चलातील सुरेख सहसंबंधांच्या घनिष्ठतेचे माप आहे. r चे असत्य अर्थघटन दोन चलातील संबंधाविषयी आपणास गैरसमज उत्पन्न करू शकता. सावधानी स्वरूपात खालील काही मुद्दे लक्षात ठेवावे :

(1) सहसंबंधांक हे फक्त सुरेख संबंधाची घनिष्ठता दर्शविणारे माप आहे परंतु त्यामुळे दोन चलातील कार्य-कारण संबंधाविषयी काहीच माहिती मिळत नाही आणि त्यामुळे त्यावरून दोघांपैकी कोणते चल सापेक्ष (कार्य स्वरूप) आणि कोणते चल निरपेक्ष (कारण स्वरूप) ह्या विषयी माहिती मिळत नाही.

अनुभवाने सहसंबंधांकाचे अर्थघटन करता येते आणि त्यासाठी तपासकर्ताला अभ्यासासाठीच्या दोन चलाविषयी त्याच्यावर परिणाम करणाऱ्या घटकां विषयी पुरेसे ज्ञान असणे आवश्यक आहे. अशी असंख्य उदाहरण देता येतील की त्यात दोन चलामध्ये कोणताही अर्थपूर्ण संबंध नसतो परंतु दोन चलांवरील अवलोकनांवरून मोजलेल्या सहसंबंधांक $|r|$ ची किंमत 1 च्या जवळ असते. सामान्यपणे चलामधील कार्य-कारण सबंधाची पूर्ण माहिती नसल्यास r ची मोजणी करण्यात येते तेव्हा असे घडते. उदा., एका शहरातील मार्ग अपघातात मरणाऱ्या व्यक्तिची संख्या आणि त्याचवेळी तुरीडाळीचा भावी विषयी माहितीवरून त्याच्या मधील r ची किंमत 1 च्या जवळ (गाढ सहसंबंध) मिळू शकतो. परंतु येथे त्याच्यामध्ये एखादा अर्थपूर्ण संबंध असू शकत नाही. त्यामुळे ह्या प्रकारच्या सहसंबंधाला अर्थहिन (nonsense) किंवा भ्रामक (spurious) सहसंबंध म्हणतात.

(2) काहीवेळा दोन चलामधील सहसंबंध मिळणारही नाही तरीसुद्धा दुसऱ्या कारणांने $|r|$ ची किंमत 1 च्या जवळ मिळू शकते उदा., तांदूळ आणि उसाच्या उत्पादनात गाढ धन सहसंबंध पहावयास मिळतो. परंतु प्रत्यक्षपणे ह्या दोन चलात संबंध नाही. अस होण्याचे कारण दोन्ही चलावर बाह्य घटके उदा., हवामान, सिंचन पद्धती, खते वगैरेचा सानुकुल प्रभाव असू शकतो.

(3) जेव्हा $r = 0$ असेल तेव्हा आपण फक्त एवढेच म्हणू शकतो की दोन चलांमध्ये सुरेख सहसंबंध नाही. दुसऱ्या प्रकारे म्हणू शकतो की सुरेख सबंधांचा अभाव आहे. पण दोन चलांमध्ये सुरेख शिवायचा (द्विघाती किंवा दुसऱ्या प्रकारचा) सहसंबंध असू शकतो. उदा.

x	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4
y	16	9	4	1	1	4	9	16

वरील उदाहरण कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीने r शोधण्यात आला तर त्याची किंमत शून्य मिळते. त्यामुळे आपण असे अर्थघटन करू शकतो की, दोन चलामध्ये सहसंबंध नाही. परंतु हे अर्थघटन चूकीचे आहे. चल X आणि Y च्या किंमती पहाता लक्षात येते की त्यांच्यात $Y = X^2$ संबंध आढळतो. हा संबंध सुरेख नसून द्विघाती आहे. अशाप्रकारे दोन्ही चलात द्विघाती संबंध असून सुद्धा आपणास $r = 0$ मिळते. त्यामुळे ह्या उदाहरणावरून आपण समजू शकतो की $r = 0$ हा फक्त सुरेख सहसंबंध नाही असे दर्शविते. परंतु दुसऱ्या एखाद्या प्रकारचा सहसंबंध असू शकतो.

(4) जर विस्तार, वर्ग किंवा कालावधी दरम्यान माहिती मिळवायची असेल त्यासाठीच सहसंबंधांकाच्या किंमतीचे अर्थघटन मर्यादित ठेवणे योग्य असेल. त्या अर्थघटनाला असा विस्तार किंवा वर्ग किंवा कालावधीच्या बाहेरील माहितीसाठी योग्य कसोटी केल्याशिवाय लागू पडू नये अन्यथा गैरसमज उत्पन्न होतील.

उदा., एक कंपनी एका नव्या वस्तूचे उत्पादन सुरू करते आणि त्याच्या विक्रीसाठी जाहिरात करते तर सुरूवातीला सामान्यपणे गुणवत्ता चांगली असेल तरच जाहिरात खर्च वाढण्याबरोबर विक्री देखील वाढते. परंतु एका कालावधीनंतर जास्त जाहिरात खर्च करून सुद्धा त्याच्या विक्रीत खास फरक होत नाही. सुरूवातीला जाहिरात-खर्च आणि विक्रीमध्ये सामान्यपणे गाढ धन सहसंबंध पहावयास मिळतो परंतु काही काळानंतर असे घडत नाही म्हणजे जाहिरात खर्च आणि विक्रीमध्ये गाढ धन सहसंबंध आहे ते अर्थघटन त्याच्या कालावधीच्या बाहेरच्या माहितीसाठी लागू पडत नाही.

काही उदाहरणे :

उदाहरण 26 : खालील दिलेल्या परिणामावरून सहसंबंधांकाच्या किंमती शोधा.

$\boldsymbol{Cov\,(x, y) : s_x^{\,2} = 3:5}$ **आणि** $\boldsymbol{s_x : s_y = 1:2}$

येथे $Cov\,(x, y) : s_x^{\,2} = 3:5 \qquad \therefore \quad \dfrac{Cov(x, y)}{s_x^{\,2}} = \dfrac{3}{5}$

आणि $s_x : s_y = 1:2 \qquad \therefore \quad \dfrac{s_x}{s_y} = \dfrac{1}{2}$

आता $$r = \frac{Cov(x, y)}{s_x\ s_y} = \frac{Cov(x, y)}{s_x^{\,2}} \times \frac{s_x}{s_y}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$\therefore \quad r = 0.3$$

उदाहरण 27 : एका द्विचल माहितीवरून खालील परिणाम मिळालेत.

$n = 10,\ \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 72,\ s_x = 3$ आणि $\Sigma(y-\bar{y})^2 = 160$ यावरून सहसंबंधांक शोधा.

दिलेल्या माहितीवरून प्रथम s_y शोधू या.

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{160}{10}} = \sqrt{16} = 4$$

आता खालील सूत्रात आवश्यक किंमती ठेवल्यात,

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{ns_x s_y}$$

$$= \frac{72}{10(3)(4)}$$

$$= \frac{72}{120}$$

$$\therefore \quad r = 0.6$$

उदाहरण 28 : एका शिक्षणतज्ञाने मोबाईल फोनमध्ये सोशल मिडियाचा वापर आणि परिक्षेचे परिणाम यांचा संबंध शोधण्यासाठी एक प्रयोग केला. त्याने निवडलेल्या 10 विद्यार्थ्यांच्या समूहात त्यांनी शेवटच्या आठवड्यात मोबाईल फोनमध्ये 'सोशल मिडिया' वर घालवलेला वेळ x (तासात) आणि त्यानंतर लगेच घेतलेल्या 50 गुणाच्या परिक्षेतील गुण y यावरून खालील परिणाम मिळतात.

$\Sigma x = 133,\ \Sigma y = 220,\ \Sigma x^2 = 2344,\ \Sigma y^2 = 6500$ आणि $\Sigma xy = 3500$

नंतर लक्ष्यात आले की X आणि Y अवलोकनांची एक जोडी $(15, 25)$ च्या एवेजी $(13, 20)$ घेतली होती. त्यावरून X आणि Y मधील सहसंबंधांकाची खरी किंमत शोधा.

येथे $n = 10,\ \Sigma x = 133,\ \Sigma y = 220,\ \Sigma x^2 = 2344,\ \Sigma y^2 = 6500$ आणि $\Sigma xy = 3500$

चुकीची जोडी : $(13, 20)$

सत्य जोडी : $(15, 25)$

आता उपयुक्त मापांना सुधारलेल्या किंमती प्रमाणे मिळवू या.

$\Sigma x = 133 - 13 + 15 = 135$

$\Sigma y = 220 - 20 + 25 = 225$

$\Sigma x^2 = 2344 - (13)^2 + (15)^2 = 2344 - 169 + 225 = 2400$

$\Sigma y^2 = 6500 - (20)^2 + (25)^2 = 6500 - 400 + 625 = 6725$

$\Sigma xy = 3500 - (13 \times 20) + (15 \times 25) = 3500 - 260 + 375 = 3615$

आता सुधारलेल्या किंमतींना खालील सूत्रात ठेवल्यास,

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{10(3615) - (135)(225)}{\sqrt{10(2400) - (135)^2} \cdot \sqrt{10(6725) - (225)^2}}$$

$$= \frac{36150-30375}{\sqrt{24000-18225}\cdot\sqrt{67250-50625}}$$

$$= \frac{5775}{\sqrt{5775}\cdot\sqrt{16625}}$$

$$= \frac{5775}{\sqrt{96009375}}$$

$$= \frac{5775}{9798.4374}$$

$$= 0.5894$$

$$\therefore \quad r \simeq 0.59$$

उदाहरण 29 : (1) जर दोन चल X आणि Y मध्ये सहसंबंधांक 0.5 असेल तर खालील किंमती शोधा. (i) $r\ (x, -y)$ (ii) $r\ (-x, y)$ (iii) $r\ (-x, -y)$

येथे $r\ (x, y) = 0.5$

सहसंबंधांक गुणधर्म (नं. 5) वरून,

(i) $r(x,-y) = -r(x, y) = -0.5$

(ii) $r(-x, y) = -r(x, y) = -0.5$

(iii) $r(-x,-y) = r(x, y) = 0.5$

(2) जर $r(x, y) = 0.8$ असेल तर खालील $r(u, v)$ शोधा.

(i) $u = x-10$ आणि $v = y+10$

(ii) $u = \frac{x-5}{3}$ आणि $v = 2y+7$

(iii) $u = \frac{2x-3}{10}$ आणि $v = \frac{10-y}{100}$

(iv) $u = \frac{5-x}{2}$ आणि $v = \frac{5+y}{2}$

(v) $u = \frac{20-x}{3}$ आणि $v = \frac{20-y}{7}$

येथे $r(x, y) = 0.8$

सहसंबंधांकाच्या गुणधर्मावरून (4 आणि 5) u आणि v ला व्याख्याईत केल्यास $r(u,v)$ च्या किंमती X आणि Y वर आधारित असते म्हणजे की $r(u,v) = r(x, y)$ किंवा $-r(x, y)$ होईल.

(i) $r\ (x-10, y+10) = r(u,v) = 0.8$

(ii) $r\left(\frac{x-5}{3}, 2y+7\right) = r(u,v) = 0.8$

(iii) $r\left(\frac{2x-3}{10}, \frac{10-y}{100}\right) = r(u,v) = -0.8$

(iv) $r\left(\frac{5-x}{2}, \frac{5+y}{2}\right) = r(u,v) = -0.8$

(v) $r\left(\frac{20-x}{3}, \frac{20-y}{7}\right) = r(u,v) = 0.8$

उदाहरण 30 : एका MBA इन्स्टिट्यूटच्या विद्यार्थ्यांचा एका समूहाने शाळा कक्षेत अंतिम वर्षात आणि स्नातक कक्षेला अंतिम परिक्षेतील परिणाम यामधील संबंध सजण्यासाठीच्या एका प्रोजेक्ट दरम्यान त्यांनी घेतलेल्या निदर्शाच्या दहा विद्यार्थ्यांना इयत्ता 12 वीत मिळालेल्या गुणांची टक्केवारी (x) आणि स्नातक कक्षेत अंतिम वर्षात मिळविलेल्या गुणांची टक्केवारी (y) च्या माहितीवरून खालील परिणाम मिळतात.

$$\mathbf{n = 10, \Sigma(x - 65) = -2, \ \Sigma(y - 60) = 2, \ \Sigma(x - 65)^2 = 176, \ \Sigma(y - 60)^2 = 140, \Sigma(x - 65)(y - 60) = 141}$$

ह्यावरून इयत्ता 12 वी आणि स्नातक कक्षेच्या अंतिम वर्षाच्या गुणांची टक्केवारी मधील सहसंबंधांक किंमत शोधा.

येथे $\Sigma(x-65) = -2 \neq 0 \qquad \therefore \ A = 65$

$\Sigma(y-60) = 2 \neq 0 \qquad \therefore \ B = 60$

(येथे विचलनांची बेरीज शून्य नाही $\therefore \ 65 \neq \overline{x}$ आणि $60 \neq \overline{y}$)

आता $u = (x-65)$ आणि $v = (y-60)$ व्याख्याईत केल्यास.

त्यामुळे $\Sigma(x-65) = \Sigma u = -2, \ \Sigma(y-60) = \Sigma v = 2$

$\Sigma(x-65)^2 = \Sigma u^2 = 176, \ \Sigma(y-60)^2 = \Sigma v^2 = 140$

$\Sigma(x-65)(y-60) = \Sigma uv = 141$

वरील किंमतीना खालील सूत्रात ठेवल्यास,

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{10(141) - (-2)(2)}{\sqrt{10(176) - (-2)^2} \cdot \sqrt{10(140) - (2)^2}}$$

$$= \frac{1414}{\sqrt{1756} \cdot \sqrt{1396}}$$

$$= \frac{1414}{\sqrt{2451376}}$$

$$= \frac{1414}{1565.6871}$$

$$= 0.9031$$

$$\therefore \ r \simeq 0.90$$

उदाहरण 31 : किशोरवयाच्या दहा बालकांच्या वय वर्षात (X) त्याच्या प्रोटीनची दैनिक आवश्यकता ग्राममध्ये (Y) यामधील अभ्यास करण्यासाठी राज्याच्या आरोग्य विभागाने मिळविलेल्या निदर्शातून खालील माहिती मिळते.

$$\mathbf{\Sigma x = 140, \ \Sigma y = 150, \ \Sigma(x - 10)^2 = 180, \quad \Sigma(y - 15)^2 = 215, \Sigma(x - 10)(y - 15) = 60}$$

ह्यावरून **x आणि y मधील सहसंबंधांक शोधा.**

येथे $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{140}{10} = 14, \quad \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{150}{10} = 15$

आपल्या लक्षात येईल की चल x साठी विचलनाचा मध्यक $(\overline{x}=14)$ मधून घेतलेला नाही त्यामुळे उदाहरण सोडविण्यासाठी $u=(x-A)=(x-10)$ आणि $v=(y-B)=(y-15)$ व्याख्याईत करणे अनुकूल होईल.

आपणास खालील माहिती दिलेली आहे.

$\Sigma(x-10)^2=\Sigma u^2=180,\ \Sigma(y-15)^2=\Sigma v^2=215,\ \Sigma(x-10)\,(y-15)=\Sigma uv=60$

आता r च्या योग्य सूत्राचा उपयोग करण्यासाठी आपणास प्रथम Σu आणि Σv शोधावे लागतील.

$\Sigma u=\Sigma(x-10)=\Sigma x-\Sigma 10=\Sigma x-n(10)=140-10(10)=140-100=40$

$\Sigma v=\Sigma(y-15)=\Sigma y-\Sigma 15=\Sigma y-n(15)=150-10(15)=150-150=0$

$\left\{\because\ \Sigma k=\underbrace{k+k+k+\text{.........}+k}_{n \text{ वेळा}}=nk \quad \text{येथे } k \text{ अचल}\right\}$

वरील किंमतीना खालील सूत्रात ठेवल्यास,

$$r=\frac{n\Sigma uv-(\Sigma u)\,(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2}\cdot\sqrt{n\Sigma v^2-(\Sigma v)^2}}$$

$$=\frac{10\,(60)-(40)\,(0)}{\sqrt{10\,(180)-(40)^2}\cdot\sqrt{10\,(215)-(0)^2}}$$

$$=\frac{600-0}{\sqrt{1800-1600}\cdot\sqrt{2150-0}}$$

$$=\frac{600}{\sqrt{200}\cdot\sqrt{2150}}$$

$$=\frac{600}{\sqrt{430000}}$$

$$=\frac{600}{655.7439}$$

$$=0.9150$$

$$\therefore\quad r\simeq 0.92$$

उदाहरण 32 : दोन वेग-वेगळ्या विषयांमधील संबंध समजण्यासाठी एका शाळेच्या बालकातून सात विद्यार्थ्यांचा एक निदर्श घेण्यात आला. ह्या सात विद्यार्थ्यांनी दोन विषयात मिळविलेल्या गुणांच्या माहितीवरून त्यांना दिलेल्या क्रमाच्या फरकाच्या वर्गाची बेरीज 25.5 मिळते. याशिवाय, कुठल्यातरी एका विषयात दोन विद्यार्थ्यांचे गुण सारखे आहेत आणि उरलेले सर्व गुण वेग-वेगळे आहेत त्यावरून क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

येथे $n=7$ आणि $\Sigma d^2=25.5$

दोन विद्यार्थ्यांनां एका विषयात सारखे गुण आहेत. $(\therefore\ m=2)$ त्यामुळे आपण सांगू शकतो की, अवलोकनांना क्रम देण्यात गांठ पडते. त्यामुळे $\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$ पदाला Σd^2 मध्ये एक वेळा मिळवावे लागेल, त्यामुळे 'CF' ची किंमत मिळते.

सुधारित CF $= \left(\frac{m^3-m}{12}\right) = \left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6[25.5+0.5]}{7(49-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(26)}{336}$$

$$= 1 - \frac{156}{336}$$

$$= 1 - 0.4643$$

$$= 0.5357$$

$$\therefore \quad r \simeq 0.54$$

सारांश

- **सहसंबंध :** दोन चलात एकाच वेळी फरक होत असेल आणि त्यामध्ये प्रत्यक्ष किंवा अप्रत्यक्ष कार्यकारणाचा संबंध असेल.
- **सुरेख सहसंबंध :** दोन चलाच्या किंमतीत होणारा फरक अचल प्रमाणात असेल, म्हणजे की दोन सहसंबंधित चलाच्या किंमतीची जोडी दर्शविणारे बिंदू एका सुरेखेवर असतात.
- **धन सहसंबंध :** सहसंबंधित चलाच्या किंमतीतील फरक एकाच दिशेत असतो.
- **ऋण सहसंबंध :** सहसंबंधित चलाच्या किंमतीतील फरक परस्परांच्या विरूद्ध दिशेत असतो.
- **सहसंबंधांक :** दोन चलामधील सुरेख सहसंबंधांच्या घनिष्ठतेच्या संख्यात्मक माप r म्हणजे सहसंबंधांक.
- **विकिर्ण आकृती :** सुरेख सहसंबंध आणि त्याचा प्रकार (धन किंवा ऋण) समजण्याची एक सरळ पद्धती.
- **कार्ल पियर्सनची पद्धती :** सर्वच प्राप्तांकाचा उपयोग करून दोन चलामधील सुरेख सहसंबंधाचे आणि घनिष्ठतेचे माप (r) शोधण्याची श्रेष्ठ पद्धती.
- **स्पियरमॅनची क्रमांक सहसंबंधाची पद्धती :** गुणात्मक चलांमधील सहसंबंधांक शोधण्याची पद्धती. जेव्हा संख्यात्मक चलाचा प्रसार आधिक असेल, तेव्हा सहसंबंधांक मिळविण्याची ईच्छनीय पद्धती.
- दोन चलांमधील कार्यकारणाचा संबंध प्रस्थापित (सिद्ध) करता येत नसेल, परंतु तो आहे ह्या समजूती समोर सहसंबंधांचा अभ्यास करण्यात येतो.
- $r = 0$ हे फक्त सुरेख सहसंबंधाचा अभाव आहे. हे सुचविते, परंतु इतर प्रकारचा सहसंबंध असू शकतो.

प्रकरणाची एक दृष्टीक्षेप

सहसंबंध

- **सुरेख सहसंबंध**
  - **पद्धती**
    - **विकिर्ण आकृतीची पद्धती** — सहसंबंधाचा फक्त प्रकारच सांगता येईल.
    - **कार्ल पियर्सनची पद्धती** — सहसंबंधांक शोधण्याची श्रेष्ठ पद्धती
    - **स्पियरमॅनची पद्धती** — गुणात्मक चलांमधील सहसंबंधांक शोधण्याची पद्धती
- **वक्रीय सहसंबंध**

सूत्राची यादी

कार्ल पियर्सनची पद्धती :

सहसंबंधांक $= r$

(1) $r = \dfrac{\text{सहविचरण}}{(X \text{चे प्रवि})(Y \text{चे प्रवि})} = \dfrac{Cov(X,Y)}{s_x \cdot s_y}$

येथे $Cov(X,Y) = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \dfrac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n}$

$s_x = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$ અને $s_y = \sqrt{\dfrac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}}$

(2) $r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$

(3) $r = \dfrac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$

(4) $r = \dfrac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$ येथे $u = x - A$ किंवा $\dfrac{x-A}{c_x}$, $v = y - B$ किंवा $\dfrac{y-B}{c_y}$

$$\left.\begin{array}{l} (5)\quad r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{n \cdot s_x \cdot s_y} \\[2ex] (6)\quad r = \dfrac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y} \end{array}\right\}$$ विशेषत: लहान प्रश्नांसाठी.

स्पियरमॅनची क्रमांक सहसंबंधाची पद्धती :

(7) $r = 1 - \dfrac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$ जेव्हा अवलोकनाचे पुनरावर्तन होत नसेल.

(8) $r = 1 - \dfrac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$ जेव्हा काही अवलोकनाचे पुनरावर्तन होत असेल.

येथे $d = x$ चा क्रम $-$ y चा क्रम $= R_x - R_y$

$CF =$ सुधारणा $= \Sigma\left(\dfrac{m^3-m}{12}\right)$

$m =$ एखाद्या अवलोकनाचे जेवढ्या वेळा पुनरावर्तन होते ती संख्या.

स्वाध्याय 2

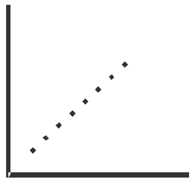
विभाग A

खालील दिलेल्या वैकल्पिक प्रश्नांसाठी सत्य विकल्प निवडा :

1. सहसंबंधाच्या संदर्भात ज्या आलेखात जोडीयुक्त (x,y) दर्शविण्यात येते त्या आलेखाला तुम्ही काय म्हणाल ?

(a) स्तंभालेख (b) वर्तुळ आकृती (c) विकिर्ण आकृती (d) आवृत्ति वक्र

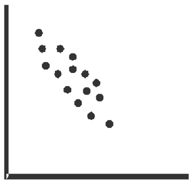
2. जर X आणि Y मध्ये खालील दर्शविल्याप्रमाणे आकृती मिळत असेल तर ते दोन चल कसा सहसंबंध दाखवितात ?



(a) संपूर्ण धन सहसंबंध (b) आंशिक धन सहसंबंध

(c) संपूर्ण ऋण सहसंबंध (d) आंशिक ऋण सहसंबंध

3. जर X आणि Y मध्ये खालीलप्रमाणे विकिर्ण आकृती मिळत असेल, तर दोन्ही चलात कोणता सहसंबंध आढळतो ?



(a) संपूर्ण धन सहसंबंध (b) आंशिक धन सहसंबंध

(c) संपूर्ण ऋण सहसंबंध (d) आंशिक ऋण सहसंबंध

4. विकिर्ण आकृतीत सर्वच बिंदू एकाच सुरेखेवर आलेले असतील तर r ची किंमत काय होईल ?

(a) 0 (b) 1 किंवा -1 (c) 0.5 (d) -0.5

5. सहसंबंधांक r चा विस्तार काय आहे ?

(a) $-1 < r < 1$ (b) 0 ते 1 (c) $-1 \le r \le 1$ (d) -1 ते 0

6. जर चल 'वजन'चा एकम किग्रा आणि चल 'उची'चा एकम सेमी असेल, तर त्यामधील सहसंबंधांकच्या एकम विषयी काय सांगाल ?

(a) किग्रा (b) सेमी (c) किमी (d) एकम नसेल

7. जर दोन चलामध्ये अचल प्रमाणात परस्परांच्या विरूद्ध दिशेत फरक होत असेल, तर त्या दोन चलांमध्ये कोणत्या प्रकारचा सहसंबंध पहावयास मिळतो ?

(a) आंशिक धन सहसंबंध (b) संपूर्ण ऋण सहसंबंध

(c) संपूर्ण धन सहसंबंध (d) आंशिक ऋण सहसंबंध

8. कार्ल पियर्सनच्या सहसंबंधांक मोजण्याच्या सूत्रात अंश काय दर्शवितो ?

(a) X आणि Y चा विचरणाचा गुणाकार (b) X आणि Y चे सहविचरण

(c) X चे विचरण (d) Y चे विचरण

9. खालीलपैकी r ची कोणती किंमत शक्य नाही ?

(a) 0.99 (b) -1.07 (c) -0.85 (d) 0

10. जर $u = \frac{x-A}{c_x}$, $v = \frac{y-B}{c_y}$, $c_x > 0, c_y > 0$ असेल, तर खालीलपैकी कोणते विधान सत्य असेल ?

(a) $r(x, y) \neq r(u, v)$ (b) $r(x, y) > r(u, v)$ (c) $r(x, y) = r(u, v)$ (d) $r(x, y) < r(u, v)$

11. जर $r(x, y) = 0.7$ असेल, तर $r(x+0.2, y+0.2)$ ची किंमत किती होईल ?

(a) 0.7 (b) 0.9 (c) 1.1 (d) –0.7

12. जर $r(-x, y) = -0.5$ असेल, तर $r(x, -y)$ ची किंमत किती होईल ?

(a) 0.5 (b) –0.5 (c) 1 (d) 0

13. जर $\Sigma d^2 = 0$ असेल तर, क्रमांक सहसंबंधांकाची किंमत किती असेल ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) 0.5

14. क्रमांक सहसंबंधांकाच्या पद्धतीत जर प्रत्येक अवलोकनाच्या जोडीसाठी प्रचलित संकेतात $R_x = R_y$ असेल, तर r ची किंमत काय असेल ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) 0.1

15. क्रमांक सहसंबंधाच्या पद्धतीत दोन चलामधील फरकाच्या बेरजेला काय म्हणतात ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) कोणतीही वास्तविक संख्या

16. क्रमांक सहसंबंध पद्धतीत जर दोन चल परस्पराच्या उलट्या क्रमात असतील, तर r ची किंमत काय होईल ?

(a) $r = 0$ (b) $r = -1$ (c) $r = 1$ (d) $r = 0.1$

17. क्रमांक सहसंबंधात पुनरावर्तीत होणाऱ्या प्रत्येक अवलोकनासाठी प्रचलित संकेत Σd^2 मध्ये कोणते पद मिळविण्यात येते ?

(a) $\frac{m^2-1}{12}$ (b) $\frac{m^3-m}{12}$ (c) $\frac{6m^3-m}{12}$ (d) $n(n^2-1)$

18. जेव्हा भाव स्थिर असतील तेव्हा विकलेल्या एकमाची संख्या आणि त्यामुळे होणारे उत्पन्न यात कोणत्या प्रकारचा सहसंबंध असेल ?

(a) संपूर्ण धन (b) आंशिक धन (c) संपूर्ण ऋण (d) आंशिक ऋण

विभाग B

खालील प्रश्नांची एका वाक्यात उत्तरे द्या :

1. सहसंबंधाची व्याख्या द्या.

2. सहसंबंधांकाची व्याख्या द्या.

खालील दिलेले प्रश्न 3 आणि 6 मध्ये चलाच्या जोडीमध्ये धन सहसंबंध आहे का ऋण सहसंबंध आहे ते सांगा.

3. जीवन विम्याच्या एका योजने खाली विमा काढतावेळी प्रौढ वयाच्या व्यक्तिचे वय आणि जीवन विमा प्रिमियम.

4. एखाद्या देशातील सर्व स्वीकृत वस्तूचे शेवटच्या पाच वर्षातील वार्षिक विक्री आणि त्यावरील होणारा नफा.
5. एखाद्या देशाच्या सामान्य व्यक्तिचे उत्पन्न स्थिर असेल तेव्हा फुगवट्याचा दर आणि त्या देशातील सामान्य व्यक्तिची खरेदी शक्ति.
6. समुद्र सपाटीपासून स्थळाची उंची आणि हवेतील ऑक्सिजनचे प्रमाण.
7. क्रूड ऑईलची वार्षिक आयात आणि त्या काळात होणाऱ्या लग्नांची संख्या यामध्ये असलेल्या सहसंबंधाविषयी काय सांगू शकाल ?
8. X आणि Y मधील सहसंबंधाक 0.4 आहे. आता X च्या प्रत्येक अवलोकनात 5 मिळविण्यात आले आणि Y च्या प्रत्येक अवलोकनामधून 10 वजा करण्यात आले तर ह्या फरकानंतर सहसंबंधांक काय होईल ?
9. विकीर्ण आकृतीच्या मर्यादा सांगा.
10. जर $n\left(n^2-1\right)$ ची किंमत Σd^2 च्या किंमतीपेक्षा 6 पट असेल तर r ची किंमत किती ?
11. जर सहविचरणाचे मूल्य ऋण असेल, तर सहसंबंधांक r चे चिन्ह काय ?

विभाग C

खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या :

1. उदाहरणासह धन सहसंबंधाचा अर्थ समजवा.
2. उदाहरणासह ऋण सहसंबंधाचा अर्थ समजवा.
3. कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीची धारणा सांगा ?
4. विकिर्ण आकृतीची व्याख्या द्या.
5. अर्थहीन सहसंबंध म्हणजे काय ?
6. कार्यकारणाचा संबंध म्हणजे काय ?
7. समजवा : संपूर्ण धन सहसंबंध.
8. समजवा : संपूर्ण ऋण सहसंबंध.
9. क्रमांक सहसंबंधाची आवश्यकता केव्हा असते ?
10. कोणत्या परिस्थितीत कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीने आणि क्रमांक सहसंबंधाच्या पद्धतीने मिळविलेले सहसंबंध समान होतील ?
11. जर $Cov(x, y)=120,\ s_x=12,\ s_y=15$ असेल तर r ची किंमत शोधा.
12. जर $\Sigma(x-\overline{x})\,(y-\overline{y})=-65,\ s_x=3,\ s_y=4$ आणि $n=10$ असेल, तर r शोधा.
13. अवलोकनांच्या 10 जोडीसाठी $\Sigma d^2=120$ तर क्रमांक सहसंबंधांकाची किंमत शोधा.

विभाग D

खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या :

1. विकिर्ण आकृती पद्धती समजवा.

2. विकिर्ण आकृती पद्धतीचे गुण आणि मर्यादा सांगा.

3. सहसंबंधांकाचे गुणधर्म लिहा.

4. कार्ल पियर्सन पद्धतीचे गुण आणि मर्यादा सांगा.

5. $r=1,\ r=-1$ आणि $r=0$ चे अर्थघटन करा.

6. स्पियरमॅनची क्रमांक सहसंबंधाची रीत समजवा.

7. स्पियरमॅनच्या क्रमांक सहसंबंध पद्धतीचे गुण आणि मर्यादा सांगा.

8. आंशिक सहसंबंधाचे अर्थघटन करताना ठेवायच्या सावधानता सांगा.

9. सहसंबंधांकाच्या अर्थघटनात ठेवावयाच्या सावधानता सांगा.

10. दोन चल पाऊस मिमी (X) आणि पिकाचे उत्पादन (क्विंटल/हेक्टर) (Y) विषयी खालील माहिती दिलेली आहे.

$n=10,\ \bar{x}=120,\ \bar{y}=150,\ s_x=30,\ s_y=40$ आणि $\Sigma xy=189000$ यावरून सहसंबंधांक शोधा.

11. अवलोकनाच्या 9 जोडीसाठी खालील माहिती मिळते.

$\Sigma x=51,\ \Sigma y=72, \Sigma x^2=315,\ \Sigma y^2=582,\ \Sigma xy=408$ तर सहसंबंधांक शोधा.

12. एका नृत्य स्पर्धेतील 8 स्पर्धकांना दोन निर्णयकानी दिलेल्या क्रमावरून खालील माहिती मिळते.

$\Sigma\left(R_x-R_y\right)^2=126$

येथे R_x आणि R_y ह्या दोन निर्णयाकानी स्पर्धाकाना दिलेला क्रम आहे. त्यावरून स्पियरमॅनचा क्रमाक सहसंबंधांक शोधा.

13. नोकरीसाठी आलेल्या पाच उमेदवारानी इंटरव्यूच्या आधारे दोन निर्णयाकांनी दिलेला क्रम (3, 5), (5, 4), (1, 2), (2, 3) आणि (4, 1) आहे त्यावरून क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

विभाग E

खालील उकली मिळवा :

1. एका रोगाच्या साथीत नाकावर लावावयाच्या मास्कच्या किंमती आणि त्यांची मागणी यातील संबंध एकत्र केलेली माहिती खालीलप्रमाणे आहे.

भाव (₹)	38	45	40	42	35
मागणी (एकम)	103	92	97	98	100

ह्यावरून मास्कचा भाव आणि मागणीमधील कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीने सहसंबंधांक शोधा.

2. एका अनुस्नातक कक्षेच्या अभ्यासात विद्यार्थ्यांना मानव संसाधन संचालन आणि व्यक्तित्व विकासासारख्या विषयात त्यांच्या क्षमतेमधील संबंध समजण्यासाठी पाच विद्यार्थ्यांचा निदर्श घेऊन खालील माहिती मिळवली.

विद्यार्थी	1	2	3	4	5
मानव संसाधन संचालनात गुण	45	25	40	20	45
व्यक्तित्व विकासात गुण	47	23	17	35	48

ह्या माहितीवरून दोन्ही विषयामधील गुणामधील कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीने सहसंबंधांक शोधा.

3. एक विक्रेता वेग-वेगळ्या बँडच्या लिपस्टीक लोकप्रियतेनुसार शोकेसमध्ये प्रदर्शित करू इच्छितो. त्यामुळे वेग-वेगळ्या लिपस्टिकला क्रम देण्यासाठी दोन निष्णात प्रेयल आणि निशीला आमंत्रित करतो.

लिपस्टीक	A	B	C	D	E	F	G
प्रेयलने दिलेला क्रम	5	6	7	1	3	2	4
निशीने दिलेला क्रम	5	7	6	2	1	4	3

यावरून दोन्ही निष्णातानी दिलेल्या निर्णयामधील समानता समजण्यासाठी क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

4. अमदावाद शहरात चहाचा भाव आणि कॉफीचा भाव मधील संबंध समजण्यासाठी एक व्यापारी शेवटच्या सहा महिन्यातील चहा आणि कॉफीच्या भावाविषयी खालील माहिती मिळवितो.

चहाचा भाव प्रति किग्रा ₹ त	340	370	450	320	300	360
कॉफीचा भाव प्रति 100 ग्राम ₹ त	190	215	200	180	163	175

ह्यावरून चहा आणि कॉफीच्या भावाविषयी क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

5. एका विदेशी फळाची स्थानिक बाजारात खूपच अनिश्चित मागणी पहावयास मिळते. फळाचा एक विक्रेता त्या फळाचा भाव आणि पुरवठा यामधील संबंध तपासण्यासाठी खालीलप्रमाणे शेवटच्या दहा महिन्याचा सरासरी भाव आणि पुरवठा यांचा तपशील मिळवितो.

सरासरी प्रति एकम भाव ₹ त	65	68	43	38	77	48	35	30	25	50
पुरवठा (शंभरएकम)	52	53	42	60	45	41	37	38	25	27

ह्या माहितीवरून सरासरी भाव आणि पुरवठा यामधील क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

6. थोड्या-थोड्या वेळाने विद्यार्थ्यांची परिक्षा घेतली तर आलेला परिणाम यातील संबंध समजण्यासाठी एक शिक्षकाने शेवटच्या दोन आठवड्यात घेतलेल्या दोन परिक्षेच्या परिणामावरून सात विद्यार्थ्यांना खालीलप्रमाणे क्रम दिला.

विद्यार्थी	A	B	C	D	E	F	G
प्रथम परिक्षेचा क्रम	5	1	2	3.5	3.5	7	6
द्वितीय परिक्षेचा क्रम	7	1	4	6	5	3	2

ह्यावरून दोन्ही परिक्षेच्या परिणामामधील साम्यता समजण्यासाठी क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

विभाग F

खालील उकली मिळवा :

1. आठ जिल्हयातील खतांचा वापर (टनात) आणि उत्पादकता (टनात)चा विषयीची माहिती खालीलप्रमाणे दिलेली आहे.

खत (टनात)	15	18	20	25	29	35	40	38
उत्पादकता (टनात)	85	93	95	105	115	130	140	145

कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीने सहसंबंधांक शोधा.

2. एका मोठ्या शहरात सहा बालकांनी व्हिडिओ-गेम्स खेळण्यासाठी वापरलेले आठवड्यात सरासरी तास एक परिक्षेत त्यांनी मिळविलेले मूल्यांकन गुण (Grade Point) याची खालील दिलेल्या माहितीवरून कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीने सहसंबंधांक शोधा.

व्हिडीओ-गेम्स खेळण्यास आठवड्यातील पसार केलेले सरासरी तास	43	47	45	50	40	51
परिक्षेत मिळविलेले मूल्यांकन गुण	5.2	4.9	5.0	4.7	5.4	4.3

3. खालील माहितीवरून लोकसंख्या घनता (प्रति चौरस किमी) आणि मृत्युदर (प्रति हजार) मधील कार्ल पियर्सनने पद्धतीते सहसंबंधांक शोधा.

शहर	A	B	C	D	E	F	G
लोकसंख्या घनता (प्रति चौरस किमी)	750	600	350	500	200	700	850
मृत्यूदर (प्रति हजार)	30	20	15	20	10	25	50

4. इलेक्ट्रिक पंख्याचे उत्पादन करणाऱ्या कंपन्यांचा जाहिरात खर्च आणि विक्री यामधील संबंधाचा अभ्यास करण्यासाठी खालील माहिती एकत्र करण्यात आली. ह्या माहितीवरून कंपनीचा जाहिरात खर्च आणि विक्री मधील सहसंबंधांक कार्ल पियर्सनच्या पद्धतीने मिळवा.

कंपनी	A	B	C	D	E	F
जाहिरात खर्च (लाख ₹ त)	140	120	80	100	80	180
इलेक्ट्रिक पंख्यांची विक्री (करोड ₹ त)	35	45	15	40	20	50

5. एक डॉक्टर त्याच्या संशोधन कार्यासाठी बालकाच्या जन्माच्यावेळी बालक आणि त्याच्या मातेच्या वजनामधील संबंध समजण्यासाठी एका विस्तारातील काही मेटर्निटी होममधून सात माता आणि त्याच्या बालकाच्या वजनाविषयी माहिती मिळवितो.

मातेचे वजन (किग्रा)	59	72	66	64	77	66	60
बालकाचे वजन (किग्रा)	2.5	3.4	3.1	2.7	2.8	2.3	3.0

ह्या माहितीवरून माता आणि बालकाच्या वजनामधील क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

6. अमदावादचे दिवसाचे तापमान आणि आईस्क्रीमच्या विक्रीमधील संबंध समजण्यासाठी खालील माहिती मिळविण्यात आली त्यावरून क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

महत्तम तापमान (सेल्सियस)	35	42	40	39	44	40	45	40
आईस्क्रीमची विक्री (किग्रा)	600	680	750	630	920	750	900	720

यावरून क्रमांक सहसंबंधांक मोजा.

7. परदेशात अभ्यासासाठी आवश्यक प्रवेश परिक्षा ऑन लाईन घेण्यात येते. (ह्यात खोट्या उत्तरानां ऋण गुण मिळतात) साठी निदर्शनात निवडलेल्या पाच विद्यार्थ्यांना आपोआप क्षमता (reasoning ability) आणि इंग्लीश बोलण्याची क्षमता ह्यात मिळविलेले गुण खालीलप्रमाणे आहेत.

विद्यार्थी	A	B	C	D	E
आपोआप क्षमता गुण	5	5	5	5	5
इंग्लिश बोलण्याची क्षमता गुण	2	–2	–2	0	2

यावरून आपोआप क्षमता आणि इंग्लिश बोलण्याची क्षमता यामधील क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.

8. एका नृत्य स्पर्धेत A, B, C, D, E, F यांना दोन गुरूंनी त्याच्या नृत्यावरून खालीलप्रमाणे गुण दिले.

क्रम	1	2	3	4	5	6
प्रथम गुरू द्वारा	B	F	A	C	D	E
दुसऱ्या गुरू द्वारा	F	A	C	B	E	D

ह्यावरून दोन्ही गुरूंच्या मूल्यांकनातील सहसंबंधांक शोधा.

9. दोन चल फुगवटा (X) आणि व्याजदर (Y) यासाठी खालील माहिती मिळाली.

$$n = 50,\ \Sigma x = 500,\ \Sigma y = 300,\ \Sigma x^2 = 5450,\ \Sigma y^2 = 2000,\ \Sigma xy = 3090$$

नंतर लक्षात आले की (10, 6) ही जोडी चूकून जास्तीची घेतली गेली. ह्या अवलोकनाच्या जोडीला माहितीतून काढून टाकून सहसंबंधांकाची किंमत शोधा.

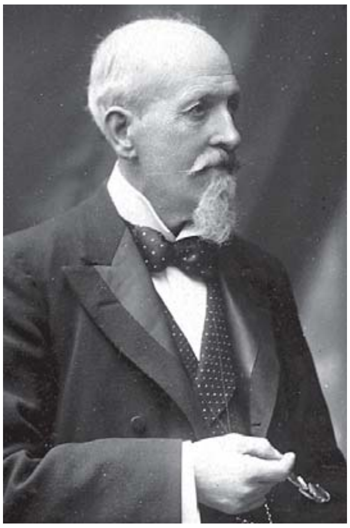
10. दहा पेढीसाठी विक्री (X) आणि खर्च (Y) साठी खालील माहिती मिळाली.

$$\bar{x} = 58,\ \bar{y} = 14,\ \Sigma(x-65)^2 = 850,\ \Sigma(y-13)^2 = 32,\ \Sigma(x-65)\,(y-13) = 0$$

यावरून सहसंबंधांक शोधा.

11. 10 व्यक्ती दैनिक कॅलरी (X) घेतात त्यांचे वजन (Y) आहे. त्या माहितीवरून क्रमांक सहसंबंधांक 0.6 मिळतो. नंतर लक्षात आलेली एका व्यक्तिच्या X आणि Y चलाच्या क्रमामधील फरकाला 4 ऐवजी 2 घेतला गेला, तर क्रमांक सहसंबंधांकची खरी किंमत शोधा.

12. 10 व्यक्तिसाठी आरोग्य अंक (health index) x आणि अपेक्षित आयुष्य (Life expectancy) y विषयी माहिती मिळविण्यात आली. क्रमांक सहसंबंधांक शोधण्यासाठी ह्या माहितीला क्रम देण्यात आला आणि सर्व क्रमांकाच्या फरकाच्या वर्गाची बेरीज 42.5 मिळते. आरोग्य आंक 70 माहितीमध्ये तीनवेळा आणि अपेक्षित आयुष्य 45 माहितीत दोनवेळा पुनरावर्तीत होते, तर ह्या माहितीवरून क्रमांक सहसंबंधांक शोधा.



Charles Edward Spearman
(1863 –1945)

Charles Edward Spearman was an English psychologist known for work in statistics, as a pioneer of factor analysis and for Spearman's rank correlation coefficient. He also did seminal work on models for human intelligence, including his theory that disparate cognitive test scores reflect a single General intelligence factor and coining the term g factor.

After serving army for 15 years, he went on to study for a Ph.D. in experimental psychology. Spearman joined University College London and stayed there until he retired in 1931. Initially he was Reader and head of the small psychological laboratory. In 1911 he was promoted to the Grote professorship of the Philosophy of Mind and Logic. His title changed to Professor of Psychology in 1928 when a separate Department of Psychology was created.

His many published papers cover a wide field, but he is especially distinguished by his pioneer work in the application of mathematical methods to the analysis of the human mind and his original studies of correlation in this sphere.

●

"Prediction is very difficult, especially about the future."

– Niels Bohr

3

सुरेख नियतसंबंध (Linear Regression)

विषयवस्तू :

3.1 प्रस्तावना

आपण याआधीच्या प्रकरण 2 मध्ये सहसंबंधाचा अभ्यास केला त्यात आपण पाहिले की सहसंबंधांकाद्वारा दोन चलांमधील संबंध ऋण किंवा धन आहेत त्याची कल्पना येते. त्याशिवाय त्यांच्यामधील निकटतेचे मापही मिळाले. परंतु सहसंबंधांकावरून एका चलाच्या ज्ञात किंमतीसाठी त्याला अनुरूप दुसऱ्या चलाची अपेक्षित किंवा अनुमानित किमंत मिळविता येत नाही. बऱ्याचवेळा जेव्हा दोन चलांमध्ये एखादा संबंध असतो. तेव्हा एका चलाच्या किंमतीवरून दुसऱ्या चलाची अंदाजित किंवा अनुमानीत किमंत त्या संबंधाचा उपयोग करून मिळवावयाची आवश्यकता भासते.

उदा., आपणास माहित आहे की, एखाद्या वस्तूचा जाहिरात खर्च आणि त्या वस्तूची विक्री यात सहसंबंध आहे. आता जाहिरात खर्चाच्या एखाद्या किंमतीला अनुरूप वस्तूच्या विक्रीविषयी अनुमान करावयाचा असेल तर फक्त सहसंबंधावरून ते मिळविता येत नाही. त्यासाठी नियतसंबंधाचा उपयोग करणे आवश्यक आहे.

नियतसंबंधाचा (Regression) शाब्दिक अर्थ 'प्रतिगमन' किंवा 'सरासरी किंमतीकडे परत येणे' असा होतो. मानव अनुवंशिकतेचा अभ्यासादरम्यान सर फ्रान्सिस गोल्टन नावाच्या आंकडाशास्त्रज्ञाने सर्वप्रथम 'नियतसंबंध' पदाचा उपयोग केला. पिता आणि तरूण पुत्राच्या 1000 जोड्यांची उचीची माहिती एकत्र करून त्याने खालील रसप्रद निष्कर्ष काढला.

(i) उंच पित्याचे पुत्र अधिक उंच आणि कमी उंच पित्याचे पुत्र कमी उंचीचे असतात.

(ii) उंच पित्याच्या समूहाची सरासरी उंचीपेक्षा त्याच्या पुत्रांच्या सरासरी उंची जास्त असते.

(iii) कमी उंच पित्यांच्या समूहांची सरासरी उंचीपेक्षा त्याच्या पुत्रांच्या सरासरी उंची अधिक असते.

वरील निष्कर्षावरून स्पष्ट होते की, पुत्राची उंची त्याच्या पित्याच्या उंचीच्या संदर्भात पिछेहठ दर्शविते. ह्यामुळेच मानवजात ठेगु आणि खूप उंच माणसे अशा दोन भागात विभागली जात नाही. ह्याप्रकारचे संबंध दर्शविण्यासाठी सर फ्रान्सिस गोल्टनने नियतसंबंध असे नाव दिले. नियतसंबंध हे दोन सहसंबंधित चलांमधील विधेयात्मक संबंध आहे. आता आपण दोन चलांमध्ये कार्य-कारण संबंध आहे अशी पूर्वधारणा घेऊन त्या चलातील नियतसंबंधाचा अभ्यास करू.

3.2 सुरेख नियतसंबंध मॉडेल (Linear Regression Model)

कोणताही संबंध किंवा समस्या व्यक्त करतांना एक किंवा अधिक समीकरणाच्या समूहाला मॉडेल असे म्हणतात. कार्य-कारण संबंध दर्शविणाऱ्या दोन चलांमधील संबंध दर्शवितांना आंकडाशास्त्रीय मॉडेलला नियतसंबंध मॉडेल म्हणतात. सामान्यपणे कार्य-कारण संबंध असणाऱ्या चलाच्या कारण स्वरूपाला X चलने दर्शवितात आणि त्याला आपण निरपेक्ष किंवा कारणभूत (explanatory) चल म्हणू या, तर कार्यस्वरूप चलाला Y ने दर्शवू या. त्याला आपण सापेक्ष किंवा असरयुक्त (explained) चल म्हणू या. खालील उदाहरणांद्वारा निरपेक्ष चल आणि सापेक्ष चलाचा अर्थ समजावून घेऊ :

(i) 'जाहिरात खर्च' आणि 'विक्री' मधील संबंधात जेव्हा 'जाहिरात खर्च' वाढतो (कमी होतो) त्यामुळे विक्रीपण वाढते (कमी होते). त्यामुळे आपण 'जाहिरात खर्चा'ला निरपेक्ष चल X म्हणून आणि 'विक्री'ला सापेक्ष चल Y म्हणून घेऊ.

(ii) एखाद्या विस्तारातील 'पाऊस' आणि 'तांदूळाचे उत्पन्न' मधील संबंधात स्पष्ट आहे की 'तांदूळाचे उत्पन्न' हे 'पावसावर' आधारीत असते. त्यामुळे 'पावसाला' निरपेक्ष चल X आणि 'तांदुळाचे उत्पन्न' हे सापेक्ष चल Y म्हणून घेऊ.

नियतसंबंध मॉडेलमध्ये सापेक्ष चल Y निरपेक्ष चल X ला एखाद्या योग्य गणिती विधेयाद्वारा व्यक्त करण्यात येते. आता आपण सुरेख नियतसंबंध मॉडेलला खालीलप्रमाणे व्याख्याईत करू :

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

येथे, Y = सापेक्ष चल

X = निरपेक्ष चल

α = अचलांक

β = अचलांक

u = मॉडेलचा विक्षेप (disturbance) चल.

येथे u ही दोन चल X आणि Y मधील सुरेख संबंधामधील अपूर्णता त्रुटी दर्शविते. प्राकृतिक विज्ञान (Natural Science) उदा. गणितात संपूर्ण सुरेख संबंध शक्य आहे. त्यामुळे वरवर पहाता ह्या घटनेमध्ये विक्षेप चल u ची किमंत 0 होईल. दुसऱ्या

शब्दात सांगायचे झाले तर दोन चल X आणि Y मध्ये संपूर्ण सहसंबंध असेल तर नियतसंबंध मॉडेल $Y=\alpha+\beta X$ होईल. परंतु व्यापार, अर्थशास्त्र आणि सामाजिक विज्ञानात दोन चलामध्ये सामान्यपणे संपूर्ण सुरेख सहसंबंध पहावयास मिळत नाही कारण की सहसंबंधित चलावर ईतर परिबळांचा परिणाम देखील होतो. म्हणजे की जेव्हा X आणि Y चलामध्ये आंशिक सहसंबंध असेल तेव्हा नियतसंबंध मॉडेलचे स्वरूप $Y=\alpha+\beta X+u$ होईल. वरील चर्चेवरून सुरेख नियतसंबंधाला सरळ भाषेत खालीलप्रमाणे व्याख्याईत करता येईल.

''दोन सहसंबंधित चलांमध्ये गाणितिक किंवा विधेयात्मक सुरेख संबंध की ज्याद्वारा निरपेक्ष चलाची एखाद्या दिलेल्या (ज्ञात) किंमतीसाठी अनुरूप सापेक्ष चलाच्या किंमतीचे अनुमान होऊ शकते त्याला सुरेख नियतसंबंध म्हणतात.''

3.3 नियतसंबंध रेषेचे अन्वायोजन (Fitting of Regression Line)

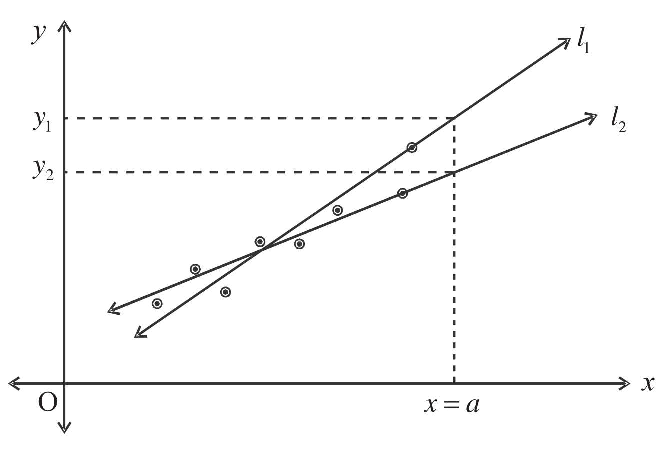
दोन सहसंबंधित चलाच्या विकिर्ण आकृतित जर सर्व बिंदू एखाद्या रेषेच्या आसपास असतील. तर आपण सांगू शकतो की, दोन चलामध्ये सुरेख नियतसंबंध आहे. दोन चलामधील संबंध दर्शविणारी अशी रेषा मिळवावयाच्या पद्धतीला नियतसंबंधरेषेचे अन्वायोजन म्हणतात.

नियतसंबंध रेषेचे अन्वायोजनासाठी दोन पद्धती आहे : (1) विकीर्ण आकृतिची पद्धती (2) न्यूनतम वर्गाची पद्धती.

3.3.1 विकीर्ण आकृतिची पद्धती

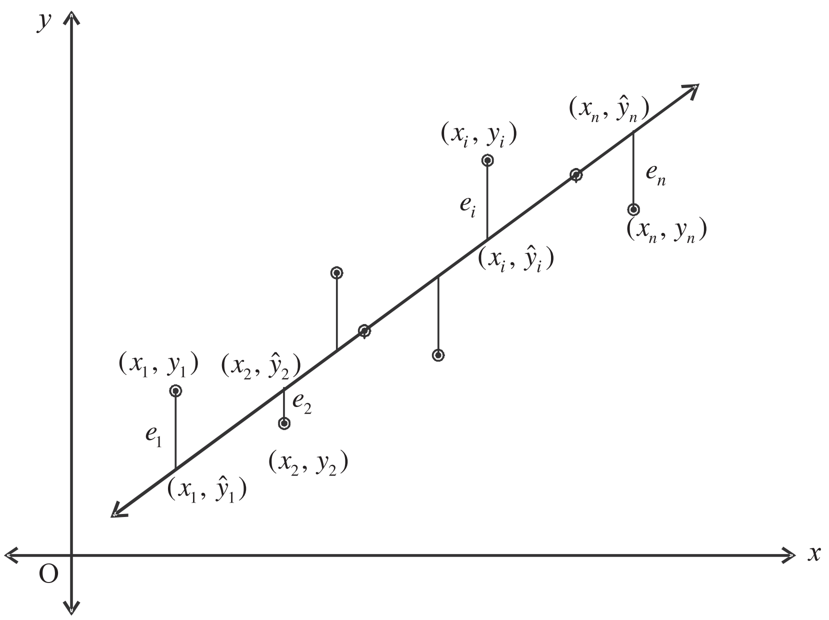
समजा की सहसंबंधित चल X आणि Y च्या अवलोकानाच्या n क्रमिक जोड्या $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ आहे. ह्या माहितीवरून विकिर्ण आकृति काढण्यात येते. आता विकिर्ण आकृतित जवळजवळ सर्वच बिंदूच्या शक्य तेवढ्या जवळून पसार होणारी एक रेषा काढण्यात येते. जर Y सापेक्ष चल आणि X निरपेक्ष चल असेल, तर अशा रेषेला Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा म्हणतात. आणि त्यावरून निरपेक्ष चल X च्या दिलेल्या किंमतीवरून त्याला अनुरूप सापेक्ष चल Y ची अनुमानीत किंमत मिळविता येते. ह्या प्रकारची रेषा काढण्यासाठी कोणत्याही प्रकारची मोजणी करण्याची आवश्यकता नसते. त्यामुळे नियतसंबंध रेषेच्या अन्वायोजनची ही सरळ आणि त्वरीत पद्धती आहे. परंतु असे करण्यात एक समस्या आहे. वेगवेगळ्या व्यक्ति वेगवेगळ्या रेषा काढू शकतील. आणि निरपेक्ष चल X च्या एकाच किंमतीसाठी वेग-वेगळ्या व्यक्ति सापेक्ष चल Y च्या किंमतीविषयी वेग-वेगळे अनुमान मिळवतील खालील विकिर्ण आकृतिवरून हे लक्ष्यात येईल.

एकाच माहितीवरून तयार झालेल्या उपर्युक्त विकिर्ण आकृतित दोन वेगवेगळ्या व्यक्ति दोन वेगवेगळ्या रेषा l_1 आणि l_2 काढतात. येथे लक्ष्यात येईल की निरपेक्ष चल X च्या एखादी किंमत 'a' साठी त्याला अनुरूप सापेक्ष चल Y ची अनुमानीत किंमत l_1 वरून 'y_1' मिळेल तर रेषा l_2 वरून ती 'y_2' मिळेल अशाप्रकारे निरपेक्ष चल X च्या एकाच किंमतीसाठी त्याला अनुरूप सापेक्ष चल Y च्या वेग-वेगळ्या रेषेवरून वेग-वेगळी अनुमानीत किंमत मिळते. त्यामुळे ही रीत व्यक्तिलक्षी (subjective) आहे. असे म्हणता येईल. ह्या पद्धतीने मिळणारी नियतसंबंध रेषेला श्रेष्ठ अन्वायोजित रेषा म्हणता येत नाही कारण की त्यामुळे सापेक्ष चलाची श्रेष्ठ अनुमानीत किंमतच मिळते अशी खात्री नसते. श्रेष्ठ अन्वायोजित नियतसंबंध रेषा मिळविण्यासाठी न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीचा उपयोग करण्यात येतो.



3.3.2 न्यूनतम वर्गाची पद्धती

समजा की दोन सहसंबंधित चले X (निरपेक्ष चल) आणि Y (सापेक्ष चल) च्या अवलोकनाच्या n क्रमिक जोड्या $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ मिळविल्या आहे. न्यूनत्तम वर्गाची पद्धती समजण्यासाठी आपण ह्या माहितीची विकिर्ण आकृती काढू. जर X आणि Y मधील सुरेख नियतसंबंधाला दर्शविणारी श्रेष्ठ रेषेचे समीकरण $\hat{y} = a + bx$ असेल, तर ह्या रेषेचे अचलांक a आणि b न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीते खालीलप्रमाणे काढता येईल :



समजा चल X च्या $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ किंमतीसाठी Y च्या रेषेवरील मिळविलेल्या अनुमानीत किंमती $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, ... \hat{y}_n$ आहेत आणि चल Y च्या अवलोकित किंमती $y_1, y_2, y_3, ... y_n$ आहे. आता X च्या एखाद्या किंमती $X = x_i$ ला अनुरूप Y ची अनुमानीत किंमत $\hat{y}_i = a + bx_i$ होईल चल Y ची अवलोकित किंमत y_i आणि अनुमानीत किमंत $\hat{y}_i$ मधील उभ्या (vertical) अंतरा (y-अक्षाला समांतर अंतर) ला अनुमानीत त्रुटी (error) म्हणतात ती e_i ने दर्शवितात.

$\therefore\ e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i) = y_i - a - bx_i$

येथे, $i = 1, 2, 3, ..., n$

स्पष्ट आहे की रेषेच्या वरील बाजूच्या बिंदूसाठी त्रुटी धन असेल आणि रेषेच्या खालील बाजूचे बिंदूसाठी त्रुटी ऋण असेल आणि जे बिंदू रेषेवर असतील अशा बिंदूसाठी त्रुटी शून्य असेल.

आता अन्वायोजित रेषा $\hat{y} = a + bx$ (Y च्या X वरील नियतसंबंध रेषा) चे अचलांक a आणि b च्या किंमती अशाप्रकारे मिळविण्यात येतात की ज्यामुळे त्रुटिंच्या वर्गाची बेरीज कमीतकमी म्हणजे न्यूनतम होईल.

अर्थात $\Sigma e_i^2 = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma(y_i - a - bx_i)^2$ न्यूनतम होईल.

बिजगणिताच्या सरळ पद्धतीते आपण a आणि b च्या अशा किंमती मिळवू शकू की सरळतेसाठी अनुग (suffix) i ला टाळल्यास खालीलप्रमाणे आहे.

$$b = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

आणि

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

ह्या पद्धतीने रेषा $\hat{y} = a + bx$ विकिर्ण आकृतित सर्वच बिंदू शक्य तेवढ्या जवळून पसार होणारी रेषा आहे. नियतसंबंध रेषा मिळवितांना त्रुटिच्या वर्गाची बेरीज न्यूनतम करण्यात येते. त्यामुळे याला न्यूनतम वर्गाची पद्धती म्हणतात.

ह्या पद्धतीने मिळणारी b ची किमंत Y ची X वरून नियतसंबंध रेषेचा नियतसंबंधांक (regression coefficient) म्हणतात. त्याला नियतसंबंध रेषेचा उतार (slope) देखील म्हणतात आणि अचलांक a ला नियतसंबंध रेषेचा अंत:खंड (intercept) म्हणतात.

नियतसंबंधांक b चे अर्थघटन

b = चल X च्या किंमतीत एक एकम फरक केल्याने चल Y च्या किंमतीत अनुमानीत फरक म्हणजे की जेव्हा $b>0$, निरपेक्ष चल X च्या किंमतीत एक एककाची वाढ झाल्यास सापेक्ष चल Y च्या किंमतीत b एकलकाने अंदाजित वाढ होईल.

जेव्हा $b<0$ निरपेक्ष चल X च्या किंमतीत एका एककाने वाढ झाली तर सापेक्ष चल Y च्या किंमतीत $|b|$ एककाची अंदाजित घट होते.

येथे नोंदनीय आहे की न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीने मिळविलेली नियतसंबंध रेषेला श्रेष्ठ अन्वायोजित रेषा म्हणून ओळखतात.

नोंद : (1) नियतसंबंधांक b ला b_{yx} ने देखील दर्शवितात. आवश्यकता नसल्यास नियतसंबंधांला आपण फक्त b नेच दाखवू.

(2) जर विकिर्ण आकृतित सर्वच बिंदू एकाच रेषेवर असतील तर सर्वच बिंदूसाठी त्रुटी शून्य होईल त्यामुळे सापेक्ष चल y ची अनुमानीत किमंत $\hat{y}$ त्याच त्याच्या प्राप्त अवलोकित किंमत होते. त्यामुळे नियतसंबंध रेषेचे स्वरूप $\hat{y}=a+bx$ च्या एवेजी $y=a+bx$ देखील लिहिता येईल. स्पष्ट आहे की ह्या परिस्थितीत $b>0$ असेल तर सहसंबंधांक r ची किमंत 1 होईल आणि $b<0$ तर सहसंबंधांकांची किंमत -1 होईल.

समजूतीसाठी अधिक माहिती

नियतसंबंध रेषेच्या अन्वायोजनासाठी व्यवहारात फक्त न्यूनतम वर्गाची पद्धतीचाच उपयोग होतो. त्यामुळे मिळणारी नियतसंबंध रेषेसाठी 'श्रेष्ठ अन्वायोजित रेषा' त्या एवेजी फक्त 'अन्वायोजित रेषा' असा उल्लेख करण्यात येतो.

आता आपण नियतसंबंध रेषा मिळविण्याची काही उदाहरणे पाहू या.

उदाहरण 1 : एका निश्चित कंपनीच्या एका मॉडेलच्या कारचे आयुष्य (वापरण्याचे वर्ष) आणि त्याचा सरासरी वार्षिक निभाव खर्चसाठी मिळविलेली अवलोकने खालीलप्रमाणे आहेत.

कारचे आयुष्य (वर्ष)	2	4	6	8
सरासरी वार्षिक निभाव खर्च (हजार ₹)	10	20	25	30

यावरून निभाव खर्चाची कारचे आयुष्यावरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. जर कारचे आयुष्य 10 वर्ष असेल तर निभाव खर्चाचे अनुमान मिळवा.

येथे 'कारचे आयुष्य' निरपेक्ष चल आहे. त्यामुळे त्याला चल X ने दर्शवू आणि निभाव खर्च हे सापेक्ष चल आहे. त्यामुळे त्याला Y ने दर्शवू. माहिती पाहिल्यास आपणास नियतसंबंध रेषा मिळविण्यासाठी खालील कोष्टक बनवू.

	कारचे आयुष्य (वर्ष) x	निभाव खर्च (हजार ₹) y	xy	x^2
	2	10	20	4
	4	20	80	16
	6	25	150	36
	8	30	240	64
एकूण	**20**	**85**	**490**	**120**

$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{20}{4} = 5, \ \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{85}{4} = 21.25$

आता नियतसंबंधांक खालीलप्रमाणे शोधू.

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{4(490)-(20)(85)}{4(120)-(20)^2}$$

$$= \frac{1960-1700}{480-400}$$

$$= \frac{260}{80}$$

$$= 3.25$$

$\therefore \ b = 3.25$

आता $\overline{x}, \overline{y}$ आणि b ची किमंत a च्या सूत्रात ठेवल्यास,

$$a = \overline{y} - b\,\overline{x}$$

$$= 21.25 - 3.25(5)$$

$$= 21.25 - 16.25$$

$\therefore \ a = 5$

त्यामुळे निभाव खर्चा (Y) ची कारचे आयुष्य (X) वरील नियतसंबंध रेषा

$$\hat{y} = a + bx$$

$\therefore \ \hat{y} = 5 + 3.25\,x$

$X = 10$ ठेवल्यास

$$\hat{y} = 5 + 3.25(10)$$

$$= 5 + 32.5 = 37.5$$

$\therefore \ \hat{y} = 37.5$

अशाप्रकारे, कारचे आयुष्य 10 वर्ष असेल, तेव्हा त्याचा अनुमानीत निभाव खर्च 37.5 हजार ₹ असेल.

नोंद : $b = 3.25$ आहे त्यामुळे असे सांगता येईल की दरवर्षी (X एककात फरक) आल्यामुळे, कारच्या निभाव खर्चात 3.25 हजार ₹चा जास्तीची वाढ (Y मध्ये होणारा फरक) होतो.

उदाहरण 2 : एका कंपनीच्या वेग-वेगळ्या प्रकारच्या लॅपटोपची मासिक विक्री (शंभर एकक) आणि त्याचा नफा (लाख ₹ त) यांची शेवटच्या 6 महिन्याची माहिती खालीलप्रमाणे आहे.

महिना	1	2	3	4	5	6
विकलेल्या लॅपटोपची संख्या (शंभर एकक) x	5	7	5	12	8	3
नफा (लाख ₹) y	8	9	10	15	10	6

यावरून Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. याशिवाय $X = 7$ साठी Y च्या किंमतीतील अनुमानातील त्रुटी शोधा.

	विकलेल्या लॅपटोपची संख्या (शंभर एकक) x	नफा (लाख ₹) y	xy	x^2
	5	8	40	25
	7	9	63	49
	5	10	50	25
	12	15	180	144
	8	10	80	64
	3	6	18	9
एकूण	**40**	**58**	**431**	**316**

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{40}{6} = 6.67; \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{58}{6} = 9.67$

आता नियतसंबंधांक b ची किमंत खालीलप्रमाणे शोधू या.

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{6(431) - (40)(58)}{6(316) - (40)^2}$$

$$= \frac{2586 - 2320}{1896 - 1600}$$

$$= \frac{266}{296}$$

$$= 0.8986$$

$$\simeq 0.90$$

$$\therefore b \simeq 0.90$$

आता $\bar{x}, \bar{y}$ आणि b च्या किंमती a च्या सूत्रात ठेवल्यास,

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$= 9.67 - 0.90(6.67)$$

$$= 9.67 - 6.003$$

$$= 3.667$$

$$\therefore a \simeq 3.67$$

अशाप्रकारे Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \hat{y} = 3.67 + 0.9x$$

आता $X = 7$ साठी त्रुटी शोधण्यासाठी, सर्वप्रथम त्याला अनुरूप अनुमानीत किमंत मिळवू या.

$X = 7$ ठेवल्यास

$\hat{y} = 3.67 + 0.9(7)$

$= 3.67 + 6.3$

$\therefore\ \hat{y} = 9.97$ लाख ₹

आता दिलेल्या माहितीवरून आपण पाहू शकतो की $X = 7$ ला अनुरूप Y ची अवलोकित किमंत 9 आहे.

$\therefore$ त्रुटी $e = y - \hat{y}$

$= 9 - 9.97$

$\therefore\ e = -0.97$ लाख ₹

उदाहरण 3 : एका कंपनीच्या कार सर्विस सेंटरमध्ये अपघातीक कारच्या दुरूस्ती कामासाठी लागणारा वेळ आणि खर्च यातील संबंध समजण्यासाठी खालीलप्रकारे माहिती एकत्र करण्यात आली.

कारच्या दुरूस्तीचा वेळ (मानवी तास)	32	40	25	29	35	43
दुरूस्तीचा खर्च (हजार ₹)	25	35	18	22	28	46

यावरून Y (दुरूस्तीचा खर्च)ची X (दुरूस्तीचा वेळ) वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. जर दुरूस्तीसाठी 50 तास लागत असतील, तर दुरूस्तीचा खर्च शोधा.

येथे $n = 6,\ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{204}{6} = 34,\quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{174}{6} = 29$

	दुरूस्ती वेळ (मानवी तास) x	दुरूस्ती खर्च (हजार ₹) y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$
	32	25	–2	–4	8	4
	40	35	6	6	36	36
	25	18	–9	–11	99	81
	29	22	–5	–7	35	25
	35	28	1	–1	–1	1
	43	46	9	17	153	81
एकूण	**204**	**174**	**0**	**0**	**330**	**228**

$b = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$

$= \frac{330}{228}$

$= 1.4474$

$\simeq 1.45$

$\therefore\ b \simeq 1.45$

आता $\bar{x}$, $\bar{y}$, b ची किमंत a च्या सूत्रात ठेवल्यास,

$a = \bar{y} - b\,\bar{x}$

$= 29 - 1.45(34)$

$= 29 - 49.3$

$\therefore\ a = -20.3$

अशाप्रकारे, Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = -20.3 + 1.45x$$

$X = 50$ ठेवल्यास

$$\hat{y} = -20.3 + 1.45(50)$$

$$= -20.3 + 72.5$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 52.2$$

अशाप्रकारे, जेव्हा दुरूस्ती कामाचा वेळ 50 तास असेल तेव्हा दुरूस्ती खर्च अनुमानीत 52.2 (हजार ₹) होईल.

स्वाध्याय 3.1

1. एका वस्तूचा भाव (₹ त) आणि त्याची मागणी (शंभर एकक) याविषयी खालील दिलेल्या माहितीवरून मागणीच्या भाववरील नियतसंबंध रेषा मिळवा आणि जेव्हा भाव ₹ 20 असेल तेव्हा मागणीचे अनुमान मिळवा.

भाव (₹)	12	14	15	16	18	21
मागणी (शंभर एककात)	18	12	10	8	7	5

2. कार उत्पन्न करणाऱ्या एका कंपनीच्या एका मॉडेलासाठी कार वापरण्याचा वेळ आणि सरासरी निभाव खर्च यामधील संबंधाचा अभ्यास करण्यासाठी खालीलप्रमाणे माहिती मिळविण्यात आली.

कार	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
कार वापरण्याचा वेळ (वर्ष) x	3	1	2	2	5	3
सरासरी वार्षिक निभाव खर्च (हजार ₹) y	10	5	8	7	13	8

ह्यावरून Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. जेव्हा कार वापरण्याचा वेळ 5 वर्ष असेल तेव्हा त्याचा वार्षिक निभाव खर्चाचा अनुमान आणि त्रुटी शोधा.

3. खालील एका वर्षात पाच जिल्हयात झालेला सरासरी पाऊस (सेमी मध्ये) आणि पिकाचे उत्पादन (टनात) विषयी माहिती खालीलप्रमाणे आहे.

सरासरी पाऊस (सेमी)	25	32	38	29	31
पिक उत्पादन (टन)	84	90	95	88	93

यावरून पिकाच्या उत्पादनाची पावसावरील नियतसंबंध रेषा शोधा आणि जर सरासरी पाऊस 35 सेमी असेल तर होणाऱ्या पिकाच्या उत्पादनाचे अनुमान करा.

4. यंत्रावर काम करणाऱ्या कामगाराचा अनुभव आणि त्याचे कार्य-कौशल्य अंक (performance ratings) याविषयी माहिती खालीलप्रमाणे आहे.

कामगार	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
अनुभव (वर्ष) x	12	5	10	3	18	4	12	16
कार्य -कौशल्य अंक y	83	75	80	78	89	68	88	87

ह्यावरून कार्य-कौशल्य अंकाची अनुभवावरील नियतसंबंध रेषेची मोजणी करा आणि एखाद्या कामगाराचा अनुभव 7 वर्षाचा असेल तर त्याच्या कार्य-कौशल्य अंक विषयी अनुमान करा.

*

3.4 नियतसंबंधाची उपयोगिता

नियतसंबंधाच्या काही उपयोगीता खालीलप्रमाणे आहे.

(1) दोन सहसंबंधित चलांमधील विधेयात्मक संबंध समजू शकतो.

(2) एकदा विधेयात्मक संबंध प्रस्थापित झाल्यानंतर निरपेक्ष चल X च्या ज्ञात किंमतीवरून सापेक्ष चल Y च्या अज्ञात किंमतीचे अनुमान मिळविणे शक्य असते.

(3) आपणास निरपेक्ष चल X च्या किंमतीत होणाऱ्या फरकाने चल Y मध्ये होणारा अंदाजित फरक समजतो.

(4) नियतसंबंध रेषेवरून सापेक्ष चलाची अनुमानीत किंमत शोधण्यात होणारी चूक (त्रुटी) समजते.

अर्थशास्त्रज्ञ, आयोजनकार, धंदा करणारे, वहीवटकर्ता, संशोधक वगैरेसाठी नियतसंबंध खूपच उपयोगी असतो.

नियतसंबंधांकाच्या मोजणीची संक्षिप्त पद्धती :

जेव्हा X आणि Y च्या किंमती प्रमाणात मोठ्या असतील आणि किंवा अपूर्णांकात असतील त्यावेळी x^2, xy या पदाची मोजणी कठीण होते. अशा परिस्थितीत वैकल्पिक सूत्र वापरता येते. हे सूत्र नियतसंबंधांच्या पुढील गुणधर्मावर आधारित आहे.

गुणधर्म : नियतसंबंधांक उगमबिंदू परिवर्तनापासून स्वतंत्र आहे. परंतु मापा (scale)च्या परिवर्तनापासून स्वतंत्र नाही.

जर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषेचा नियतसंबंधांक $b = b_{yx}$ असेल, तर वरील गुणधर्मावरून त्याचे संक्षिप्त सूत्र खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

(1) जर $u = x - A$ आणि $v = y - B$ असेल तर

$$b = b_{yx} = b_{vu} = \frac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2} \text{ होईल.}$$

(2) जर $u = \frac{x-A}{c_x}$ आणि $v = \frac{y-B}{c_y}$ असेल तर

$$b = b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} = \frac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x} \text{ होईल.}$$

येथे, A, B, c_x आणि c_y अचलांक आहेत आणि $c_x > 0, c_y > 0$.

उदाहरण 4 : एका समूहातील लोकांचे मासिक उत्पन्न (हजार ₹ त) आणि मासिक खर्च (हजार ₹ त) यामधील संबंध समजण्यासाठी त्या समूहातील सात व्यक्तिचा निदर्श घेऊन खालील माहिती मिळाली :

व्यक्ति	1	2	3	4	5	6	7
मासिक उत्पन्न (हजार ₹)	60	70	64	68	62	65	72
मासिक खर्च (हजार ₹)	50	59	57	50	53	58	60

ह्या माहितीवरून व्यक्तिच्या मासिक खर्चाची मासिक उत्पन्नावरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. जर समूहात एखाद्या व्यक्तिचे उत्पन्न 75 हजार ₹ असेल तर मासिक खर्चाचा अनुमान मिळवा.

मासिक खर्चाची मासिक उत्पन्नावरील रेषा मिळवावयाची असल्याने 'मासिक खर्चा'ला चल Y आणि 'मासिक उत्पन्ना'ला चल X ने दर्शवू या.

येथे $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{461}{7} = 65.86$ आणि $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{387}{7} = 55.29$

त्यामुळे आपण $A = 65$ आणि $B = 55$ घेऊन u आणि v ला खालीलप्रमाणे व्याख्याईत करू या.

$u = x - A = x - 65$ आणि $v = y - B = y - 55$

	मासिक उत्पन्न (हजार ₹) x	मासिक खर्च (हजार ₹) y	$u = x - 65$	$v = y - 55$	uv	u^2
	60	50	–5	–5	25	25
	70	59	5	4	20	25
	64	57	–1	2	–2	1
	68	50	3	–5	–15	9
	62	53	–3	–2	6	9
	65	58	0	3	0	0
	72	60	7	5	35	49
एकूण	**461**	**387**	**6**	**2**	**69**	**118**

आता संक्षिप्त पद्धतीते b ची किंमत खालीलप्रमाणे शोधता येईल.

$$b = b_{yx} = b_{vu} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}$$

$$= \frac{7(69)-(6)(2)}{7(118)-(6)^2}$$

$$= \frac{483-12}{826-36}$$

$$= \frac{471}{790}$$

$$= 0.5962$$

$$\therefore \ b \simeq 0.60$$

आता, $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$$= 55.29 - 0.60(65.86)$$

$$= 55.29 - 39.516$$

$$= 15.774$$

$$\therefore \ a = 15.77$$

अशाप्रकारे, Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \ \hat{y} = 15.77 + 0.60x$$

$X=75$ ठेवल्यास,

$$\hat{y}=15.77+0.60(75)$$

$$=15.77+45$$

$$=60.77$$

$\therefore \quad \hat{y}=60.77$ हजार ₹

त्यामुळे जर एखाद्या व्यक्तिचे मासिक उत्पन्न 75 हजार ₹ असेल तर त्याच्या अंदाजित मासिक खर्च 60.77 हजार ₹ होईल.

उदाहरण 5 : उदाहरण 1 मध्ये दिलेल्या माहितीसाठी, निभाव खर्च (Y) ची कारचे आयुष्य (X) वरील नियतसंबंध रेषा संक्षिप्त पद्धतीने मिळवा.

कारचे आयुष्य (वर्ष) x	2	4	6	8
निभाव खर्च (हजार₹) y	10	20	25	30

येथे, X च्या सर्वच किंमतीना 2 ने आणि Y च्या सर्वच किंमतीला 5 ने नि:शेष भागणे शक्य आहे. आणि $\bar{x}=5$ आणि $\bar{y}=21.25$ आहे त्यामुळे आपल्यास $A=4, B=20, c_x=2$ आणि $c_y=5$ घेऊ.

आता, u आणि v ला खालीलप्रमाणे व्याखाईत करू या.

$$u=\frac{x-A}{c_x}=\frac{x-4}{2} \quad \text{आणि} \quad v=\frac{y-B}{c_y}=\frac{y-20}{5}$$

	x	y	$u=\frac{x-4}{2}$	$v=\frac{y-20}{5}$	uv	u^2
	2	10	–1	–2	2	1
	4	20	0	0	0	0
	6	25	1	1	1	1
	8	30	2	2	4	4
एकूण	**20**	**85**	**2**	**1**	**7**	**6**

$$b=b_{vu}\cdot\frac{c_y}{c_x}=\frac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2}\times\frac{c_y}{c_x}$$

$$=\frac{4(7)-2(1)}{4(6)-(2)^2}\times\frac{5}{2}$$

$$=\frac{28-2}{24-4}\times\frac{5}{2}$$

$$=\frac{26}{20}\times\frac{5}{2}$$

$b=3.25$

आता $a = \bar{y} - b\bar{x} = 21.25 - 3.25(5) = 21.25 - 16.25 = 5$

Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 5 + 3.25x$$

नोंद : येथे आपल्या लक्ष्यात येईल की, $b_{vu} = \frac{26}{20} = 1.3$, परंतू जेव्हा $\frac{c_y}{c_x} = \frac{5}{2}$ ला गुणिले असता तेव्हा आपणास $b = 1.3 \times \frac{5}{2} = 3.25$ (उदाहरण 1 मध्ये मिळविल्याप्रमाणे) मिळते. त्यामुळे आपण समजू शकतो की, जेव्हा चल X आणि/किंवा Y चे मापा (scale) चे परिवर्तन करण्यात आले तर b मिळविण्यासाठी b_{uv} ला $\frac{c_y}{c_x}$ ते गुणे आवश्यक आहे.

उदाहरण 6 : परदेशातून गुजरात राज्याच्या एका विद्यापीठात चालू वर्षी शिकण्यासाठी आलेल्या विद्यार्थ्यांमधून सात विद्यार्थ्यांचा एक निदर्श घेऊन त्यांचा बुद्धिमत्ता अंक (I.Q.) आणि त्यांनी 75 गुणांच्या परिक्षेतून मिळविलेल्या गुणांची माहिती खालीलप्रमाणे दिलेली आहे.

विद्यार्थी	1	2	3	4	5	6	7
I.Q. x	85	95	100	90	110	125	70
गुण y	46	50	50	45	60	70	40

त्यावरून y ची x वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा आणि एखाद्या विद्यार्थ्यांचा I.Q. 120 असेल तर त्याच्या गुणांचे अनुमान करा त्याशिवाय I.Q. 100 असेल तर अनुमानातील त्रुटी शोधा.

येथे, $n = 7$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{675}{7} = 96.43$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{361}{7} = 51.57$

येथे X आणि Y च्या किंमती मोठ्या असल्याने त्याचा मध्यक अपूर्णांक आणि X च्या सर्व किंमतीनी 5 ने नि:शेष भागता येईल त्यामुळे संक्षिप्त पद्धतीचा उपयोग करू.

$A = 95$, $B = 50$, $c_x = 5$, $c_y = 1$ घेऊन आपण u आणि v ला व्याख्याईत करू :

$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-95}{5}$ आणि $v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-50}{1} = y - 50$

	I.Q. x	**गुण** y	$u = \frac{x-95}{5}$	$v = y - 50$	uv	u^2
	85	46	–2	–4	8	4
	95	50	0	0	0	0
	100	50	1	0	0	1
	90	45	–1	–5	5	1
	110	60	3	10	30	9
	125	70	6	20	120	36
	70	40	–5	–10	50	25
एकूण	**675**	**361**	**2**	**11**	**213**	**76**

$$b = \frac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x}$$

$$= \frac{7(213)-(2)(11)}{7(76)-(2)^2} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1491-22}{532-4} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1469}{528} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1469}{2640}$$

$$= 0.5564$$

$\therefore \quad b \simeq 0.56$

आता $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$$= 51.57 - 0.56(96.43)$$

$$= 51.57 - 54.0008$$

$$= -2.4308$$

$\therefore \quad a \simeq -2.43$

त्यामुळे, Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = -2.43 + 0.56x$$

$X = 120$ ठेवल्यास,

$$\hat{y} = -2.43 + 0.56(120)$$

$$= -2.43 + 67.2$$

$\therefore \quad \hat{y} = 64.77$ गुण

त्यामुळे एखाद्या विद्यार्थ्यांचा I.Q. 120 असेल तेव्हा त्याचे अंदाजे गुण 65 आहेत.

आता I.Q. (X) = 100 साठी त्रुटि शोधण्यासाठी सर्वप्रथम Y ची अनुमानीत किमंत $\hat{y}$ मिळवावी लागेल.

$$\hat{y} = -2.43 + 0.56x$$

X = 100 घेतल्यास,

$$\hat{y} = -2.43 + 0.56(100)$$

$$= -2.43 + 56$$

$\therefore \quad \hat{y} = 53.57$ गुण

परंतु X = 100 ला अनुरूप Y च्या अवलोकनावरून किमंत 50 आहे. (दिलेली माहिती पहा.)

$\therefore$ त्रुटी $e = y - \hat{y}$

$= 50 - 53.57$

$\therefore$ $e = -3.57$ गुण

नोंद : येथे लक्षात ठेवणे आवश्यक आहे की, निरपेक्ष चल (X) च्या फक्त त्याच किंमती साठी त्रुटी शोधणे शक्य आहे ज्यासाठी त्याला अनुरूप सापेक्ष चल (Y) च्या प्राप्त अवलोकित किंमत ज्ञात असतील.

येथे ह्या उदाहरणात $X = 120$ ला अनुरूप Y च्या किंमतीच्या अनुमान त्रुटि शोधये शक्य नसेल कारण की $X = 120$ ला अनुरूप Y ची प्राप्त अवलोकित किंमत ज्ञात नाही.

उदाहरण 7 : सुरेख सहसंबंध प्रकरण उदाहरण 12ची माहिती आणि मोजणीवरून नफ्याची विक्रीवर नियतसंबंध रेषा मिळवा. जेव्हा विक्री 3 करोड ₹ असेल तर होणाऱ्या नफ्याचे अनुमान करा.

त्या उदाहरणावरून आपणास माहीत आहे की,

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-2}{0.1} \quad \text{आणि} \quad v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-5600}{100}$$

$\therefore c_x = 0.1$ आणि $c_y = 100$

येथे लक्षात घ्या की मोजणीच्या सरलतेसाठी $(x-A)$ ला 10 ने गुणिले होते परंतु c_x हा $(x-A)$ च्या छेदात असल्याने c_x ची किमंत $\frac{1}{10} = 0.1$ होईल.

($\because$ 10 ने गुणिले म्हणजेच $\frac{1}{10} = 0.1$ ते भागणे.)

$$\text{आता } b = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x}$$

$$= \frac{9(121)-(0)(1)}{9(60)-(0)^2} \times \frac{100}{0.1}$$

$$= \frac{1089-0}{540-0} \times 1000$$

$$= \frac{1089000}{540}$$

$= 2016.6667$

$\therefore b \simeq 2016.67$

आता $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 5611.11 - 2016.67(2)$

$= 5611.11 - 4033.34$

$\therefore a = 1577.77$

त्यामुळे नफा (Y) चा विक्री (X) वरील नियतसंबंध रेषा

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \hat{y} = 1577.77 + 2016.67x$

$X = 3$ ठेवल्यास,

$$\hat{y} = 1577.77 + 2016.67(3)$$

$$= 1577.77 + 6050.01$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 7627.78$$

अशाप्रकारे विक्री 3 करोड ₹ होईल तेव्हा अनुमानीत नफा 7627.78 (हजार ₹) होईल.

प्रवृत्ती

तुम्ही इयत्ता 12 वीत अभ्यास करत असाल तर जून ते डिसेंबर महिन्या दरम्यान तुमचे मासिक कौटुंबिक उत्पन्न आणि मासिक खर्चाची माहिती एकत्र करा. त्यावरून मासिक खर्चाची मासिक उत्पन्नावरील नियतसंबंध रेषा मिळवा त्यावरून नंतरच्या वर्षाच्या जानेवारी महिन्याच्या उत्पन्नासाठी त्या महिन्याच्या खर्चाचे अनुमान करा. जानेवारी महिन्याच्या शेवटी खरोखर किती खर्च झाला असेल ते तपासा आणि तुमच्या अनुमानातील झालेल्या त्रुटी शोधा.

3.5 सहविचरण आणि सहसंबंधांकावरून नियतसंबंधांक

जेव्हा दोन चल X आणि Y द्विचल माहितीसाठी मध्यक प्रमाणित विचलन (किंवा विचरण) सहविचरण, सहसंबंधांक सारखी सारसूचक मापाच्या किंमती असल्यास तेव्हा नियतसंबंधांक आणि नियतसंबंध रेषा खालीलप्रमाणे शोधता येईल.

(1) जेव्हा $\bar{x}, \bar{y}, s_x^2$ (किंवा s_x), s_y^2 (किंवा s_y) आणि $\mathrm{Cov}(x, y)$ सारखी मापे माहित असतील तेव्हा,

$$b = \frac{\text{सहविचरण}\,(x, y)}{x\,\text{चे विचरण}} = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2}$$

आणि $a = \bar{y} - b\bar{x}$

येथे $$Cov(x, y) = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \frac{\Sigma xy - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{n}$$

$$s_x^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$s_y^2 = \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n} = \frac{\Sigma y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma y}{n}\right)^2 = \frac{\Sigma y^2}{n} - \bar{y}^2$$

(2) जेव्हा $\bar{x}, \bar{y}, r, s_x$ (किंवा s_x^2), आणि s_y (किंवा s_y^2) सारखी मापे माहित असल्यास तेव्हा,

$$b = r \cdot \frac{y\ \text{चे प्र. वि.}}{x\ \text{चे प्र. वि.}} = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

आणि $a = \bar{y} - b\bar{x}$

a आणि b च्या किंमती ठेवल्यास, Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा म्हणजे $\hat{y} = a + bx$ मिळविता येईल.

आता आपण काही सारसूचक माप (Summary measures) दिलेले असेल आणि नियतसंबंध रेषा शोधावयाची असेल अशी उदाहरणे पाहू या.

उदाहरण 8 : दहा वेगवेगळ्या विस्तारातील पावसाळ्यात पडलेला पाऊस सेमी मध्ये (X) आणि बाजरीचे उत्पादन क्विंटल / हेक्टर (Y) मधील संबंधाचा अभ्यास करण्यासाठी मिळविलेली माहिती खालीलप्रमाणे आहे.

$\boldsymbol{n = 10, \bar{x} = 40, \bar{y} = 175, s_x = 12, Cov(x, y) = 360}$

ह्यावरून उत्पादन Y चा पाऊस X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा.

येथे $Cov(x, y) = 360$ आणि $s_x = 12 \therefore s_x^2 = 144$

$$b = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2}$$

$$= \frac{360}{144}$$

$$\therefore \quad b = 2.5$$

आणि $a = \bar{y} - b\bar{x}$

$$= 175 - 2.5(40)$$

$$= 175 - 100$$

$$\therefore \ a = 75$$

अशाप्रकारे Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 75 + 2.5x$$

उदाहरण 9 : एका शहरातील कुटुंबाचे वार्षिक उत्पन्न (X) आणि म्युच्युअलफंडात कुटुंबाची वार्षिक गुंतवणुक (Y) ह्या दोन चलाचा अभ्यास करण्यासाठी मिळविलेल्या 100 कुटुंबाचा निदर्श माहितीचे सारांश खालीलप्रमाणे दर्शविला आहे.

X = कुटुंबाची वार्षिक उत्पन्न (लाख ₹ त)

Y = कुटुंबाची म्युच्युअल फंडातील वार्षिक गुंतवणुक (हजार ₹ त)

$\boldsymbol{\bar{x} = 5.5, \ \bar{y} = 40.5, \ s_x = 1.2, \ s_y = 12.8, \ r = 0.65}$

ह्या माहितीवरून कुटुंबाच्या म्युच्युअल फंडातील गुंतवणुकीची कुटुंबाच्या वार्षिक उत्पनावरील नियतसंबंध रेषा मिळवा.

येथे $n = 100, \bar{x} = 5.5, \bar{y} = 40.5$

$s_x = 1.2, s_y = 12.8$ आणि $r = 0.65$

आता $b = r \cdot \dfrac{s_y}{s_x}$

$$= 0.65 \times \frac{12.8}{1.2}$$

$$= 6.9333$$

$$\therefore \ b \simeq 6.93$$

आणि $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 40.5 - 6.93\ (5.5)$

$= 40.5 - 38.115$

$= 2.385$

$\therefore \quad a \simeq 2.39$

अशाप्रकारे Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \quad \hat{y} = 2.39 + 6.93x$

$X = 4.5$ ठेवल्यास,

$\hat{y} = 2.39 + 6.93(4.5)$

$= 2.39 + 31.185$

$= 33.575$

$\therefore \quad \hat{y} \simeq 33.58$

त्यामुळे जेव्हा कुटुंबाचे वार्षिक उत्पन्न 4.5 लाख ₹ असेल तेव्हा म्युच्युअल फंडाची वार्षिक अंदाजित गुंतवणुक 33.58 हजार ₹ होईल.

उदाहरण 10 : एक बॉलपेन बनविणाऱ्या कंपनीने शेवटच्या वर्षाच्या प्रत्येक महिन्याच्या शेवटी बॉलपेनचा भाव (₹ त) आणि त्या वेळीचा बॉलपेनचा पुरवठ्या (एकमात)ची खालील दिलेल्या माहितीवरून जेव्हा बॉलपेनचा भाव 40 ₹ असेल तेव्हा त्याच्या पुरवठ्याचे अनुमान काढा.

तपशील	भाव (x)	पुरवठा (y)
सरासरी	30	500
विचरण	25	10,000
$r = 0.8$		

येथे $\overline{x} = 30, \overline{y} = 500, s_x^2 = 25, s_y^2 = 10000$ आणि $r = 0.8$

$s_x^2 = 25$ असल्याने $s_x = 5$

$s_y^2 = 10000$ असल्याने $s_y = 100$

येथे $X = 40$ साठी पुरवठा Y च्या किंमतीचे अनुमान करावयाचे असल्याने Y ची X वरील रेषा मिळवू.

$b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$

$= 0.8 \times \frac{100}{5}$

$\therefore \ b = 16$

$a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 500 - 16\ (30)$

$= 500 - 480$

$\therefore \quad a = 20$

अशाप्रकारे Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 20 + 16x$$

$X = 40$ ठेवल्यास,

$$\hat{y} = 20 + 16(40)$$

$= 20 + 640$

$$\therefore \quad \hat{y} = 660$$

त्यामुळे भाव ₹ 40 अनुरूप पुरवठ्याचा अनुमान 660 एकक असेल.

उदाहरण 11 : दक्षिण भारतातील एका राज्यात एक व्यक्ती खाद्यपदार्थातून तयार होणाऱ्या चमचांचे उत्पादन करतो. वापरल्यानंतर चमचा खाता येईल असा असतो. प्रायोगिक रित्या एका राज्यात त्या चमच्यांना विक्रीसाठी ठेवलेले आहे. शेवटच्या सहा महिन्याचा सरासरी भाव (₹ त) आणि त्याची मागणी शंभर (एकक) वरून खालील परिणाम मिळतात.

$$\boldsymbol{n = 6, \Sigma x = 45, \Sigma y = 122, \Sigma x^2 = 439, \Sigma xy = 605}$$

ह्या माहितीवरून चमच्यांची मागणी (Y) चा भाव (X) वरील नियतसंबंध रेषा शोधा आणि भाव ₹ 10 असेल तेव्हा त्या चमच्यांच्या मागणीचे अनुमान करा.

येथे $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{45}{6} = 7.5$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{122}{6} = 20.33$

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{6(605) - (45)(122)}{6(439) - (45)^2}$$

$$= \frac{3630 - 5490}{2634 - 2025}$$

$$= \frac{-1860}{609}$$

$= -3.0542$

$\therefore \quad b \simeq -3.05$

$a = \bar{y} - b\bar{x}$

$= 20.33 - (-3.05)\ (7.5)$

$= 20.33 + 22.875$

$= 43.205$

$\therefore \quad a \simeq 43.21$

अशाप्रकारे Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 43.21 - 3.05x$$

$X = 10$ ठेवल्यास

$$\hat{y} = 43.21 - 3.05(10)$$

$$= 43.21 - 30.5$$

$$\therefore \quad \hat{y} = 12.71$$

त्यामुळे जेव्हा भाव ₹ 10 असेल तेव्हा अनुमानीत मागणी 12.71 (शंभर एकक) असेल.

उदाहरण 12 : एका कंपनीद्वारा उत्पादित पवनचक्कीद्वारा विद्युत उत्पादनाच्या एका एकमात वेग-वेगळ्या वेळी वाऱ्यांचा वेग (किमी / तास) आणि विद्युत-उत्पादन (वॉट) विषयी पाच अवलोकने नोंदविण्यात आली, त्यावरून खालील माहिती मिळाली.

वाऱ्याचा वेग = $\boldsymbol{X}$ किमी / तास

विद्युत उत्पादन = $\boldsymbol{Y}$ वॉट

$$\boldsymbol{\bar{x} = 20, \ \bar{y} = 186, \ \Sigma xy = 23200, \ s_x^2 = 50}$$

ह्या माहितीवरून विद्युत उत्पादन (Y) ची वाऱ्याचा वेग (X) वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. जर वाऱ्याचा वेग 25 किमी / तास असेल तर अंदाजित विद्युत उत्पादन मिळवा.

येथे, $n = 5, \ \Sigma xy = 23200, \ \bar{x} = 20, \ \bar{y} = 186$ आणि $s_x^2 = 50$

आता $b = \dfrac{Cov(x, y)}{s_x^2}$

$$= \frac{\Sigma xy - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x^2}$$

$$= \frac{23200 - 5(20)(186)}{5(50)}$$

$$= \frac{23200 - 18600}{250}$$

$$= \frac{4600}{250}$$

$$\therefore \quad b = 18.4$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$= 186 - 18.4\ (20)$$

$$= 186 - 368$$

$$\therefore \quad a = -182$$

अशाप्रकारे Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$$\hat{y} = a + bx$$

$\therefore \quad \hat{y} = -182 + 18.4x$

$X = 25$ ठेवल्यास,

$\hat{y} = -182 + 18.4(25)$

$= -182 + 460$

$\therefore \quad \hat{y} = 278$ वॉट

त्यामुळे जेव्हा वाऱ्याचा वेग 25 किमी/तास असेल तेव्हा अंदाजित 278 वॉट विद्युत उत्पादन होईल.

स्वाध्याय 3.2

1. कापसाच्या पिकावर खताचा वापराचा परिणाम मिळविण्यासाठी केलेल्या अभ्यासवरून खालील माहिती मिळाली.

खताचा वापर (10 किग्रा) x	28	35	25	24	20	25	20
कापसाचे उत्पादन प्रति हेक्टर (क्विंटल) y	128	140	115	120	105	122	100

ह्यावरून Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा आणि 300 किग्रा खताचा वापर होतो तेव्हा कापसाच्या प्रतिहेक्टर उत्पादनाचा अनुमान मिळवा.

2. पिता आणि पुत्र यांच्या वयातील संबंध तपासण्यासाठी पिता आणि प्रौढ पुत्र यांच्या आठ जोड्या घेऊन खालील माहितीवरून पुत्राच्या उंचीची पित्याच्या उंचीवरील नियतसंबंध रेषा मिळवा.

पित्याची उंची (सेमी) x	167	169	171	168	173	166	167	165
पुत्राची उंची (सेमी) y	158	170	169	172	170	168	164	167

जेव्हा एखाद्या पित्याची उंची 170 सेमी असेल तेव्हा पुत्राच्या उंचीचे अनुमान करा.

3. समुद्रसपाटीपासून स्थळाची उंची (altitude) आणि त्या स्थळाच्या हवेतील उपयुक्त ऑक्सिजनचे प्रमाण याविषयीच्या खालील माहितीवरून उपयुक्त ऑक्सिजनच्या प्रमाणाची (Y) आणि समुद्रसपाटीपासूनची उंची (X) ह्यामधील नियतसंबंध रेषा मिळवा. (305 मी $\simeq$ 1000 फूट)

स्थळाची उंची (305 मीटर) x	0	1	2	3	4	5	6
उपयुक्त ऑक्सिजन (%) y	20.9	20.1	19.4	17.9	17.9	17.3	16.6

जेव्हा एखाद्या स्थळाची समुद्रसपाटीपासून उंची 7 एकक (1 एकक = 305 मीटर) असेल तर त्या हवेतील उपयुक्त ऑक्सिजनच्या टक्केवारीचा अंदाज मिळवा.

4. एका मोठ्या शहरातील घरातील वापरण्याची जागा आणि मासिक भाडे यामधील संबंध तपासण्यासाठी खालीलप्रमाणे माहिती एकत्र करण्यात आली आहे.

वापरण्याची जागा (चौ. मी) x	55	60	75	80	100	120	140
मासिक भाडे y	18,000	19,000	20,000	20,000	25,000	30,000	50,000

यावरून Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. जर एखाद्या घरातील वापरण्याची जागा 110 चौ.मी. असेल तर त्याचे भाडे किती असेल, त्याचे अनुमान करा.

5. रोज येणाऱ्या एका मोलमधील ग्राहकांची संख्या आणि विक्री (दहा हजार ₹) यामधील संबंध समजण्यासाठी खालीलप्रमाणे निदर्श माहिती मिळते.

ग्राहकाची संख्या x	50	70	100	70	150	120
विक्री (दहा हजार ₹) y	2.0	2.0	2.5	1.4	4.0	2.5

यावरून y ची x वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. जर एखाद्या दिवशी 80 ग्राहकांनी मोलची भेट घेतली त्या मोलची विक्री किती झाली असेल त्याचे अनुमान करा.

6. एका शहरात कापड व्यवसायातील दहा पेढयांचा सरासरी नफा (लाख ₹) आणि सरासरी वार्षिक वहीवटी खर्च (लाख ₹) ची माहिती खालीलप्रमाणे आहे.

तपशील	**नफा** x	**वहिवटी खर्च** y
मध्यक	60	25
प्रमाणित विचलन	6	3
सहविचरण = 10.4		

Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा.

7. गुजरातच्या वेग-वेगळ्या तालुक्यात पडलेला सरासरी पाऊस (सेमी) आणि मक्याचे उत्पन्न (क्विंटल/हेक्टर) यातील संबंध तपासण्यासाठी एकत्र केलेल्या माहितीवरून खालील परिणाम मिळतात.

तपशील	**पाऊस (सेमी)** x	**मक्याचे उत्पन्न (क्विंटल/हेक्टर)** y
मध्यक	82	180
विचरण	64	225
सहसंबंधांक = 0.82		

जर पाऊस 60 सेमी पडेल तेव्हा मक्याच्या उत्पन्नाचा अनुमान मिळवा.

8. हाताच्या घड्याळातील बॅटरी (सेल)चा भाव (₹ त) (X) भाव आणि त्याचा पुरवठा (शंभर एककात) (Y) मधील संबंधांचा अभ्यास करण्यासाठी एकत्र केलेल्या माहितीचे परिणाम खालीलप्रमाणे आहे.

$$n = 10, \Sigma x = 130, \Sigma y = 220, \Sigma x^2 = 2288, \Sigma xy = 3467$$

ह्या माहितीवरून Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा शोधा आणि भाव ₹ 16 असेल तेव्हा पुरवठयाचा अनुमान करा.

9. उन्ह्याळ्यातील वेगवेगळ्या सहा दिवसातील एका शहराचे महत्तम तापमान (X) आणि आईस्क्रीमची विक्री (Y) ह्या विषयीची माहिती खालीलप्रमाणे आहे.

महत्तम तापमान = X (डिग्री सेल्सियस)

आईस्क्रीमची विक्री = Y (लाख ₹ त)

$$\bar{x} = 40, \bar{y} = 1.2, \Sigma xy = 306, s_x^2 = 20$$

ह्या माहितीवरून आईस्क्रीमच्या विक्रीची महत्तम तापमाना वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. जर एखाद्या दिवसाचे महत्तम तापमान 42 डिग्री सेल्सियस असेल, तर त्या दिवसाच्या आईस्क्रीम विक्रीचा अंदाज मिळवा.

*

3.6 निश्चायकतेचा अंक (Coefficient of Determination)

आपणास माहित आहे की, नियतसंबंध हे दोन सहसंबंधित चलामधील विधेयात्मक संबंध आहे आणि निरपेक्ष चलाच्या एखाद्या किंमतीसाठी त्याला अनुरूप सापेक्ष चलाच्या किंमतीचा अनुमान काढण्यासाठी उपयुक्त असते. अशा अनुमानाची विश्वसनीयता समजण्यासाठीच्या एका मापाला निश्चायकतेचा अंक म्हणतात.

समजा की Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = a + bx$ आहे. तर सापेक्ष चल Y च्या अवलोकनांवरून मिळणारी अवलोकित किमंत y आणि त्याला अनुरूप नियतसंबंध रेषेवरून मिळलिली त्याची अनुमानीत किंमती $\hat{y}$ मधील सहसंबंधांकाच्या वर्गाला निश्चायकतेचा अंक म्हणतात. त्या R^2 ने दर्शवितात.

$$\therefore R^2 = \left[r\left(y, \hat{y}\right)\right]^2$$

सहजपणे तपासू शकतो की, येथे दोन चलामधील संबंधाचा अभ्यासात R^2 चे मूल्य $r^2(x, y)$ म्हणजे की r^2 एवढेच असते.

$$\begin{aligned} R^2 &= \left[r\left(y, \hat{y}\right)\right]^2 \\ &= \left[r\left(y, a + bx\right)\right]^2 \\ &= \left[r\left(y, x\right)\right]^2 \\ &= \left[r\left(x, y\right)\right]^2 \end{aligned}$$

$\left\{ \because \right.$ कारण उगमबिंदू आणि माप दोन्ही परीवर्तनापासून r स्वतंत्र आहे. त्यामुळे $\hat{y}(= a + bx)$ चलामधून a ला वजा केल्यानंतर b ने भागितले असता r ची किमंत बदलणार नाही. $\left. \right\}$

$$\therefore R^2 = r^2$$

अशाप्रकारे, $R^2 = r^2$ असल्याने आपण सांगू शकतो की सापेक्ष चल Y ची अनुमानीत किंमतीची विश्वसनीयता मुख्यत्वे X आणि Y मधील सहसंबंधांक वर आधार ठेवते.

जर $r = \pm 1$ असेल $R^2 = r^2 = 1$ होईल आणि X आणि Y मध्ये संपूर्ण सुरेख सहसंबंध असतो. त्यामुळे आपण सांगू शकतो की नियतसंबंध रेषेवरून मिळवलेली Y ची अनुमानीत किंमत 100% विश्वसनीय आहे. परंतु जर $r = 0$ असेल, तर $R^2 = r^2 = 0$ आणि X आणि Y मध्ये सुरेख सहसंबंध नाही. त्यामुळे आपण सांगू शकतो की, नियतसंबंध रेषेवरून मिळवलेली Y ची अनुमानित किमंत बिलकुल विश्वसनीय नाही.

वरील चर्चेवरून स्पष्ट आहे की R^2ची मोठी किमंत दोन चलामधील घनिष्ठ सुरेख सहसंबंध दर्शवितो त्यामुळे निश्चायकतेचा अंक (R^2) वरून सुरेख नियतसंबंधाची धारणा योग्य आहे की नाही ते तपासता येईल. जर R^2 ची किमंत 1 च्या जवळ असेल तर X आणि Y मधील संबंध सुरेख आहे अशी धारणा योग्य मानली जाईल आणि जर R^2 ची किंमत 0 च्या जवळ असेल तर X आणि Y मधील सुरेख नियतसंबंधाची धारणा योग्य मानली जाणार नाही.

सापेक्ष चल Y मध्ये होणारा एकूण फेरबदलमधून किती चलन नियतसंबंध रेषेद्वारा समजविता येईल ते निश्चायकतेच्या अंकावरून मिळते. उदा. एखाद्या माहितीसाठी $r = 0.9$ असेल तर निश्चायकतेचा अंक $(0.9)^2 = 0.81$ होईल आणि त्यामुळे $r^2 \times 100\% =$ 81 % होईल म्हणजे सांगाता येईल की चल Y मध्ये होणाऱ्या एकूण चलनातून 81% चलनाची समजुती नियतसंबंध रेषेवरून मिळते. त्यामुळे आपण सांगू शकतो, की निवडलेल्या नियतसंबंधाचे सुरेख मॉडेल ह्या माहितीसाठी योग्य आहे.

उदाहरण 13 : खालील कोष्टकात वेगवेगळ्या कंपनीत काम करणाऱ्या टेक्नीकल कामगारांचा अनुभव आणि त्याचा मासिक पगार (हजार ₹ त) दिलेला आहे :

अनुभव (वर्ष) x	12	8	16	20	5	14	10
पगार(हजार ₹) y	22	15	25	30	12	24	20

ह्या माहितीवरून निश्चायकतेच्या अंकाची मोजणी करा आणि अनुभव व पगारामधील सुरेख नियतसंबंधाची धारणा तपासा.

येथे, $n=7,\ \bar{x}=\frac{\Sigma x}{n}=\frac{85}{7}=12.14,\ \bar{y}=\frac{\Sigma y}{n}=\frac{148}{7}=21.14$

	अनुभव (वर्ष) x	मासिक पगार (हजार ₹) y	xy	x^2	y^2
	12	22	264	144	484
	8	15	120	64	225
	16	25	400	256	625
	20	30	600	400	900
	5	12	60	25	144
	14	24	336	196	576
	10	20	200	100	400
एकूण	**85**	**148**	**1980**	**1185**	**3354**

$$R^2=r^2=\left[\frac{n\Sigma xy-(\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}\cdot\sqrt{n\Sigma y^2-(\Sigma y)^2}}\right]^2$$

$$=\left[\frac{7(1980)-(85)(148)}{\sqrt{7(1185)-(85)^2}\cdot\sqrt{7(3354)-(148)^2}}\right]^2$$

$$=\frac{[13860-12580]^2}{[8295-7225]\cdot[23478-21904]}$$

$$=\frac{(1280)^2}{(1070)\cdot(1574)}$$

$$=\frac{1638400}{1684180}$$

$$=0.9728$$

$$\therefore\ R^2\simeq 0.97$$

R^2 ची किमंत 0.97 आहे. 1 च्या खूप जवळ आहे. त्यामुळे आपण सांगू शकतो की अनुभवाचे वर्ष आणि पगार यामध्ये सुरेख नियतसंबंध आहे ही धारणा योग्य मानता येईल.

नोंद : वरील उदाहरणात $u=x-A$ आणि $v=y-B$ (जेथे A आणि B अनुकुल अचल किंमती) घेऊनही R^2 शोधता येईल.

उदाहरण 14 : दाटवस्ती आणि त्वचेच्या रोगाचे रोगी व्यक्तिची संख्या यामधील संबंध समजण्यासाठी सहा शहरासाठी दाटवस्ती (प्रति चौ.मी.) आणि त्वचा रोगी व्यक्ति (दर हजाराला) याविषयी खालीलप्रमाणे माहिती मिळाली आहे.

दाटवस्ती (प्रति चौ.किमी.) x	12,000	14,500	19,000	17,500	13,500	16,000
रोग्याची संख्या (दर हजाराला) y	80	60	90	80	40	30

या माहितीवरून Y आणि X वरील नियतसंबंध मिळवा. जर एखाद्या शहराचा दाटवस्तीपणा 15000 (प्रति चौ.किमी.) असेल तर त्यात असणाऱ्या त्वचा रोगी व्यक्तिच्या संख्येचे अनुमान काढा नियतसंबंधा मॉडेलची विश्वसनीयता तपासा.

येथे, $n = 6, \overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{92500}{6} = 15416.67$; $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{380}{6} = 63.33$

आपण पाहू शकतो की, चल X च्या किंमती 500 च्या पटीत आहे आणि चल Y च्या किंमती 10 च्या पटीत आहेत. त्यामुळे $A = 15000$, $B = 60$, $c_x = 500$, $c_y = 10$ घेऊन आपण संक्षिप्त पद्धतीचा उपयोग करू. आता आपण u आणि v ला खालीलपणे व्याख्याईत करा.

$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-15000}{500}$ आणि $v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-60}{10}$

	दाटवस्ती (दर चौ. किमी) x	रोग्याची संख्या (दर हजाराला) y	$u = \frac{x-15000}{500}$	$v = \frac{y-60}{10}$	uv	u^2	v^2
	12000	80	–6	2	–12	36	4
	14500	60	–1	0	0	1	0
	19000	90	8	3	24	64	9
	17500	80	5	2	10	25	4
	13500	40	–3	–2	6	9	4
	16000	30	2	–3	–6	4	9
एकूण	**92500**	**380**	**5**	**2**	**22**	**139**	**30**

$$b = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \times \frac{c_y}{c_x}$$

$$= \frac{6(22) - (5)(2)}{6(139) - (5)^2} \times \frac{10}{500}$$

$$= \frac{132 - 10}{834 - 25} \times \frac{1}{50}$$

$$= \frac{122}{809} \times \frac{1}{50}$$

$$= \frac{122}{40450}$$

$\therefore b \simeq 0.003$

$a = \bar{y} - b\bar{x}$

$= 63.33 - 0.003\,(15416.67)$

$= 63.33 - 46.25$

$\therefore a = 17.08$

Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \hat{y} = 17.08 + 0.003\,x$

$X = 15000$ ठेवल्यास,

$\hat{y} = 17.08 + 0.003(15000)$

$= 17.08 + 45$

$\therefore \hat{y} = 62.08$

त्यामुळे एखाद्या शहराची वस्तीचा दाटपणा 15000 असेल, तर त्वचा रोग्याची अनुमानित संख्या दर हजाराला $62.08 \simeq 62$ असेल.

आता नियतसंबंध मॉडेलची विश्वसनीयता निश्चायकतेचा अंक R^2 वरून तपासता येईल, आता आपण ती मिळवू.

$$R^2 = r^2 = \left[\frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)\,(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2}\cdot\sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}\right]^2$$

$$= \frac{\left[6(22) - (5)\,(2)\right]^2}{\left[6(139) - (5)^2\right]\left[6(30) - (2)^2\right]}$$

$$= \frac{(122)^2}{(809)\,(176)}$$

$$= \frac{14884}{142384}$$

$$= 0.1045$$

$\therefore R^2 \simeq 0.10$

R^2 ची किमंत 0 च्या खूप जवळ असल्याने नियतसंबंध मॉडल विश्वसनीय आहे. असे सांगता येणार नाही.

3.7 नियतसंबंधांकाचे गुणधर्म

(1) सहसंबंधांक r आणि नियतसंबंधांक b दोघांचे चिन्ह समान असतात.

[$\because$ आपणास माहित आहे की प्रमाणित विचलन s_x आणि s_y नेहेमी अऋण असतात आणि $-1 \le r \le 1$ असते त्यामुळे $b = r \cdot \dfrac{s_y}{s_x}$ वरून समजेल की, जे चिन्ह r चे असेल तेच चिन्ह b चे देखील असते.]

(2) नियतसंबंधांक हा उगमबिंदूच्या परिवर्तनापासून स्वतंत्र आहे, परंतु मापापासून (scale) स्वतंत्र नाही.
(ह्या गुणधर्माची विस्तृत चर्चा नियतसंबंधकाची संक्षिप्त पद्धतीच्या समजूतीत केलेली आहे.)

नोंद : Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा नेहेमी $(\bar{x}, \bar{y})$ बिंदुतून पसार होते.

उदाहरण 15 : पित्याची उंची सेमीमध्ये (X) आणि तरूण वयाच्या पुत्राची उंची सेमी (Y) मध्ये संबंध समजण्यासाठीच्या प्रयोगात एका निदर्शात 6 पितापुत्राच्या जोड्या निवडण्यात आल्या. त्यावरून मिळणारे परिणाम खालीलप्रमाणे आहेत.

$$\Sigma x = 1020, \Sigma y = 990, \Sigma\left(x-170\right)^2 = 60, \Sigma\left(y-165\right)^2 = 105$$

$$\Sigma\left(x-170\right)\left(y-165\right) = 45$$

या माहितीवरून तरूण वयाच्या पुत्राची उंची (Y) ची पित्याची उंची (X) वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. त्याचप्रमाणे नियतसंबंध मॉडेलची विश्वसनीयता तपासा.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1020}{6} = 170$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{900}{6} = 165$$

$$\therefore \Sigma\left(x-170\right)^2 = \Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2 = 60$$

$$\Sigma\left(y-165\right)^2 = \Sigma\left(y-\bar{y}\right)^2 = 105$$

$$\Sigma\left(x-170\right)\left(y-165\right) = \Sigma\left(x-\bar{x}\right)\left(y-\bar{y}\right) = 45$$

$$\therefore b = \frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)\left(y-\bar{y}\right)}{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}$$

$$= \frac{45}{60}$$

$$\therefore b = 0.75$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$= 165 - 0.75\left(170\right)$$

$$= 165 - 127.5$$

$$\therefore a = 37.5$$

अशाप्रकारे, Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\therefore \hat{y} = 37.5 + 0.75x$$

आता नियतसंबंध मॉडेलची विश्वसनीयता तपासण्यासाठी निश्चायकतेचा अंक R^2 मिळवू.

$$R^2 = \left[\frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)\left(y-\bar{y}\right)}{\sqrt{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\Sigma\left(y-\bar{y}\right)^2}}\right]^2$$

$$= \frac{(45)^2}{(60)(105)}$$

$$= \frac{2025}{6300}$$

$$= 0.3214$$

$$\therefore R^2 \simeq 0.32$$

R^2 ची किमंत 0 च्या जवळ असल्याने हा नियतसंबंध मॉडेल विश्वसनीय आहे असे सांगता येणार नाही.

उदाहरण 16 : (i) जर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = 12 - 1.5x$ असेल आणि X चा मध्यक 6 असेल तर Y चा मध्यक शोधा. (ii) जर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = 11.5 + 0.65x$ असेल आणि $\bar{y} = 18$ असेल तर $\bar{x}$ ची किमंत शोधा.

(i) आपणास माहित आहे की, नियत संबंत रेषा $(\bar{x}, \bar{y})$ बिंदुतून नेहेमी पसार होते त्यामुळे नियतसंबंध समीकरणात x च्या एवेजी $\bar{x}$ ठेवल्यास तो $\hat{y}$ मिळतो तोच $\bar{y}$ असतो. किंवा $\hat{y}$ ऐवजी $\bar{y}$ ठेवल्यात जो x मिळतो तोच $\bar{x}$ होतो.

$\hat{y} = 12 - 1.5x$ मध्ये x च्या ऐवजी $\bar{x} = 6$ ठेवल्यास,

$\therefore \hat{y} = 12 - 1.5(6)$

$\therefore \hat{y} = 12 - 9$

$\therefore \hat{y} = 3$ त्यामुळे $\bar{y} = 3$

अशाप्रकारे, Y चा मध्यक 3 असेल.

(ii) वरील चर्चेप्रमाणे $\hat{y} = 11.5 + 0.65x$ मध्ये $\hat{y}$ ऐवजी $\bar{y} = 18$ ठेवल्यात जो x मिळेल तोच $\bar{x}$ असेल.

$\hat{y} = 11.5 + 0.65x$ मध्ये $\hat{y} = \bar{y} = 18$ ठेवल्यास,

$18 = 11.5 + 0.65x$

$\therefore 6.5 = 0.65x$

$\therefore x = \frac{6.5}{0.65}$ त्यामुळे

$\therefore x = 10$ त्यामुळे $\bar{x} = 10$

अशाप्रकारे, X चा मध्यक 10 असेल.

उदाहरण 17 : (i) जर $\bar{x} = 5, \bar{y} = 11$ आणि $b = 1.2$ असेल तर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. (ii) जर $\bar{x} = 60, \bar{y} = 75$ आणि $s_x^2 : Cov(x, y) = 5:3$ असेल तर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा आणि त्यावरून $X = 65$ साठी Y च्या किंमतीचे अनुमान मिळवा.

(i) येथे $b = 1.2$ तसेच $\bar{x} = 5$ आणि $\bar{y} = 11$ आहे.

आता, $a = \bar{y} - b\bar{x}$

$\therefore a = 11 - 1.2(5)$

$= 11 - 6$

$\therefore a = 5$

Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा खालीलप्रमाणे मिळते.

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \hat{y} = 5 + 1.2x$

(ii) येथे $\overline{x} = 60, \overline{y} = 75$ आणि $s_x^2 : Cov(x, y) = 5:3$ आहे.

$s_x^2 : Cov(x, y) = 5:3$

$\therefore \dfrac{s_x^2}{Cov(x, y)} = \dfrac{5}{3}$ त्यामुळे $\dfrac{Cov(x, y)}{s_x^2} = \dfrac{3}{5}$

आता, $b = \dfrac{Cov(x, y)}{s_x^2} = \dfrac{3}{5} = 0.6$

आणि $a = \overline{y} - b\overline{x}$

$= 75 - 0.6\,(60)$

$= 75 - 36$

$\therefore a = 39$

आता Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा खालीलप्रमाणे मिळते.

$\hat{y} = a + bx$

$\therefore \hat{y} = 39 + 0.6x$

$X = 65$ ठेवल्यास,

$\hat{y} = 39 + 0.6\,(65)$

$= 39 + 39$

$\therefore \hat{y} = 78$

अशाप्रकारे, $X = 65$ साठी Y ची अनुमानीत किमंत 78 होते.

उदाहरण : 18 : (i) Y ची X वरील अन्वायोजित नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = 50 + 3.5x$ जर रेषेच्या अन्वायोजनात एक अवलोकन $(16, 108)$ चा उपयोग केला असेल, तर $X = 16$ साठी Y ची अनुमानीत त्रुटी शोधा. (ii) जर $\hat{y} = 22 + 0.8x$ रेषेच्या अन्वायोजनेत एक अवलोकन $(10, 30)$ चा उपयोग केला असेल, तर $X = 10$ साठी Y ची अनुमानीत किंमतीची त्रुटी शोधा. त्या उत्तरावरून तुम्ही काय निर्णय काढाल ?

(i) $\hat{y} = 50 + 3.5x$ भां $X = 16$ ठेवल्यास,

$\therefore \hat{y} = 50 + 3.5(16)$

$= 50 + 56$

$\therefore \hat{y} = 106$

आणि अवलोकित माहितीवरून $X = 16$ साठी $Y = 108$ आहे.

$\therefore$ त्रुटी $e = y - \hat{y}$

$= 108 - 106$

$\therefore e = 2$

अशाप्रकारे, $X = 16$ साठी Y ची अनुमानित किंमतीची त्रुटी 2 होईल.

(ii) $\hat{y} = 22 + 0.8x$ मध्ये $X = 10$ ठेवल्यास,

$\therefore\ \hat{y} = 22 + 0.8\,(10)$

$= 22 + 8$

$\therefore\ \hat{y} = 30$

आणि अवलोकित माहितीवरून $X = 10$ साठी $Y = 30$ आहे.

$\therefore$ त्रुटी $e = y - \hat{y}$

$= 30 - 30$

$\therefore\ e = 0$

आता, $X = 10$ म्हणू Y ची अनुमानित किमंतची त्रुटी 0 होईल.

अशाप्रकारे त्रुटीची किमंत शून्य आहे. त्यामुळे आपण सांगू शकतो की, बिंदू $(10, 30)$ हे अन्वायोजित रेषा $\hat{y} = 22 + 0.8x$ वरच आलेले आहे.

नोंद : न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीने मिळणाऱ्या नियतसंबंध रेषेच्यावरील बाजूस आलेल्या बिंदूसाठी त्रुटी धन आणि खालील बाजूस आलेल्या बिंदूसाठी त्रुटी ऋण तसेच रेषेवर आलेल्या बिंदूसाठी त्रुटी शून्य असते.

उदाहरण 19 : (i) जर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = 25 + 3x$ असेल आणि $Cov(x, y) = 48$ असेल तर X चे प्रमाणित विचलन मिळवा. जर Y चे प्रमाणित विचलन 15 असेल, तर निश्चायकतेचा अंक शोधा.
(ii) वरील प्रश्नात दिलेली नियतसंबंध रेषेसाठी जर Y च्या किंमतीत 15 ची वाढ करावयाची असेल, तर X च्या किती अंदाजे किंमती एकमांची वाढ करावी लागेल ?

(i) y ची x वरील नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = 25 + 3x$ ला त्याच्या सामान्य स्वरूप $\hat{y} = a + bx$ शी तुलना केली असता नियतसंबंधांक $b = 3$ मिळतो आता $Cov(x, y) = 48$ दिलेला असल्याने,

$$b = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2}$$

$$\therefore\ 3 = \frac{48}{s_x^2}$$

$$\therefore\ s_x^2 = 16$$

$$\therefore\ s_x = 4$$

अशाप्रकारे X प्रमाणित विचलन 4 होईल.

आता Y चे प्रमाणित विचलन $s_y = 15$ दिलेले आहे.

त्यामुळे निश्चायतांकतेचा अंक $R^2 = \left[\dfrac{Cov(x, y)}{s_x \cdot s_y}\right]^2$

$\therefore\ R^2 = \left[\frac{48}{4 \times 15}\right]^2 = (0.8)^2 = 0.64$ होईल.

दुसरी पद्धती :

$$b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

$$\therefore 3 = r \cdot \frac{15}{4}$$

$$\therefore r = \frac{3 \times 4}{15}$$

$$\therefore r = 0.8$$

$$\therefore R^2 = r^2 = (0.8)^2 = 0.64$$

(ii) येथे, $\hat{y} = 25 + 3x$ आहे आणि नियतसंबंधांक $b = 3$ आहे. तो दर्शविते की X च्या किंमतीत 1 एककाने वृद्धी झाल्यास Y ची अनुमानित किमंत 3 एककाने वाढते त्यामुळे जर Y च्या किंमतीत 15 एककाची वृद्धी करावयाची असेल तर X च्या किंमतीत $\frac{15}{3} = 5$ एककांची अंदाजाने वाढ करावी लागेल.

उदाहरण 20 : (i) जर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = \frac{x}{2} + 5$ आणि $s_y : s_x = 5:8$ असेल, तर निश्चायकतेचा अंक मिळवा. (ii) जर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $4x + 5y - 65 = 0$ असेल तर नियतसंबंधांक b ची किमंत शोधा.

(i) Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = \frac{x}{2} + 5 = \frac{1}{2} \cdot x + 5$ चे सामान्य स्वरूप $\hat{y} = a + bx$ शी तुलना केल्यास

$b = \frac{1}{2}$ मिळते.

आता, $s_y : s_x = 5:8$

$$\therefore \quad \frac{s_y}{s_x} = \frac{5}{8}$$

आता $b = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} = r \cdot \frac{5}{8}$$

$$\therefore \quad r = \frac{1}{2} \times \frac{8}{5}$$

$$\therefore \quad r = 0.8$$

$\therefore$ निश्चायकतेचा अंक $R^2 = r^2 = (0.8)^2 = 0.64$ होईल.

(ii) आता Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $4x + 5y - 65 = 0$ दिलेली आहे.

त्याला सामान्य स्वरूपात बदलल्यास

$$4x + 5y - 65 = 0$$

$$\therefore 5y = 65 - 4x$$

$$\therefore y = \frac{65 - 4x}{5}$$

$$\therefore y = \frac{65}{5} - \frac{4x}{5}$$

$$\therefore y = 13 - 0.8x$$

आता त्याची $\hat{y} = a + bx$ शी तुलना केल्यास $b = -0.8$ मिळेल.

उदाहरण 21 :

(i) जर $b_{yx} = 0.85$, $u = x - 15$ आणि $v = y - 20$ असल्यास b_{vu}ची किमंत शोधा.

(ii) जर $u = \frac{x-5}{3}$, $v = \frac{y-8}{5}$ आणि $b_{yx} = 0.9$ असेल, तर b_{vu}ची किमंत शोधा.

(iii) जर $u = 10(x - 4.5)$, $v = \frac{y-50}{10}$ आणि $b_{yx} = 0.25$ असल्यास b_{vu}ची किमंत शोधा.

(iv) जर $u = 5(x - 40)$, $v = 2(y - 18)$ आणि $b_{yx} = 1.6$ असेल, तर b_{vu}ची किमंत शोधा.

वरील सर्वच प्रश्न सोडविण्यासाठी नियतसंबंधांकाच्या खालील गुणधर्माचा उपयोग करु.

- जर $u = x - A$ आणि $v = y - B$ असेल, तर $b_{yx} = b_{vu}$

- जर $u = \frac{x-A}{c_x}$ आणि $v = \frac{y-B}{c_y}$ असेल, तर $b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x}$

(i) $u = x - 15 = x - A$ आणि $v = y - 20 = y - B$ असल्याने

$\therefore\ b_{vu} = b_{yx} = 0.85$ होईल.

(ii) $u = \frac{x-5}{3} = \frac{x-A}{c_x}$ आणि $v = \frac{y-8}{5} = \frac{y-B}{c_y}$ असल्याने

$b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} \quad \therefore\ b_{vu} = b_{yx} \cdot \frac{c_x}{c_y} = 0.9 \times \frac{3}{5} = 0.54$ होईल.

(iii) $u = 10(x - 4.5) = \frac{x-4.5}{\frac{1}{10}} = \frac{x-A}{c_x}$ आणि $v = \frac{y-50}{10} = \frac{y-B}{c_y}$ असल्याने

$b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} \quad \therefore\ b_{vu} = b_{yx} \cdot \frac{c_x}{c_y} = 0.25 \times \frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{10} = 0.25 \times \frac{1}{100} = 0.0025$ होईल.

(iv) जर $u = 5(x - 40) = \frac{x-40}{\frac{1}{5}} = \frac{x-A}{c_x}$ आणि $v = 2(y - 18) = \frac{y-18}{\frac{1}{2}} = \frac{y-B}{c_y}$ असल्याने

$b_{yx} = b_{vu} \cdot \frac{c_y}{c_x} \quad \therefore\ b_{vu} = b_{yx} \cdot \frac{c_x}{c_y} = 1.6 \times \frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.6 \times \frac{2}{5} = 0.64$ होईल.

3.8 नियतसंबंधांकांचा उपयोग करतांना घ्यावयाची सावधानी

आपणास माहित आहे की नियतसंबंध हे दोन सहसंबंधित चलामधील विधेयात्मक संबंध आहे आणि म्हणून त्यावरून सापेक्ष चलाच्या किंमतीचे अनुमान करता येईल. अर्थशास्त्र, व्यापार, उद्योग, शिक्षण, मानसशास्त्र, समाजशास्त्र, वैद्यशास्त्र, आयोजन सारख्या व्यावहारिक इत्यादी क्षेत्रात निर्णय घेण्यासाठी नियतसंबंध खूप उपयोगी आहे. नियतसंबंधाचा खूप व्यापक प्रमाणात उपयोग होतो, परंतु त्याचा उपयोग करताना काही सावधानता बाळगणे आवश्यक आहे.

(1) सापेक्ष चलाच्या अनुमानाची विश्वसनीयता निश्चायतकेच्या अंका $\left(R^2\right)$ वरून तपासता येतो. त्यामुळे आपण निश्चायकतेच्या अंकावरून नियतसंबंध सुरेख आहे हे तपासल्यानंतरच मिळविलेल्या अनुमानाचा उपयोग केला पाहिजे.

(2) नियतसंबंधाच्या अभ्यासात लक्ष्यात ठेवण्यासारखी ईतर बाब ही आहे की, विकिर्ण आवृत्ती किंवा न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीवरुन मिळणाऱ्या नियतसंबंधाचा उपयोग निरपेक्ष चलाच्या दिलेल्या किंमती खूप दूरच्या किंमतीसाठी असू नये.

उदा. जर एखाद्या माहितीवरून पाऊस आणि गव्हाचे उत्पादन यातील गाढ प्रमाणात सहसंबंध पहावयास मिळतो जर असे असेल तर पाऊस वाढल्यास गव्हाचे उत्पादन पण वाढेल. आता दिलेल्या माहितीवरून मिळविलेल्या नियतसंबंधाचा उपयोग पावसाच्या एखाद्या किंमतीवरून त्याला अनुरूप गव्हाच्या उत्पन्नाचे अनुमान मिळवावयाचे असेल, तर ती किमंत पावसाच्या दिलेल्या किंमतीच्या आसपासची असेल तरच गव्हाच्या उत्पन्नाचे योग्य अनुमान मिळविता येईल. जर खूप पाऊस पडला तर पिकाला नुकसान होईल या उलट गव्हाचे उत्पादन घटेल. अशावेळी उपर्युक्त नियतसंबंधवरून सापेक्ष चलाचे (उत्पन्न) असत्य ठरते.

सारांश

- अभ्यासाखालील दोन चलामध्ये कार्य-कारण संबंध आहे ही पूर्वधारणा घेऊन नियतसंबंधाचा अभ्यास करण्यात येतो.
- नियतसंबंध - दोन चलामधील विधेयात्मक संबंध आहे
- सुरेख नियतसंबंध - दोन संबंधित चलामध्ये असा विधेयात्मक संबंध आहे की ज्यात चलाच्या किंमतीत (अंदाजे) अचल प्रमाणात फरक होतो म्हणजे तो संबंध एखाद्या सुरेषेद्वारा निश्चित करता येईल.
- नियतसंबंधावरून निरपेक्ष चलाच्या एखाद्या ज्ञात किंमतीसाठी अनुरूप सापेक्ष चलाच्या किंमतीचे अनुमान करता येते.
- नियतसंबंधांक : निरपेक्ष चलाच्या किंमतीच्या एका एकमात फरक केल्याने सापेक्ष चलाच्या किंमतीत होणारा अंदाजित फरक त्याला नियतसंबंधाचा उतार असेही म्हणतात.
- त्रुटी : सापेक्ष चलाच्या किंमतीतील अनुमानातील चूक.
- निश्चायकतेचा अंक : सापेक्ष चल Y च्या अवलोकित किंमती आणि त्याची अनुमानीत किंमती मधील सहसंबंधांकाचा वर्ग. दोन चलाच्या किस्स्यात त्याची किमंत निरपेक्ष चल X सापेक्ष चल Y यातील सहसंबंधांकाचा वर्गा एवढी असते.
- निश्चायकतेच्या अंकावरून सापेक्ष चल Y मध्ये होणाऱ्या एकूण फरकातून काही चलन नियतसंबंध रेषेद्वारा समजावता येईल ते समजू शकते आणि नियतसंबंध मॉडेलची विश्वसनीयता देखील समजू शकते.
- नियतसंबंधकाचा उपयोग माहितीच्या किंमतीपासून खूप दूरच्या किंमतीसाठी नसावा.

सूत्रांची यादी :

नियतसंबंध रेषेचे समीकरण

$\hat{y} = a + bx$

, $b = b_{yx} =$ नियतसंबंधांक

(1) $b = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$

(2) $b = \dfrac{n\Sigma xy-(\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2-(\Sigma x)^2}$

(3) $b = \dfrac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2}$ येथे, $u = x - A$ आणि $v = y - B$

(4) $b = \dfrac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2} \times \dfrac{c_y}{c_x}$ येथे, $u = \dfrac{x-A}{c_x}$, $v = \dfrac{y-B}{c_y}$

(5) $b = r \cdot \dfrac{s_y}{s_x}$

(6) $b = \dfrac{Cov(x, y)}{s_x^2}$

(7) $a = \bar{y} - b\bar{x}$

(8) निश्चायकतेचा अंक $R^2 = \left[r(y, \hat{y})\right]^2 = \left[r(x, y)\right]^2 = r^2$

स्वाध्याय 3

विभाग A

खालील दिलेल्या वैकल्पिक प्रश्नांसाठी सत्य विकल्प निवडा.

1. खालीलपैकी कोणता विकल्प दोन चलातील विधेयात्मक संबंध दर्शवितो ?

(a) सहसंबंध (b) नियतसंबंध (c) मध्यक (d) विचरण

2. नियतसंबंधाची श्रेष्ठ अन्वायोजित रेषा कोणच्या पद्धतीने मिळवितात ?

(a) न्यूनतम वर्गाची पद्धती (b) कार्ल पियर्सनची पद्धती

(c) महत्तम वर्गाची पद्धती (d) बाऊलीची पद्धती

3. प्रचलित संकेतात b_{yx} म्हणजे काय ?

(a) अंत:खंड (b) सापेक्ष चल

(c) X च्या किंमतीत एक एककाच्या फरकाने Y च्या किंमतीत होणारा अंदाजित फरक

(d) Y च्या किंमतीत एक एककाच्या फरकाने X च्या किंमतीत होणारा अंदाजित फरक

4. खालीलपैकी काय सत्य आहे ?

(a) $b_{yx} = r \cdot \frac{s_x}{s_y}$ (b) $b_{yx} = r \cdot \frac{s_y^2}{s_x^2}$ (c) $b_{yx} = \frac{Cov(x, y)}{s_y^2}$ (d) $b_{yx} = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$

5. नियतसंबंध रेषा कोणत्या बिंदूतून पसार होते ?

(a) $(\overline{x}, \overline{y})$ (b) $(0, \overline{y})$ (c) $(\overline{x}, 0)$ (d) $(0, 0)$

6. Y ची X वरील नियतसंबंध रेषेच्या संदर्भात अनुमानाची त्रुटी e काय आहे ?

(a) $y - \hat{y}$ (b) $\hat{x} - \hat{y}$ (c) $x - \hat{x}$ (d) $\hat{y} - \hat{x}$

7. जर वस्तूची विक्री त्याच्या जाहिरात खर्चावर आधारित असेल, तर कोणत्या नियतसंबंध रेषेचा उपयोग होतो ?

(a) जाहिरात खर्चाची विक्रीवरील नियतसंबंध रेषा

(b) जाहिरात खर्चाची जाहिरात खर्चावरील नियतसंबंध रेषा

(c) विक्रीची जाहिरात खर्चावरील नियतसंबंध रेषा

(d) विक्रीची विक्रीवरील नियतसंबंध रेषा

8. खालीलपैकी Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा कोणती ?

(a) $\hat{y} = a + bx + cx^2$ (b) $\hat{x} = c + by$ (c) $\hat{y} = a + bx$ (d) $\hat{y} = a + bx^2$

9. सहसंबंध (r) च्या कोणत्या किंमतीसाठी नियतसंबंधांकाची किमंत शून्य असते ?

(a) 1 (b) –1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

10. दोन चलामधील नियतसंबंधाच्या अभ्यासात निश्चायकतेचा अंक म्हणजे काय ?

(a) दोन प्रमाणित विचलनाचा गुणाकार (b) सहसंबंधांकाचा वर्ग

(c) सहविचरणाचा वर्ग (d) दोन विचरणाचा गुणाकार

11. जर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = 10 + 3x$ असेल तर $X = 20$ साठी Y ची अनुमानीत किमंत काय असेल ?

(a) 13 (b) 60 (c) 70 (d) 203

12. जर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $2x + 3y - 50 = 0$ असेल b_{yx} ची किंमत किती ?

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) 2

13. Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = 30 - 1.5x$ आहे. जर $\overline{x} = 10$ असेल तर $\overline{y}$ ची किमंत किती असेल ?

(a) 28.5 (b) 20 (c) 15 (d) 45

14. जर $u = \frac{x-15}{10}$ आणि $v = \frac{y-50}{2}$ आणि $b_{yx} = 7.5$ असेल तर b_{vu} ची किंमत किती असेल ?

(a) 7.5 (b) 1.5 (c) 37.5 (d) 150

15. जर $r = 0.8$ असेल तर सापेक्ष चलाच्या एकूण चलनाचा कितवा भाग नियतसंबंध मॉडेल द्वारा समजविता येईल ?

(a) 80 % (b) 64 % (c) 36 % (d) 20 %

विभाग B

खालील प्रश्नांची एका वाक्यात उतरे द्या.

1. सुरेख नियतसंबंधाची व्याख्या द्या.
2. नियतसंबंधांकाची व्याख्या द्या.
3. सुरेख नियतसंबंध मॉडेल समजवा.
4. नियतसंबंध रेषेच्या संदर्भात त्रुटी म्हणजे काय ?
5. नियतसंबंधाची श्रेष्ठ अन्वायोजित रेषा मिळविण्याच्या पद्धतीचे नाव सांगा.
6. नियतसंबंधांक कशाच्या परिवर्तनापासून स्वतंत्र आहे ?
7. नियतसंबंधांक कशाच्या परिवर्तनापासून स्वतंत्र नाही ?
8. जर एखादा निदर्श बिंदू अन्वायोजित रेषेवर पडत असेल तर त्रुटीची किमंत किती ?
9. माप (स्केल) च्या परिवर्तनाचे जर x आणि y दोन्ही चलाच्या किंमती दुप्पट करण्यात आला, तर नियतसंबंध बदलेल का ?
10. जर $r = 0.5, s_x = 2, s_y = 4$ असेल, तर नियतसंबंधांक b_{yx} ची किमंत किती असेल ?
11. $\hat{y} = 31.5 + 1.85x$ नियतसंबंध रेषेवरून $X = 10$ साठी Y च्या किंमतीचे अनुमान करा.
12. जर $y = a + bx$, जेथे $b > 0$ हा Y आणि X मधील संबंध दर्शवित असेल, तर r ची किमंत किती असेल ?
13. $y = 5 - 3x$ हा Y आणि X मधील संबंध दर्शवित असेल, तर r ची किमंत किती ?

विभाग C

खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

1. $\hat{y} = a + bx$ नियतसंबंध रेषेतील अचलांक a आणि b ला काय म्हणतात ?
2. नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = 23.2 - 1.2x$ च्या अन्वायोजने मध्ये एक अवलोकन (6, 17) चा उपयोग होत असेल, तर $X = 6$ साठी Y ची अनुमानीत किंमतीची त्रुटी शोधा.
3. जर $\bar{x} = 30, \bar{y} = 20$ आणि $b = 0.6$ असेल तर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषेचे अंत:खंड शोधा आणि त्या रेषेचे समीकरण लिहा.
4. जर $b_{yx} = 5$ असेल, तर त्याचे अर्थघटन काय होईल ?
5. जर $b = 1.5, r = 0.8$ आणि X चे प्रमाणित विचलन 1.6 असेल तर, Y चे प्रमाणित विचलन शोधा.
6. जर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषेवरील नियतसंबंधांक 0.6 असेल आणि X आणि Y च्या प्रमाणित विचलनाची किमंत 5 आणि 3 असेल, तर निश्चायकतेचा अंक शोधा.
7. जर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = 35 + 2x$ आणि $Cov(x, y) = 50$ असेल, तर X चे प्रमाणित विचलन शोधा.
8. या आधीच्या प्रश्न (7) मध्ये दिलेली नियतसंबंध रेषेसाठी जर Y च्या किंमतीत 10 एकके वाढविल्यास X च्या किंमतीत किती एककाची वाढ करावी लागेल ?
9. जर $\bar{x} = 10, \bar{y} = 25, \Sigma(x-10)(y-25) = 120$ आणि $\Sigma(x-10)^2 = 100$ असेल तर Y च्या X वरील नियतसंबंध रेषेसाठी a आणि b ची किंमत मिळवा.
10. नियतसंबंध रेषेच्या एका अभ्यासातील मिळालेल्या माहितीत $b_{yx} = 0.75, u = 6(x-20)$ आणि $v = 2(y-15)$ असेल तर b_{vu} ची किंमत किती असेल ?

विभाग D

खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या :

1. योग्य उदाहरण देऊन 'दोन चलांमध्ये कार्य-कारणाचा संबंध आहे' हे विधान समजवा तसेच निरपेक्ष आणि सापेक्ष चल व्याख्याईत करा.

2. नियतसंबंध रेषेच्या अन्वायोजना साठीची विकिर्ण आकृतीची पद्धती समजवा आणि तिच्या मर्यादा समजवा.

3. नियतसंबंध रेषेच्या अन्वायोजन न्यूनतम वर्गाची पद्धती समजवा.

4. नियतसंबंधांची उपयोगिता सांगा.

5. नियतसंबंधांकाचा गुणधर्म सांगा आणि नियतसंबंध रेषा नेहेमी कोणत्या बिंदूतून पसार होते ते समजवा.

6. समजवा : निश्चायकतेचा अंक.

7. नियतसंबंधाच्या उपयोगात घ्यावयाच्या सावधानता सांगा.

8. जर संबंधित दोन चल X आणि Y साठी $\Sigma(x-\bar{x})^2 = 80, \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 60, \bar{x} = 8, \bar{y} = 10$ असेल, तर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा.

9. जर $\bar{x} = 30, \bar{y} = 50, r = 0.8$ आणि X आणि Y चे प्रमाणित विचलन अनुक्रमे 2 आणि 5 असतील, तर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा.

10. जर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा $\hat{y} = 11 + 3x$ आणि $s_x : s_y = 3:10$ असेल तर निश्चायकतेचा अंक मिळवा आणि Y मधील होणाऱ्या चलनातून किती चलन नियतसंबंध मॉडेलने समजवा.

11. जर प्रचलित संकेतात $n = 7, \Sigma u = 2, \Sigma v = 25, \Sigma u^2 = 160$ आणि $\Sigma uv = 409$ असेल तर Y ची X वरील नियतसंबंध रेषेचा नियतसंबंधांक शोधा आणि त्याचे अर्थघटन करा.

12. जर $b_{yx} = 0.8$ असेल, तर खालील uv साठी b_{vu} ची किंमत शोधा :

(i) $u = x - 105$ आणि $v = y - 90$

(ii) $u = \frac{x-1400}{100}$ आणि $v = \frac{y-750}{50}$

(iii) $u = 10(x - 4.6)$ आणि $v = y - 75$

13. एका द्विचल माहितीसाठी खालीलप्रमाणे परिणाम मिळतात :

तपशील	x	y
अवलोकनाची संख्या	8	
मध्यक	100	100
मध्यकातून घेतलेल्या विचलनाच्या वर्गाची बेरीज	130	145
मध्यकातून घेतलेल्या विचलनाच्या गुणाकाराची बेरीज	115	

ह्या वरून Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा.

विभाग E

खालील उदाहरणे सोडवा :

1. एका I.T. कंपनीच्या मॅनेजरने सात मार्केटिंग एक्सिक्युटिवच्या नोकरीचे वर्ष आणि मासिक उत्पन्न याविषयी खालीलप्रमाणे माहिती एकत्र केली.

नोकरीचे वर्ष	10	6	8	5	9	7	11
मासिक उत्पन्न (दहा हजार ₹)	11	7	9	5	6	8	10

या माहितीवरून मार्केटिंग एक्सिक्युटिवची मासिक उत्पन्नाची नोकरीच्या वर्षावरील नियतसंबंध रेषा मिळवा.

2. एका वस्तुचा भाव (₹ त) आणि त्याचा पुरवठा (शंभर एककात) ची एकत्र केलेली माहिती खालीलप्रमाणे आहे.

भाव (₹)	59	60	61	62	64	57	58	59
पुरवठा (शंभर एकक)	78	82	82	79	81	77	78	75

ह्या माहितीवरून पुरवठ्याच्या भावावरील नियतसंबंध रेषा मिळवा.

3. ऑनलाईन शोपिंगची सोय देणाऱ्या एका कंपनीचा शेवटच्या वर्षातील जाहिरात-खर्च आणि विक्री याचा तपशील पुढीलप्रमाणे माहिती देतो.

तपशील	जाहिरात खर्च (दहा हजार ₹)	विक्री (लाख ₹)
मध्यक	10	90
प्रमाणित विचलन	3	12
$r = 0.8$		

ह्यावरून विक्रीची जाहिरात खर्चावरील नियतसंबंध रेषा मिळवा.

4. सामान्यपणे कमी पाऊस पडत असेल अशा विस्तारातील शेवटच्या 10 वर्ष दरम्यान पडलेला सरासरी पाऊस आणि एका पिकाचे प्रति एकर उत्पन्न याच्या तपशीलावरून खालील परिणाम मिळतात.

तपशील	पाऊस (सेमी)	पिकाचे उत्पादन (किग्रा)
मध्यक	**18**	**970**
प्रमाणित विचलन	2	38
सहसंबंधांक = 0.6		

ह्यावरून जर सरासरी पाऊस 20 सेमी असेल तेव्हा पिकाच्या उत्पादनासाठी अनुमान करा.

5. एका म्युच्युअल फंड कंपनीने सात वर्षात शेरबाजारात केलेली गुंतवणुक (लाख ₹ त) आणि त्याच्या त्या गुंतवणुकीची सहा महिन्यानंतर बाजार किमंत (लाख ₹ त) याविषयीचा तपशील खालीलप्रमाणे आहे.

तपशील	गुंतवणुक (लाख ₹) x	सहा महिन्यानंतर बाजार भाव (लाख ₹) y
मध्यक	40	50
प्रमाणित विचलन	100	256
सहविचरण = 80		

ह्या माहितीवरून Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा आणि जर एखाद्या वर्षात शेरबाजारात 45 लाख ₹ ची गुंतवणुक करण्यात आली तर सहा महिन्यानंतर त्याच्या बाजार भावाविषयी अनुमान मिळवा.

विभाग F

खालील उदाहरण सोडवा :

1. एका वस्तूच्यी मागणी आणि भावाविषयी एकत्र केलेल्या, खालील माहितीवरून मागणीची भावावरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. जर वस्तूचा भाव ₹ 40 असेल तर मागणी किती असेल याचा अंदाज करा.

भाव (₹)	38	36	37	37	36	38	39	36	38
मागणी (शंभर एकक)	12	18	15	12	17	13	13	15	12

2. आठ कामगारांचा यंत्रावर काम करण्याचा अनुभव (वर्षात) आणि त्याचा दर 100 एककात उत्पन्न केलेल्या सदोष एकमाच्या आधारे मिळविलेले निभाव मूल्य (Performance Rating)) चा तपशील खालीलप्रमाणे आहे.

कामगाराचा अनुभव (वर्ष)	5	12	15	8	20	18	22	25
देखाव मूल्य	80	82	85	81	90	90	95	97

ह्यावरून देखावमूल्यांची अनुभवावरील नियतसंबंध रेषा मिळवा आणि जर (एखाद्या कामगाराचा अनुभव 17 वर्ष असेल, तर त्याच्या देखाव मूल्याचा अंदाज मिळवा.

3. छूटक काम करून उत्पन्न मिळविणाऱ्या श्रमजीवी कुटुंबापैकी पाच कुटुंबाचे दैनिक उत्पन्न (₹ त) आणि त्याचा वापरखर्च (₹ त) खालीलप्रमाणे आहे.

दैनिक उत्पन्न	200	300	400	600	900
वापर-खर्च (₹)	180	270	320	480	700

यावरून वापरखर्चाची दैनिक उत्पन्नावरील नियतसंबंध रेषा मिळवा. जर एखाद्या कुटुंबाचे दैनिक उत्पन्न ₹ 500 असेल त्याच्या वापरखर्चात अंदाज करा.

4. जाहिरात अभियानाचा परिणाम पहाण्यासाठी एका पेढीद्वारा खालीलप्रमाणे माहिती एकत्र करण्यात आली :

वर्ष	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
जाहिरात खर्च (दहा हजार ₹)	12	15	15	23	24	38	42	48
विक्री (करोड ₹)	5	5.6	5.8	7	7.2	8.8	9.2	9.5

यावरून विक्रीची जाहिरात खर्चावरील नियतसंबंध रेषा शोधा. जर जाहिरात खर्च ₹ 5,00,000 असेल तेव्हा होणाऱ्या विक्रीचे अनुमान मिळवा.

5. बांधकाम क्षेत्रात आठ वेग-वेगळ्या कार्यरत कंपनीनी एका वर्षात मिळविलेल्या कामाची संख्या आणि त्याच्या वार्षिक नफ्याचा तपशील खालीलप्रमाणे आहे.

कामाची संख्या	2	5	9	12	6	4	8	10
वार्षिक नफा (लाख ₹)	100	300	700	1000	350	250	700	750

ह्यावरून वार्षिक नफ्याची कामाच्या संख्येवरील नियतसंबंध रेषा शोधा. सुरेख नियतसंबंध मॉडेलची विश्वसनीयता तपासा.

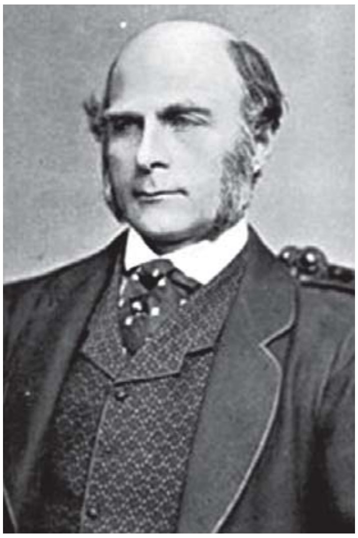
6. खालील दिलेल्या माहितीवरून Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा आणि $X = 30$ साठी Y च्या किंमतीचा अंदाज मिळवा.

$n = 10, \Sigma x = 250, \ \Sigma y = 300, \Sigma xy = 7900, \Sigma x^2 = 6500$

7. एका माहितीसाठी खालीलप्रमाणे परिणाम मिळतात.

$n = 12, \Sigma x = 30, \ \Sigma y = 5, \Sigma x^2 = 670, \Sigma xy = 344$

नंतर लक्षात आले की, एका अवलोकनांची जोडी (10, 14) च्या एवेजी (11, 4) घेतली गेली होती उपर्युक्त मापांना सुधारून त्यावरून Y ची X वरील नियतसंबंध रेषा मिळवा आणि $X = 5$ साठी Y चे अनुमान करा.



Sir Francis Galton
(1822 –1911)

Sir Francis Galton was an English Victorian statistician, progressive, polymath, sociologist, psychologist, anthropologist, eugenicist, tropical explorer, geographer, inventor, meteorologist, protogeneticist and psychometrician. He was knighted in 1909.

Galton produced over 340 papers and books. He also created the statistical concept of correlation and widely promoted regression toward the mean. He was the first to apply statistical methods to the study of human differences and inheritance of intelligence, and introduced the use of questionnaires and surveys for collecting data on human communities, which he needed for genealogical and biographical works and for his anthropometric studies.

He was a pioneer in eugenics, coining the term itself and the phrase “nature versus nature”. His book Hereditary Genius (1869) was the first social scientific attempt to study genius and greatness.

As an investigator of the human mind, he founded psychometrics (the science of measuring mental faculties) and differential psychology and the lexical hypothesis of personality. He devised a method for classifying fingerprints that proved useful in forensic science.

●

"Imperfect prediction, despite being imperfect can be valuable for decision making process."

– Michael Kattan

4

सामायिक श्रेणी
(Time Series)

विषयवस्तू :

4.1 सामायिक श्रेणी : प्रस्तावना, अर्थ, महत्त्व, व्याख्या आणि उपयोग

4.2 सामायिक श्रेणीचे घटक

4.3 सामायिक श्रेणी - वळण, वळण मापाच्या पद्धती

4.3.1 आलेखाची पद्धती

4.3.2 न्यूनतम वर्गाची पद्धती

4.3.3 चलित सरासरीची पद्धती

4.1 सामायिक श्रेणी (Time Series)

प्रस्तावना :

आंकडाशास्त्रात दोन संबंधित चलाचा अभ्यास वेग-वेगळ्या प्रकारे होत असतो. त्या संबंधित चलापैकी निरपेक्ष चल म्हणून समय घेतल्यास त्याच्या आधारित सापेक्ष चलाचा अभ्यास विशिष्टप्रमाणे करण्यात येतो. अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र तसेच व्यावसायिक आंकडाशास्त्रात वेळेबरोबर बदलणाऱ्या चलाच्या किमंती विषयीचा माहितीचा अभ्यास करण्यात येतो. उदा. देशाची लोकसंख्या, शेती उत्पादन, ठोकबंध भावाचा अंक, बेरोजगारीचा आंकडा, आयात-निर्यातीची माहिती, एखाद्या कारखान्याचे वार्षिक उत्पादन, शेअरमार्केटचे आंकडे, बॅकेतील व्याजदर, एखाद्या शहराचे प्रत्येक तासाचे तपमान वगैरे वेळेबरोबर व्यक्त करावयाचे असतात. ही माहिती समय आधारित असल्याने तिला सामायिक श्रेणी म्हणतात.

सामायिक श्रेणीचा अर्थ :

अमुक वेळेनंतर एकत्रित केलेली आणि काळानुक्रमे रचण्यात आलेल्या आंकडाकीय माहितीला सामायिक श्रेणी म्हणतात. सामायिक श्रेणीत समयाशी संबंधित चलाच्या किमंती असतात. अशा चलाचा दिर्घ काळादरम्यान किमंतीचा अभ्यास करण्यात आला तर त्याद्वारा भविष्यात ह्या चलाच्या किमंती काय असतील त्याचे अनुमान करता येते. असे पूर्वानुमान भविष्यातील आयोजनासाठी खूपच उपयुक्त ठरतात. उदा. एखाद्या विस्तारातील लोकसंख्येचे आंकडे दर्शविणारी सामायिक श्रेणीच्या अभ्यासाने त्यात होणाऱ्या फरकाची दिशा, प्रमाण, तऱ्हा (pattern) समजतात. भविष्यात ह्या विस्तारातील लोकांसाठी उपयुक्त आवश्यक साधने. वैद्यकिय सेवा, रोजगारीची संधी, शिक्षण सारख्या बाबीचे आयोजन करता येईल. वेगवेगळ्या कंपनीच्या शेअरचा भावाच्या सामायिक श्रेणीचा अभ्यास केल्याने कोणत्या शेअरच्या भावात कसा फरक होतो ते समजते आणि त्याच्या आधारे गुंतवणुकदाराना शेअरची खरेदी विक्री करण्याचा निर्णय घेता येतो. वेगवेगळ्या स्थळी समयांतराने मोजलेले तपमान त्याचप्रमाणे पावसाचे आंकडे हवामानात वैश्विकस्तरावर कसे बदल होतात ते दर्शविते. जे पर्यावरण संवर्धनाची नीती ठरविण्यात उपयुक्त ठरते. वर्तमानकाळात व्यापार संश्लेषणकाला विविध पद्धतीच्या सामायिक श्रेणीचा व्यापक प्रमाणात उपयोग होतो.

सामायिक श्रेणीमध्ये एका निश्चीत वेळनंतर बदलणाऱ्या चलाची माहिती दर्शविण्यात आलेली आहे. वेळेचे एकक अभ्यासाखाली चलावर आधारित असते. उदा. लोकसंख्येचे आंकडे दर दहा वर्षानी येतात. एकूण एकत्र केलेल्या सेल्सटॅक्सची माहिती वर्षाने मिळते. बँकेचे व्याज त्रिमासिक मोजतात. दुकानाचा नफा मासिक मोजतात. बॅक्टेरियाची वृद्धीसाठीचा समय तास असतो वगैरे.

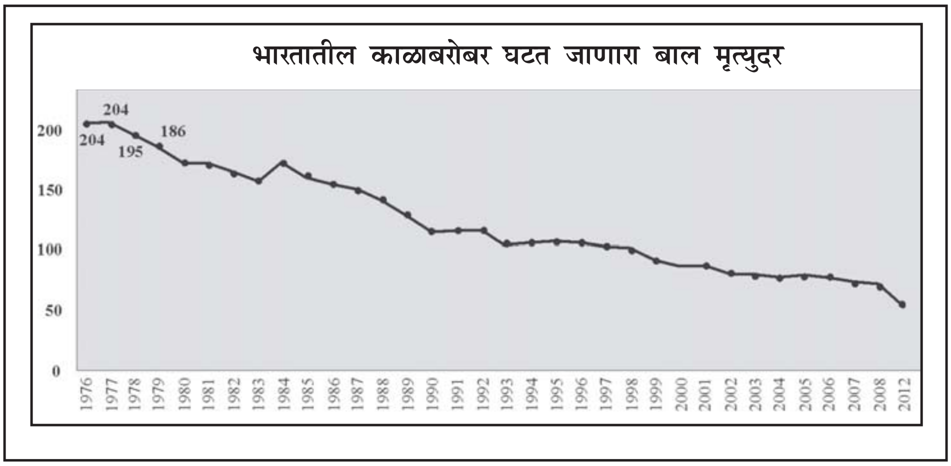
उदाहरणरूपाने आपण खालील सामायिक श्रेणी पाहू या.

(1)

समग्रलक्षी आधार				(टक्केवारीला)
वर्ष	**GDP वृद्धि**	**गुंतवणुक वृद्धि**	**सरासरी WPI फुगवटा**	**CAD (GDP ची टक्केवारी)**
2002-03	4.0	–0.4	3.4	0
2003-04	8.1	10.6	5.5	0
2004-05	7.0	24.0	6.5	0.4
2005-06	9.5	16.2	4.5	1.2
2006-07	9.6	13.8	6.6	1.0
2007-08	9.3	16.2	4.7	1.3
2008-09	6.7	3.5	8.1	2.3
2009-10	8.6	7.7	3.8	2.8
2010-11	9.3	14.0	9.6	2.8
2011-12	6.2	4.4	8.9	4.2
2012-13	5.4*	2.3*	7.6**	4.7*
* एप्रिल-सप्टेंबर, ** एप्रिल-डिसेंबर				

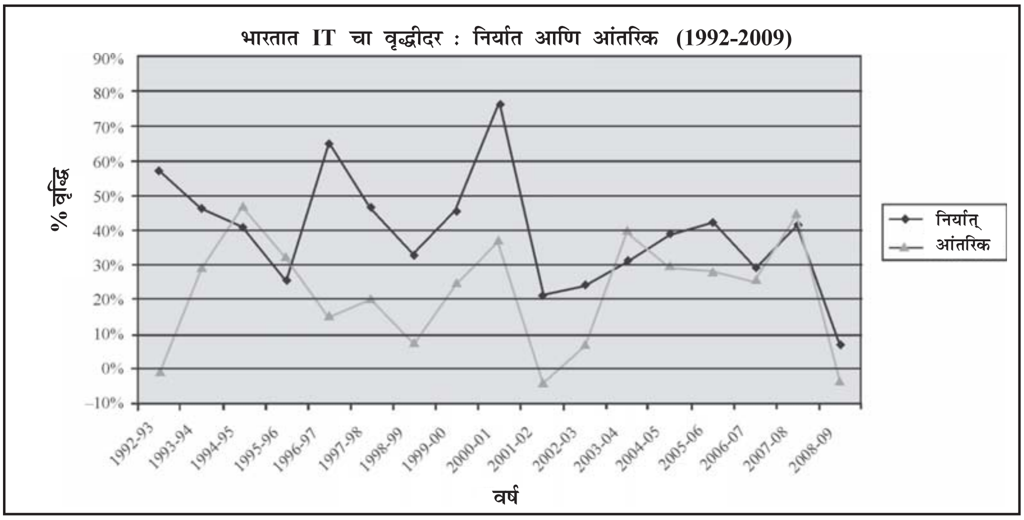
या सामायिक श्रेणी वेगवेगळ्या वर्षाच्या समग्रलक्षी आधाराची माहिती देतात. त्यात एकूण आंतरिक उत्पन्न (GDP) च्या टक्केवारी समोर गुंतवणुकीत आलेली वृद्धी, घाऊक भाव सूचक अंक (WPI) आणि चालु खाताची खोट (CAD) चा समावेश होतो.

(2)



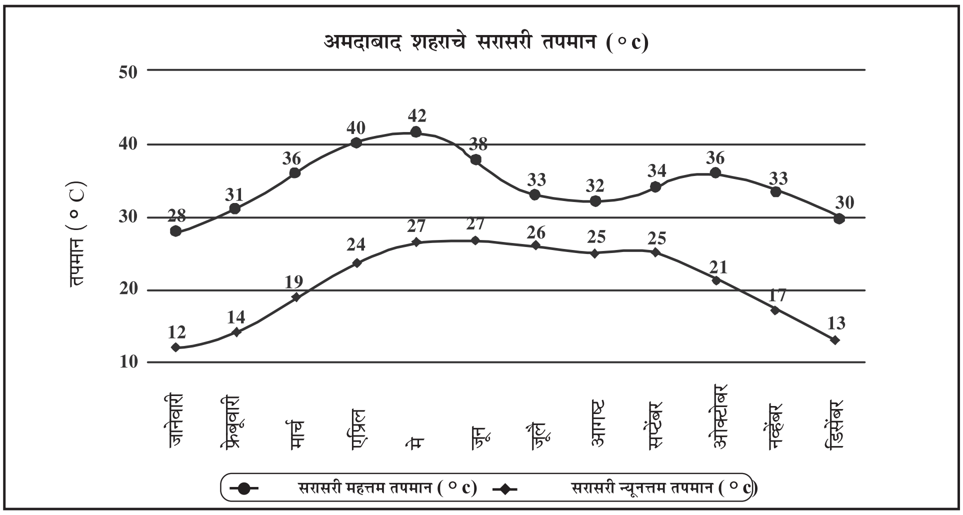
वेगवेगळ्या वर्षी भारतातील नवजात शिशुचा मृत्यूदर दर्शविणारी सामायिक श्रेणी

(3)



IT क्षेत्राचा वृद्धीदर दर्शविणाऱ्या दोन सामायिक श्रेणीचा तुलनात्मक अभ्यास

(4)



अमदाबाद शहराच्या मासिक महत्तम आणि न्यूनतम तपमान दर्शविणारी सामायिक श्रेणी

सामायिक श्रेणीचे महत्त्व :

आधुनिक युगात व्यापार तसेच व्यावसायिक प्रवृत्तिमध्ये वाढणाऱ्या अनिश्चिततेमुळे सामायिक श्रेणीद्वारा एकत्र केलेली माहिती खूपच महत्त्वाची ठरते. खालील कारणामुळे सामायिक श्रेणीच्या अभ्यासाला महत्त्व प्राप्त झाले आहे.

(1) भूतकाळातील माहितीवरून श्रेणीच्या किमंतीत होणाऱ्या फरकाची दिशा आणि तऱ्हा कळते.

(2) श्रेणीच्या किमंतीमध्ये किती प्रमाणात फरक होतो त्यावरून भविष्यात होणाऱ्या फरकाचा अंदाज मिळविणे शक्य आहे.

(3) भविष्यात अंदाजित किमंतीचे महत्त्वाचे निर्णय घेऊ शकतो त्याचप्रमाणे उद्योगाची किंवा सरकारची नीती नक्की करण्यात सुलभता येते.

(4) दोन किंवा आधिक उद्योगपतिना किंवा सरकारी संस्थाना त्याच्या द्वारा मिळविलेल्या सामायिक श्रेणीच्या माहितीचा तुलनात्मक अभ्यास करता येऊ शकतो.

सामायिक श्रेणीची व्याख्या :

सामायिक श्रेणीची व्याख्या पुढीलप्रमाणे करता येईल :

''निश्चित वेळी घेण्यात येणाऱ्या अवलोकनांच्या समूहाला **सामायिक श्रेणी** म्हणतात.''

सामान्यपणे ही अवलोकने समान समयांतराने घेण्यात येतात.

सामायिक श्रेणीत समयाला निरपेक्ष चल म्हणून घेतात. त्याला आपण t ने दर्शवू आणि त्याच्याशी संबंधीत सापेक्ष चलाला y_t ने दर्शवू. अशाप्रकारे समयाच्या वेगवेगळ्या एकमासाठी खालीलप्रमाणे दिलेल्या सामायिक श्रेणीला दर्शविले आहे.

समय t	1	2	3	$\dots$	n
चल y_t	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

सामायिक श्रेणीचे उपयोग :

काळाप्रमाणे बदलणाऱ्या सामायिक श्रेणीच्या चलात येणारे फरक एखाद्याच विशिष्ट कारणामुळे होत नाही. सामायिक श्रेणीचे चल अनेक परिबळावर अवलंबून असतात आणि ह्या सर्वपरिबळांचा परिणाम चलावर होत असतो. उदा. घाऊक बाजारात गव्हाचा भाव समयाप्रमाणे बदलत असतो, त्याची वेगवेगळी कारणे असू शकतात. जसे की गव्हाचे त्यावेळेचे उत्पादन, गव्हाची मागणी, उत्पन्न झालेला माल बाजारापर्यंत आणण्याचा खर्च वगैरे. यातील प्रत्येक घटक इतर परिबळावर आधारित असतात. उदा. गव्हाचे उत्पादन किती झाले त्यावर त्यावेळेचे हवामान, सिंचन व्यवस्था, त्यावेळी वापरलेली बियारणे सारख्या विविध बाबीचा परिणाम होत असतो. अशा परिबळाचा परिणाम सामायिक श्रेणीच्या चलाच्या किमंतीवर वेग-वेगळ्याप्रकारे होत असतो, त्याचा अभ्यास करणे आवश्यक आहे. सामायिक श्रेणीचा ह्या प्रकारे विस्तृत अभ्यास करण्यात आला तर त्यास सामायिक श्रेणीचे पृथ:करण म्हणतात. ते खालीलप्रमाणे दोन टप्पात करण्यात येते.

(1) सामायिक श्रेणीच्या चलावर परिणाम करणारे विविध परिबळे ओळखा.

(2) ह्या परिबळाना वेगवेगळे करून त्यातून दिलेल्या चलावर प्रत्येकाचा परिणाम किती प्रमाणात होतो ते नक्की करा.

ह्या प्रकारे करण्यात आलेला सामायिक श्रेणीचे पृथ:करण व्यापार, विज्ञान, सामायिक आणि राजकीय क्षेत्रात खालीलप्रमाणे उपयोगी ठरते :

(1) भूतकाळातील परिस्थिती समजू शकते आणि त्यावरून चलनाचा प्रकार आणि माप मिळविता येते.

(2) चलाची भविष्यातील किमंतीचे आंकडाशास्त्रीय पद्धतीने अनुमान मिळविता येते.

(3) मिळालेल्या अनुमानीत किमंतीच्या आधारे भविष्यासाठी योग्य निर्णय घेता येऊ शकतो, त्याचप्रमाणे कार्याचे आयोजन करता येते.

(4) वेग-वेगळ्या स्थळी किंवा समयाने दिलेल्या चलात होणाऱ्या फरकाचा तुलनात्मक अभ्यास करता येऊ शकतो.

(5) भूतकाळातील किमंतीवरून मिळविलेली अनुमानीत किमंत आणि वर्तमान किमंतीची तुलना करून जो काही फरक येत असेल तर त्याची कारणे शोधता येऊ शकतील.

प्रवृत्ती

तुमच्या शिक्षकांच्या मदतिने तुमच्या शाळेतील शेवटच्या 10 वर्षात इयत्ता 12 वीत पास होणाऱ्या विद्यार्थ्यांची टक्केवारी याविषयीची माहिती एकत्र करा आणि त्याला सामायिक श्रेणीद्वारा व्यक्त करा.

4.2 सामायिक श्रेणीचे घटक (Components of Time Series)

आपण पाहिले की सामायिक श्रेणीच्या चलावर अनेक परिबळांचा संयुक्त परिणाम होतो आणि त्यामुळे चलाच्या किमंतीत फरक पहावयास मिळतो. वेगवेगळ्या सामायिक श्रेणीच्या निरिक्षणावरून लक्षात येते की त्या चलाच्या किमंतीच्या फरकात विशिष्ट तऱ्हा असते. त्याच्या आधारे सामायिक श्रेणीला खालील घटकात विभागता येईल.

(1) दीर्घकालीन घटक किंवा वळण (Long-term Component or Trend) : सामायिक श्रेणीच्या चलात खूप जास्त वेळेच्या गाळ्यात जे चलन पहावयास मिळते त्याला दिर्घकालिन घटक किंवा वळणाचा परिणाम आहे. सामान्यपणे सामाजिक श्रेणीच्या चलात वेळेनुसार सतत वाढ किंवा घट आढळत असते. ही स्थिती वळणाने उदभवते. उदा., आंतरराष्ट्रीय बाजारात घटणारे रूपयाचे मूल्य, मोबाईल फोनचा वाढणारा वापर, देशाची वाढणारी लोकसंख्या, मृत्यूदरातील घट वगैरे. वळणात जास्त समयातील वाढ-घटीचा अभ्यास करत असल्याने सामायिक श्रेणीच्या दरम्यान कमी समयातील वाढ घटीला लक्ष्यात घेण्यात येत नाही. येथे श्रेणीच्या किमंतीत एकंदर कसा फरक होतो ते लक्ष्यात घेण्यात येते. जर परिबळाखाली असा फरक होत असेल तर अशा फरकाचा दर हळू असतो. उदा. भारताच्या सुशिक्षिताची संख्या वाढत जाईल परंतु हा बदल शेवटच्या 60-70 वर्षात हळू-हळू होत गेला. सामान्यपणे अशा फरकांची कारणे समाजातील बदलणाऱ्या रूढि, लोकांची निवड किंवा आवडीतील फरक, उद्योग धंद्यातील बदलणारी टेक्नालॉजी वगैरे असते.

खूप जास्त समयांतराने सामायिक श्रेणीचे वळण स्पष्ट होते. त्याला 'जास्त वेळ' पूर्णत: सापेक्ष बाबत आहे. शेतीचे उत्पन्न किंवा औद्यिगिक उत्पादनातील वळण समजण्यासाठी 10-15 वर्षाचा टप्पा घ्यावा लागतो. तर इलेक्ट्रानिक उपकरणाच्या विक्रीत 4-5 वर्षातच वळण स्पष्ट होते. श्रेणीत उत्तरोतर सतत जवळजवळ अचल वाढ किंवा घट होत असेल अशा वळणाला सुरेख वळण म्हणतात. जे सर्वसामान्यपणे मोठ्याप्रमाणात सामायिक श्रेणीत पहावयास मिळते. पण अर्थशास्त्र आणि वाणिज्य व्यापारात अशी श्रेणी पहावयास मिळते की ज्यात किमंतीचा वाढीचा किंवा घटीचा दर अचल रहात नाही. अशा श्रेणीत सुरूवातीला किमंतीच्या वाढीचा दर खूप कमी असतो. जो हळू-हळू वाढत जातो. अमुक वेळेनंतर श्रेणीच्या किमंती स्थिर होत असतील आणि त्यानंतर हळू-हळू घटत जातील अशा परिस्थितीत श्रेणीचे वळण असुरेख किंवा चक्रीय आहे असे म्हणतात.

सामायिक श्रेणी चल y_t मध्ये वळण दर्शविणाऱ्या घटकाला आपण 'T_t' ने दर्शवू.

(2) मोसमी घटक (Seasonal Component) : सामायिक श्रेणीच्या चलात खूप कमी समयगाळ्यात जर जवळजवळ नियमित वाढ-घट होत असेल, तर त्यास मोसमी घटकाचा परिणाम म्हणतात. सामान्यपणे, या वाढ-घटीच्या पुनरावर्तनाचा गाळा एका वर्षापेक्षा कमी असतो. या वाढ-घटीचा अभ्यास करण्यासाठी सामायिक श्रेणीच्या कमी गाळ्याच्या किंमती देखील नोंदविणे आवश्यक आहे. जर दिलेल्या चलाची वार्षिक किमंती प्राप्य होत असतील, तर त्यातून मोसमी घटकाविषयी माहिती मिळविणे अशक्य असते. सामायिक श्रेणीचे मोसमी घटक खालीलप्रमाणे परिणाम करतात.

(i) नैसर्गिक परिबळाचा परिणाम : सामायिक श्रेणीच्या किमंतीत ऋतु किंवा हवामानाचा फरक संलग्न वाढ-घट होते. अशी वाढ-घट जवळजवळ नियमित अंतरालात होत असते उदा. उन्हाळ्यात पंखा, कूलर, अे.सी.च्या मागणी वाढते तर हिवाळ्यात गरम कपड्याची मागणी वाढते. शेतात नवे पिक तयार होते तेव्हा बाजारभाव कमी होतो वगैरे.

(ii) मानवनिर्मित परिबळाचा परिणाम : एक वर्षापेक्षा कमी समयकाळात होणारी जवळजवळ नियमित वाढ-घट सण, समाजातील रितीरिवाज, लोकाच्या सवयी या कारणाने होत असते. उदा., लग्नसराईच्या काळात दागिन्यांची खरेदी वाढते. उत्तरायणाच्या वेळी पतंगाची मागणी असते. आठवड्याच्या शेवटी सिनेमाघर किंवा रेस्टारंटमधील ग्राहकांची संख्या वाढते. सणाच्या काळात कापड किंवा ईतर भेटवस्तू यांचे खरेदीचे प्रमाण वाढते.

या प्रकारच्या वाढ-घटीचा आवर्तन काळ जवळजवळ निश्चित असतो म्हणून त्यास नियमित वाढ-घट म्हणतात. ह्या फरकाचा काळ आणि प्रमाण ज्ञात असेल, तर व्यापारी आणि उत्पादकाला मदतरूप होते आणि ते संग्रहाचे नियंत्रण करून आधिक नफा प्राप्त करू शकतात.

सामायिक श्रेणीच्या या अल्पकालीन घटकाला आपण 'S_t' ने दर्शवू या.

(3) चक्रीय घटक (Cyclical Component) : सामायिक श्रेणीत एकापेक्षा जास्त काळावधीत होणारी जवळजवळ नियमित वाढ-घट चक्रीय घटकाचा परिणाम आहे. मोसमी घटकापेक्षा या घटकामुळे होणारी चलनात कमी नियमितता असते या वाढ-घटीचा आवर्तन काळ 2-10 वर्षाचा असू शकतो आणि विशिष्ट परिस्थितीत तो 10-15 वर्षाचा देखील असू शकतो. संपूर्ण श्रेणीचा कालावधी 40-50 वर्ष किंवा त्यापेक्षा आधिक असेल तर त्या प्रमाणात चक्रीय घटकाच्या चलनाचा काळावधी कमी असल्याने हे घटक पण अल्पकालीन घटक म्हणून ओळखण्यात येतात. धंदाकिय प्रवृतित येणारा तेजी मंदीचे चक्र हे ह्या चलनाचे उदाहरण आहे. हे चक्र मंदी, वृद्धि, तेजी पडती अशा सारख्या चार अवस्थातून पसार होतात. व्यापाराशी तसेच आर्थिक बाबीशी संबंधीत उदा. उत्पादन, वस्तूचा भाव, शेअर बाजारातील शेअरचा भाव, गुंतवणुक वगैरे सामायिक श्रेणीत या प्रकारची वाढ-घट पहावयास मिळते. ह्या वाढ-घटीचे आणि वेळेच्या अनुमानाच्या आधारे व्यापारी योग्य आयोजन करू शकतो.

सामायिक श्रेणीच्या ह्या घटकाला 'C_t' ने दर्शवितात.

(4) यादच्छिक किंवा अनियमित घटक (Random or Irregular Component) : सामायिक श्रेणीच्या चलाच्या अल्पकालिन वाढ-घटीत मोसमी किंवा चक्रीय अशा जवळजवळ नियमित घटकाशिवाय अनियमित किंवा यादच्छिक घटकाचा ही परिणाम पहावयास मिळतो, तो अल्पकालिन परिणाम आहे. काही अचानक किंवा अनपेक्षित कारणामुळे श्रेणीची किमंत बदलल्यास त्या फरकाला यादच्छिक चलन म्हणतात. ह्या चलनाचा काळावधी आणि परिणाम निश्चित नसतो. ज्या चलनाचे वळण, मोसमी घटक, चक्रीय घटक यातून कोणत्याही एकाचा निर्देश करता येणार नाही त्या चलनाला यादच्छिक घटकाचा परिणाम असतो. ही वाढ-घट संपूर्णपणे अनपेक्षित, अनियमितपणे असते. त्याबद्दल आगाऊ सांगता येत नाही. त्याचे पुनरावर्तन निश्चित वेळी होत नाही आणि त्यावर नियंत्रण आणता येत नाही. असे चलन भूकंप, पूर यासारख्या नैसर्गिक आपत्ती किंवा युद्ध, संप, राजकिय घडामोडी यासारख्या मानवनिर्मित समस्यामुळे होत असते. या घटकामुळे अनुमानित किमंतीत त्रुटी येते.

या घटकाला 'R_t' ने दर्शवितात.

समय t वर आधारित श्रेणीचा चल y_t ची किमंत वळण (T_t), मोसमी घटक (S_t), चक्रीय घटक (C_t) आणि यादच्छिक घटक (R_t) च्या संयुक्त परिणामाने निश्चित होते. सामायिक श्रेणीच्या योगनीय मॉडेल (Additive Model) मध्ये हा संबंध खालीलपणे दाखविता येईल :

$$y_t = T_t + S_t + C_t + R_t$$

जर सामायिक श्रेणीच्या चलाच्या वार्षिक किमंती दिलेल्या असतील, तर त्यात मोसमी घटक (S_t) दिसणार नाही. प्रत्येक घटकाचा परिणाम शोधण्यासाठी सर्वप्रथम दिलेल्या y_t च्या किमंतीवरील वळण (T_t) शोधण्यात येते. त्या y_t मधून वजा करता बाकीचे चलन अल्पकालीन घटक (S_t, C_t, R_t) दर्शवितात. त्यानंतर मोसमी घटक (जर उपलब्ध असतील तर) आणि चक्रीय घटक शोधण्यात येतात. शेवटी, $R_t = y_t - (T_t + S_t + C_t)$ ने यादच्छिक घटक शोधण्यात येतात. भविष्यात चलाची अनुमानीत किमंत $(\hat{y}_t)$ शोधण्यासाठी वळणाची त्या समयाची अनुमानीत किमंत शोधून, त्यात वर दर्शविल्याप्रमाणे प्रत्येक घटकाचा दिलेल्या समया (t) साठीचा परिणाम शोधण्यात येतो.

प्रवृत्ती

तुमच्या घराच्या विद्युत बिलातून गेल्या वर्षात झालेल्या विद्युत वापराचा युनिटची सामायिक श्रेणी तयार करा. ह्या श्रेणीच्या चलात आलेली वाढ-घट सामायिक श्रेणीच्या कोणत्या घटकांचा परिणाम दर्शवितो ?

4.3 वळण मोजण्याच्या पद्धती (Methods for Determining Trend)

वळण हे सामायिक श्रेणीचे मुख्य घटक आहे. त्याच्या किमंती मिळविण्यासाठी खालील पद्धतीचा अभ्यास करू :

4.3.1 आलेखाची पद्धती (Graphical Method)

वळण शोधण्याची ही सर्वात सरळ पद्धती आहे. येथे निरपेक्ष चल म्हणजे समयाला (t) X-अक्षावर आणि सापेक्ष चल y_t ला Y-अक्षावर घेऊन वेगवेगळ्या बिंदूचे आलेखन करण्यात येते. हे सर्व बिंदू क्रमशः रेखाखंडाने जोडण्यात येतात. त्यावरून चलाच्या किमंतीत वाढ-घट पहावयास मिळते. त्यानंतर त्या दोन बिंदूमधून पसार होणारा सरळवक्र अंदाजाने काढण्यात येतो. हा वक्र श्रेणीमधील अल्पकालीन वाढ-घटीचा परिणाम टाळून वळण दर्शवितो.

काढलेल्या वक्राला लांबवून भविष्यातील अनुमान मिळवितात.

आलेख पद्धतीचे गुण :

(1) ही पद्धती समजण्यास आणि वापरण्यात सरळ आहे.

(2) कोणत्याही गणिती सूत्रा किंवा मोजणी शिवाय वळण समजू शकते.

(3) सुरेख वळण नसेल तरीसुद्धा हीच पद्धती वापरता येते.

(4) वळण मिळविण्यासाठी कोणत्या प्रकारच्या वक्राचे अन्वायोजन करावे तो अंदाज या पद्धतीने मिळविता येतो.

आलेख पद्धतीच्या मर्यादा :

(1) वेग-वेगळ्या व्यक्ति वेग-वेगळे वक्र काढतील ही शक्यता आहे. त्यामुळे वळण त्याचप्रमाणे अनुमानात एकरूपता रहात नाही.

(2) ही पद्धती गाणितीक नसल्याने अनुमानित किमंती निश्चित असत नाही त्यामुळे त्याची विश्वासनीयता किती आहे ते समजत नाही.

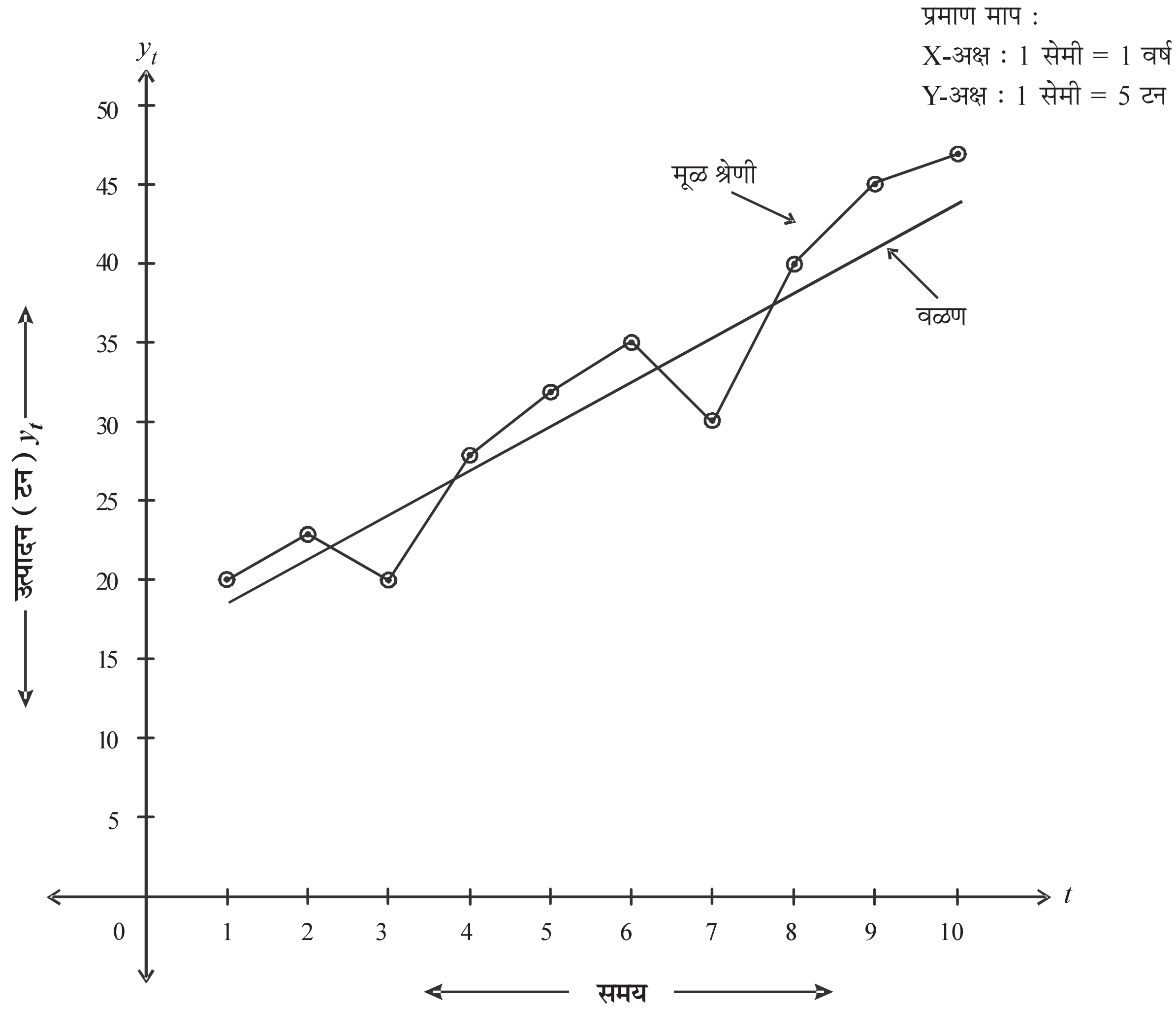
उदाहरण 1 : एका कारखान्याचे वार्षिक उत्पादन (टनात) खालीलप्रमाणे आहे त्यावरून आलेख पद्धतीने सुरेख वळण मिळवा.

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
उत्पादन (टन)	20	23	20	28	32	35	30	40	45	47

या माहितीला आपण खालील सामायिक श्रेणी द्वारा व्यवत करू या.

समय t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
उत्पादन (टन) y_t	20	23	20	28	32	35	30	40	45	47

X-अक्षावर t ला Y-अक्षावर उत्पादन y_t च्या किमंती घेऊन ह्या बिंदूचे आलेखन करू या. बिंदूची तऱ्हा पाहिली असता सुरेख वळण आधिक योग्य वाटते.



बिंदूच्या मधून पसार होणारी सुरेखा वळण दर्शविते.

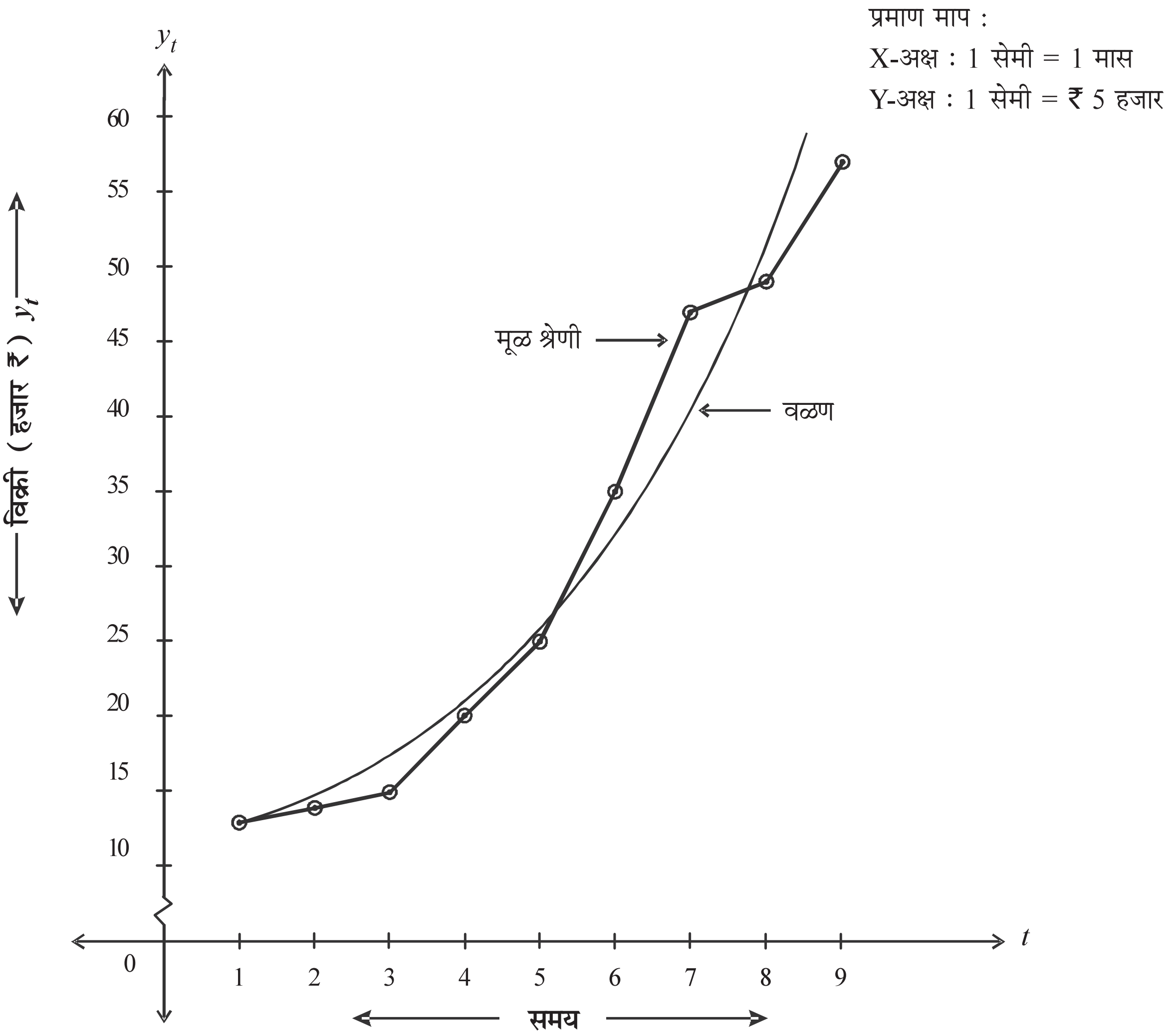
उदाहरण 2 : एक कंपनीच्या मासिक विक्रीचे (हजार ₹ त) आकडे खालील कोष्टकात दिलेले आहे. आलेखाच्या पद्धतीने वळण मिळवा.

मास	जानेवारी	फ्रेबूवारी	मार्च	एप्रिल	मे	जून	जूलै	आगष्ट	सप्टेंबर
विक्री (हजार ₹)	13	14	15	20	25	35	47	49	57

ह्या माहितीची सामायिक श्रेणी खालीलप्रमाणे घेऊ या.

समय (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
विक्री (हजार ₹) y_t	13	14	15	20	25	35	47	49	57

X-अक्षावर t च्या आणि Y-अक्षावर विक्री y_t च्या किमंती घेऊन बिंदूचे आलेखन करू या. त्यावरून या माहितीसाठी वक्रीय वळण आधिक योग्य असेल.



आलेखाच्या बिंदूमधून पसार होणारा वळण दर्शविते.

स्वाध्याय 4.1

1. दर वर्षी जहाजात माल भरण्याची एका बंदराची क्षमता (लाख टन) विषयी माहिती खाली दिलेली आहे. आलेखाच्या पद्धतीने सुरेख वळण मिळवा.

वर्ष	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
क्षमता (लाख टन)	90	97	108	111	127	148	169	200

2. एका पर्यटन स्थळाच्या भेटीसाठी आलेल्या प्रवाशांची संख्या (हजार) खाली दिलेली आहे. योग्य आलेखाने श्रेणीचे वळण मिळवा.

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
प्रवाश्याची संख्या (हजार)	5	7	10	14	30	41	50

3. एका राज्यात 0-6 वर्षाच्या बालकांमध्ये 1000 मुलांबरोबर मुलींची संख्या (y_t) माहिती खालीलप्रमाणे कोष्टकात आहे आलेखाने सुरेख वळण मिळवा.

वर्ष	1961	1971	1981	1991	2001	2011
y_t	956	948	947	928	883	890

4. एका कंपनीच्या शेअरचा बंदभावाची दहा दिवसाची माहिती खालील कोष्टकात दिलेली आहे. आलेखाच्या पद्धतीचा उपयोग करून वळण मिळवा.

दिवस	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
शेअरचा भाव (₹)	297	300	304	299	324	320	318	324	329	328

*

4.3.2 न्यूनतम वर्गाची रीत (Method of Least Squares)

आलेखाच्या पद्धतीचा मर्यादा म्हणून आपण पाहिले की, गणिती पद्धतीचा उपयोग करण्यात आला नाही तर मिळविलेले वळण आणि त्याचा आधार मिळविलेले अनुमान व्यक्ति सापेक्ष बदलतात. आणि त्याची विश्वासनीयता समजू शकत नाही. जर सामायिक श्रेणीचे सुरेख वळण गणिती पद्धतीने शोधावयाचे असेल तर आपणास वळण दर्शविणाऱ्या निश्चित सुरेख समीकरणाची आवश्यकता असते. नियत संबंधाच्या प्रकरणात आपण दिलेल्या माहितीसाठी सुरेख समीकरणाचे अन्वायोजन केल्यामुळे न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीचा अभ्यास केला आहे, ज्याचा उपयोग आपण सामायिक श्रेणीचे सुरेख वळण शोधण्यासाठी करू या.

समजा की समय t वर आधारित सामायिक श्रेणीचा चल y_t च्या किमंती प्राप्त आहे. त्या दोघामधील संबंध दर्शविण्यासाठी सुरेख मॉडेल $y_t = \alpha + \beta t + u_t$ (जेथे u_t विक्षेपपद आहे) घेऊ या. त्याचे अन्वायोजन करण्यासाठी न्यूनतम वर्गाची पद्धती वापरून y_t ची अनुमानित किमंती $\hat{y}_t$ शोधू या. या साठी प्रकरण 3 मध्ये दर्शविलेल्या पद्धती प्रमाणे समीकरण $\hat{y}_t = a + bt$ चा उपयोग करू.

सरळतेसाठी y_t मधून अनुग (suffix) t ला टाळून आपण $\hat{y} = a + bt$ घेऊन या. येथे, सापेक्ष चल y आणि निरपेक्ष चल t आहे.

न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीने a आणि b खालीलप्रमाणे मिळतात.

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)\ (\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2} \quad \text{आणि} \quad a = \overline{y} - b\overline{t}\ ,$$

येथे n = अवलोकनाची संख्या

ह्या पद्धतीने मिळणारे सुरेख समीकरण $\hat{y} = a + bt$ दिलेल्या माहितीसाठी श्रेष्ठ सुरेख समीकरण आहे.

ह्या सुरेख समीकरणाने भविष्यासाठी वळणाचे अनुमान मिळविण्यात येतात.

नोंद : वळण मिळविण्यासाठी न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीने सुरेख समीकरणाशिवाय इतर समीकरणे उदा. बहुपदी घांताकीय समीकरणांचे देखील अन्वायोजन करता येईल.

न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीचे गुण :

(1) ही पद्धती संपूर्णपणे गाणितीक असल्याने भविष्यातील अनुमाने व्यक्ति सापेक्ष बदलत नाही.

(2) t च्या दिलेल्या प्रत्येक किमंतीसाठी वळणाचे तात्पुरता अनुमान ह्या पद्धतीने मिळविता येईल.

(3) वळणाच्या किमंती समीकरणातून मिळविलेल्या असल्याने समयासाठी पण वळणाचे अनुमान मिळविता येते. उदा. दुसऱ्या आणि तिसऱ्या वर्षाच्या मध्ये येणाऱ्या समयासाठी $t = 2.5$ घेऊन त्या समयाच्या वळणाचे अनुमान मिळविता येते.

न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीच्या मर्यादा :

(1) ह्या पद्धतीने वळण शोधण्यासाठी लांबलचक मोजणी करावी लागते.

(2) जर वळण दर्शविणाऱ्या वक्राचे योग्य स्वरूप आणि त्याच्या अनुरूप समीकरणाचे अन्वायोजन करण्यात आले नाही तर मिळविलेल्या अनुमानित किमंतीची विश्वासनीयता कमी होते.

उदाहरण 3 : कॉम्प्युटर तयार करणाऱ्या एक कंपनीचा नफा (लाख ₹ त) खालीलप्रमाणे आहे. या माहितीवरून वळणासाठी न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीने सुरेख समीकरण शोधा. वर्ष 2017 साठी नफ्याचे अनुमान मिळवा.

वर्ष	2011	2012	2013	2014	2015
नफा (लाख ₹)	31	35	39	41	44

येथे $n = 5$ वर्षाच्या नफाच्या किमंती दिलेल्या आहे. त्यामुळे आपणास दिलेल्या वर्षाना $t = 1, 2, ..., 5$ याप्रमाणे दर्शवू या.

सुरेख वळणाच्या अन्वायोजन करण्याची मोजणी :

वर्ष	**नफा** y	t	t^2	ty
2011	31	1	1	31
2012	35	2	4	70
2013	39	3	9	117
2014	41	4	16	164
2015	44	5	25	220
एकूण	**190**	**15**	**55**	**602**

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{15}{5} = 3, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{190}{5} = 38$$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{5 \times 602 - 15 \times 190}{5 \times 55 - (15)^2}$$

$$= \frac{3010 - 2850}{275 - 225}$$

$$= \frac{160}{50}$$

$$= 3.2$$

$$a = \bar{y} - b\bar{t}$$

$$= 38 - 3.2 \times 3$$

$$= 38 - 9.6$$

$$= 28.4$$

वळणाचे समीकरण $\hat{y} = a + bt$

$$\therefore \hat{y} = 28.4 + 3.2\, t$$

वर्ष 2017 साठी $t = 7$ घेऊ या,

$$\therefore \quad \hat{y} = 28.4 + 3.2 \times 7$$

$$= 28.4 + 22.4$$

$$= 50.8$$

$$\therefore \quad \hat{y} = ₹\ 50.8 \text{ लाख}$$

अशाप्रकारे वर्ष 2017 साठी नफ्याच्या वळणाचे अनुमानित किमंत ₹ 50.8 लाख आहे.

उदाहरण 4 : एका जिल्हाच्या प्राथमिक शाळामधील इयत्ता 1 ते 5 च्या विद्यार्थ्यांपैकी अभ्यास सोडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा दर (dropout rate) खालीलप्रमाणे आहे.

वर्ष	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15	2015 – 16
अभ्यास सोडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा दर	3.24	2.98	2.29	2.20	2.09	2.07	2.04

वळणासाठी सुरेख समीकरणाचे अन्वायोजन करून वर्ष 2016-17 ते 2017-18 च्या वर्षात इयत्ता 1 ते 5 विद्यार्थ्यात अभ्यास सोडणाऱ्या विद्यार्थ्यांच्या दराचे अनुमान मिळवा.

येथे $n = 7$ वर्षाची माहिती दिलेली आहे त्यामुळे आपणास दिलेल्या वर्षासाठी $t = 1, 2, \ldots, 7$ घेऊ या.

सुरेख वळणाच्या अन्वायोजन करण्याची मोजणी

वर्ष	अभ्यास सोडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा दर y	t	t^2	ty
2009-10	3.24	1	1	3.24
2010-11	2.98	2	4	5.96
2011-12	2.29	3	9	6.87
2012-13	2.20	4	16	8.80
2013-14	2.09	5	25	10.45
2014-15	2.07	6	36	12.42
2015-16	2.04	7	49	14.28
एकूण	**16.91**	**28**	**140**	**62.02**

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{28}{7} = 4, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{16.91}{7} = 2.4157 \simeq 2.42$$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{7 \times 62.02 - 28 \times 16.91}{7 \times 140 - (28)^2}$$

$$= \frac{434.14 - 473.48}{980 - 784}$$

$$= \frac{-39.34}{196}$$

$$= -0.2007$$

$$\simeq -0.2$$

$$a = \overline{y} - b\overline{t}$$

$$= 2.42 - (-0.2) \times 4$$

$$= 2.42 + 0.8$$

$$= 3.22$$

वळणाचे समीकरण $\hat{y} = a + bt$

$$\therefore \hat{y} = 3.22 + (-0.2)\,t$$

$$= 3.22 - 0.2\,t$$

वर्ष 2016-17 साठी $t = 8$ घेऊ या

$$\therefore \hat{y} = 3.22 - 0.2 \times 8$$

$$= 3.22 - 1.6$$

$$= 1.62$$

वर्ष 2017-18 साठी $t = 9$ घेऊ या

$$\therefore \hat{y} = 3.22 - 0.2 \times 9$$

$$= 3.22 - 1.8$$

$$= 1.42$$

अशाप्रकारे त्या जिल्हात वर्ष 2016-17 आणि 2017-18 मध्ये इयत्ता 1 ते 5 मधील अभ्यास सोडणाऱ्या विद्यार्थ्यांच्या दराचे अनुमान अनुक्रमे 1.62 आणि 1.42 असेल.

उदाहरण 5 : एका तालुक्यांच्या संख्येचे आकडे (लाखात) खालील कोष्टकात दिलेले आहे त्यावरून सुरेख वळणाचे समीकरणाचे अन्वायोजन करा आणि दिलेल्या प्रत्येक वर्षासाठी वळणाची किमंत शोधा. 2021 वर्षाच्या वस्तीसाठी वळणाच्या किमंतीचे अनुमान देखील मिळवा.

वर्ष	1951	1961	1971	1981	1991	2001	2011
लोक संख्या (लाख)	15.1	16.9	18.7	20.1	21.6	25.7	27.1

येथे लोकसंख्याचे आकडे दिलेले असल्याने प्रत्येक दहा वर्षासाठी संबंधित आहे. दिलेल्या प्रत्येक वर्षासाठी अनुक्रमे $t = 1, 2, \ldots, 7$ घेऊ या त्यामुळे $n = 7$ होईल.

सुरेख वळणाचे अन्वायोजन करण्याची मोजणी

वर्ष	लोकसंख्या (लाख) y	t	t^2	ty	वळणाच्या किमंती $\hat{y} = 12.66 + 2.02\ t$
1951	15.1	1	1	15.1	14.68
1961	16.9	2	4	33.8	16.7
1971	18.7	3	9	56.1	18.72
1981	20.1	4	16	80.4	20.74
1991	21.6	5	25	108	22.76
2001	25.7	6	36	154.2	24.78
2011	27.1	7	49	189.7	26.8
एकूण	**145.2**	**28**	**140**	**637.3**	

$\overline{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{28}{7} = 4$, $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{145.2}{7} = 20.7429 \simeq 20.74$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{7 \times 637.3 - 28 \times 145.2}{7 \times 140 - (28)^2}$$

$$= \frac{4461.1 - 4065.6}{980 - 784}$$

$$= \frac{395.5}{196}$$

$$= 2.0179$$

$$\simeq 2.02$$

$$a = \overline{y} - b\overline{t}$$

$$= 20.74 - 2.02 \times 4$$

$$= 20.74 - 8.08$$

$$= 12.66$$

वळणाचे समीकरण $\hat{y} = a + bt$

$$\therefore \hat{y} = 12.66 + 2.02\ t$$

प्रत्येक दिलेल्या वर्षासाठी वळणाची किमंत शोधण्यासाठी अनुक्रमे $t = 1, 2, ... , 7$ घेऊ या.

$t = 1$ ठेवल्यास

$$\hat{y} = 12.66 + 2.02 \times 1$$
$$= 12.66 + 2.02$$
$$= 14.68$$

$\therefore \quad \hat{y} = 14.68$ लाख

या प्रमाणे $t = 2, 3, ... , 7$ ठेवल्यास बाकीच्या वळण किंमती कोष्टकात दाखवू.

येथे लक्षात येते की $\hat{y}$ च्या किमंतीत क्रमश: 2.02 एवढी वाढ होत जाते.

वर्ष 2021 साठी $t = 8$ ठेवल्यास

$$\hat{y} = 12.66 + 2.02 \times 8$$
$$= 12.66 + 16.16$$
$$= 28.82$$

$\therefore \quad \hat{y} = 28.82$ लाख

अशाप्रकारे 2021 वर्षाच्या लोकसंख्येच्या साठीच्या वळणाची अनुमानीत किंमत 28.82 लाख आहे.

उदाहरण 6 : एका कंपनीची मासिक विक्री (हजार ₹ त) ची माहिती खालील कोष्टकात दिलेली आहे. सुरेख वळणाच्या समीकरणाचे अन्वायोजन करा आणि त्याला आलेखाने दर्शवा. मिळालेल्या समीकरणाचा उपयोग करून ऑगस्ट महिन्याच्या विक्रीचे अनुमान शोधा.

महिना	जानेवारी	फ्रेब्रुवारी	मार्च	एप्रिल	मे	जून
विक्री (हजार ₹ त)	80	85	90	76	82	88

येथे $n = 6$ महिन्याची माहिती दिलेली आहे. त्यामुळे आपण दिलेल्या महिन्यासाठी अनुक्रमे $t = 1, 2, ... , 6$ घेऊ या. सुरेख समीकरणाच्या अन्वायोजनची मोजणी

महिना	**विक्री y (हजार ₹)**	t	t^2	ty	$\hat{y} = 81.79 + 0.49\ t$
जानेवारी	80	1	1	80	82.28
फ्रेब्रुवारी	85	2	4	170	82.77
मार्च	90	3	9	270	83.26
एप्रिल	76	4	16	304	83.75
मे	82	5	25	410	84.24
जून	88	6	36	528	84.73
एकूण	**501**	**21**	**91**	**1762**	

$$\overline{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{21}{6} = 3.5, \qquad \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{501}{6} = 83.5$$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{6 \times 1762 - 21 \times 501}{6 \times 91 - (21)^2}$$

$$= \frac{10572 - 10521}{546 - 441}$$

$$= \frac{51}{105}$$

$$= 0.4857$$

$$\simeq 0.49$$

$$a = \overline{y} - b\overline{t}$$

$$= 83.5 - 0.49 \times 3.5$$

$$= 83.5 - 1.715$$

$$= 81.785$$

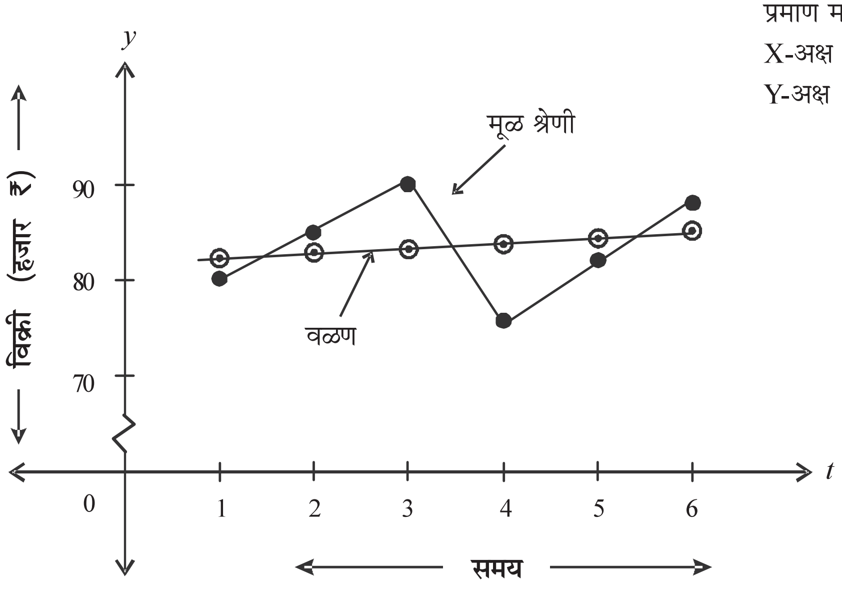
$$\simeq 81.79$$

वळणाचे समीकरण $\hat{y} = a + bt$

$$\therefore \hat{y} = 81.79 + 0.49\,t$$

ह्या समीकरणात क्रमशः $t = 1, 2, \ldots, 6$ ठेवल्यास $\hat{y}$ च्या संलग्न किंमती मिळतील ज्या कोष्टकात दाखवू या. ह्या वळणाच्या किमंती आणि दिलेल्या श्रेणीच्या किंमतीचा आलेख खालीलप्रमाणे काढता येईल.

प्रमाण माप :
X-अक्ष : 1 सेमी = 1 मास
Y-अक्ष : 1 सेमी = ₹ 10 हजार



आता ऑगस्ट महिन्यासाठी $t = 8$ ठेवल्यास

$$\hat{y} = 81.79 + 0.49 \times 8$$

$$= 81.79 + 3.92$$

$$= 85.71$$

$$\therefore \hat{y} = ₹\ 85.71 \text{ हजार}$$

अशाप्रकारे ऑगस्ट महिन्यात त्या कंपनीच्या विक्रीचे अनुमान ₹ 85.71 हजार आहे.

नोंद : सुरेख समीकरणासाठी सुरेषा काढण्यासाठी $\hat{y}$ च्या सर्व किमंती घेण्याची आवश्यकता नाही. $t = 1, 2, ... , 6$ पैकी कोणत्याही दोन किमंतीच्या संलग्न $\hat{y}$ च्या किमंतीना जोडणारी सुरेखा वळणाचे समीकरण आलेखात दर्शवावे.

उदाहरण 7 : एका सामायिक श्रेणीसाठी $n = 8$, $\Sigma y = 344$, $\Sigma ty = 1342$ असेल, तर वळणाचे सुरेख समीकरण मिळवा.

$n = 8$ असल्याने $t = 1, 2, ... , 8$ घेतल्यास $\Sigma t = 1 + 2 + ... + 8 = 36$ आणि

$\Sigma t^2 = 1^2 + 2^2 + ... + 8^2 = 1 + 4 + ... + 64 = 204$ होईल.

$$\overline{t} = \frac{\Sigma t}{n} = \frac{36}{8} = 4.5, \qquad \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{344}{8} = 43$$

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$= \frac{8 \times 1342 - 36 \times 344}{8 \times 204 - (36)^2}$$

$$= \frac{10736 - 12384}{1632 - 1296}$$

$$= \frac{-1648}{336}$$

$$= -4.9048$$

$$\simeq -4.9$$

$$a = \overline{y} - b\overline{t}$$

$$= 43 - (-4.9) \times 4.5$$

$$= 43 + 22.05$$

$$= 65.05$$

सुरेख समीकरण $\hat{y} = a + bt$

$$= 65.05 + (-4.9)\,t$$

$$= 65.05 - 4.9\,t$$

स्वाध्याय 4.2

1. एका राज्यात वेग-वेगळ्या वर्षाचा मृत्यूदर खालील कोष्टकात दिलेला आहे. वळण शोधण्यासाठी सुरेख समीकरणाचे अन्वायोजन करा आणि त्यावरून वर्ष 2017 च्या मृत्यूदराचे अनुमान मिळवा.

वर्ष	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
मृत्यूदर	7.6	6.9	7.1	7.3	7.2	6.9	6.9

2. केंद्र सरकारने जाहिर केलेला कॉस्ट ईन्फलेशन ईन्डेक्स (CII) विषयी माहिती खालीलप्रमाणे आहे. ह्या अंकात 1981-82 ला आधार वर्ष घेतले आहे. ह्या माहितीवरून सुरेख समीकरणाचे अन्वायोजन करून वर्ष 2015-16 ह्या अंकाचे अनुमान मिळवा.

वर्ष	2007 – 08	2008 – 09	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15
CII	551	582	632	711	785	852	939	1024

3. एका शहरात वेगवेगळ्या वर्षी नोंदणी केलेल्या द्विचाकी वाहनाची संख्या (हजारात) खालीलप्रमाणे आहे. त्यावरून वर्ष 2016 साठी त्याचप्रमाणे 2017 साठी वाहनाच्या नोंदणी संख्येचे अनुमान मिळण्यासाठी सुरेख समीकरणाचे अन्वायोजन पद्धतीचा उपयोग करा. प्रत्येक वर्षाच्या वळणाच्या किमंती शोधा.

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014	2015
वाहनाची संख्या (हजार)	69	75	82	91	101	115

4. भारतात वेगवेगळ्या जनगणनेत मिळालेल्या माहितीनुसार लग्नवेळी स्त्रियांचे सरासरी वय (वर्षात) पुढील कोष्टकात दर्शविले आहे. ह्या माहितीवरून सुरेख वळणाच्या समीकरणाचे अन्वायोजन करून आलेखाने दर्शवा. सुरेख समीकरणावरून 2021 साठी दिलेल्या चलाचे अनुमान मिळवा.

जनगणना वर्ष	1971	1981	1991	2001	2011
लग्नवेळी स्त्रीचे सरासरी वय (वर्ष)	17.7	18.7	19.3	20.2	22.2

*

4.3.3 चलित सरासरीची पद्धती (Method of Moving Averages)

अल्प काळातील वाढ-घटीचा परिणाम दूर करून वळण नक्की करण्यासाठी चलित सरासरीची पद्धती खूपच उपयोगी होते. अल्प काळाच्या वाढ-घट बहुदा नियमितपणे होत असते आणि त्याचे पुनरावर्तनही होत असते. भूतकाळाच्या अनुभवाने किंवा अन्य साधनानी ह्या वाढ-घटीच्या पुनरावर्तनाला समयाची माहिती मिळवून त्याला अनुरूप समयच्या अवलोकनांची सरासरी शोधण्यात येते सरासरी किमंत केंद्रस्थानी असल्याने अल्पकालीन वाढ-घटीपासून मुक्त असलेली किमंत मिळते जे चलाचे वळण दर्शविते.

समजा, दिलेली सामायिक श्रेणीमध्ये समय $t = 1, 2, \ldots, n$ वर आधारित चलाच्या किमंती $y_1, y_2, \ldots, y_n$ आहे आणि त्या श्रेणीत अल्पकालीन (चक्रीय) वाढ-घटीचा काळावधी 3 वर्षाचा आहे. प्रथम तिन अवलोकने y_1, y_2, y_3 चा मध्यक $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ शोधून त्याला ह्या तीन किमंतीच्या केंद्रस्थानी म्हणजे y_2 समोर ठेवण्यात येते. त्यानंतर क्रमश: तीन किमंती y_2, y_3, y_4 घेऊन त्याचा मध्यक $\frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}$ शोधून त्याला त्याच्या केंद्रस्थानी y_3 च्या समोर ठेवण्यात येते. ह्या पद्धतीने चलाच्या दिलेल्या किमंतीतून शेवटच्या किमंतीचा समावेश होईल तो पर्यंत सर्वांचा मध्यक शोधण्यात येतो. अशा सरासरीला तीन वर्षीय चलित सरासरी म्हणतात जे वळण दर्शविते.

प्रत्येक सामायिक श्रेणीचे एकम 'वर्ष' असेलच असे आवश्यक नाही. चलाच्या किमंतीच्या तऱ्हाच्या पुनरावर्तनाचा समयगाळा देखील वर्षाचाच असणे आवश्यक नाही. समयाच्या एकमाप्रमाणे आपण चलीत सरासरीला दर्शवू या. उदा. 5 दिवसीय चलित सरासरी, त्रिमासिक सरासरी, 4 सप्ताहाची चलित सरासरी वगैरे. ह्या चर्चेसाठी आपण समयाचे एकक वर्ष घेऊ या.

उदाहरणाची मोजणी करतांना सर्वप्रथम सरासरी समयगाळ्याला अनुरूप चलाच्या किमंतीची बेरीज शोधण्यात येते. तीन वर्षाच्या सरासरी साठी प्रथम बेरीज $y_1 + y_2 + y_3$ मिळविल्यानंतर पुढील बेरीज अर्थात $y_2 + y_3 + y_4$ शोधण्यासाठी उपर्युक्त बेरजेतून y_1 ला वजा करून y_4 ला मिळविण्यात येते. ह्या प्रकारे क्रमश: सर्व बेरीज शोधून प्रत्येकाला 3 ते भागितल्याने तिन वर्षाची चलीत सरासरी मिळते.

नोंद : तीन वर्षीय सरासरीत प्रथम सरासरी y_2 च्या समोर लिहीण्यात येते आणि त्यामुळे y_1 च्या समोर चलित सरासरी अर्थात त्या वेळेच्या वळणाची किमंत मिळणार नाही. त्याचप्रमाणे y_n च्या संलग्न वळणाची किमंत मिळविता येत नाही.

उदाहरण 8 : एका बँकेच्या एका शाखेत वेग-वेगळ्या आठवड्यात उघडलेल्या खात्याची संख्या खालीलप्रमाणे आहे. तीन आठवड्याच्या चलित सरासरी पद्धतीने वळण शोधा.

आठवडा	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
उघडलेल्या खात्याची संख्या	26	27	26	25	22	24	25	23	22	21

तीन दिवसीय चलित सरासरीची मोजणी

सप्ताह t	**उघडलेल्या खात्याची संख्या** y	**तीन आठवड्याची चलित बेरीज**	**तीन सप्ताहाची चलित सरासरी**
1	26	—	—
2	27	$26 + 27 + 26 = 79$	$\frac{79}{3} = 26.33$
3	26	$79 - 26 + 25 = 78$	$\frac{78}{3} = 26$
4	25	$78 - 27 + 22 = 73$	$\frac{73}{3} = 24.33$
5	22	$73 - 26 + 24 = 71$	$\frac{71}{3} = 23.67$
6	24	$71 - 25 + 25 = 71$	$\frac{71}{3} = 23.67$
7	25	$71 - 22 + 23 = 72$	$\frac{72}{3} = 24$
8	23	$72 - 24 + 22 = 70$	$\frac{70}{3} = 23.33$
9	22	$70 - 25 + 21 = 66$	$\frac{66}{3} = 22$
10	21	—	—

उदाहरण 9 : एका कारखान्यातील वार्षिक उत्पादन (टनात) च्या माहितीवरून पंचवर्षीय चलित सरासरी पद्धतीने वळण मिळवा.

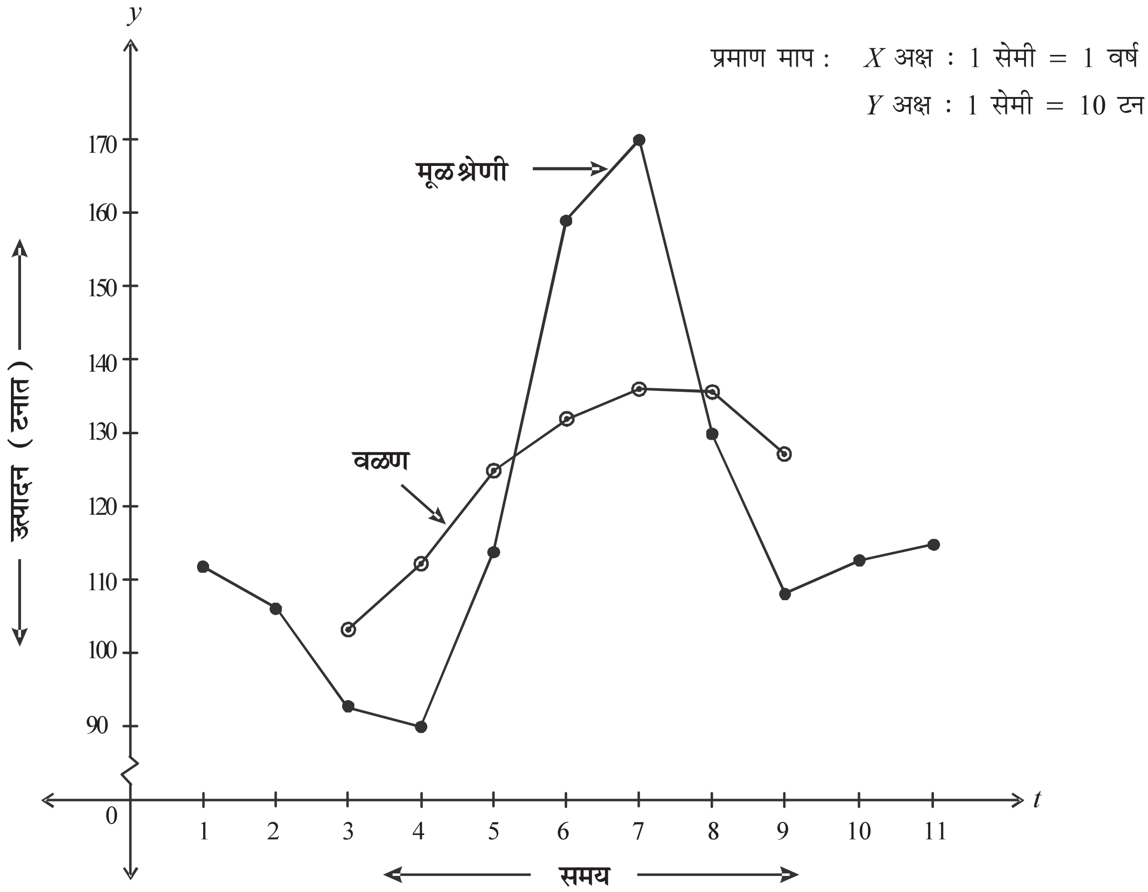
वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
उत्पादन (टन)	112	106	93	90	114	159	170	130	108	113	115

पंचवर्षीय चलित सरासरीची मोजणी

वर्ष	**उत्पादन** y	t	**पंचवर्षीय चलित बेरीज**	**पंचवर्षीय चलित सरासरी (वळण)**
2006	112	1	—	—
2007	106	2	—	—
2008	93	3	$112+106+93+90+114=515$	$\frac{515}{5}=103$
2009	90	4	$515-112+159=562$	$\frac{562}{5}=112.4$
2010	114	5	$562-106+170=626$	$\frac{626}{5}=125.2$
2011	159	6	$626-93+130=663$	$\frac{663}{5}=132.6$
2012	170	7	$663-90+108=681$	$\frac{681}{5}=136.2$
2013	130	8	$681-114+113=680$	$\frac{680}{5}=136$
2014	108	9	$680-159+115=636$	$\frac{636}{5}=127.2$
2015	113	10	—	—
2016	115	11	—	—

समजूतीसाठी जास्तीची माहिती

उपर्युक्त पद्धतीने मिळविलेले वळण समजण्यासाठी आपणास चलाच्या किमंती आणि पाच वर्षीय चलित सरासरी द्वारा मिळालेले वळण आलेखाद्वारा दर्शवू या.



येथे, सर्व सरासरीमधून जाणारा वक्र वळण दर्शवितो

जर चलित सरासरीचा समयगाळा एकी संख्या उदा. 3, 5, 7, ... असेल, तर वरीलप्रमाणे वळण शोधण्यात येते. पण जर तो गाळा सम संख्येत असेल, तर चलित सरासरीची मोजणी कठिण होते.

समजा की चार वर्षीय चलित सरासरी शोधावयाची आहे. प्रथम चार वर्षीय सरासरी $\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$ शोधण्यात येईल. ह्या चार किमंतीचे केंद्रस्थान y_2 आणि y_3 च्या मध्ये असल्याने ह्या सरासरीला त्या स्थानी लिहिता येईल. त्याचप्रमाणे क्रमश: $\frac{y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{4}$, $\frac{y_3 + y_4 + y_5 + y_6}{4}$, ... चलित सरासरी, शोधून अनुक्रमे y_3 आणि y_4 च्या मध्ये, y_4 आणि y_5 च्या मध्ये ... लिहिण्यात येईल. या सर्व सरासरी दोन वर्षाच्या दरम्यान येत असल्याने पुन्हा दोन वेळा सरासरीची सरासरी शोधण्यात येते. आणि त्याला दोन चलित सरासरीच्यामध्ये ठेवण्यात येते. अशाप्रकारे उपर्युक्त दर्शविलेली प्रथम आणि द्वितिय सरासरीची किमंत y_3 च्या समोर ठेवण्यात येते. यापद्धतीने मिळविलेल्या सरासरीला चार वर्षाची चलित सरासरी म्हणतात. येथे, सरासरी शोधण्याची प्रक्रिया दोनवेळा करावी लागते. ह्या मोजणीला सरळ करण्यासाठी चार वर्षीय बेरजेला मिळवून त्यावरून दोन-दोन वर्षाची बेरीज करण्यात येते. ही बेरीज 8 किमंतीच्या असल्याने त्याला 8 ते भागीतल्यास आपणास वरीलप्रमाणे चार वर्षीय चलित सरासरी मिळेल.

अल्पकालिन वाढ-घटीचा पुनरावर्तनाचा समय कोणतीही बेकी संख्या असेल, तर वरील दर्शविलेल्या पद्धतीने प्रथम चलित बेरीज, त्यानंतर दोघांची बेरीज मिळवून चलित सरासरी शोधण्यात येते.

उदाहरण 10 : एका दुकानाची मासिक विक्री (लाख ₹त) च्या माहितीसाठी खालीलप्रमाणे चार महिन्याचा चलित सरासरीने वळण शोधा.

मास	मार्च	एप्रिल	मे	जून	जूलै	आगस्ट	सप्टे.	आक्टो.	नोव्हे.	डिसे.
विक्री (लाख ₹)	5	3	7	6	4	8	9	10	8	9

चार महिन्याच्या चलित सरासरीची मोजणी

मास	**विक्री (लाख ₹) y**	t	**चार महिन्याची चलित बेरीज**	**दोन किमंतीची बेरीज**	**चार महिन्याची चलित सरासरी**
मार्च	5	1		—	—
			—		
एप्रिल	3	2		—	—
			$5+3+7+6=21$		
मे	7	3		$21+20=41$	$\frac{41}{8}=5.13$
			$21-5+4=20$		
जून	6	4		$20+25=45$	$\frac{45}{8}=5.63$
			$20-3+8=25$		
जूलै	4	5		$25+27=52$	$\frac{52}{8}=6.5$
			$25-7+9=27$		
ऑगस्ट	8	6		$27+31=58$	$\frac{58}{8}=7.25$
			$27-6+10=31$		
सप्टेंबर	9	7		$31+35=66$	$\frac{66}{8}=8.25$
			$31-4+8=35$		
आक्टोबर	10	8		$35+36=71$	$\frac{71}{8}=8.88$
			$35-8+9=36$		
नोव्हेंबर	8	9		—	—
			—		
डिसेंबर	9	10		—	—

चार महिन्याची चलित सरासरी सामायिक श्रेणीचे वळण दर्शविते

चलित सरासरी पद्धतीचे गुण :

गुण :

(1) सरासरीचा उपयोग करून ह्या पद्धतीते कमी गाळ्याचा परिणाम मोठ्याप्रमाणात दूर होतो आणि श्रेणीचे वळण मिळते.

(2) ह्या पद्धतीत प्रमाणात कमी आणि सरळ मोजणी असल्याने ती समजण्यात सोपी आहे.

चलित सरासरीच्या मर्यादा :

(1) जर चलित सरासरीचा गाळा योग्यपणे निवडला नाही तर ह्या पद्धतीने मिळविलेले वळण निश्चित होत नाही.

(2) सुरूवातीचे तसेच अंतिम अमुक समयासाठी ह्या पद्धतीते वळणाचे अनुमान मिळत नाही.

(3) भविष्याच्या अनुमानासाठी कोणतेही निश्चित गणितीके सूत्र मिळत नाही.

स्वाध्याय 4.3

1. एका कंपनीच्या विक्रीची (दहा लाख ₹ त) खालील माहितीवरून तीन वार्षिक चलित सरासरीने वळण मिळवा.

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
विक्री (दहा लाख ₹)	3	4	8	6	7	11	9	10	14	12

2. एका कंपनीच्या शेअर वर्ष 2016 दरम्यान सरासरी मासिक बंद भावाची माहिती खालील कोष्टकात दिलेली आहे. चार महिन्याच्या चलित सरासरीचे वळण मिळवा.

मास	जाने.	फ्रेब.	मार्च	एप्रिल	मे	जून	जूलै	आगस्ट	सप्टें.	आक्टो.	नोव्हें.	डिसें.
शेअरचा भाव (₹)	253	231	350	261	262	266	263	261	281	278	278	272

3. एका व्यापाऱ्याच्या वेगवेगळ्या वर्षातील नफा (लाख ₹ त) ची माहिती खालील दिलेल्यावरून पंचवर्षीय चलित सरासरीचा उपयोग करून वळण शोधा.

वर्ष	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
नफा (लाख ₹)	15	14	18	20	17	24	27	25	23

4. वर्षाच्या वेगवेगळ्या त्रिमासिक (Q_3) गाण्यात घाऊक भावाचा सूचक अंक खालीलप्रमाणे मिळविलेला आहे. चार त्रिमासिक चलित सरासरीते श्रेणीचे वळण शोधा.

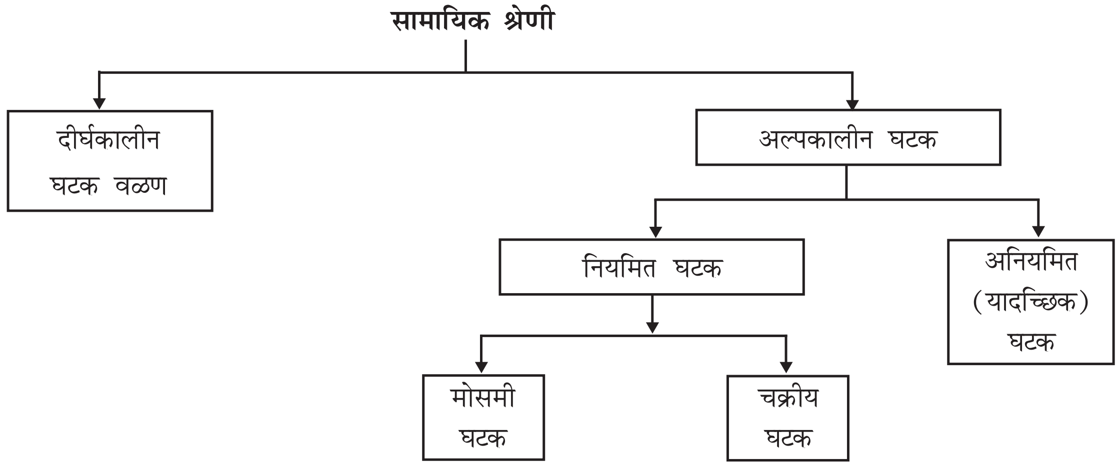
वर्ष	2013				2014				2015			
त्रिमास	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
सूचक आंक	110	110	125	135	145	152	155	168	131	124	132	153

*

सारांश

- समयानुसार एकत्रित केलेल्या आणि रचलेल्या माहितीला सामायिक श्रेणी म्हणतात.
- दिलेल्या चलाच्या किमंतीच्या भविष्यातील अनुमान मिळविण्यासाठी सामायिक श्रेणीचे पृथ:करण करणे आवश्यक आहे.
- सामायिक श्रेणीच्या चलाच्या किमंतीवर परिणाम करणारे मुख्य चार घटक आहेत.
  (1) दीर्घकालीन घटक (वळण) (2) मोसमी घटक
  (3) चक्रीय घटक (4) यादच्छिक (अनियमित) घटक
- मोसमी वाढ-घट, चक्रीय वाढ-घट आणि यादच्छिक वाढ-घटीमुळे श्रेणीत अल्पकालीन फरक होतात.
- मोसमी आणि चक्रीय वाढ-घट जवळजवळ नियमितपणे पुनरावर्तन पावतात.
- सामायिक श्रेणीचे वळण मोजण्याच्या तिन पद्धती आहे.
  (1) आलेखाची पद्धती (2) न्यूनतम वर्गाची पद्धती (3) चलित सरासरीची पद्धती.

प्रकरणाची एक झलक



: सूत्रांची यादी :

दिलेल्या माहितीसाठी न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीने सुरेख समीकरण $\hat{y} = a + bt$ ते अन्वायोजन करण्यासाठी

$$b = \frac{n\Sigma ty - (\Sigma t)(\Sigma y)}{n\Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}, \qquad a = \bar{y} - b\bar{t}$$

स्वाध्याय 4

विभाग A

खालील दिलेल्या बहुविकल्प प्रश्नासाठी सत्य विकल्प निवडा :

1. मोसमी घटकाच्या कारणामुळे सामायिक चलात कोणता प्रकारचा फरक होतो ?
(a) दीर्घकालीन (b) अनियमित (c) नियमित (d) शून्य प्रमाणात

2. 'संपामुळे एखाद्या कंपनीच्या उत्पादनात होणारी घट' कोणत्या प्रकारची वाढ-घट दर्शविते ?
(a) यादच्छिक (b) वळण (c) मोसमी (d) चक्रीय

3. सुरेख वळण शोधण्यासाठी सुरेख समीकरणाचे अन्वायोजन करण्याच्या पद्धतीचे नाव सांगा.
(a) आलेखाची पद्धती (b) न्यूनतम वर्गाची पद्धती
(c) चलित सरासरीची पद्धती (d) आंशिक सरासरीची पद्धती

4. सामायिक श्रेणीचे योगनीय मॉडेल कशाप्रकारे दाखवितात ?

(a) $y_t = T_t + S_t + C_t - R_t$ (b) $y_t = T_t + S_t + C_t + R_t$

(c) $y_t = T_t \times S_t + C_t \times R_t$ (d) $y_t = S_t + C_t + R_t$

5. सामायिक श्रेणीचा निरपेक्ष चल सांगा ?

(a) y_t (b) S_t (c) t (d) x_t

6. सामायिक श्रेणीच्या कोणत्या घटकाचे अनुमान मिळविणे अशक्य असते ?

(a) यादच्छिक वाढ-घट (b) वळण (c) मोसमी घटक (d) चक्रीय घटक

7. खालीलपैकी कोणता फरक चक्रीय घटकांमुळे होतो असे म्हणतात ?

(a) हिवाळ्यात वाढणारी स्वेटरची मागणी

(b) शेअरबाजारातील असणाऱ्या मंदीमुळे कमी झालेले शेअरचे भाव

(c) अतिपावसामुळे शेतीच्या उत्पन्नात होणारी घट

(d) सतत घटणारा मृत्यूदर

8. जानेवारी 2016 ते डिसेंबर 2016 पर्यंतच्या सामायिक श्रेणीमधून मिळलेल्या वळणाचे समीकरण $\hat{y} = 30.1 + 1.5\,t$ असेल तर एप्रिल 2016 साठीच्या वळणाची किमंत शोधा.

(a) 30.1 (b) 34.6 (c) 36.1 (d) 33.1

9. खालीलपैकी कोणता फेरबदल मोसमी घटकांचा परिणाम आहे.

(a) खेड्यातील लोकाचे शहराकडे होणारे स्थलांतर

(b) शहराच्या रस्तावरील वाढणारी वाहनांची संख्या

(c) शाळेच्या सुटीमुळे वाढणारी पर्यटकांची संख्या

(d) एखाद्या विशिष्ट रोगाच्या सांथीमुळे झालेला मृत्यूअंक

10. वळण शोधण्याच्या कोणत्या पद्धतीने अल्प काळात पुनरावर्तत होणाऱ्या वाढ-घटीचा परिणाम सर्वात चांगल्या पद्धतीने दूर होतो ?

(a) आलेखाची पद्धती (b) न्यूनतम वर्गाची पद्धती

(c) कार्ल पियर्सनची पद्धती (d) चलित सरासरीची पद्धती

विभाग B

खालील प्रश्नांची एका वाक्यात उत्तरे द्या :

1. घटणारे वळण असेल अशा सामायिक श्रेणीचे उदाहरण द्या.
2. सामायिक श्रेणी म्हणजे काय ?
3. सामायिक श्रेणीच्या कोणत्या घटकामुळे अल्पकालीन वाढ-घट होते ?
4. सामायिक श्रेणीचे पृथ:करण म्हणजे काय ?
5. सामायिक श्रेणीच्या चक्रीय घटकाला कोणत्या संकेताने दर्शवितात ?
6. सामायिक श्रेणीतील वळण मोजण्याच्या पद्धतीची नावे लिहा.
7. एका वर्षापेक्षा कमी वेळेत पुनरावर्तन होणाऱ्या वाढ-घट कोणत्या घटकाचा परिणाम दर्शवितो ?
8. सामायिक श्रेणीच्या घटकाची नावे लिहा.
9. वळण शोधण्यासाठी चलित सरासरीची पद्धती केव्हा जास्त उपयोगी ठरते ?
10. चल y ची 7 आठवड्यातील माहितीवरून अन्वायोजन केलेले सुरेख समीकरण $\hat{y} = 25.1 - 1.3\,t$ असेल तर आठव्या आठवड्यातील y च्या किमंतीचे अनुमान शोधा.

विभाग C

खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या :

1. सामायिक श्रेणीचे योगनीय मॉडेल वर्णवा.
2. चक्रीय घटक म्हणजे काय ?
3. मोसमी घटक हे चक्रीय घटकापेक्षा कशाप्रकारे वेगळी पडते ?
4. अनियमित घटक समजवा.
5. आलेख पद्धतीच्या मर्यादा समजवा.
6. चलित सरासरीचा अर्थ समजवा.
7. सामायिक श्रेणीची व्याख्या द्या.
8. वळण मोजण्याच्या चलित सरासरीच्या पद्धतीचे गुण लिहा.
9. वळण मोजण्याची आलेख पद्धती वर्णवा.

विभाग D

खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या :

1. सामायिक श्रेणीचे महत्त्व समजवा.
2. सामायिक श्रेणीच्या पृथ:करणाचे उपयोग सांगा.
3. सामायिक श्रेणीचे वळण म्हणजे काय ? उदाहरणासह समजवा.
4. मोसमी घटकांवर थोडक्यात टीप लिहा.
5. न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीने दिलेल्या माहितीवरून सुरेख समीकरण अन्वायोजन करण्याची पद्धती समजवा.
6. न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीचे गुण आणि मर्यादा सांगा.
7. वळण शोधण्याची चलित सरासरीची पद्धती समजवा.
8. चलित सरासरीच्या पद्धतीच्या मर्यादाची चर्चा करा.
9. खालील सामायिक श्रेणी एका कारखान्याचे उत्पादन दर्शविते आलेख पद्धतीते तिचे वळण शोधा.

दिवस	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
उत्पादन (एकक)	21	22	23	25	24	22	25	26	27	26

10. एका सामायिक श्रेणीचा चल (y) साठीची खालील माहितीवरून सुरेख समीकरणाचे अन्वायोजन करा :

    $n = 4, \quad \Sigma y = 270, \quad \Sigma ty = 734$

11. एका वस्तूच्या मागणीसाठी एका स्टोरमधून एकत्रित केलेली माहिती खालील प्रमाणे आहे. तीन महिन्याच्या चलित सरासरीने वळण शोधा.

मास	जानेवारी	फ्रेब्रूवारी	मार्च	एप्रिल	मे	जून	जूलै
मागणी (एकक)	15	16	18	18	23	23	20

विभाग E

खालील उदाहरणे सोडवा.

1. एका कापड उत्पादकाची तयार कपड्याची निर्याती (करोड ₹ त) ची माहिती खाली दर्शविली आहे.

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014	2015
निर्यात (करोड ₹)	22	25	23	26	20	25

ह्या माहितीसाठी सुरेख वळणाचे अन्वायोजन करा आणि 2017 वर्षाच्या निर्यातीसाठी वळणाच्या किमंतीचे अनुमान मिळवा.

2. शेवटच्या 5 वर्षातील एका विमान कंपनीने विमानात प्रवास केलेल्या प्रवाशाच्या संख्येविषयी खालील माहिती प्राप्त आहे. सुरेख वळणाचे अन्वायोजन करून वर्ष 2016 साठी वळणाच्या किमंतीचे अनुमान करा.

वर्ष	2011	2012	2013	2014	2015
प्रवाशांची संख्या (हजार)	45	47	44	40	38

3. एका स्टॉक एक्सचेंजमध्ये नोंदविलेल्या एका कंपनीच्या शेअरचा बंदभावा विषयीची वेग-वेगळ्या महिन्यातील माहिती खालील कोष्टकात दिलेली आहे. तीन महिन्याच्या चलित सरासरीद्वारा वळण मिळवा.

मास	2015 एप्रिल	मे	जून	जूलै	ऑगस्ट	सप्टेंबर	आक्टोबर	नोव्हें.	डिसें.	2016 जानेवारी
शेअरचा भाव (₹)	76	73	65	68	67	60	63	67	65	66

4. खालील माहिती एका वस्तूची विक्री (हजार ₹ त) दर्शविली आहे. आलेखाने वळण मिळवा.

वर्ष	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
विक्री (हजार ₹)	200	216	228	235	230	232	236	235	230	233

5. एका राज्याचा खाद्य-तेलाचा वापराचा साठ्याचा सूचक अंक खालील कोष्टकात दिलेला आहे. पाच वर्षीय चलित सरासरीच्या आधारे वळण शोधा.

वर्ष	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
सूचक अंक	115	121	119	120	117	119	120	118	116	124	125

विभाग F

खालील उदाहरणे सोडवा :

1. एका देशाच्या साखर उत्पादनाची मागील 6 वर्षाची खालीलपणे नोंदवलेली माहितीवरून उत्पादन वळणाचे न्यूनतम वर्गाच्या पद्धतीने सुरेख समीकरण मिळवा. वर्ष 2016-17 आणि 2017-18 च्या उत्पादनासाठीच्या वळणाचे अनुमान मिळवा.

वर्ष	2009 – 10	2010 – 11	2011 – 12	2012 – 13	2013 – 14	2014 – 15
साखर उत्पादन (करोड टन)	29.2	34.2	35.4	36.4	33.6	37.7

2. एका कॉलेजात अभ्यास करणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या खालील कोष्टकात दर्शविली आहे. चार वर्षीय चलित सरासरीने वळण मिळवा.

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
विद्यार्थी संख्या	332	317	357	392	402	405	410	427	405	438

3. खालील कोष्टकात एका राज्यातील वेग-वेगळ्या वर्षाचा जन्मदर दिलेला आहे. ह्या माहिती साठीचे सुरेख वळणाचे अन्वायोजन करा वर्ष 2016 आणि 2017 च्या जन्मदराचे ही अनुमान मिळवा.

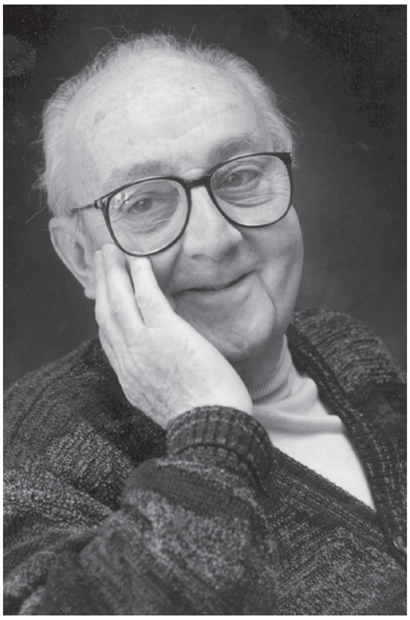
वर्ष	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
जन्मदर	22.2	21.8	21.3	20.9	20.6	20.2	19.9

4. रेल्वेच्या एका विभागात वेग-वेगळ्या वर्षात आलेल्या मालाची ने आण विषयीची माहिती खालीलप्रमाणे दिलेली आहे. सुरेख समीकरणाचे अन्वायोजन करून प्रत्येक वर्षाची अनुमानीत किमंत मिळवा. वर्ष 2016 च्या किमंतीचे अनुमान शोधा.

वर्ष	2011	2012	2013	2014	2015
मालाची ने आण (टन)	180	192	195	204	202

5. क्रूड तेलाचा साप्ताहिक भाव (USD प्रति बेरलची) माहिती खालीलप्रमाणे दिलेली आहे. चार आठवड्याची चलीत सरासरीचा उपयोग करून वळण शोधा.

मास	मार्च 2016				एप्रिल 2016				मे 2016			
सप्ताह	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
क्रूडतेलाचा भाव	35.92	38.50	39.44	39.46	36.79	39.72	40.36	43.73	45.92	44.66	46.21	48.45



George Edward Pelham Box
(1919 -2013)

George E. P. Box worked in the areas of quality control, time series analysis, design of experiments and Bayesian inference. He has been called "one of the great statistical minds of the 20th century." He has been associated with University at Raleigh (now North Carolina State University), Princeton University, University of Wisconsin–Mandison. Box has published numerous articles and papers and he is an author of many books. He is a recipient of prestigious honours, medals and was the president of American Statistical Association in 1978 and of the Institute of Mathematical Statistics in 1979. His name is associated with results in statistics such as Box–Jenkins models, Box–Cox transformations, Box–Behnken designs, and others. Box was elected a member of the American Academy of Arts and Sciences in 1974 and a Fellow of the Royal Society (FRS) in 1985.

●

उत्तरे

स्वाध्याय 1.1

1. (1) अचल आधारे सूचक अंक : 100, 103.27, 105.09, 106.55, 108, 113.82, 119.27, 125.45

(2) परंपरित आधारे सूचक अंक : 100, 103.27, 101.76, 101.38, 101.37, 105.39, 104.79, 105.18

(3) सरासरी वेतनाच्या आधारे सूचक अंक : 91.36, 94.35, 96.01, 97.34, 98.67, 103.99, 108.97, 114.62

2. (1) अचल आधारे सूचक अंक : 100, 101.79, 105.36, 107.14, 110.71, 114.29,121.43, 128.57

(2) परंपरित आधारे सूचक अंक : 100, 101.79, 103.51, 101.69, 103.33, 103.23, 106.25, 105.88

(3) सरासरी भावाच्या आधारे सूचक अंक : 96.55, 98.28, 101.72, 103.45, 106.90, 110.34, 117.24, 124.14

3. (1) अचल आधारे सूचक अंक : 100, 108.70, 112.78, 115.19, 119.44

(2) परंपरित आधारे सामान्य भावाचा सूचक आंक : 100, 108.70, 103.65,102.26, 103.71

4. n वस्तूंचा सामान्य अंक : 126.45, ईंधनाच्या वस्तूच्या भावात समग्रपणे 26.45 % वाढ झाली आहे.

स्वाध्याय 1.2

1. अचल आधारे सूचक अंक : 100, 110, 104.5, 112.86, 135.43, 143.56, 157.92
2. परंपरित आधारे सूचक अंक : 117.4, 100.51, 102.80, 103.13, 102.64, 102.49, 102.28
3. परंपरित आधारे सूचक अंक : 100, 99.63, 99.26, 100, 103.73, 101.80, 100, 103.53, 100, 102.05
4. अचल आधारे सूचक अंक : 110, 123.2, 134.29, 145.03, 152.28, 169.03

स्वाध्याय 1.3

1. $I = 307$, खर्चात 207 % वाढ झाली आहे.
2. $I = 123.80$, भावात 23.80 % वाढ झाली आहे.
3. $I_L = 126.72,\ I_P = 126.85,\ I_F = 126.78$
4. $I_L = 141.13,\ I_P = 140.15,\ I_F = 140.64$
5. $I_F = 142.57$
6. $I_P = 115.2,\ I_F = 115.14$

स्वाध्याय 1.4

1. कौटुंबिक अंदाजपत्राच्या पद्धतीने सूचक अंक = 135.64 आणि एकूण खर्चात 35.64 % वाढ झाली आहे. सरासरी खर्चपात्र मासिक आवक ₹ 20,346 होईल.
2. सूचक अंक $I = 128.53$ आणि 28.53 % एकूण खर्चात वाढ झाली आहे.
3. सूचक अंक $I = 132.51$ आणि 32.51 % एकूण खर्चात वाढ झाली आहे.
4. सूचक अंक $I = 213.20$ आणि 113.20 % एकूण खर्चात वाढ झाली आहे.
5. कौटुंबिक अंदाजपत्र पद्धतीने सूचक अंक = 129.64 आणि एकूण खर्चाच्या पद्धतीने सूचक अंक $I = 129.64$ अशा प्रकारे दोन्ही समान आहेत.

स्वाध्याय 1

विभाग A

1. (c)	**2.** (a)	**3.** (d)	**4.** (c)	**5.** (d)
6. (d)	**7.** (c)	**8.** (c)	**9.** (c)	**10.** (c)
11. (a)	**12.** (c)			

विभाग B

12. विधान असत्य आहे. तेलाचा सूचक अंक 500 आहे.

विभाग C

7. वास्तविक वेतन ₹ 16,392.85 आणि कामगाराचे झालेले नुकसान ₹ 1642.85 (खरेदीशक्ति कमी होते)
8. वास्तविक वेतन ₹ 29166.67, 26666.67, 32307.69, 31250
9. वर्ष 2015 चा फुगवटा दर : 2.03 %
10. 449.55
11. सरासरी मासिक खर्चपात्र उत्पन्न = ₹ 30,000
12. उत्पन्नाचा सूचक अंक = 125
13. उत्पादनाचा सूचक अंक = 280
14. $I_p = 222.5$

विभाग D

7. 161.87

8. अचल आधारे सूचक अंक : = 100, 111.11, 133.33, 144.44, 166.67, 222.22, 263.89

9. परंपरित आधारे सूचक अंक : = 100, 104, 100.96, 102.86, 100.93, 116.51

10. अचल आधारे सूचक अंक : = 120, 108, 151.20, 189

11. परंपरित आधारे सूचक अंक : = 100, 112.5, 106.67, 114.58, 109.09, 116.67

12. सूचक अंक = 226.6

13. $I_L = 166.67$, $I_p = 150$, $I_F = 158.12$

14. $I_p = 167.71$

विभाग E

1. सामान्य सूचक अंक = 122.32

2. एकूण खर्चाच्या पद्धतीने सूचक अंक = 149.41

3. एकूण खर्चाच्या पद्धतीने सूचक अंक = 115.69

4. अचल आधारे सूचक अंक = 100, 118.75, 125, 131.25, 140.63, 187.5, 203.13; सरासरी भावाच्या आधारे सूचक अंक 91.43, 108.57, 114.29, 120, 128.57, 171.43, 185.71

5. औद्योगिक उत्पादनाचा सूचक अंक I = 379.19

6. सूचक अंक I = 126.79 आणि भावात झाले वृद्धी 26.79 % आहे.

7. वास्तविक वेतन = 12,500, 10,000, 9268.29, 9090.91, 9361.7, 9615.38 पैश्याची खरेदीशक्ति = ₹ 0.38

विभाग F

1. $I_L = 113.65$, $I_P = 113.94$, $I_F = 113.79$ एकूण खर्चात झालेली वाढ 13.79 % आहे.

2. $I_P = 191.53$, $I_F = 211.52$

3. $I_F = 84.84$

4. $I_L = 109.52$, $I_P = 110.29$, $I_F = 109.90$

5. कौटुंबिक अंदाजपत्र पद्धतीने सूचक अंक = 118.58 आणि एकूण खर्चाच्या पद्धतीने सूचक अंक = 118.58. अशाप्रकारे दोन्ही पद्धतीने सूचक अंक समान आहे.

6. वर्ष 2014 साठी सूचक अंक $I_1 = 239.41$ आणि वर्ष 2015 साठी सूचक अंक $I_2 = 253.44$; जीवननिर्वाह खर्चात चालू वर्षी झालेली वाढ 14.03 % आहे. 2015 च्या भावाचा सूचक अंकाच्या टक्केवारीत 5.86 % ची वाढ झालेली आहे. आणि वेतनात 5 % वाढ मिळाली आहे, त्यामुळे वेतनात 0.86 % एवढी घट आहे.

7. सूचक अंक $I = 231.44$ आधीचे जीवन धोरण टिकविण्यासाठी ₹ 13,886.40 आवक असली पाहिजे.

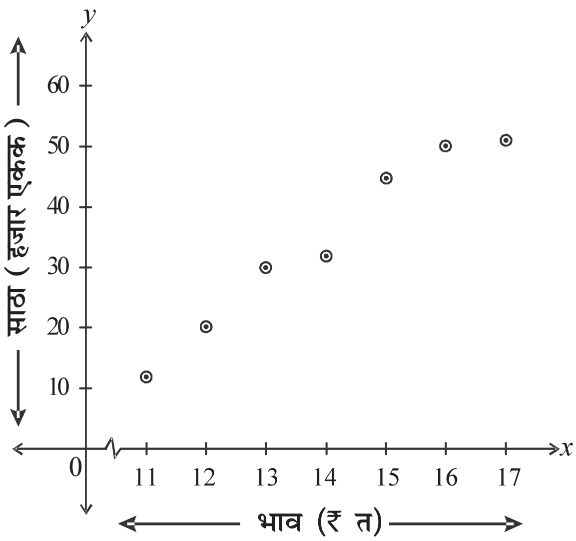
8. औद्योगिक वस्तूचा सूचक अंक $= 100.10$, जी आधार वर्षाच्या तुलनेत 0.10 % एवढी वाढ सूचविते.

9. भार वाढीच्या आधीचा सूचक अंक $I = 128.75$

10. जीवननिर्वाह खर्चाचा सूचक अंक $= 196.35$ आणि आधार वर्षाचा तुलनेत (196.35 – 100) = 96.35 % एवढी वाढ झाली आहे.

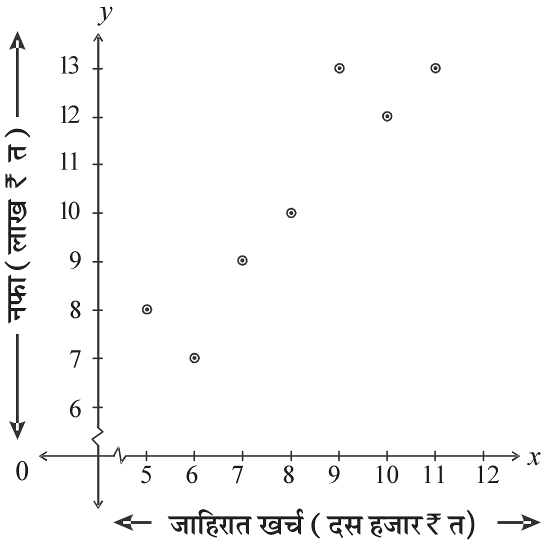
स्वाध्याय 2.1

1.



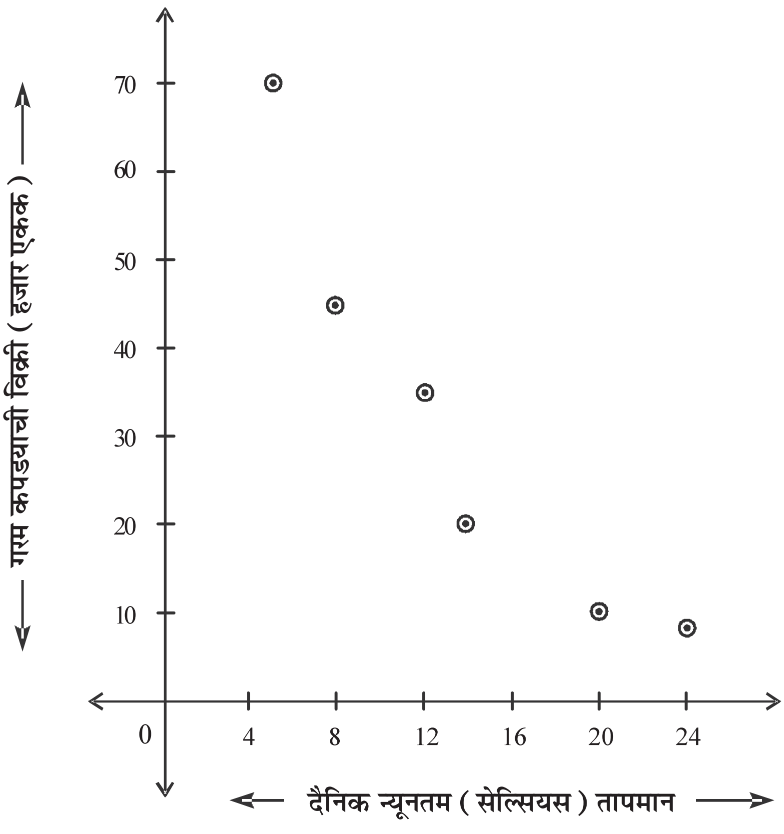
भाव व साठयातील आंशिक धन सहसंबंध आहे

2.



जाहिरात खर्च आणि नफा यामध्ये आंशिक धन सहसंबंध आहे

3.



दैनिक न्यूनतम तापमान आणि गरम कपडयाच्या विक्री मधील आंशिक ऋण सहसंबंध आहे

स्वाध्याय 2.2

1. $r = 0.81$	**2.** $r = -0.90$	**3.** $r = 0.90$	**4.** $r = 0.24$	**5.** $r = 0.82$
6. $r = -0.96$	**7.** $r = 0.67$	**8.** $r = -0.92$	**9.** $r = 0.99$	**10.** $r = 0.80$
11. $r = 0.84$	**12.** $r = 0.5$	**13.** $r = 0.8$	**14.** (1) $r = 0.94$	(2) $r = 0.96$
15. $r = -0.55$				

स्वाध्याय 2.3

1. $r = 0.49$	**2.** $r = 0.78$	**3.** $r = 0.7$	**4.** $r = 0.82$	**5.** $r = 0.91$
6. $r = 0.90$	**7.** $r = -0.30$	**8.** सुधारित $\Sigma d^2 = 122.5$, $r = 0.26$		

स्वाध्याय 2

विभाग A

1. (c)	**2.** (a)	**3.** (d)	**4.** (b)	**5.** (c)
6. (d)	**7.** (b)	**8.** (b)	**9.** (b)	**10.** (c)
11. (a)	**12.** (b)	**13.** (c)	**14.** (c)	**15.** (a)
16. (b)	**17.** (b)	**18.** (a)		

विभाग B

3. धन **4.** धन **5.** ऋण **6.** ऋण **7.** अर्थहीन सहसंबंध

8. उगमबिंदू परीवर्तताने r बदलतार नाही त्यामुळे $r = 0.4$ **10.** $r = 0$ **11.** ऋण

विभाग C

11. $r = 0.67$ **12.** $r = -0.54$ **13.** $r = 0.27$

विभाग D

10. $r = 0.75$ **11.** $r = 0$ **12.** $r = -0.5$ **13.** $r = 0.2$

विभाग E

1. $r = -0.81$	**2.** $r = 0.43$	**3.** $r = 0.79$	**4.** $r = 0.77$	**5.** $r = 0.54$
6. $r = 0.13$				

विभाग F

1. $r = 0.99$ 2. $r = -0.96$ 3. $r = 0.88$ 4. $r = 0.81$ 5. $r = 0.38$

6. $r = 0.79$ 7. $r = 0$ 8. $r = 0.6$ 9. $r = 0.3$ 10. $r = 0.79$

11. सुधारित $\Sigma d^2 = 78$; $r = 0.53$ 12. $r = 0.73$

●

स्वाध्याय 3.1

1. $\hat{y} = 31.44 - 1.34\,x$ आणि भाव x = 20 ₹ साठी मागणीचे अनुमान $\hat{y} = 4.64$ (शंभर एकक)

2. $\hat{y} = 3.35 + 1.93\,x$ आणि कार वापरण्याचा वेळ x = 5 वर्षासाठी निभाव खर्चाच अनुमान $\hat{y} = 13$ (हजार ₹)

   $\therefore$ त्रुटी $e = y - \hat{y} = 13 - 13 = 0$ (येथे x = 5 साठी y ची प्राप्त अवलोकित किंमत 13 कोष्टकात आहे.)

3. $\hat{y} = 64.27 + 0.83\,x$ आणि सरासरी पाऊस x = 35 सेमी साठी पिकाऱ्या उत्पादनांचे अनुमान $\hat{y} = 93.32$ (टन)

4. $\hat{y} = 69.7 + 1.13\,x$ आणि कामगाराचा अनुभव x = 7 वर्ष असेल तर कार्य कौशल्य अंकाचे अनुमान $\hat{y} = 77.61$

स्वाध्याय 3.2

1. $\hat{y} = 54.84 + 2.52\,x$ आणि खताचा वापर 300 किग्रा [$\therefore$ x = 30 (दहा किग्रा)] साठी कापसाच्या पिकाचे अनुमान $\hat{y} = 130.44$ (क्विंटल/हेक्टर)

2. $\hat{y} = 52.84 + 0.68\,x$ आणि पित्याची उंची x = 170 सेमी साठी पुत्राच्या उंचीचे अनुमान $\hat{y} = 168.44$ सेमी

3. $\hat{y} = 20.72 - 0.71\,x$ आणि समुद्रसपाटी पासून उंची x = 7 हजार फूट असेल तर ऊपयुक्त ऑक्सिजनची टक्केवारीचे अनुमान $\hat{y} = 15.75$ %

4. $\hat{y} = -3495.7 + 327.73\,x$ आणि वापरण्याची जागा x = 110 चौ मीटर साठी अंदाजित मासिक भाडे $\hat{y} = 32554.6$ ₹

5. $\hat{y} = 0.53 + 0.02\,x$ आणि ग्राहकांची संख्या x = 80 साठी विक्रीचे अनुमान $\hat{y} = 2.13$ (हजार ₹)

6. $\hat{y} = 7.6 + 0.29\,x$; x = नफा (लाख ₹) आणि y = वहीवटी खर्च (लाख ₹)

7. $\hat{y} = 53.72 + 1.54\,x$ आणि पाऊस x = 60 सेमी साठी मक्याच्या उत्पन्नाचे अनुमान $\hat{y} = 146.12$ क्विंटल

8. $\hat{y} = 8.74 + 1.02\,x$ आणि भाव x = 16 ₹ साठी पुरवठ्याचे अनुमान $\hat{y} = 25.06$ (शंभर एकक)

9. $\hat{y} = -4.8 + 0.15\,x$ आणि दिवसाचे महत्तम तापमान x = 42 सेल्सियस साठी आईस्क्रीमच्या विक्रीचे अनुमान $\hat{y} = 1.5$ (लाख ₹)

स्वाध्याय 3

विभाग A

1. (b)	**2.** (a)	**3.** (c)	**4.** (d)	**5.** (a)
6. (a)	**7.** (c)	**8.** (c)	**9.** (d)	**10.** (b)
11. (c)	**12.** (c)	**13.** (c)	**14.** (c)	**15.** (b)

विभाग B

8. त्रुटि = 0

9. दोन्ही चलांना 2 ने गुणल्यास $c_x = \frac{1}{2}$ आणि $c_y = \frac{1}{2}$ होईल $\therefore$ नियत संबंधांक बदलत नाही

10. $b_{yx} = 0.5 \times \frac{4}{2} = 1$ **11.** $\hat{y} = 50$ **12.** $r = 1$ **13.** $r = -1$

विभाग C

2. त्रुटि $e = 1$ **3.** $a = 2$ आणि $\hat{y} = 2 + 0.6\,x$

4. $b_{yx} = 5$ म्हणू शकतो का x च्या किंमतीत 1 एककाने वाढ झाल्याने y किंमतीत अंदाजित 5 एकमांची वाढ होते.

5. $s_y = 3$ **6.** $R^2 = 1$ **7.** $s_x = 5$ **8.** 5 एकक

9. $b_{yx} = 1.2$ आणि $a = 13$ **10.** $b_{vu} = b_{yx} \times \frac{c_x}{c_y} = 0.75 \times \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = 0.25$

विभाग D

8. $\hat{y} = 4 + 0.75\,x$ **9.** $\hat{y} = -10 + 2\,x$

10. $R^2 = 0.81$; y मधी घेणाऱ्या एकूण चलनातून 81 % चलन नियत संबंध मॉडेल वरुन समजेल.

11. $b_{yx} = 2.52$ म्हणजे सांगता येईल की x च्या किंमतीत 1 एककाने वाढ झाल्याने y च्या किंमतीत अंदाजित 2.52 एककांने वाढ होते

12. (i) $b_{vu} = 0.8$ (ii) $b_{vu} = 1.6$ (iii) $b_{vu} = 0.08$ **13.** $\hat{y} = 12 + 0.88\,x$

विभाग E

1. $\hat{y} = 2 + 0.75\,x$ **2.** $\hat{y} = 38.8 + 0.67\,x$ **3.** $\hat{y} = 58 + 3.2\,x$

4. $\hat{y} = 764.8 + 11.4\,x$ आणि पाऊस $x = 20$ सेमी साठी पिकांचे उत्पादन $\hat{y} = 992.8$ किग्रा

5. $\hat{y} = 18 + 0.8\,x$ आणि गुनतवणुक $x = 45$ लाख ₹ साठी बाजार किंमतीचे अनुमान $\hat{y} = 54$ (लाख ₹)

विभाग F

1. $\hat{y} = 73.29 - 1.59\,x$ आणि भाव x = 40 ₹ साठी मागणीचे अनुमान $\hat{y} = 9.69$ (शंभर एकक)

2. $\hat{y} = 73.43 + 0.9\,x$ आणि अनुमान x = 17 वर्ष असेल तर देखाव मूल्यचे अनुमान $\hat{y} = 88.73$

3. $\hat{y} = 34.8 + 0.74\,x$ दैनिक उत्पन्न x = 500 ₹ असेल तर वापरखर्चीचे अनुमान $\hat{y} = 404.8$ ₹

4. $\hat{y} = 3.73 + 0.13\,x$ आणि जाहिरात खर्च x = 50 (दहा हजार ₹) साठी विक्रीचे अनुमान $\hat{y} = 10.23$ करोड ₹

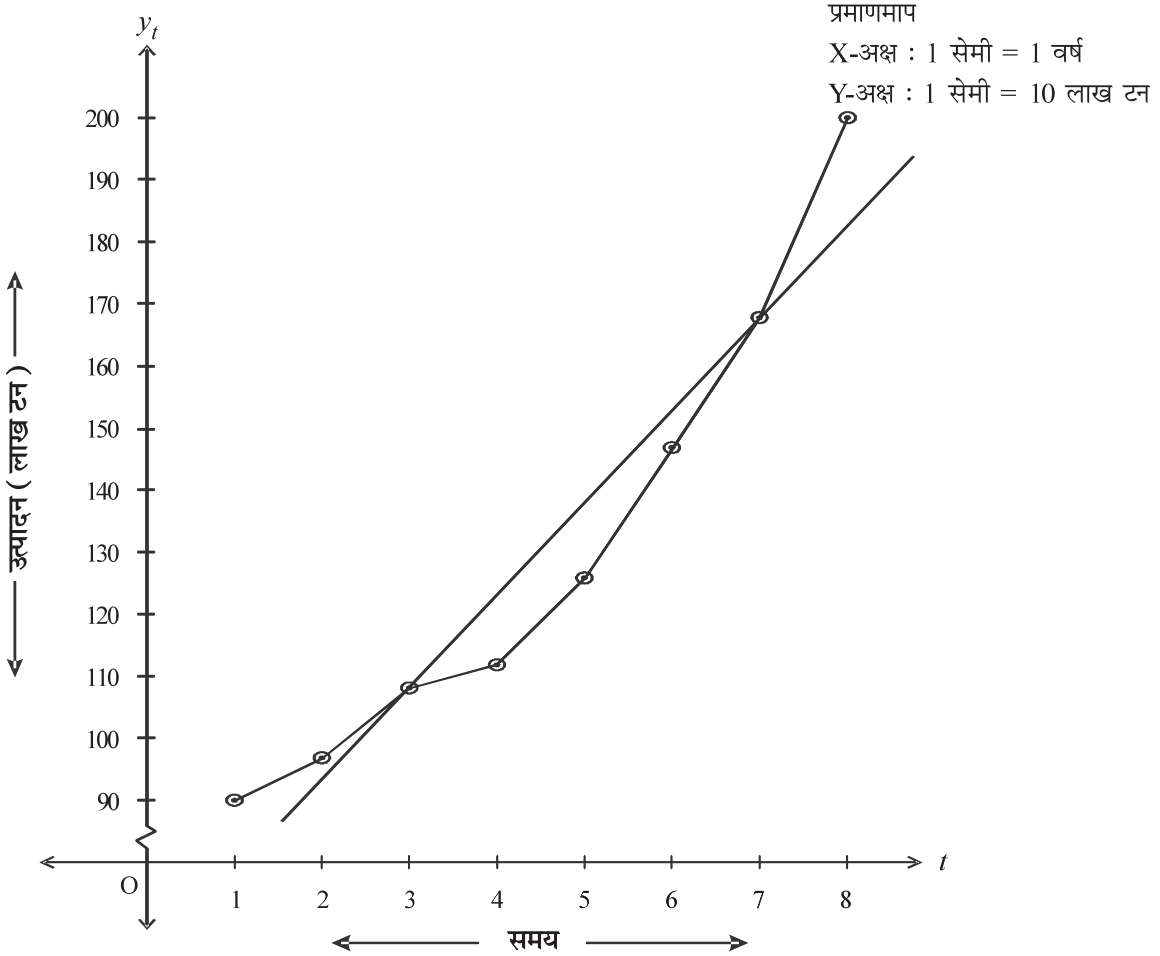
5. $\hat{y} = -122.94 + 91.67\,x$ आणि $R^2 = 0.97$ $\therefore$ नियतसंबंध मॉडेल विश्वासनीय

6. $\hat{y} = -10 + 1.6\,x$ आणि x = 30 साठी $\hat{y} = 38$

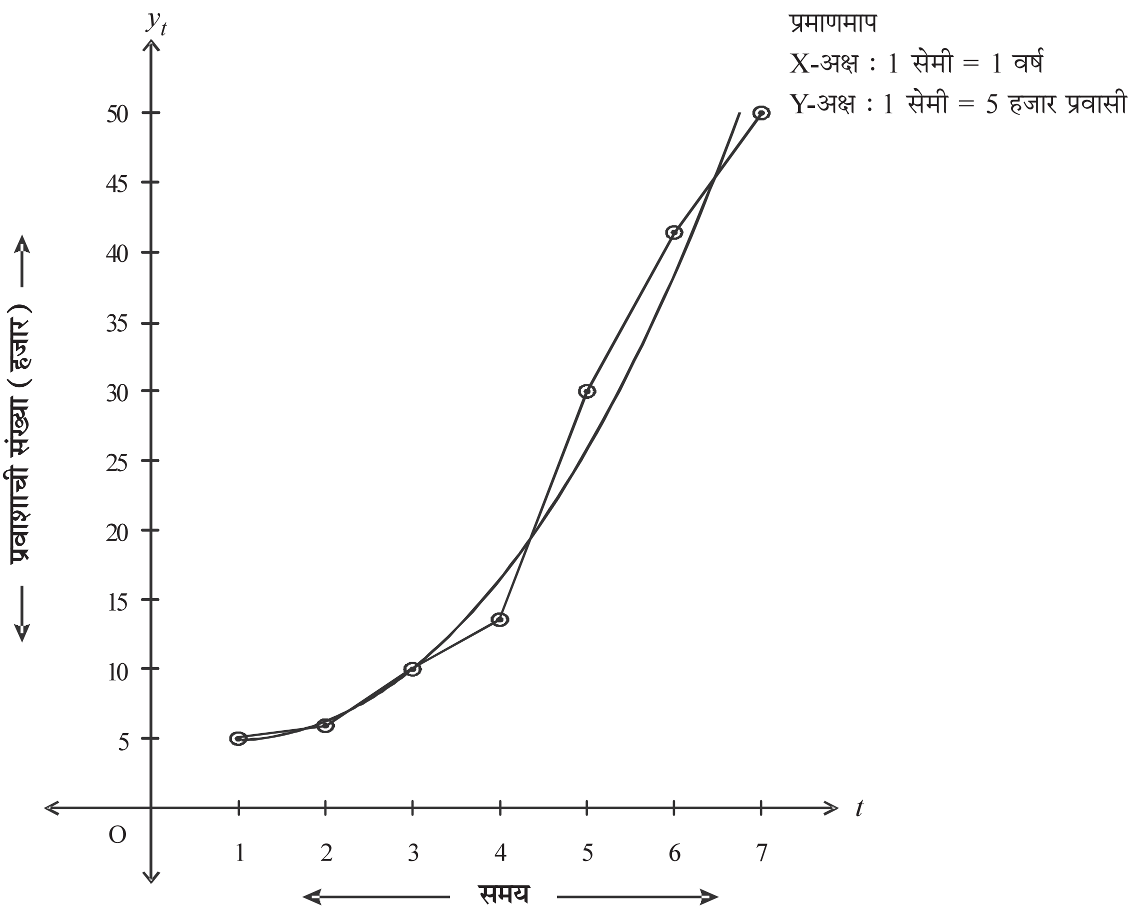
7. $\hat{y} = -0.44 + 0.7\,x$ आणि x = 5 साठी $\hat{y} = 3.06$

●

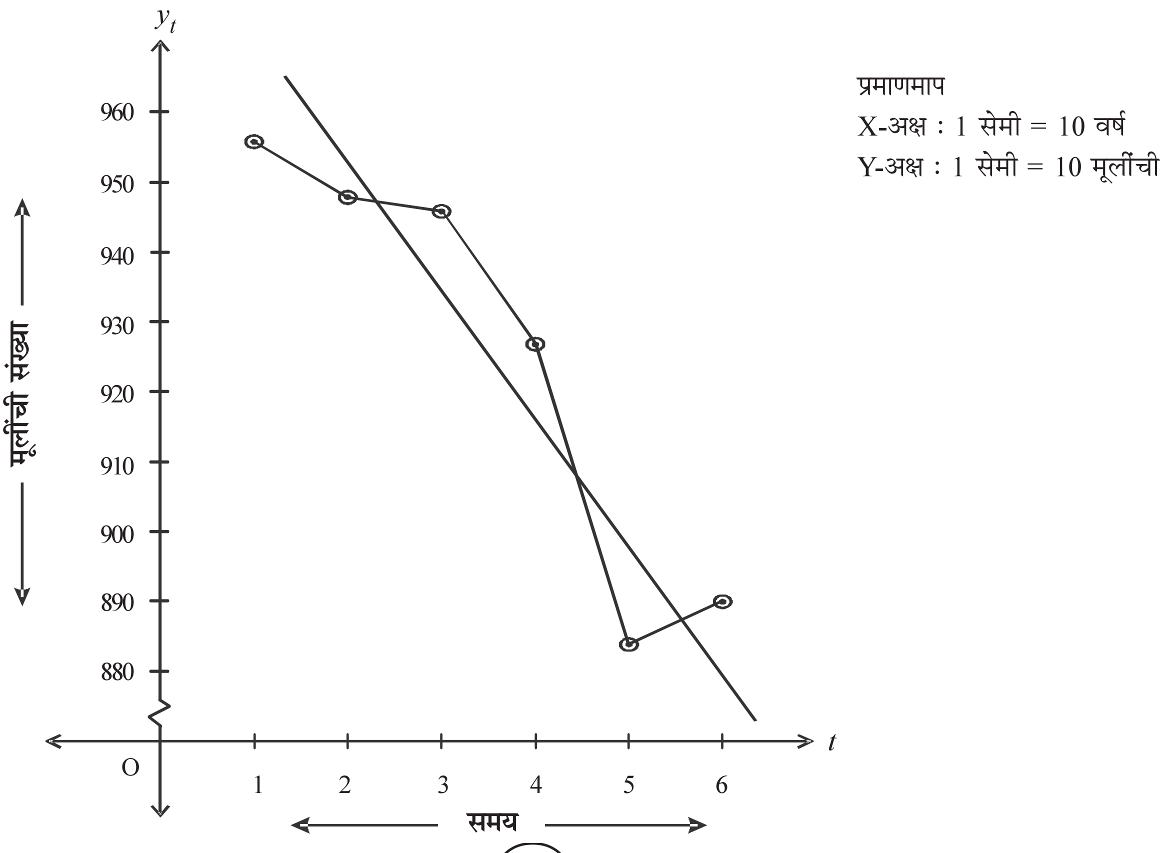
स्वाध्याय 4.1



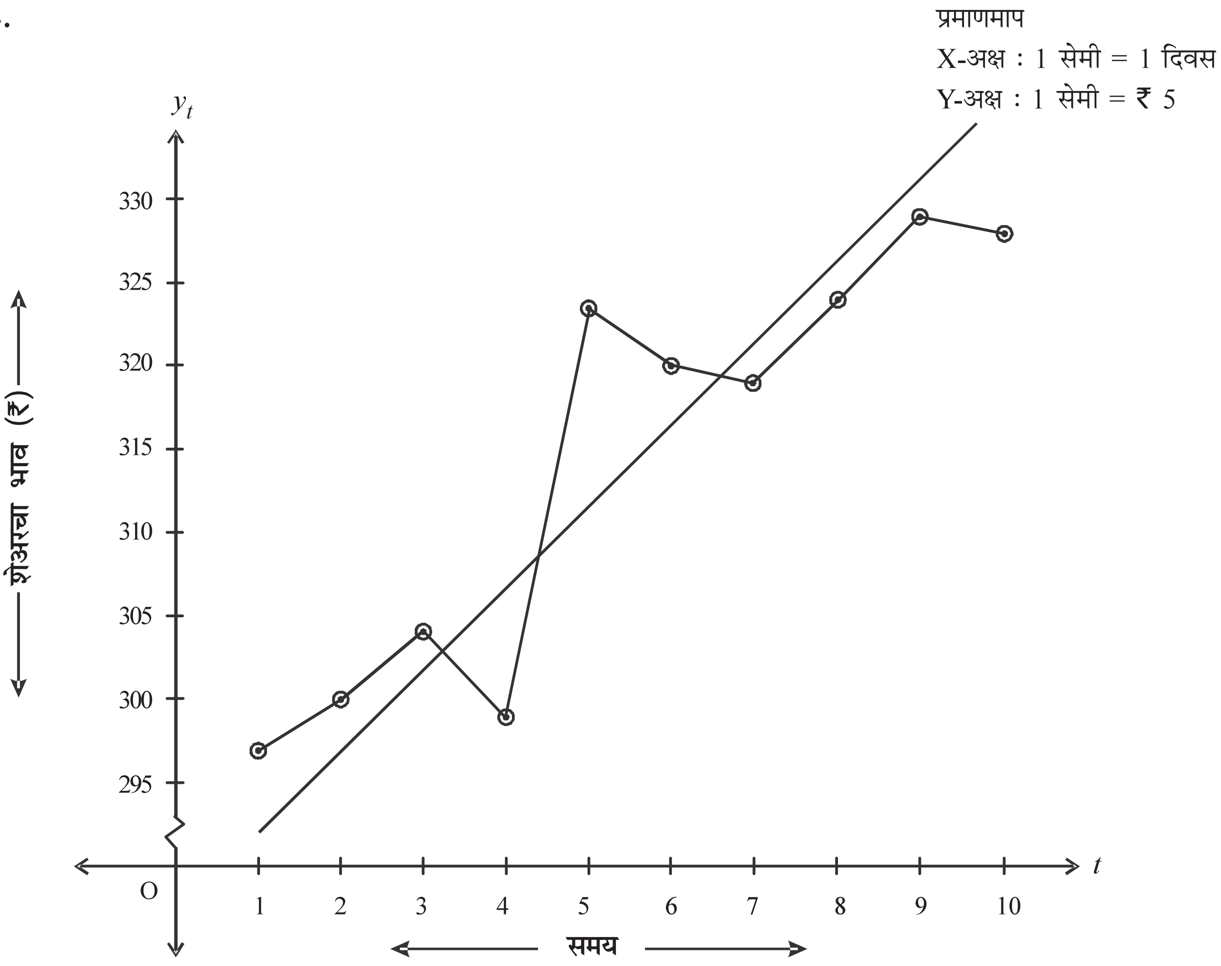
2.


y_t
प्रमाणमाप
X-अक्ष : 1 सेमी = 1 वर्ष
Y-अक्ष : 1 सेमी = 5 हजार प्रवासी
प्रवाशाची संख्या (हजार)
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
O
1
2
3
4
5
6
7
t
समय

3.


y_t
प्रमाणमाप
X-अक्ष : 1 सेमी = 10 वर्ष
Y-अक्ष : 1 सेमी = 10 मूलींची
मूलींची संख्या
960
950
940
930
920
910
900
890
880
O
1
2
3
4
5
6
t
समय

4.



स्वाध्याय 4.2

1. $\hat{y} = 7.41 - 0.07\,t$, वर्ष 2017 साठी $\hat{y} = 6.78$

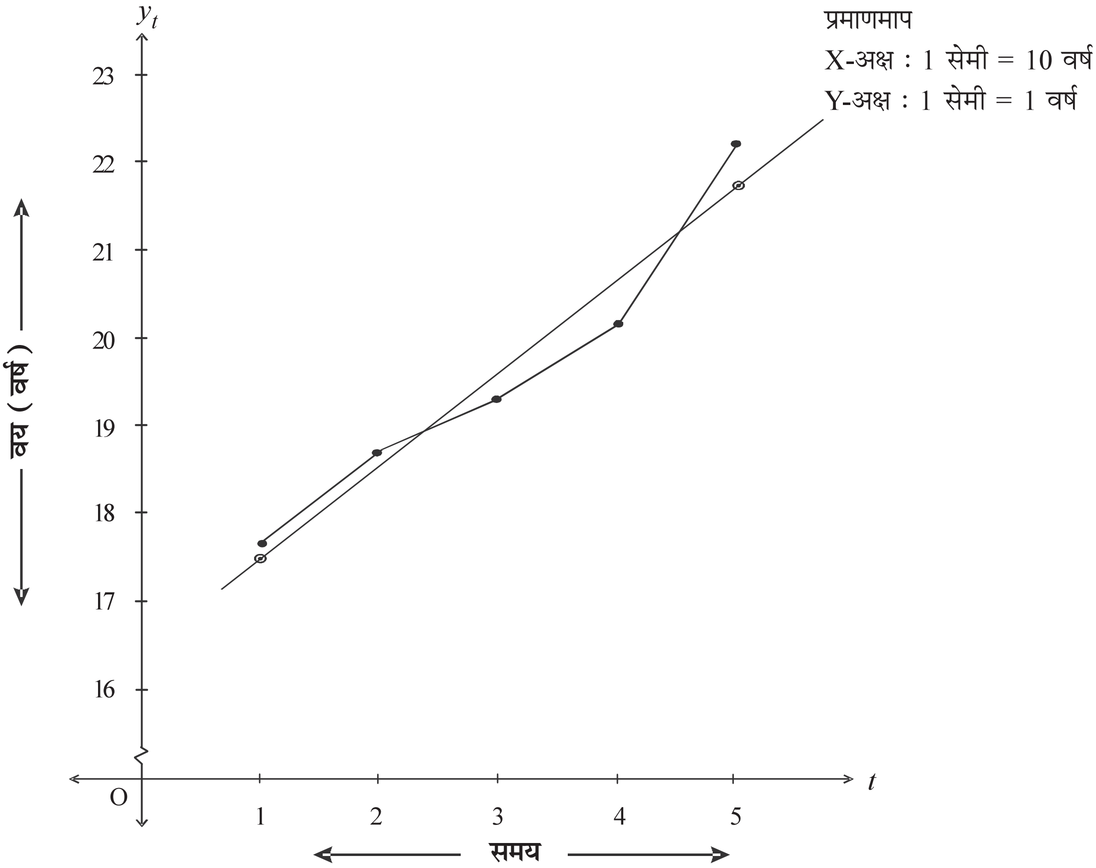
2. $\hat{y} = 447.2 + 69.4\,t$, वर्ष 2015-16 साठी $\hat{y} = 1071.8$

3. $\hat{y} = 57.12 + 9.06\,t$, वर्ष 2016 साठी $\hat{y} = 120.54$ हजार

   वर्ष 2017 साठी $\hat{y} = 129.6$ हजार

वर्ष	2010	2011	2012	2013	2014	2015
वलणाची अनुमानित किंमत (हजार वाहने)	66.18	75.24	84.3	93.36	102.42	111.48

4. $\hat{y} = 16.47 + 1.05\,t$, वर्ष 2021 साठी $\hat{y} = 22.77$ वर्ष



स्वाध्याय 4.3

1.

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
त्री वर्षीय चलित सरासरी	–	5	6	7	8	9	10	11	12	–

2.

मास	जाने	फेब्रू	मार्च	एप्रिल	मे	जून	जूलै	ऑगस्ट	सप्टे.	ओक्टो.	नव्हे.	डिसे.
चारमहिन्याची चलित सरासरी	–	–	274.88	280.38	273.88	263	265.38	269.25	272.63	275.88	–	–

3.

वर्ष	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
पाच वर्षीय चलित सरासरी	–	–	16.8	18.6	21.2	22.6	23.2	–	–

4.

वर्ष	2013				2014				2015			
त्रिमास	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
चारत्रिमासाची चलित सरासरी	–	–	124.38	134	143	150.88	153.25	148	141.63	136.88	–	–

स्वाध्याय 4

विभाग A

1. (c) **2.** (a) **3.** (b) **4.** (b) **5.** (c)

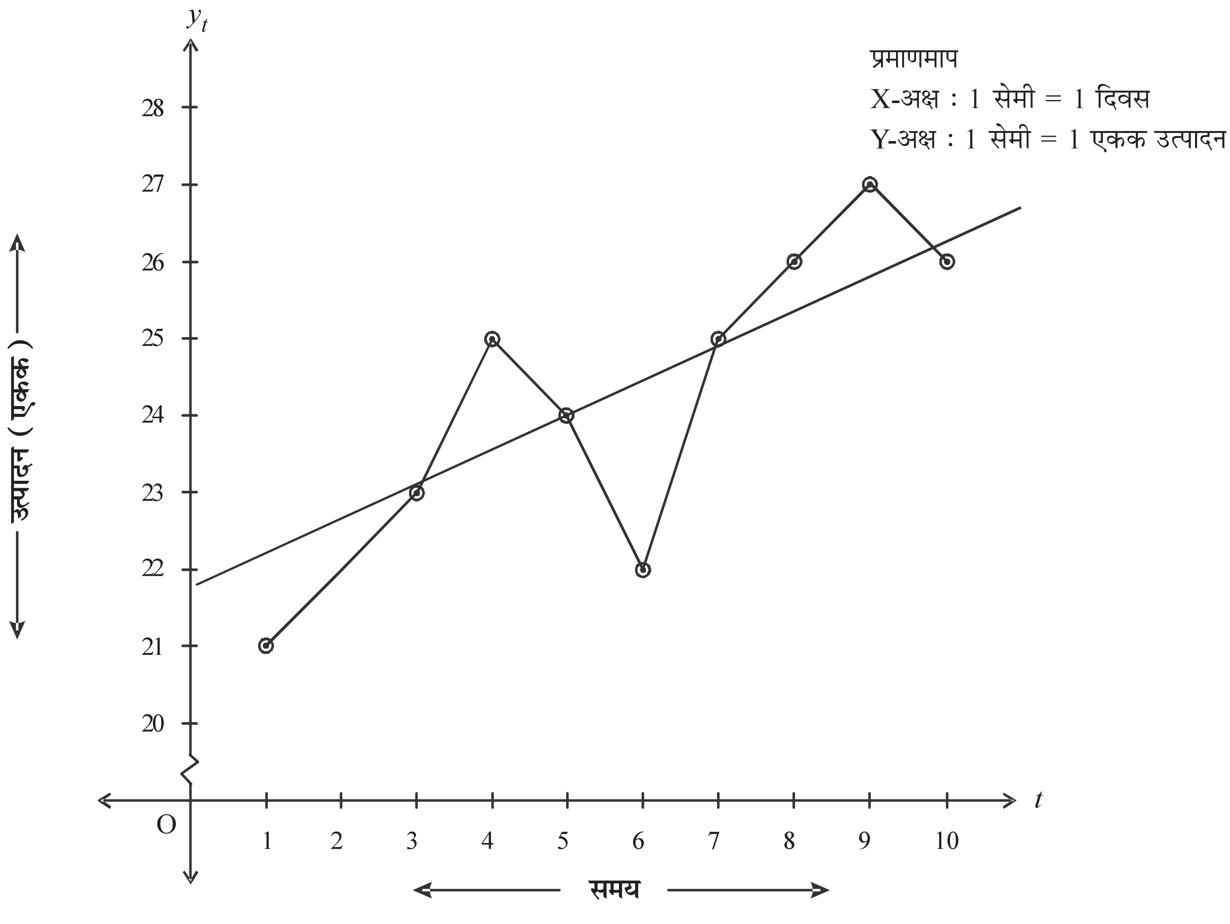
6. (a) **7.** (b) **8.** (c) **9.** (c) **10.** (d)

विभाग B

10. आठव्या आठवड्यासाठी $\hat{y} = 14.7$

विभाग D

9.



10 $\hat{y} = 38 + 11.8\,t$

11.

मास	जानेवारी	फेब्रुवारी	मार्च	एप्रिल	मे	जून	जूलै
तीन महिन्याची चलित सरासरी	–	16.33	17.33	19.67	21.33	22	–

विभाग E

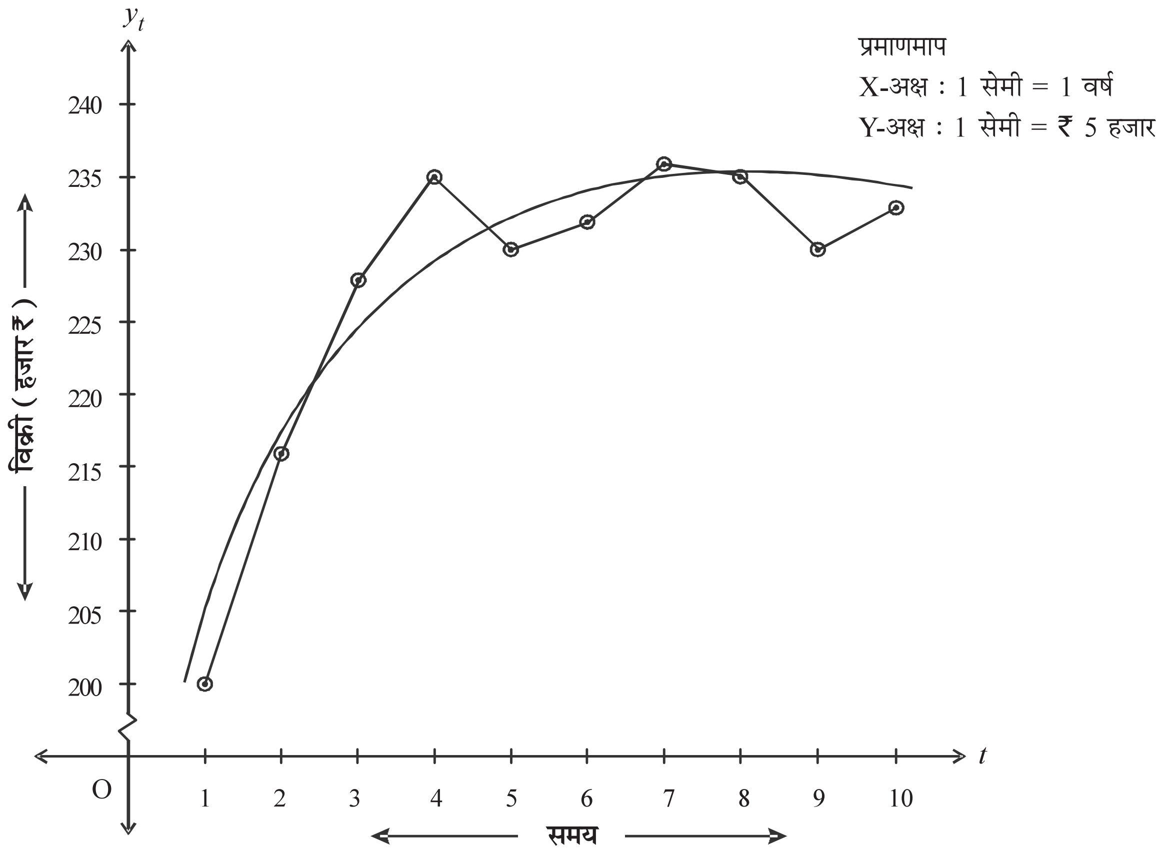
1. $\hat{y} = 23.19 + 0.09\,t$, वर्ष 2017 साठी $\hat{y} =$ 23.91 करोड

2. $\hat{y} = 49.1 - 2.1\,t$, वर्ष 2016 साठी $\hat{y} =$ 36.5 हजार

3.

मास	एप्रिल 2015	मे	जून	जूलै	आगस्ट	सप्टे.	ऑक्टो.	नव्हे.	डिसे.	जानेवारी 2016
तीन महिन्याची चलित सरासरी	–	71.33	68.67	66.67	65	63.33	63.33	65	66	–

4.



5.

वर्ष	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
पंचवर्षीय चलित सरासरी	–	–	118.4	119.2	119	118.8	118	119.4	120.6	–	–

विभाग F

1. $\hat{y} = 30.26 + 1.19\,t$, वर्ष 2016-17 साठी $\hat{y} =$ 39.78 करोड टन

वर्ष 2017-18 साठी $\hat{y} =$ 40.97 करोड टन

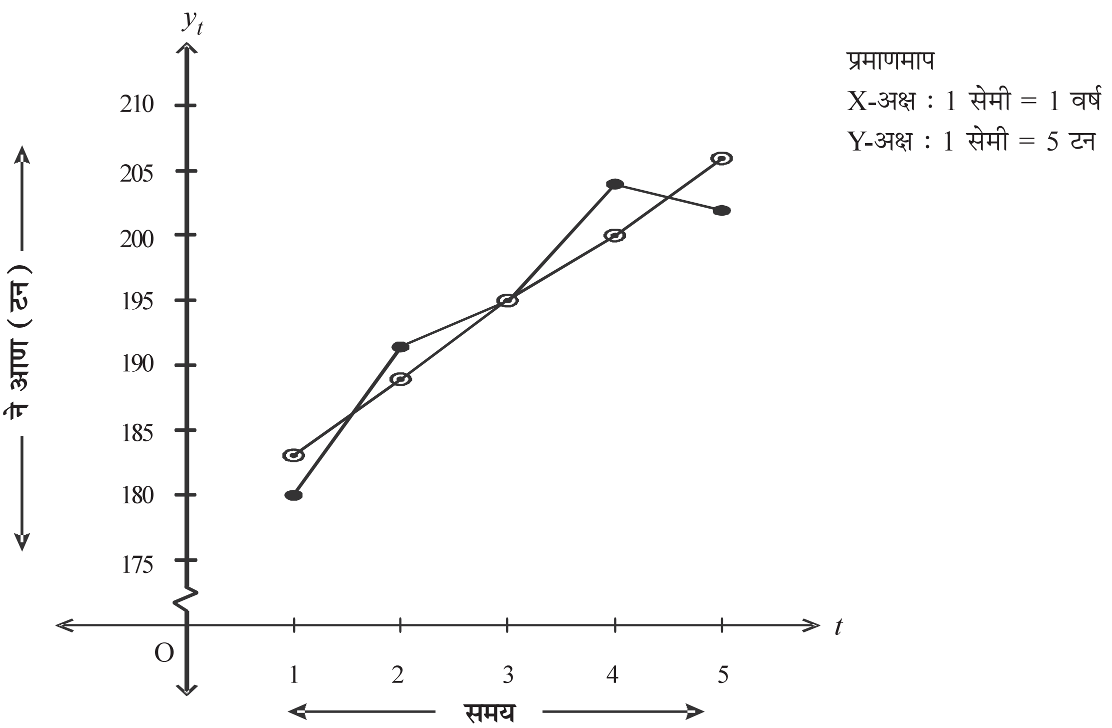
2.

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
चार वर्षीय चलित सरासरी	–	–	358.25	378	395.63	406.63	411.38	415.88	–	–

3. $\hat{y} = 22.55 - 0.39\,t$, वर्ष 2016 साठी $\hat{y} =$ 19.43 वर्ष 2017 साठी $\hat{y} =$ 19.04

4. $\hat{y} = 177.8 + 5.6\,t$, वर्ष 2016 साठी $\hat{y} =$ 211.4 टन

वर्ष	2011	2012	2013	2014	2015
वळणाची अनुमानित किंमत (टन)	183.4	189	194.6	200.2	205.8



5.

मास	मार्च				एप्रिल				मे			
सप्ताह	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
चार आठवडयाची चलित सरासरी	–	–	38.44	38.7	38.97	39.62	41.29	43.05	44.4	45.72	–	–

●●●