

ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1219/981/છ, તા. 31-01-2010 થી મંજૂર

ગણિત

નમૂનારૂપ પ્રશ્નો

ધોરણ X



પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.

બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.

હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને

વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.

હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.

હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ

અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.

હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.

તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

વિષય 5 નવમનવું



एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING



ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

© NCERT, નવી દિલ્લી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક NCERT, નવી દિલ્લી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને
હસ્તક છે. આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં NCERT, નવી દિલ્લી અને
ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
શ્રી હેમંત આર. શાહ
શ્રી નરેશ એમ. જાલોરીયા
શ્રી હિતેશકુમાર વી. પંડ્યા

સમીક્ષા

શ્રી ભક્તિભાઈ પી. પટેલ
ડૉ. હરેશ ભુટક
ડૉ. અતુલ વ્યાસ
ડૉ. જી. એફ. મહેતા
શ્રી કમલેશ એચ. ભટ્ટ
શ્રી યોગેશ એન. દેવલુક
ડૉ. પ્રવીણચંદ્ર પી. જોષી

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી વિજય ટી. પારેખ

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-સંયોજન

શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાયીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા તા. 25-10-2017ના ઠરાવ ક્રમાંક મશભ/1217/1036/છ થી શાળા કક્ષાએ NCERTના પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્લી દ્વારા પ્રકાશિત ધોરણ X ના ગણિત વિષયના EXEMPLAR PROBLEMS પુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ 'નમૂનારૂપ પ્રશ્નો' વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ નમૂનારૂપ પ્રશ્નોનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પુસ્તકને પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલા આ પુસ્તકની મંજૂરી માટે એક રાજ્ય સ્તરની સમિતિની રચના કરવામાં આવી. આ સમિતિની સાથે NCERTના પ્રતિનિધિ તરીકે RIE, ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની સાથે બેદિવસીય કાર્યશિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું, જેમાં ડૉ. એ. પી. શાહ, શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ, શ્રી નરેશ જાલોરીયા, શ્રી હેમંત શાહ, શ્રી હિતેશકુમાર પંડ્યા, શ્રી ઈન્દ્રવદન શાહ, શ્રી કમલેશ ભટ્ટ, ડૉ. હરેશ ભુટક, ડૉ. અશ્વની કુમાર ગર્ગ (આર. આઈ. ઈ., ભોપાલ), ડૉ. સુરેશ મકવાણા (આર. આઈ. ઈ., ભોપાલ) એ ઉપસ્થિત રહી પોતાના કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરા પાડ્યા છે.

પ્રસ્તુત પુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવામાં આવી છે. તેમ છતાં, શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્લીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

પી. ભારતી (IAS)

નિયામક

કાર્યવાહક પ્રમુખ

તા. 09-06-2020

ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2020

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી
પી. ભારતી, નિયામક

મુદ્રક :

FOREWORD

The National Curriculum Framework (NCF) – 2005 initiated a new phase of development of syllabi and textbooks for all stages of school education. Conscious effort has been made to discourage rote learning and to diffuse sharp boundaries between different subject areas. This is well in tune with the NPE – 1986 and Learning Without Burden- 1993 that recommend child centred system of education. The textbooks for Classes IX and XI were released in 2006 and for Classes X and XII in 2007. Overall the books have been well received by students and teachers.

NCF–2005 notes that treating the prescribed textbooks as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. It further reiterates that the methods used for teaching and evaluation will also determine how effective these textbooks proves for making children’s life at school a happy experience, rather than source of stress or boredom. It calls for reform in examination system currently prevailing in the country.

The position papers of the National Focus Groups on Teaching of Science, Teaching of Mathematics and Examination Reform envisage that the mathematics question papers, set in annual examinations conducted by the various Boards do not really assess genuine understanding of the subjects. The quality of question papers is often not up to the mark. They usually seek mere information based on rote memorization, and fail to test higher-order skills like reasoning and analysis, let along lateral thinking, creativity, and judgment. Good unconventional questions, challenging problems and experiment-based problems rarely find a place in question papers. In order to address to the issue, and also to provide additional learning material, the Department of Education in Science and Mathematics (DESM) has made an attempt to develop resource book of exemplar problems in different subjects at secondary and higher-secondary stages. Each resource book contains different types of questions of varying difficulty level. Some questions

would require the students to apply simultaneously understanding of more than one chapters/units. These problems are not meant to serve merely as question bank for examinations but are primarily meant to improve the quality of teaching/learning process in schools. It is expected that these problems would encourage teachers to design quality questions on their own. Students and teachers should always keep in mind that examination and assessment should test comprehension, information recall, analytical thinking and problem-solving ability, creativity and speculative ability.

A team of experts and teachers with an understanding of the subject and a proper role of examination worked hard to accomplish this task. The material was discussed, edited and finally included in this source book.

NCERT will welcome suggestions from students, teachers and parents which would help us to further improve the quality of material in subsequent editions.

New Delhi
21 May 2008

Professor Yash Pal
Chairperson
National Steering Committee
National Council of Educational
Research and Training

PREFACE

The Department of Education in Science and Mathematics (DESM), National Council of Educational Research and Training (NCERT), initiated the development of ‘Exemplar Problems’ in science and mathematics for secondary and higher secondary stages after completing the preparation of textbooks based on National Curriculum Framework–2005.

The main objective of the book on ‘Exemplar Problems in Mathematics’ is to provide the teachers and students a large number of quality problems with varying cognitive levels to facilitate teaching learning of concepts in mathematics that are presented through the textbook for Class X. It is envisaged that the problems included in this volume would help the teachers to design tasks to assess effectiveness of their teaching and to know about the achievement of their students besides facilitating preparation of balanced question papers for unit and terminal tests. The feedback based on the analysis of students’ responses may help the teachers in further improving the quality of classroom instructions. In addition, the problems given in this book are also expected to help the teachers to perceive the basic characteristics of good quality questions and motivate them to frame similar questions on their own. Students can benefit themselves by attempting the exercises given in the book for self assessment and also in mastering the basic techniques of problem solving. Some of the questions given in the book are expected to challenge the understanding of the concepts of mathematics of the students and their ability to applying them in novel situations.

The problems included in this book were prepared through a series of workshops organised by the DESM for their development and refinement involving practicing teachers, subject experts from universities and institutes of higher learning, and the members of the mathematics group of the DESM whose names appear separately. We gratefully acknowledge their efforts and thank them for their valuable contribution in our endeavour to provide good quality instructional material for the school system.

I express my gratitude to Professor Krishna Kumar, Director and Professor

G. Ravindra, Joint Director, NCERT for their valuable motivation and guidance from time to time. Special thanks are also due to Dr. R.P.Maurya, Reader in Mathematics, DESM for coordinating the programme, taking pains in editing and refinement of problems and for making the manuscript pressworthy.

We look forward to feedback from students, teachers and parents for further improvement of the contents of this book.

Hu kum Singh
Professor and Head

DEVELOPMENT TEAM

EXEMPLAR PROBLEMS – MATHEMATICS

MEMBERS

B.S. Upadhyaya, *Profesor*, RIE, Mysore

G. P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Hukum Singh, *Professor and Head*, DESM, NCERT, New Delhi

J.C. Nijhawan, *Principal* (Retd.), Directorate of Education, Delhi

Mahendra Shankar, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), DESM, NCERT, New Delhi

P. Sinclair, *Professor and Pro Vice Chancellor*, IGNOU, New Delhi

P.K. Tiwari, *Assistant Commissioner* (Retd.), K.V. Sangathan, New Delhi

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT, New Delhi

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, DESM, NCERT, New Delhi

Vandita Kalra, *Lecturer*, Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri, New Delhi

V. Madhvi, T.G.T., Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi

V.P. Singh, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBER - COORDINATOR

R.P. Maurya, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Exemplar Problems Workshop:

Mohammad Qasim, TGT, Anglo Arabic Senior Secondary School, Ajmeri Gate, Delhi; Ajay Kumar Singh, TGT, Ramjas Senior Secondary School No. 3, Chandani Chowk, Delhi; Jharna De, TGT, Dev Samaj Higher Secondary School, Nehru Nagar, New Delhi; Shailja Tiwari, PGT, K.V., NSG Campus, Manesar, Gurgaon, Haryana and Rashmi Bhartiya, TGT, DPS, Mathura Road, New Delhi,

Special thanks are due to Professor Hukum Singh, Head, DESM, NCERT for his support during the development of this book.

The Council also acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, Incharge, Computer Station; Mrs. Praveen, Rakesh Kumar, Ishwar Singh and Narender Verma, DTP Operators; Abhimanu Mohanty, Proof Reader.

The contribution of APC Office, Administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

અનુક્રમણિકા

FOREWORD			iii
PREFACE			v
પ્રકરણ	1	વાસ્તવિક સંખ્યાઓ	1
પ્રકરણ	2	બહુપદીઓ	7
પ્રકરણ	3	દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ	13
પ્રકરણ	4	દ્વિઘાત સમીકરણ	27
પ્રકરણ	5	સમાંતર શ્રેણી	34
પ્રકરણ	6	ત્રિકોણ	44
પ્રકરણ	7	યામભૂમિતિ	56
પ્રકરણ	8	ત્રિકોણમિતિનો પરિચય અને તેના ઉપયોગો	64
પ્રકરણ	9	વર્તુળ	75
પ્રકરણ	10	રચનાઓ	83
પ્રકરણ	11	વર્તુળ સંબંધિત ક્ષેત્રફળ	88
પ્રકરણ	12	પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ	100
પ્રકરણ	13	આંકડાશાસ્ત્ર અને સંભાવના	113
		પ્રશ્નપત્રનું પરિરૂપ, સેટ-I, , સેટ-II (CBSE)	136
		પ્રશ્નપત્રનું પરિરૂપ, (GSEB)	161
		જવાબો	168

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a **SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC** and to secure to all its citizens :

JUSTICE, social, economic and political;

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation;

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949, do **HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.**

વાસ્તવિક સંખ્યાઓ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- **યુક્લિડનું ભાગાકારનું પૂર્વપ્રમેય :** આપેલ ધન પૂર્ણાંકો a અને b ને સંગત $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ નું સમાધાન કરે તેવી અનન્ય પૂર્ણ સંખ્યાઓ q અને r નું અસ્તિત્વ છે. (q તથા r બંને સાથે શૂન્ય નહિ.)
- $c > d$ હોય તેવા કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંકો c અને d નો ગુ.સા.અ. શોધવા માટેની **યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિ :**
સોપાન 1 : યુક્લિડના ભાગાકાર પૂર્વપ્રમેયનો c અને d ઉપર ઉપયોગ કરતાં આપણને $c = dq + r$, $0 \leq r < d$ થાય તેવી પૂર્ણ સંખ્યાઓ q અને r મળે.
સોપાન 2 : જો $r = 0$, તો c અને d નો ગુ.સા.અ. d છે. જો $r \neq 0$ તો ભાગાકારના પૂર્વ પ્રમેયનો ઉપયોગ d અને r માટે કરો.
સોપાન 3 : આ પ્રક્રિયા જ્યાં સુધી શેષ 0 ન મળે ત્યાં સુધી ચાલુ રાખો. શેષ 0 થાય તે તબક્કે ભાજક એ ગુ.સા.અ. થાય.
- **અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય :** દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય છે.
- ધારો કે p એક અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. ધન પૂર્ણાંક a માટે જો a^2 એ p વડે વિભાજ્ય હોય, તો a પણ p વડે વિભાજ્ય હોય.
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ વગેરે અસંમેય સંખ્યાઓ છે.
- સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા કે તફાવત અસંમેય હોય છે.
- શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યાઓ અને અસંમેય સંખ્યાઓના ગુણાકાર અને ભાગાકાર અસંમેય હોય છે.
- કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંકો a અને b માટે, ગુ.સા.અ. $(a, b) \times$ લ.સા.અ. $(a, b) = a \times b$.

- p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો હોય તેવી સાન્ત દશાંશ નિરૂપણવાળી સંમેય સંખ્યા $x = \frac{p}{q}$ માં q નું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ $2^m 5^n$ સ્વરૂપમાં હશે. m અને n અનૂણ પૂર્ણાંકો છે અને બંને સાથે શૂન્ય નથી. q ધન છે.
- જો અનૂણ પૂર્ણાંકો m, n માટે q નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $2^m 5^n$ સ્વરૂપમાં ન હોય, તો તેવી સંમેય સંખ્યા $x = \frac{p}{q}$ નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અને આવૃત્ત હોય.

નીચેનાં ક્રમાંક 1 તથા 2 વાળાં વિધાનો સત્ય અને તેમ આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 1 : $\frac{33}{2^2 \cdot 5}$ નું દશાંશ વિસ્તરણ પછી સાન્ત થશે.

- (A) એક દશાંશ સ્થળ (B) બે દશાંશ સ્થળ (C) ત્રણ દશાંશ સ્થળ (D) ચાર દશાંશ સ્થળ

ઉકેલ : ઉત્તર (B)

ઉદાહરણ 2 : યુક્લિડના ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેય અનુસાર આપેલ ધન પૂર્ણાંક a અને b ને સંગત અનન્ય અનૂણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ q અને r એવી મળે કે જેથી $a = bq + r$, જ્યાં

- (A) $1 < r < b$ (B) $0 < r \leq b$ (C) $0 \leq r < b$ (D) $0 < r < b$

ઉકેલ : ઉત્તર (C)

સ્વાધ્યાય 1.1

નીચેનાં ક્રમાંક 1 થી 10 વાળાં વિધાનો સત્ય અને તેમ આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો :

1. પ્રત્યેક યુગ્મ પૂર્ણાંક કોઈક પૂર્ણાંક સંખ્યા m માટે સ્વરૂપમાં હોય.

- (A) m (B) $m + 1$ (C) $2m$ (D) $2m + 1$

2. પ્રત્યેક અયુગ્મ પૂર્ણાંક કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યા q માટે સ્વરૂપમાં હોય.

- (A) q (B) $q + 1$ (C) $2q$ (D) $2q + 1$

3. જો n એ હોય, તો $n^2 - 1$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.

- (A) પૂર્ણાંક સંખ્યા (B) પ્રાકૃતિક સંખ્યા (C) અયુગ્મ પૂર્ણાંક (D) યુગ્મ પૂર્ણાંક સંખ્યા

4. 65 અને 117 ના ગુ.સા.અ. ને $65m - 117$ સ્વરૂપમાં દર્શાવીએ તો $m = \dots\dots\dots$ છે.

- (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

5. એવી મહત્તમ સંખ્યા કે જેના વડે 70 અને 125 ને ભાગતાં શેષ અનુક્રમે 5 અને 8 મળે, તે છે.

- (A) 13 (B) 65 (C) 875 (D) 1750

6. જો બે ધન પૂર્ણાંકો a અને b ને $a = x^3y^2$ અને $b = xy^3$; સ્વરૂપમાં દર્શાવીએ, જ્યાં x અને y અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો છે, તો ગુ.સા.અ. $(a, b) = \dots\dots\dots$
- (A) xy (B) xy^2 (C) x^3y^3 (D) x^2y^2
7. જો બે ધન પૂર્ણાંકો p અને q ને $p = ab^2$ અને $q = a^3b$; સ્વરૂપમાં દર્શાવીએ, જ્યાં a અને b અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો છે, તો લ.સા.અ. $(p, q) = \dots\dots\dots$
- (A) ab (B) a^2b^2 (C) a^3b^2 (D) a^3b^3
8. શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર $\dots\dots\dots$ છે.
- (A) હંમેશાં અસંમેય (B) હંમેશાં સંમેય
(C) સંમેય અથવા અસંમેય (D) એક
9. જેને 1 થી 10 સુધીના પૂર્ણાંકો વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય એવો ન્યૂનતમ ધન પૂર્ણાંક $\dots\dots\dots$ છે.
- (A) 10 (B) 100 (C) 504 (D) 2520
10. $\frac{14587}{1250}$ નું દશાંશ વિસ્તરણ $\dots\dots\dots$ પછી સાન્ત થશે.
- (A) એક દશાંશ સ્થળ (B) બે દશાંશ સ્થળ
(C) ત્રણ દશાંશ સ્થળ (D) ચાર દશાંશ સ્થળ

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : ધન પૂર્ણાંક a ને 3 વડે ભાગતાં શેષ ફક્ત 0 અથવા 1 મળી શકે. તમારા ઉત્તરની સત્યાર્થતા ચકાસો.

ઉકેલ : અસત્ય છે.

યુક્લિડના ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેય અનુસાર

$$a = 3q + r, \text{ જ્યાં } 0 \leq r < 3$$

અને r એક પૂર્ણાંક છે. માટે r નું મૂલ્ય 0, 1 અથવા 2 હોય.

ઉદાહરણ 2 : પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે, સંખ્યા 6^n નો છેલ્લો અંક 5 હોઈ શકે ? કારણ આપો.

ઉકેલ : ના, કારણ કે, $6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$,

તેથી 6^n ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં અવિભાજ્ય અવયવો માત્ર 2 અને 3 છે, નહિ કે 5.

આમ, છેલ્લો અંક 5 નહિ હોય.

નોંધ : છેલ્લો અંક 5 હોવા માટે આપેલ સંખ્યાનો એક અવિભાજ્ય અવયવ 5 હોવો આવશ્યક છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક, પૂર્ણાંક સંખ્યા q માટે $4q + 2$ સ્વરૂપમાં જ હોય. સત્યાર્થતા ચકાસો.
2. “બે ક્રમિક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 2 વડે વિભાજ્ય છે.” આપેલ વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય ? કારણ આપો.
3. “ત્રણ ક્રમિક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 6 વડે વિભાજ્ય છે.” આપેલ વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય ? તમારા ઉત્તરની સત્યાર્થતા ચકાસો.
4. કોઈ ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે, $3m + 2$ સ્વરૂપનો હશે ? તમારા ઉત્તરની સત્યાર્થતા ચકાસો.
5. કોઈ ધન પૂર્ણાંક પ્રાકૃતિક સંખ્યા q માટે $3q + 1$ સ્વરૂપમાં છે. શું આ સંખ્યાના વર્ગને $3m + 1$ સિવાયના સ્વરૂપે જેમ કે, $3m$ અથવા $3m + 2$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય ? તમારા ઉત્તરની સત્યાર્થતા ચકાસો.

6. જો સંખ્યાઓ 525 અને 3000 બંને 3, 5, 15, 25 અને 75 થી વિભાજ્ય હોય, તો ગુ.સા.અ. (525, 3000) શોધો. તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.
7. સ્પષ્ટ કરો કે $3 \times 5 \times 7 + 7$ એ શા માટે વિભાજ્ય સંખ્યા છે ?
8. શું કોઈ બે સંખ્યાઓનો ગુ.સા.અ. 18 અને લ.સા.અ. 380 શક્ય છે ? કારણ આપો.
9. ભાગાકારની લાંબી પ્રક્રિયા કર્યા વિના જણાવો કે $\frac{987}{10500}$ નું દશાંશ વિસ્તરણ સાન્ત છે કે અનંત અને આવૃત છે. તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.
10. એક સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ 327.7081 છે. જો આ સંખ્યાને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવવામાં આવે, તો q ના અવિભાજ્ય અવયવો વિશે શું કહી શકાય ? કારણ આપો.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી જણાવો કે નીચે આપેલ સંખ્યાઓની જોડમાં કઈ જોડ પરસ્પર અવિભાજ્ય છે :

- (i) 231, 396 (ii) 847, 2160

ઉકેલ : ચાલો આપણે પ્રત્યેક જોડનો ગુ.સા.અ. શોધીએ.

- (i) $396 = 231 \times 1 + 165$
 $231 = 165 \times 1 + 66$
 $165 = 66 \times 2 + 33$
 $66 = 33 \times 2 + 0$

આમ, ગુ.સા.અ. 33 મળે છે. માટે આપેલ સંખ્યાઓ પરસ્પર અવિભાજ્ય નથી.

- (ii) $2160 = 847 \times 2 + 466$
 $847 = 466 \times 1 + 381$
 $466 = 381 \times 1 + 85$
 $381 = 85 \times 4 + 41$
 $85 = 41 \times 2 + 3$
 $41 = 3 \times 13 + 2$
 $3 = 2 \times 1 + 1$
 $2 = 1 \times 2 + 0$

આમ, ગુ.સા.અ. 1 મળે છે. માટે આપેલ સંખ્યાઓ પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ કોઈ પૂર્ણ સંખ્યા m માટે, $8m + 1$ સ્વરૂપનો હોય છે.

ઉકેલ : કોઈ પણ ધન અયુગ્મ પૂર્ણાંક સંખ્યા $2q + 1$ સ્વરૂપમાં હોય છે, જ્યાં q એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

$$\text{માટે, } (2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4q(q + 1) + 1, \quad (1)$$

હવે, $q(q + 1)$ એ યુગ્મ સંખ્યા હશે. તેથી તેને પૂર્ણ સંખ્યા m માટે, $2m$ તરીકે દર્શાવી શકાય છે.

$$\text{માટે, } (2q + 1)^2 = 4 \cdot 2m + 1 = 8m + 1. \quad [\text{પરિણામ (1) પરથી}]$$

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ અસંમેય છે.

ઉકેલ : ચાલો, આપણે ધારીએ કે $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ સંમેય છે. ધારો કે $\sqrt{2}+\sqrt{3} = a$, જ્યાં a સંમેય સંખ્યા છે.

માટે, $\sqrt{2} = a - \sqrt{3}$

બંને બાજુનો વર્ગ કરતાં, આપણને

$$2 = a^2 + 3 - 2a\sqrt{3} \text{ મળશે.}$$

માટે, $\sqrt{3} = \frac{a^2+1}{2a}$, આ એક વિરોધાભાસ છે કારણ કે જમણી બાજુએ સંમેય સંખ્યા છે, ડાબી બાજુએ $\sqrt{3}$ અસંમેય સંખ્યા છે. આમ, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ અસંમેય છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. સાબિત કરો કે, કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ એ કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યા q માટે $4q$ અથવા $4q + 1$ સ્વરૂપનો હોય છે.
2. સાબિત કરો કે, કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો ઘન એ કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યા m માટે $4m$ અથવા $4m + 1$ અથવા $4m + 3$ સ્વરૂપનો હોય છે.
3. સાબિત કરો કે, કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ એ કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યા q માટે $5q + 2$ અથવા $5q + 3$ સ્વરૂપમાં ન હોય.
4. સાબિત કરો કે, કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ એ કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યા m માટે $6m + 2$ અથવા $6m + 5$ સ્વરૂપમાં ન હોય.
5. સાબિત કરો કે, કોઈ પણ અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યા q માટે $4q + 1$ સ્વરૂપનો હોય છે.
6. સાબિત કરો કે, n એ અયુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો $n^2 - 1$ એ 8 વડે વિભાજ્ય છે.
7. સાબિત કરો કે, જો x અને y એ બંને અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય, તો $x^2 + y^2$ એ યુગ્મ છે, પરંતુ 4 વડે વિભાજ્ય નથી.
8. યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી, 441, 567 અને 693 નો ગુ.સા.અ. શોધો.
9. યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી, એવી મહત્તમ સંખ્યા શોધો કે જેના વડે 1251, 9377 અને 15628 ને ભાગતાં શેષ અનુક્રમે 1, 2 અને 3 મળે.
10. સાબિત કરો કે, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ અસંમેય છે.
11. દર્શાવો કે, કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે 12^n નો છેલ્લો અંક 0 અથવા 5 ન હોય.
12. ત્રણ વ્યક્તિઓ સવારે સાથે ચાલવાનું શરૂ કરે છે. તેમનાં પગલાંનાં માપ અનુક્રમે 40 સેમી, 42 સેમી અને 45 સેમી છે. દરેક વ્યક્તિ પૂર્ણ સંખ્યામાં પગલાં પાડે અને એકબીજાને મળે તે માટે ઓછામાં ઓછું કેટલું અંતર કાપવું જોઈએ?
13. સંમેય સંખ્યા $\frac{257}{5000}$ ના છેદને $2^m \times 5^n$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો, જ્યાં m અને n અનૂણ સંખ્યા છે. તે પરથી, ભાગાકાર કર્યા વિના તેનું દશાંશ નિરૂપણ લખો.
14. સાબિત કરો કે, જો p અને q અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ હોય તો $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ અસંમેય સંખ્યા છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે, અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યા q માટે $6q + 1$ અથવા $6q + 3$ સ્વરૂપમાં હોય છે.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે,

કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા અનૃણ પૂર્ણાંક m માટે, $6m, 6m + 1, 6m + 2, 6m + 3, 6m + 4$ અથવા $6m + 5$ સ્વરૂપમાં હોય છે. ($6m$ માટે $m \neq 0$)

આમ, અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા $6m + 1, 6m + 3$ અથવા $6m + 5$ સ્વરૂપે હોય.

આમ, આપણને

$$(6m + 1)^2 = 36m^2 + 12m + 1 = 6(6m^2 + 2m) + 1 = 6q + 1, \text{ જ્યાં } q \text{ પૂર્ણાંક છે.}$$

$$(6m + 3)^2 = 36m^2 + 36m + 9 = 6(6m^2 + 6m + 1) + 3 = 6q + 3, \text{ જ્યાં } q \text{ પૂર્ણાંક છે.}$$

$$(6m + 5)^2 = 36m^2 + 60m + 25 = 6(6m^2 + 10m + 4) + 1 = 6q + 1, \text{ જ્યાં } q \text{ પૂર્ણાંક છે.}$$

આમ, ધન પૂર્ણાંકનો વર્ગ $6q + 1$ અથવા $6q + 3$ સ્વરૂપનો હોય.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. સાબિત કરો કે, $6q + r$ સ્વરૂપની કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ધન $6m + r$ સ્વરૂપનો હોય, જ્યાં q પૂર્ણાંક સંખ્યા છે અને $r = 0, 1, 2, 3, 4$ અથવા 5 છે.
2. સાબિત કરો કે, જો n કોઈ ધન પૂર્ણાંક હોય તો $n, n + 2$ અને $n + 4$ પૈકી કોઈ એક જ 3 વડે વિભાજ્ય છે.
3. સાબિત કરો કે, ત્રણ ક્રમિક ધન પૂર્ણાંકો પૈકી કોઈ એક 3 વડે વિભાજ્ય હોય જ.
4. સાબિત કરો કે, જો n કોઈ ધન પૂર્ણાંક હોય, તો $n^3 - n$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.
5. સાબિત કરો કે, જો n કોઈ ધન પૂર્ણાંક હોય, તો $n, n + 4, n + 8, n + 12$ અને $n + 16$ પૈકી કોઈ એક જ 5 વડે વિભાજ્ય હોય છે.

[સૂચન : કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંકને $5q, 5q+1, 5q+2, 5q+3, 5q+4$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય.]



બહુપદીઓ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- **બહુપદીનાં શૂન્યોનો ભૌમિતિક અર્થ :** બહુપદી $y = p(x)$ નો આલેખ x -અક્ષને જે બિંદુઓએ છેદે છે તે બિંદુઓના x -યામ એ બહુપદી $p(x)$ નાં શૂન્યો છે.
- **બહુપદીઓનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ :** જો α અને β દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો હોય, તો $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.
- જો α , β અને γ ત્રિઘાત બહુપદી $ax^3 + bx^2 + cx + d$ નાં શૂન્યો હોય, તો $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$,
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$ અને $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$.
- ભાગપ્રવિધિ પ્રમાણે આપેલી કોઈ બહુપદી $p(x)$ અને કોઈ શૂન્યેતર બહુપદી $g(x)$ ને સંગત બહુપદીઓ $q(x)$ અને $r(x)$ એવી મળે કે જેથી $p(x) = g(x)q(x) + r(x)$, જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ ની ઘાત $< g(x)$ ની ઘાત.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 અને 2 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : જો દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + 3x + k$ નું એક શૂન્ય 2 હોય, તો k ની કિંમત છે.

(A) 10

(B) -10

(C) 5

(D) -5

ઉકેલ : $p(x) = x^2 + 3x + k$

$$p(2) = (2)^2 + 3(2) + k$$

$$\therefore 0 = 4 + 6 + k$$

$$\therefore 0 = 10 + k$$

$$\therefore -10 = k$$

ઉત્તર (B)

ઉદાહરણ 2 : ત્રિઘાત બહુપદી $ax^3 + bx^2 + cx + d$ નાં બે શૂન્યો 0 છે તેમ આપેલ છે, તો ત્રીજું શૂન્ય છે.

- (A) $\frac{-b}{a}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{c}{a}$ (D) $-\frac{d}{a}$

ઉકેલ : ઉત્તર (A). [સૂચન : કારણ કે, જો ત્રીજું શૂન્ય α હોય, તો શૂન્યોનો સરવાળો = $\alpha + 0 + 0 = \frac{-b}{a}$]

સ્વાધ્યાય 2.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 11 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. જો દ્વિઘાત બહુપદી $(k-1)x^2 + kx + 1$ નું એક શૂન્ય -3 હોય, તો k ની કિંમત

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{-4}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{-2}{3}$

2. જેનાં શૂન્યો -3 અને 4 હોય એવી એક દ્વિઘાત બહુપદી છે.

- (A) $x^2 - x + 12$ (B) $x^2 + x + 12$
(C) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 6$ (D) $2x^2 + 2x - 24$

3. જો દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + (a+1)x + b$ નાં શૂન્યો 2 અને -3 હોય, તો

- (A) $a = -7, b = -1$ (B) $a = 5, b = -1$
(C) $a = 2, b = -6$ (D) $a = 0, b = -6$

4. જેનાં શૂન્યો -2 અને 5 હોય તેવી બહુપદીઓની સંખ્યા છે.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 3 થી વધુ

5. ત્રિઘાત બહુપદી $ax^3 + bx^2 + cx + d$ નું કોઈ એક શૂન્ય 0 છે, તો બીજાં બે શૂન્યોનો ગુણાકાર છે.

- (A) $-\frac{c}{a}$ (B) $\frac{c}{a}$ (C) 0 (D) $-\frac{b}{a}$

6. જો ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 + ax^2 + bx + c$ નું કોઈ એક શૂન્ય -1 હોય, તો બીજાં બે શૂન્યોનો ગુણાકાર

- (A) $b - a + 1$ (B) $b - a - 1$ (C) $a - b + 1$ (D) $a - b - 1$

7. દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + 99x + 127$ નાં શૂન્યો

- (A) બંને ધન (B) બંને ઋણ
(C) એક ધન અને એક ઋણ (D) બંને સમાન

8. દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + kx + k, k \neq 0$ નાં શૂન્યો

- (A) બંને ધન ન હોઈ શકે (B) બંને ઋણ ન હોઈ શકે
(C) હંમેશાં અસમાન હોય (D) હંમેશાં સમાન હોય

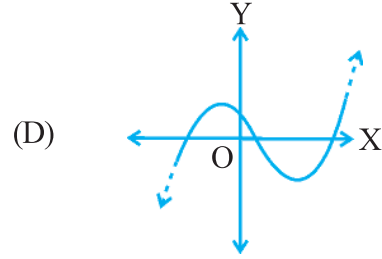
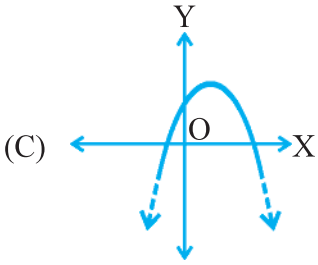
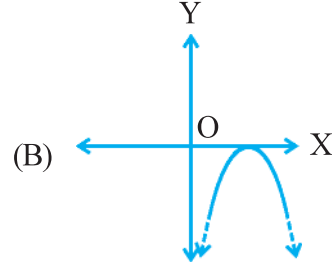
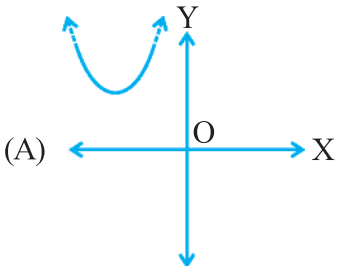
9. જો દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$, $c \neq 0$ નાં શૂન્યો સમાન હોય, તો

- (A) c અને a ની નિશાની અસમાન હોય. (B) c અને b ની નિશાની અસમાન હોય.
 (C) c અને a ની નિશાની સમાન હોય. (D) c અને b ની નિશાની સમાન હોય.

10. જો $x^2+ax + b$ ના સ્વરૂપની દ્વિઘાત બહુપદીનું કોઈ એક શૂન્ય બીજા શૂન્યની વિરોધી સંખ્યા હોય, તો

- (A) તેને સુરેખ પદ ન હોય અને અચળ પદ ઋણ હોય. (B) તેને સુરેખ પદ ન હોય અને અચળ પદ ધન હોય.
 (C) તેને સુરેખ પદ હોય પરંતુ અચળ પદ ઋણ હોય. (D) તેને સુરેખ પદ હોય, પરંતુ અચળ પદ ધન હોય.

11. નીચેનામાંથી કયો આલેખ દ્વિઘાત બહુપદીનો નથી :



કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : બહુપદી $p(x)$ ને $2x + 3$ વડે ભાગતાં શેષ $x - 1$ હોઈ શકે ? તમારા ઉત્તરની સત્યાર્થતા ચકાસો.

ઉકેલ : ના, કારણ કે $(x - 1)$ ની ઘાત = 1 = $(2x + 3)$ ની ઘાત. શેષની ઘાત $2x + 3$ ની ઘાત કરતાં ઓછી હોય અથવા શૂન્ય હોય.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનું વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય ? તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

જો દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં બંને શૂન્યો ઋણ હોય, તો a , b અને c તમામની નિશાની સમાન હોય.

ઉકેલ : સત્ય, કારણ કે $-\frac{b}{a}$ = શૂન્યોનો સરવાળો < 0 , તેથી $\frac{b}{a} > 0$. વળી, શૂન્યોનો ગુણાકાર = $\frac{c}{a} > 0$.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો અને સત્યાર્થતા ચકાસો :

- (i) 5 ઘાતવાળી x પરની બહુપદી વડે $x^6 + 2x^3 + x - 1$ ને ભાગતાં ભાગફળ $x^2 - 1$ હોઈ શકે ?
 (ii) $ax^2 + bx + c$ ને $px^3 + qx^2 + rx + s$, $p \neq 0$ વડે ભાગતાં, ભાગફળ અને શેષ શું હોઈ શકે ?
 (iii) જો બહુપદી $p(x)$ ને બહુપદી $g(x)$ વડે ભાગતાં, ભાગફળ શૂન્ય હોય, તો $p(x)$ અને $g(x)$ ની ઘાત વચ્ચેનો સંબંધ શું હોય ?

(iv) જો એક શૂન્યેતર બહુપદી $p(x)$ ને બહુપદી $g(x)$ વડે ભાગતાં શેષ શૂન્ય હોય, તો $p(x)$ અને $g(x)$ ની ઘાત વચ્ચેનો સંબંધ શું હોય ?

(v) જો k એ 1 થી મોટો અયુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + kx + k$ નાં શૂન્યો સમાન હોઈ શકે ?

2. નીચેનાં વિધાનો સત્ય કે અસત્ય છે ? તમારા ઉત્તરો ચકાસો.

(i) જો દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં બંને શૂન્યો ધન હોય, તો a , b અને c તમામની નિશાની સમાન હોય.

(ii) જો બહુપદીનો આલેખ x -અક્ષને ફક્ત એક બિંદુમાં છેદે, તો તે દ્વિઘાત બહુપદી ન હોઈ શકે.

(iii) જો બહુપદીનો આલેખ x -અક્ષને બરાબર બે બિંદુઓમાં છેદે, તો તે દ્વિઘાત બહુપદી હોય તે જરૂરી નથી.

(iv) જો ત્રિઘાત બહુપદીનાં બે શૂન્યો 0 હોય, તો તેને સુરેખ અને અચળ પદો ન હોય.

(v) જો એક ત્રિઘાત બહુપદીનાં તમામ શૂન્યો ઋણ હોય, તો તે બહુપદીના તમામ સહગુણકો અને અચળ પદની નિશાની સમાન હોય.

(vi) જો ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 + ax^2 - bx + c$ નાં તમામ શૂન્યો ધન હોય, તો a , b અને c માંથી ઓછામાં ઓછું એક અનૂણ હોય.

(vii) k ના મૂલ્ય $\frac{1}{2}$ માટે દ્વિઘાત બહુપદી $kx^2 + x + k$ નાં શૂન્યો સમાન છે.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : બહુપદી $x^2 + \frac{1}{6}x - 2$ નાં શૂન્યો શોધો અને બહુપદીના સહગુણકો તથા શૂન્યો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : } x^2 + \frac{1}{6}x - 2 &= \frac{1}{6} (6x^2 + x - 12) \\ &= \frac{1}{6} [(6x^2 + 9x - 8x - 12)] \\ &= \frac{1}{6} [3x(2x + 3) - 4(2x + 3)] \\ &= \frac{1}{6} (3x - 4)(2x + 3) \end{aligned}$$

તેથી, $\frac{4}{3}$ અને $-\frac{3}{2}$ આપેલી બહુપદીનાં શૂન્યો છે.

આપેલી બહુપદી $x^2 + \frac{1}{6}x - 2$ છે.

$$\text{શૂન્યોનો સરવાળો} = \frac{4}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{6} = -\frac{x \text{ નો સહગુણક}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}} \text{ અને}$$

$$\text{શૂન્યોનો ગુણાકાર} = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -2 = \frac{\text{અચળ પદ}}{x^2 \text{ નો સહગુણક}}$$

સ્વાધ્યાય 2.3

અવયવીકરણની રીતે નીચેની બહુપદીઓનાં શૂન્યો શોધો અને બહુપદીઓનાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો :

1. $4x^2 - 3x - 1$

2. $3x^2 + 4x - 4$

3. $5t^2 + 12t + 7$

4. $t^3 - 2t^2 - 15t$

5. $2x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{4}$

6. $4x^2 + 5\sqrt{2}x - 3$

7. $2s^2 - (1 + 2\sqrt{2})s + \sqrt{2}$

8. $v^2 + 4\sqrt{3}v - 15$

9. $y^2 + \frac{3}{2}\sqrt{5}y - 5$

10. $7y^2 - \frac{11}{3}y - \frac{2}{3}$

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : જેનાં શૂન્યોનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે $\sqrt{2}$ અને $-\frac{3}{2}$ હોય તેવી એક દ્વિઘાત બહુપદી શોધો. તેનાં શૂન્યો પણ શોધો.

ઉકેલ : જેનાં શૂન્યોનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે $\sqrt{2}$ અને $-\frac{3}{2}$ હોય તેવી દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 - \sqrt{2}x - \frac{3}{2}$ છે.

$$\begin{aligned} x^2 - \sqrt{2}x - \frac{3}{2} &= \frac{1}{2} (2x^2 - 2\sqrt{2}x - 3) \\ &= \frac{1}{2} (2x^2 + \sqrt{2}x - 3\sqrt{2}x - 3) \\ &= \frac{1}{2} [\sqrt{2}x(\sqrt{2}x + 1) - 3(\sqrt{2}x + 1)] \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 3) \end{aligned}$$

તેથી, શૂન્યો $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ અને $\frac{3}{\sqrt{2}}$ છે.

નોંધ : $a = 1$ લેતાં,

$$-\frac{b}{a} = \sqrt{2}, \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \text{ પરથી } b = -\sqrt{2}, c = -\frac{3}{2}$$

ઉદાહરણ 2 : જો $x^3 + 2x^2 + kx + 3$ ને $x - 3$ વડે ભાગતાં શેષ 21 આવે, તો ભાગફળ અને k ની કિંમત શોધો. વળી, ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 + 2x^2 + kx - 18$ નાં શૂન્યો શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, $p(x) = x^3 + 2x^2 + kx + 3$

તેથી, $p(3) = 3^3 + 2 \times 3^2 + 3k + 3 = 21$

એટલે કે, $3k = -27$

એટલે કે, $k = -9$

તેથી, આપેલી બહુપદી $x^3 + 2x^2 - 9x + 3$ થશે.

$$\begin{array}{r} \text{હવે,} \quad x-3 \overline{) x^3 + 2x^2 - 9x + 3} \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ 5x^2 - 9x + 3 \\ \underline{5x^2 - 15x} \\ 6x + 3 \\ \underline{6x - 18} \\ 21 \end{array}$$

તેથી, $x^3 + 2x^2 - 9x + 3 = (x^2 + 5x + 6)(x - 3) + 21$

એટલે કે, $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x - 3)(x^2 + 5x + 6)$
 $= (x - 3)(x + 2)(x + 3)$

તેથી, આપેલી બહુપદી $x^3 + 2x^2 + kx - 18$ નાં શૂન્યો 3, -2, -3 છે.

સ્વાધ્યાય 2.4

1. નીચે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ અનુક્રમે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોના સરવાળા અને શૂન્યોના ગુણાકાર છે. આ માહિતી પરથી જ દ્વિઘાત બહુપદી મેળવો. આ બહુપદીઓનાં શૂન્યો અવયવીકરણની રીતે પણ શોધો :

(i) $\frac{-8}{3}, \frac{4}{3}$

(ii) $\frac{21}{8}, \frac{5}{16}$

(iii) $-2\sqrt{3}, -9$

(iv) $\frac{-3}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2}$

2. જો a, b વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો a અને b માટે, ત્રિઘાત બહુપદી, $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ નાં શૂન્યો $a, a + b, a + 2b$ ના સ્વરૂપમાં આપેલ છે. a અને b ની કિંમતો શોધો અને આપેલ બહુપદીનાં શૂન્યો શોધો.

3. ત્રિઘાત બહુપદી $6x^3 + \sqrt{2}x^2 - 10x - 4\sqrt{2}$ નું કોઈ એક શૂન્ય $\sqrt{2}$ છે. તેનાં બીજાં બે શૂન્યો શોધો.

4. $2x^4 + x^3 - 14x^2 + 5x + 6$ નો અવયવ $x^2 + 2x + k$ થાય, તેવો k શોધો. બંને બહુપદીઓનાં તમામ શૂન્યો પણ શોધો.

5. ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 - 3\sqrt{5}x^2 + 13x - 3\sqrt{5}$ નો એક અવયવ $x - \sqrt{5}$ આપેલ છે. આ બહુપદીનાં બધાં શૂન્યો શોધો.

6. a અને b ની કઈ કિંમતો માટે $q(x) = x^3 + 2x^2 + a$ નાં શૂન્યો, બહુપદી $p(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x + b$ નાં શૂન્યો પણ થાય? $p(x)$ નાં કયાં શૂન્યો $q(x)$ નાં શૂન્યો ન હોય ?



દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- બે સમાન ચલ ધરાવતાં બે સુરેખ સમીકરણોને દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ કહે છે.
- સુરેખ સમીકરણયુગ્મનું વ્યાપક સ્વરૂપ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
જ્યાં, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને $a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.
- સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ અનન્ય અથવા અનંત સંખ્યાઓનો બનેલો હોય, તો સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે એમ કહેવાય.
જો સુરેખ સમીકરણોનો ઉકેલ અનંત સંખ્યાઓનો બનેલો હોય, તો તેમને અવલંબી સમીકરણો કહે છે. આમ, આ વિકલ્પમાં સુરેખ સમીકરણો અવલંબી અને સુસંગત છે.
- જો સુરેખ સમીકરણોનો ઉકેલ ન મળે, તો સમીકરણો સુસંગત નથી.
- ધારો કે $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ છે.
(I) જો $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, તો
(i) સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.
(ii) તેમનો આલેખ અનન્ય બિંદુમાં છેદતું રેખાયુગ્મ થશે, છેદબિંદુ એ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ છે.
(II) જો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ તથા $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ અથવા $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, તો
(i) સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.
(ii) તેમનો આલેખ સમાંતર રેખાઓની જોડ થશે અને તેથી સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી.

(III) જો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, તો

- (i) સુરેખ સમીકરણયુગ્મ અવલંબી અને સુસંગત છે.
- (ii) તેમના આલેખની રેખાઓ સંપાતી હોય. આલેખ પરનાં તમામ બિંદુઓ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ છે અને તેથી સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલ છે.
- નીચે દર્શાવેલી રીતમાંથી કોઈ પણ રીતે સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો બૈજિક ઉકેલ મેળવી શકાય :
 - (i) આદેશની રીત
 - (ii) લોપની રીત
 - (iii) ચોકડી ગુણાકારની રીત
- ભૌમિતિક/આલેખની રીતે પણ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે.

વિધાન સત્ય અને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 અને 2 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : સમીકરણયુગ્મ $5x - 15y = 8$ અને $3x - 9y = \frac{24}{5}$ ને મળે.

- (A) એક ઉકેલ (B) બે ઉકેલ (C) અનંત સંખ્યાનો બનેલો ઉકેલ (D) ઉકેલ ન મળે

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-15}{-9} = \frac{5}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{8 \times 5}{24} = \frac{5}{3}$$

તેથી $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. આથી અનંત સંખ્યાનો બનેલો ઉકેલ મળે.

ઉકેલ : ઉત્તર (C)

ઉદાહરણ 2 : બે અંકની સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 9 છે. જો તેમાં 27 ઉમેરવામાં આવે, તો અંકોનાં સ્થાનની અદલાબદલી થાય છે. આ સંખ્યા

- (A) 25 (B) 72 (C) 63 (D) 36

ધારો કે એકમનો અંક x અને દશકનો અંક y છે.

આપેલ શરત પ્રમાણે $x + y = 9$ (i)

અને $10y + x + 27 = 10x + y$

$$\therefore x - y = 3$$
 (ii)

સમીકરણ (i) અને (ii)ને ઉકેલતાં,

$$x = 6 \text{ અને } y = 3$$

તેથી તે સંખ્યા $10y + x = 30 + 6 = 36$

ઉકેલ : ઉત્તર (D)

સ્વાધ્યાય 3.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 13 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. આલેખની રીતે સમીકરણયુગ્મ
 $6x - 3y + 10 = 0$
 $2x - y + 9 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી બે રેખાઓ
 (A) બરાબર એક બિંદુમાં છેદે છે. (B) બરાબર બે બિંદુમાં છેદે છે.
 (C) સંપાતી છે. (D) સમાંતર છે.
2. સમીકરણયુગ્મ $x + 2y + 5 = 0$ અને $-3x - 6y + 1 = 0$ ને
 (A) અનન્ય ઉકેલ છે. (B) બરાબર બે ઉકેલ છે.
 (C) અનંત ઉકેલ છે. (D) ઉકેલ ન મળે.
3. જો સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત હોય, તો રેખાઓ છે.
 (A) સમાંતર (B) સંપાતી
 (C) છેદક અથવા સંપાતી (D) છેદક
4. સમીકરણયુગ્મ $y = 0$ અને $y = -7$ ને
 (A) એક ઉકેલ મળે. (B) બે ઉકેલ મળે.
 (C) અનંત ઉકેલ મળે. (D) ઉકેલ ન મળે.
5. સમીકરણયુગ્મ $x = a$ અને $y = b$ આલેખીય રીતે રેખાઓ દર્શાવે છે.
 (A) સમાંતર (B) બિંદુ (b, a) માં છેદતી
 (C) સંપાતી (D) બિંદુ (a, b) માં છેદતી
6. k ની કઈ કિંમત માટે સમીકરણો $3x - y + 8 = 0$ અને $6x - ky = -16$ સંપાતી રેખાઓ દર્શાવે ?
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) -2
7. જો $3x + 2ky = 2$ અને $2x + 5y + 1 = 0$ થી મળતી રેખાઓ સમાંતર હોય, તો k નું મૂલ્ય છે.
 (A) $\frac{-5}{4}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$
8. જો સમીકરણયુગ્મ $cx - y = 2$ અને $6x - 2y = 4$ ને અનંત ઉકેલ મળે, તો c નું મૂલ્ય છે.
 (A) 3 (B) -3 (C) -12 (D) ન મળે.
9. જો અવલંબી સમીકરણયુગ્મનું એક સમીકરણ $-5x + 7y = 2$ હોય, તો બીજું શક્ય સમીકરણ હશે.
 (A) $10x + 14y + 4 = 0$ (B) $-10x - 14y + 4 = 0$
 (C) $-10x + 14y + 4 = 0$ (D) $10x - 14y = -4$
10. અનન્ય ઉકેલ $x = 2, y = -3$ હોય તેવું, સુરેખ સમીકરણયુગ્મ છે.
 (A) $x + y = -1$ (B) $2x + 5y = -11$
 $2x - 3y = -5$ (C) $4x + 10y = -22$
 (C) $2x - y = 1$ (D) $x - 4y - 14 = 0$
 $3x + 2y = 0$ (D) $5x - y - 13 = 0$

11. જો સમીકરણો $x - y = 2$ અને $x + y = 4$ નો ઉકેલ $x = a$, $y = b$ હોય, તો a અને b નાં મૂલ્ય અનુક્રમે
- (A) 3 અને 5 (B) 5 અને 3 (C) 3 અને 1 (D) -1 અને -3
12. અરુણા પાસે ફક્ત ₹ 1 અને ₹ 2 ના કેટલાક સિક્કા છે. જો તેની પાસેના સિક્કાઓની કુલ સંખ્યા 50 અને તેનું મૂલ્ય ₹ 75 હોય, તો ₹ 1 ના અને ₹ 2 ના સિક્કાની સંખ્યા અનુક્રમે છે.
- (A) 35 અને 15 (B) 35 અને 20 (C) 15 અને 35 (D) 25 અને 25
13. પિતાની ઉંમર પુત્રની ઉંમરથી છ ગણી છે. ચાર વર્ષ પછી, પિતાની ઉંમર પુત્રની ઉંમર કરતાં ચાર ગણી થશે. પુત્ર અને પિતાની હાલની ઉંમર અનુક્રમે છે.
- (A) 4 અને 24 (B) 5 અને 30 (C) 6 અને 36 (D) 3 અને 24

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : સમીકરણયુગ્મ $-x + 2y + 2 = 0$ અને $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - 1 = 0$ ને અનન્ય ઉકેલ મળે, તે કહેવું સત્ય છે ?

તમારો ઉત્તર ચકાસો.

ઉકેલ : હા.

$$\text{અહીં, } \frac{a_1}{a_2} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-\frac{1}{4}} = -8$$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ હોવાથી, સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 2 : સમીકરણો $4x + 3y - 1 = 5$ અને $12x + 9y = 15$ એ સંપાતી રેખાઓ દર્શાવે છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

ઉકેલ : ના.

આપણે સમીકરણોને

$$4x + 3y = 6$$

$$12x + 9y = 15 \text{ પ્રમાણે પુનઃ લખી શકીએ.}$$

$$\text{અહીં, } \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3} \text{ અને } \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{5} \text{ તેથી } \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ પરંતુ $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ હોવાથી, આપેલાં સમીકરણો સંપાતી રેખા-યુગ્મ દર્શાવશે નહિ.

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણયુગ્મ $x + 2y - 3 = 0$ અને $6y + 3x - 9 = 0$ સુસંગત છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

ઉકેલ : હા.

સમીકરણોનાં પદોનું પુનર્ગઠન કરતાં,

$$x + 2y - 3 = 0$$

$$3x + 6y - 9 = 0$$

અહીં, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ હોવાથી, સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. નીચેનાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

(i) $2x + 4y = 3$

(ii) $x = 2y$

(iii) $3x + y - 3 = 0$

$12y + 6x = 6$

$y = 2x$

$2x + \frac{2}{3}y = 2$

2. નીચેનાં સમીકરણો સંપાતી રેખાઓની જોડ દર્શાવે છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

(i) $3x + \frac{1}{7}y = 3, 7x + 3y = 7$

(ii) $-2x - 3y = 1, 6y + 4x = -2$

(iii) $\frac{x}{2} + y + \frac{2}{5} = 0, 4x + 8y + \frac{5}{16} = 0$

3. નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

(i) $-3x - 4y = 12, 4y + 3x = 12$

(ii) $\frac{3}{5}x - y = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}x - 3y = \frac{1}{6}$

(iii) $2ax + by = a, 4ax + 2by - 2a = 0; a, b \neq 0$ (iv) $x + 3y = 11, 2(2x + 6y) = 22$

4. જો સમીકરણયુગ્મ

$\lambda x + 3y = 7, 2x + 6y = 14$

ને અનંત ઉકેલ હોય, તો λ નું મૂલ્ય 1 હોય. આ વિધાન સત્ય છે ? કારણ આપો.

5. સમીકરણયુગ્મ

$x - 2y = 8, 5x - 10y = c$ ને

c ની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે અનન્ય ઉકેલ છે. વિધાન સત્ય છે અથવા અસત્ય છે તે ચકાસો.

6. $x = 7$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખા એ x -અક્ષને સમાંતર છે. વિધાન સત્ય છે અથવા અસત્ય છે તે ચકાસો.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : p અને q ના કયા મૂલ્ય માટે નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલ મળે ?

$4x + 5y = 2$

$(2p + 7q)x + (p + 8q)y = 2q - p + 1$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2p+7q}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{p+8q}$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{2q-p+1}$$

સુરેખ સમીકરણયુગ્મના અનંત ઉકેલ માટે,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

આથી, $\frac{4}{2p+7q} = \frac{5}{p+8q} = \frac{2}{2q-p+1}$

આથી, $\frac{4}{2p+7q} = \frac{5}{p+8q}$ અને $\frac{4}{2p+7q} = \frac{2}{2q-p+1}$

$$\therefore 4p + 32q = 10p + 35q \text{ અને } 8q - 4p + 4 = 4p + 14q$$

$$\therefore 6p + 3q = 0 \quad \text{અને } 8p + 6q = 4$$

$$\therefore q = -2p \quad (1)$$

$$\text{અને } 4p + 3q = 2 \quad (2)$$

સમીકરણ (1) માંથી મેળવેલું q નું મૂલ્ય સમીકરણ (2) માં મૂકતાં,

$$4p - 6p = 2$$

$$\text{અથવા } p = -1$$

સમીકરણ (1) માં p નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$q = 2$$

આથી, જો $p = -1$, $q = 2$ હોય, તો આપેલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો અનંત ઉકેલ મળે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ શોધો :

$$21x + 47y = 110, 47x + 21y = 162$$

$$\text{ઉકેલ : } 21x + 47y = 110 \quad (1)$$

$$47x + 21y = 162 \quad (2)$$

સમીકરણ (1) ને 47 અને સમીકરણ (2) ને 21 વડે ગુણતાં,

$$987x + 2209y = 5170 \quad (3)$$

$$987x + 441y = 3402 \quad (4)$$

સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં,

$$1768y = 1768$$

$$\text{અથવા } y = 1$$

સમીકરણ (1) માં y નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$21x + 47 = 110$$

$$\text{અથવા } 21x = 63$$

$$\text{અથવા } x = 3$$

$$\text{આથી, } x = 3, y = 1$$

$$\text{વેકલ્પિક ઉકેલ : } 21x + 47y = 110 \quad (1)$$

$$47x + 21y = 162 \quad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$$68x + 68y = 272$$

અથવા $x + y = 4$

(5)

સમીકરણ (2) માંથી સમીકરણ (1) બાદ કરતાં,

$$26x - 26y = 52$$

અથવા $x - y = 2$

(6)

સમીકરણ (5) અને (6) નો સરવાળો અને તફાવત કરતાં,

$$x = 3, y = 1$$

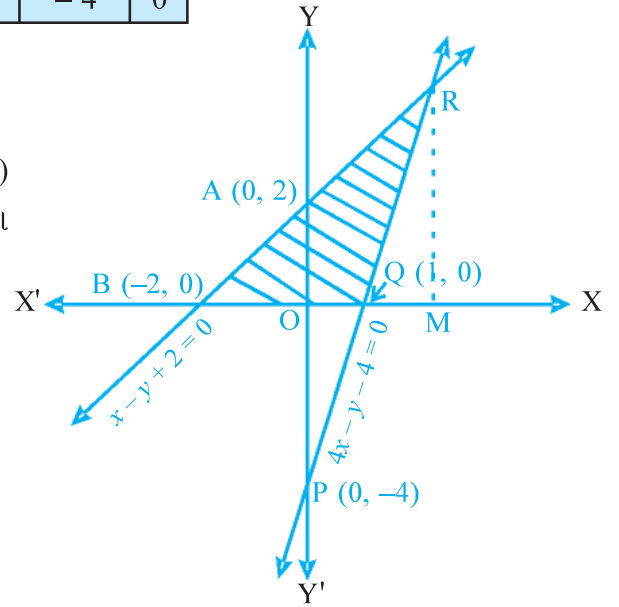
ઉદાહરણ 3 : સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $x - y + 2 = 0$ અને $4x - y - 4 = 0$ ના આલેખ દોરો. આ રેખાઓ અને x -અક્ષથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આપેલાં સમીકરણોનો આલેખ દોરવા માટે, પ્રત્યેક સમીકરણના બે ઉકેલ શોધીશું. તે કોષ્ટક 3.1 માં આપ્યા પ્રમાણે છે.

કોષ્ટક 3.1

x	0	-2	x	0	1
$y = x + 2$	2	0	$y = 4x - 4$	-4	0

આલેખપત્ર પર બિંદુઓ A (0, 2), B (-2, 0), P (0, -4) અને Q (1, 0) આલેખો અને આકૃતિ 3.1 માં બતાવ્યા પ્રમાણે, રેખા AB અને PQ બને તે રીતે તેમને જોડો.



આકૃતિ 3.1

આપણે નિરીક્ષણ કરીએ કે રેખાઓ AB અને PQ નું છેદબિંદુ R (2, 4) છે. આ રેખાઓ અને x -અક્ષથી ત્રિકોણ BQR બને છે.

આ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ B (-2, 0), Q (1, 0) અને R (2, 4) છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \times \text{આધાર} \times \text{વેધ}$$

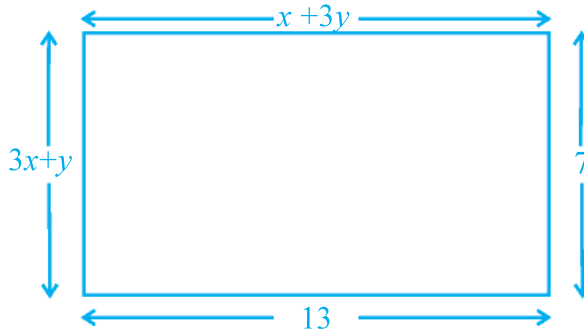
અહીં, આધાર = BQ = BO + OQ = 2 + 1 = 3 એકમ.

વેધ = RM = Rનો ભુજ = 4 એકમ.

આથી, ΔBQR નું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ ચોરસ એકમ.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. સુરેખ સમીકરણયુગ્મ
 $\lambda x + y = \lambda^2$ અને $x + \lambda y = 1$ ને λ ના કયાં મૂલ્ય (મૂલ્યો) માટે
 (i) ઉકેલ નથી ?
 (ii) અનંત ઉકેલ મળે ?
 (iii) અનન્ય ઉકેલ મળે ?
2. k નાં કયાં મૂલ્ય (મૂલ્યો) માટે, સમીકરણયુગ્મ
 $kx + 3y = k - 3$ અને $12x + ky = k$ ને ઉકેલ ન મળે ?
3. a અને b , નાં કયાં મૂલ્યો માટે, નીચે આપેલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મના અનંત ઉકેલ હોય ?
 $x + 2y = 1$ અને $(a - b)x + (a + b)y = a + b - 2$
4. નીચે આપેલાં સમીકરણયુગ્મ માટે (i) થી (iv) માં p ના અને (v) માં p તથા q નાં મૂલ્ય (મૂલ્યો) શોધો :
 (i) સમીકરણયુગ્મ $3x - y - 5 = 0$ અને $6x - 2y - p = 0$ થી રજૂ થતી રેખાઓ સમાંતર છે.
 (ii) સમીકરણયુગ્મ $-x + py = 1$ અને $px - y = 1$ ને ઉકેલ ન મળે.
 (iii) સમીકરણયુગ્મ $-3x + 5y = 7$ અને $2px - 3y = 1$ સમીકરણથી રજૂ થતી રેખાઓ અનન્ય બિંદુમાં છેદે છે.
 (iv) સમીકરણયુગ્મ $2x + 3y - 5 = 0$ અને $px - 6y - 8 = 0$ ને અનન્ય ઉકેલ છે.
 (v) સમીકરણયુગ્મ $2x + 3y = 7$ અને $2px + py = 28 - qy$, ને અનંત ઉકેલ છે.
5. સમીકરણો $x - 3y = 2$ અને $-2x + 6y = 5$ દ્વારા બે સીધા રસ્તા દર્શાવાય છે. ચકાસો કે રસ્તાઓ એકબીજાને કાપશે કે નહિ.
6. અનન્ય ઉકેલ $x = -1, y = 3$ હોય તેવું સુરેખ સમીકરણયુગ્મ લખો. આવાં કેટલાં યુગ્મ લખી શકાય ?
7. જો $2x + y = 23$ અને $4x - y = 19$ હોય, તો $5y - 2x$ અને $\frac{y}{x} - 2$ નું મૂલ્ય શોધો.
8. નીચેના લંબચોરસમાં x અને y નાં મૂલ્ય શોધો. [જુઓ આકૃતિ 3.2].



આકૃતિ 3.2

9. નીચેનાં સમીકરણયુગ્મ ઉકેલો :

(i) $x + y = 3.3$

(ii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 4$

$\frac{0.6}{3x-2y} = -1, 3x - 2y \neq 0$

$\frac{5x}{6} - \frac{y}{8} = 4$

(iii) $4x + \frac{6}{y} = 15$

$6x - \frac{8}{y} = 14, y \neq 0$

(v) $43x + 67y = -24$

$67x + 43y = 24$

(vii) $\frac{2xy}{x+y} = \frac{3}{2}$

$\frac{xy}{2x-y} = \frac{-3}{10}, \quad x+y \neq 0, 2x-y \neq 0$

(iv) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8, \quad x, y \neq 0$

(vi) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a+b$

$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2, \quad a, b \neq 0$

10. સમીકરણયુગ્મ $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} - 1 = 0$ અને $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 15$ નો ઉકેલ શોધો.

તે પરથી, જો $y = \lambda x + 5$ હોય, તો λ શોધો.

11. નીચેનાં સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે નહિ, તે આલેખની મદદથી શોધો. જો સુસંગત હોય, તો તેમનો ઉકેલ મેળવો.

(i) $3x + y + 4 = 0$

$6x - 2y + 4 = 0$

(ii) $x - 2y = 6$

$3x - 6y = 0$

(iii) $x + y = 3$

$3x + 3y = 9$

12. સમીકરણયુગ્મ $2x + y = 4$ અને $2x - y = 4$ ના આલેખ દોરો. આ રેખાઓ અને y -અક્ષથી બનતા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ લખો. આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.

13. સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $x+y = 2$ અને $2x-y = 1$ નો ઉકેલ દર્શાવતા બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ લખો. આવી કેટલી રેખાઓ શોધી શકાય ?

14. જો $2x^3 + ax^2 + 2bx + 1$ નો એક અવયવ $x + 1$ હોય તથા $2a-3b = 4$ આપ્યું હોય, તો a અને b નાં મૂલ્ય શોધો.

15. ત્રિકોણના ખૂણાઓ x, y અને 40° છે. બે ખૂણાઓ x અને y નો તફાવત 30° છે. x અને y શોધો.

16. બે વર્ષ પહેલાં, સલીમ તેની એક માત્ર પુત્રી કરતાં ત્રણ ગણો મોટો હતો અને છ વર્ષ પછી, તે તેની પુત્રીના બમણા કરતાં ચાર વર્ષ મોટો હશે. અત્યારે તેમની ઉંમર કેટલી હશે ?

17. પિતાની ઉંમર તેનાં બે બાળકોની ઉંમરના સરવાળાના બમણા જેટલી છે. 20 વર્ષ પછી તેની ઉંમર તેનાં બાળકોની ઉંમરના સરવાળા બરાબર થશે. પિતાની ઉંમર શોધો.

18. બે સંખ્યાઓ 5 : 6 ના ગુણોત્તરમાં છે. પ્રત્યેક સંખ્યામાંથી 8 બાદ કરવામાં આવે, તો તેમનો તે જ ક્રમમાં ગુણોત્તર 4 : 5 થાય છે. આ સંખ્યાઓ શોધો.

19. બે પરીક્ષાખંડ A અને B માં કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ હાજર છે. પ્રત્યેક ખંડમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા સમાન કરવા માટે, 10 વિદ્યાર્થીઓને A માંથી B માં મોકલવા પડે છે. પરંતુ જો B માંથી A માં 20 વિદ્યાર્થીઓ મોકલવામાં આવે, તો A માં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા B માં સ્થિત વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કરતાં બમણી થાય છે. બંને ખંડમાં સ્થિત વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

20. એક દુકાનદાર વાંચવા માટે પુસ્તકો ભાડે આપે છે. પ્રથમ બે દિવસ માટે તે એક નિયત રકમ લે છે અને ત્યાર પછીના પ્રત્યેક દિવસ માટે તે અતિરિક્ત રકમ લે છે. એક પુસ્તક છ દિવસ રાખવા માટે લતિકા ₹ 22 ચૂકવે છે,

જ્યારે આનંદ પુસ્તક ચાર દિવસ રાખવા માટે ₹ 16 ચૂકવે છે. નક્કી કિંમત અને વધારાના દિવસ માટેની કિંમત શોધો.

21. એક સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષામાં, પ્રત્યેક સાચા ઉત્તર માટે એક ગુણ આપવામાં આવે છે અને પ્રત્યેક અસત્ય ઉત્તર માટે $\frac{1}{2}$ ગુણ કાપવામાં આવે છે. જ્યંતિ 120 પ્રશ્નોના ઉત્તર આપીને 90 ગુણ મેળવે છે. તેણે કેટલા પ્રશ્નોના સાચા ઉત્તર આપ્યા હશે ?

22. ચક્રીય ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ આપ્યા છે.

$$\angle A = (6x + 10)^\circ, \angle B = (5x)^\circ$$

$$\angle C = (x + y)^\circ, \angle D = (3y - 10)^\circ$$

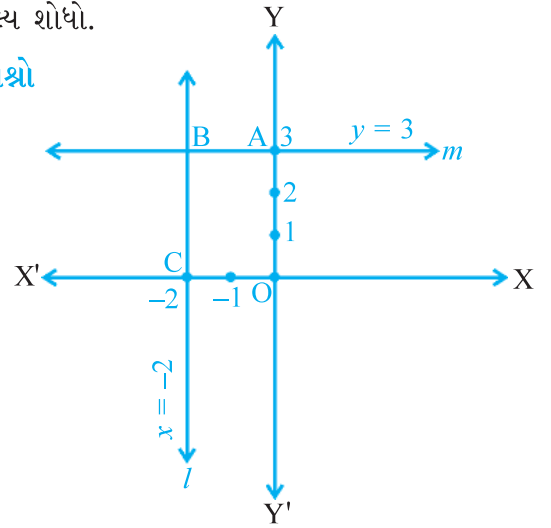
x અને y નાં મૂલ્ય શોધો અને તે પરથી ચારેય ખૂણાઓનાં મૂલ્ય શોધો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : રેખાઓ $x = -2$ અને $y = 3$ નો આલેખ દોરો. આ રેખાઓ આ x -અક્ષ અને y -અક્ષથી બનતી આકૃતિનાં શિરોબિંદુઓ લખો. આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, રેખા $x = -2$ એ y -અક્ષને સમાંતર અને તેની ડાબી બાજુએ 2 એકમ અંતરે છે.

આથી, $x = -2$ નો આલેખ રેખા l છે. [જુઓ આકૃતિ 3.3].



આકૃતિ 3.3

$y = 3$ નો આલેખ x -અક્ષને સમાંતર અને તેના ઉપરના ભાગમાં 3 એકમ દૂર આવેલી રેખા છે.

આથી, $y = 3$ નો આલેખ રેખા m છે.

રેખાઓ $x = -2$, $y = 3$, x -અક્ષ અને y -અક્ષથી ઘેરાયેલી આકૃતિ OABC છે. તે લંબચોરસ છે. (શા માટે ?)

y -અક્ષ પર, x -અક્ષથી 3 એકમ દૂર ઉપરના ભાગમાં બિંદુ A છે. આથી A ના યામ (0, 3) છે.

x -અક્ષ પર અને y -અક્ષની ડાબી બાજુએ 2 એકમ દૂર બિંદુ C છે. આથી, C ના યામ (-2, 0) છે.

સમીકરણયુગ્મ $x = -2$ અને $y = 3$ નો ઉકેલ B છે. આથી B ના યામ (-2, 3) છે.

આથી, લંબચોરસ OABC નાં શિરોબિંદુઓ O (0, 0), A (0, 3), B (-2, 3) અને C (-2, 0) છે.

આ લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે 2 એકમ અને 3 એકમ છે.

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = લંબાઈ \times પહોળાઈ,

લંબચોરસ OABCનું ક્ષેત્રફળ = $2 \times 3 = 6$ ચોરસ એકમ.

ઉદાહરણ 2 : રેખાઓ $5x - y = 5$, $x + 2y = 1$ અને $6x + y = 17$ થી બનતા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ બૈજિક રીતે મેળવો.

ઉકેલ : ત્રિકોણની બે બાજુઓ જે બે સમીકરણથી બને છે તે સમીકરણોનો સામાન્ય ઉકેલ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ છે.

આથી, આપેલાં સમીકરણોનો જોડમાં ઉકેલ મેળવીને ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુ મળશે. આપેલાં સમીકરણો પરથી, આપણને સમીકરણોની ત્રણ જોડી મળશે,

$$5x - y = 5 \quad \text{અને} \quad x + 2y = 1$$

$$x + 2y = 1 \quad \text{અને} \quad 6x + y = 17$$

$$5x - y = 5 \quad \text{અને} \quad 6x + y = 17$$

$$5x - y = 5$$

$$x + 2y = 1 \quad \text{સમીકરણયુગ્મને ઉકેલતાં,}$$

આપણને, $x = 1, y = 0$ મળશે.

આથી, ત્રિકોણનું એક શિરોબિંદુ $(1, 0)$ છે.

બીજી જોડીનાં સમીકરણો

$$x + 2y = 1 \quad \text{અને} \quad 6x + y = 17 \quad \text{ને ઉકેલતાં,}$$

$$x = 3, y = -1 \quad \text{મળે.}$$

આથી, ત્રિકોણનું બીજું શિરોબિંદુ $(3, -1)$ છે.

ત્રીજા જોડનાં સમીકરણો

$$5x - y = 5 \quad \text{અને} \quad 6x + y = 17 \quad \text{પરથી}$$

$$x = 2, y = 5 \quad \text{મળે.}$$

આથી ત્રિકોણનું ત્રીજું શિરોબિંદુ $(2, 5)$ છે.

આમ, ત્રિકોણનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ $(1, 0)$, $(3, -1)$ અને $(2, 5)$ છે.

ઉદાહરણ 3 : ટેબલ પર 10 % અને ખુરશી પર 25 % નફો મેળવવા માટે, જમિલાએ ટેબલ અને ખુરશી ₹ 1050 માં વેચ્યાં. જો તેને ટેબલ પર 25 % અને ખુરશી પર 10 % નફો લીધો હોત, તો તેને ₹ 1065 મળ્યા હોત. પ્રત્યેકની મૂળકિંમત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ટેબલની મૂળકિંમત ₹ x અને ખુરશીની મૂળકિંમત ₹ y છે.

જ્યારે ટેબલને 10 % નફાથી વેચ્યું હોય ત્યારે ટેબલની વેચાણકિંમત

$$= ₹ \left(x + \frac{10}{100} x \right) = ₹ \frac{110}{100} x$$

જ્યારે ખુરશીને 25 % નફાથી વેચી હોય, ત્યારે ખુરશીની વેચાણકિંમત

$$= ₹ \left(y + \frac{25}{100} y \right) = ₹ \frac{125}{100} y$$

$$\text{આથી, } \frac{110}{100} x + \frac{125}{100} y = 1050$$

જ્યારે 25 % નફાથી ટેબલ વેચે, ત્યારે તેની વેચાણકિંમત = ₹ $\left(x + \frac{25}{100}x\right) = ₹\frac{125}{100}x$ અને જ્યારે 10 % નફાથી

ખુરશી વેચે, ત્યારે તેની વેચાણકિંમત = ₹ $\left(y + \frac{10}{100}y\right) = ₹\frac{110}{100}y$

આથી, $\frac{125}{100}x + \frac{110}{100}y = 1065$ (2)

સમીકરણો (1) અને (2) પરથી,

$$110x + 125y = 105000 \text{ અને } 125x + 110y = 106500$$

આ સમીકરણોનો સરવાળો અને તેમની બાદબાકી કરતાં,

$$235x + 235y = 211500 \text{ અને } 15x - 15y = 1500$$

અર્થાત્, $x + y = 900$ (3)

અને $x - y = 100$ (4)

સમીકરણો (3) અને (4)ને ઉકેલતાં,

$$x = 500, y = 400$$

આથી, ટેબલની મૂળકિંમત ₹ 500 અને ખુરશીની મૂળકિંમત ₹ 400.

ઉદાહરણ 4 : બે પાઈપોના ઉપયોગથી એક સ્નાનાગાર ભરાતાં 12 કલાક થાય છે. જો મોટા વ્યાસવાળી પાઈપનો ઉપયોગ 4 કલાક માટે અને નાના વ્યાસવાળી પાઈપનો ઉપયોગ 9 કલાક કરવામાં આવે, તો સ્નાનાગાર માત્ર અડધો ભરાય છે. જો પ્રત્યેક પાઈપનો અલગ-અલગ ઉપયોગ કરવામાં આવે, તો તેમનાથી સ્નાનાગાર કેટલા સમયમાં ભરાય ?

ઉકેલ : ધારો કે એકલા મોટા વ્યાસવાળી પાઈપથી સ્નાનાગાર ભરવા માટે x કલાક અને એકલા નાના વ્યાસવાળી પાઈપથી સ્નાનાગાર ભરવા માટે y કલાક લાગે છે.

એકલો મોટા વ્યાસવાળી પાઈપ x કલાકમાં સ્નાનાગાર ભરે છે.

આથી, 1 કલાકમાં આ પાઈપ સ્નાનાગારનો $\frac{1}{x}$ ભાગ ભરશે. તેથી 4 કલાકમાં તે $\frac{4}{x}$ ભાગ ભરશે.

તે જ પ્રમાણે, એકલો ઓછા વ્યાસવાળી પાઈપ 9 કલાકમાં, $\frac{9}{y}$ ભાગ ભરશે.

આપેલી માહિતી પ્રમાણે,

$$\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = \frac{1}{2}$$
 (1)

વળી, બંને પાઈપ ઉપયોગથી સ્નાનાગાર 12 કલાકમાં ભરાય છે.

આથી, $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$ (2)

ધારો કે, $\frac{1}{x} = u$ અને $\frac{1}{y} = v$. આથી સમીકરણો (1) અને (2) પરથી,

$$4u + 9v = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$12u + 12v = 1 \text{ થશે.} \quad (4)$$

સમીકરણ (3) ને 3 વડે ગુણી, તેમાંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં,

$$15v = \frac{1}{2} \text{ અથવા } v = \frac{1}{30} \text{ મળે.}$$

સમીકરણ (4) માં v નું મૂલ્ય મૂકતાં, $u = \frac{1}{20}$

$$\text{આથી, } u = \frac{1}{20}, v = \frac{1}{30}$$

$$\text{તેથી, } \frac{1}{x} = \frac{1}{20}, \frac{1}{y} = \frac{1}{30}$$

$$\text{અથવા, } x = 20, y = 30.$$

આથી, મોટા વ્યાસવાળો પાઈપ એકલો 20 કલાકમાં અને ઓછા વ્યાસવાળો પાઈપ એકલો 30 કલાકમાં સ્નાનાગાર ભરશે.

સ્વાધ્યાય 3.4

1. નીચેનું સમીકરણયુગ્મ આલેખની રીતે ઉકેલો :

$$2x + y = 6$$

$$2x - y + 2 = 0$$

આ બે રેખાઓએ x -અક્ષ સાથે બનાવેલ ત્રિકોણ અને y -અક્ષ સાથે બનાવેલ ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

2. રેખાઓ $y = x$, $3y = x$, $x + y = 8$ થી બનતા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ, આલેખની મદદથી શોધો.

3. સમીકરણો $x = 3$, $x = 5$ અને $2x - y - 4 = 0$ ના આલેખ દોરો. આ રેખાઓ અને x -અક્ષથી બનતા ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.

4. 4 પેન અને 4 પેન્સિલ સમાવતા બોક્સની કિંમત ₹ 100 છે. પેનની કિંમતના ત્રણ ગણા એ પેન્સિલ બોક્સની કિંમત કરતાં ₹ 15 વધારે છે. ઉપરની માહિતી પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો. પેન અને પેન્સિલ બોક્સની કિંમત શોધો.

5. રેખાઓ $3x - y = 3$, $2x - 3y = 2$ અને $x + 2y = 8$ થી બનતા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ બૈજિક રીતે મેળવો.

6. અંકિતા પોતાના ઘરે જવા માટે 14 કિમી અંતરનો કેટલોક ભાગ રિક્ષાથી અને કેટલોક ભાગ બસથી મુસાફરી કરે છે. તેણે 2 કિમી રિક્ષા મારફતે અને બાકીનું અંતર બસ મારફતે કાપ્યું હોત તો તેને અડધો કલાક લાગત. બીજી રીતે, જો તેને 4 કિમી મુસાફરી રિક્ષા મારફતે અને બાકીનું અંતર બસ મારફતે કાપ્યું હોત, તો તેને 9 મિનિટ વધારે લાગી હોત રિક્ષા અને બસની ઝડપ શોધો.

7. શાંત પાણીમાં એક વ્યક્તિ 5 કિમી/કલાકના દરે હલેસાં મારે છે. પાણીના પ્રવાહની દિશામાં 40 કિમી અંતર કાપતાં જે સમય લાગે છે તેના કરતાં ત્રણ ગણો સમય પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં 40 કિમી અંતર કાપતાં લાગે છે. પ્રવાહની ઝડપ શોધો.
8. એક યાંત્રિક હોડીને 30 કિમી પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં અને 28 કિમી પ્રવાહની દિશામાં મુસાફરી કરતાં 7 કલાક લાગે છે. તેને 21 કિમી પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં અને તેટલું જ અંતર પાછા ફરવામાં 5 કલાક લાગે છે. શાંત પાણીમાં યાંત્રિક હોડીની ઝડપ અને પ્રવાહની ઝડપ શોધો. (શાંત પાણીમાં હોડીની ઝડપ પ્રવાહની ઝડપ કરતાં વધુ છે.)
9. બે અંકની સંખ્યા, અંકોના સરવાળાને 8 વડે ગુણીને તેમાંથી 5 બાદ કરતાં મળે છે અથવા અંકોના તફાવતને 16 વડે ગુણીને 3 ઉમેરતાં મળે છે, તે સંખ્યા શોધો.
10. રેલવેની અડધી ટિકિટ પૂરા ભાડાની અડધી રકમ ખર્ચતાં મળે છે, પરંતુ અડધી ટિકિટ માટે આરક્ષણ શુલ્ક પૂરી ટિકિટના જેટલું જ છે. પ્રથમ વર્ગની સ્ટેશન A થી B માટેની એક ટિકિટ આરક્ષિત કરાવતાં ₹ 2530 ખર્ચ થાય છે. વળી, પ્રથમ વર્ગની એક ટિકિટ અને પ્રથમ વર્ગની અડધી ટિકિટનું આરક્ષણ કરાવતાં ₹ 3810 ખર્ચ થાય છે. પ્રથમ વર્ગનું સ્ટેશન A થી B નું પૂરું ભાડું અને એક ટિકિટનું આરક્ષણ મૂલ્ય શોધો.
11. એક દુકાનદાર સાડી 8 % નફાથી અને સ્વેટર 10 % વટાવથી વેચે છે, આમ કરવાથી તેને ₹ 1008 મળે છે. જો તે સાડી 10 % નફાથી અને સ્વેટર 8 % વટાવથી વેચે, તો તેને ₹ 1028 મળત. સાડીની મૂળ કિંમત અને વટાવ કાપ્યા પહેલાંની સ્વેટરની વેચાણકિંમત શોધો.
12. સુઝન બે રોકાણપદ્ધતિ A અને B માં ચોક્કસ રૂપિયાનું રોકાણ કરે છે. આ પદ્ધતિઓ અનુક્રમે વાર્ષિક 8 % અને 9 % વ્યાજ આપવાની દરખાસ્ત કરે છે. તેને વાર્ષિક ₹ 1860 વ્યાજ મળે છે. જો તેને આ બે પદ્ધતિમાં રોકાણ અદલ-બદલ કર્યું હોત, તો તેને વાર્ષિક વ્યાજ પેટે ₹ 20 વધારે મળ્યા હોત. દરેક પદ્ધતિમાં તેણે કેટલું રોકાણ કર્યું હશે ?
13. વિજય પાસે કેટલાંક કેળાં છે. તે તેમને બે સમૂહ A અને B માં વિભાજિત કરે છે. તેણે પ્રથમ સમૂહને 3 કેળાંના ₹ 2 ના ભાવથી અને બીજા સમૂહને પ્રતિ કેળાંના ₹ 1 ના ભાવથી વેચે છે. આમ કરતાં તેમને ₹ 400 મળે છે. જો તેને પ્રથમ સમૂહને પ્રતિ કેળાંના ₹ 1ના ભાવથી અને બીજા સમૂહને 5 કેળાંના ₹ 4 ના ભાવથી વેચ્યાં હોત તો ₹ 460 મળત. તેની પાસેનાં કેળાંની કુલ સંખ્યા શોધો.



દ્વિઘાત સમીકરણ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- **દ્વિઘાત સમીકરણ** : વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a, b, c અને $a \neq 0$ માટે ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ સ્વરૂપમાં હોય છે.
- **દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ** : જો $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ હોય, તો α દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નું એક વાસ્તવિક બીજ છે.
- દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો અને દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ સમાન છે.
- **અવયવીકરણની રીતે દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ** : જો આપણે દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ ના સુરેખ અવયવ મેળવી શકીએ, તો $ax^2 + bx + c = 0$ ના સુરેખ અવયવોને શૂન્ય સાથે સરખાવીને દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ શોધી શકીએ.
- **દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ શોધવાની પૂર્ણવર્ગની રીત** : યોગ્ય અચળ ઉમેરીને અથવા બાદ કરીને દ્વિઘાત સમીકરણમાં આપણે x^2 અને x ના પદનું પુનર્ગઠન એવી રીતે કરી શકીએ જેથી અભિવ્યક્તિ પૂર્ણવર્ગ બને અને તેનો x માં ઉકેલ મેળવી શકાય.
- **દ્વિઘાત સૂત્ર** : જો $b^2 - 4ac \geq 0$ હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં વાસ્તવિક બીજ

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ થાય.}$$

- અભિવ્યક્તિ $b^2 - 4ac$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનો **વિવેચક** કહે છે.
- **દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજનું અસ્તિત્વ** : દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માં જો
 - $b^2 - 4ac > 0$, તો બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે.
 - $b^2 - 4ac = 0$, તો બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.
 - $b^2 - 4ac < 0$, તો વાસ્તવિક બીજ મળશે નહિ.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 અને 2 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : નીચેનામાંથી કયું સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી ?

(A) $(x + 2)^2 = 2(x + 3)$

(B) $x^2 + 3x = (-1)(1 - 3x)^2$

(C) $(x + 2)(x - 1) = x^2 - 2x - 3$

(D) $x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^3$

ઉકેલ :

(A) $(x + 2)^2 = 2(x + 3)$

$\therefore x^2 + 4x + 4 = 2x + 6$

$\therefore x^2 + 4x + 4 - 2x - 6 = 0$

$\therefore x^2 + 2x - 2 = 0$

(B) $x^2 + 3x = (-1)(1 - 3x)^2$

$\therefore x^2 + 3x = (-1)(1 - 6x + 9x^2)$

$\therefore x^2 + 3x = -1 + 6x - 9x^2$

$\therefore x^2 + 3x + 1 - 6x + 9x^2 = 0$

$\therefore 10x^2 - 3x + 1 = 0$

(C) $(x + 2)(x - 1) = x^2 - 2x - 3$

$\therefore x^2 - x + 2x - 2 = x^2 - 2x - 3$

$\therefore x - 2 + 2x + 3 = 0$

$\therefore 3x + 1 = 0$

(D) $x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^3$

$\therefore x^3 - x^2 + 2x + 1 = x^3 + 1 + 3x(x + 1)$

$\therefore x^3 - x^2 + 2x + 1 = x^3 + 1 + 3x^2 + 3x$

$\therefore -x^2 + 2x = 3x^2 + 3x$

$\therefore 4x^2 + x = 0$

ઉત્તર (C)

ઉદાહરણ 2 : પૂર્ણવર્ગની રીતે દ્વિઘાત સમીકરણ $4x^2 - \sqrt{3}x - 5 = 0$ નો ઉકેલ મેળવવા માટે કયો અચળ ઉમેરી અને બાદ કરવો પડે ?

(A) $\frac{9}{16}$

(B) $\frac{3}{16}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

ઉકેલ : $4x^2 - \sqrt{3}x - 5 = 0$

અંતિમ પદ શોધવા માટે અં. પ. = $\frac{(\text{મ.પ.})^2}{4 \times \text{પ્ર.પ.}}$

= $\frac{(-\sqrt{3}x)^2}{4 \times 4x^2}$

= $\frac{3x^2}{16x^2} = \frac{3}{16}$

ઉત્તર (B)

સ્વાધ્યાય 4.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 11 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. નીચેનામાંથી કયું દ્વિઘાત સમીકરણ છે ?

(A) $x^2 + 2x + 1 = (4 - x)^2 + 3$

(B) $-2x^2 = (5 - x) \left(2x - \frac{2}{5} \right)$

(C) $(k + 1)x^2 + \frac{3}{2}x = 7$, જ્યાં $k = -1$

(D) $x^3 - x^2 = (x - 1)^3$

2. નીચેનામાંથી કયું સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી ?

(A) $2(x - 1)^2 = 4x^2 - 2x + 1$

(B) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(C) $(\sqrt{2}x + \sqrt{3})^2 + x^2 = 3x^2 - 5x$

(D) $(x^2 + 2x)^2 = x^4 + 3 + 4x^3$

3. નીચેનાં સમીકરણોમાંથી કયા સમીકરણનું બીજ 2 છે ?

(A) $x^2 - 4x + 5 = 0$

(B) $x^2 + 3x - 12 = 0$

(C) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

(D) $3x^2 - 6x - 2 = 0$

4. જો સમીકરણ $x^2 + kx - \frac{5}{4} = 0$ નું એક બીજ $\frac{1}{2}$ હોય, તો k નું મૂલ્ય છે.

(A) 2

(B) -2

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{2}$

5. નીચેનામાંથી કયા સમીકરણનાં બીજનો સરવાળો 3 થાય ?

(A) $2x^2 - 3x + 6 = 0$

(B) $-x^2 + 3x - 3 = 0$

(C) $\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x + 1 = 0$

(D) $3x^2 - 3x + 3 = 0$

6. k ની કઈ કિંમત માટે દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - kx + k = 0$ નાં બીજ સમાન છે ?

(A) માત્ર 0

(B) 4

(C) માત્ર 8

(D) 0, 8

7. પૂર્ણવર્ગની પદ્ધતિથી દ્વિઘાત સમીકરણ $9x^2 + \frac{3}{4}x - \sqrt{2} = 0$ નો ઉકેલ શોધવા માટે કયો અચળ ઉમેરી અને તેમાંથી બાદ કરવો પડશે ?

(A) $\frac{1}{8}$

(B) $\frac{1}{64}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{9}{64}$

8. દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ ને

(A) બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ છે.

(B) બે વાસ્તવિક બીજ છે.

(C) વાસ્તવિક બીજ મળશે નહિ.

(D) બે કરતાં વધારે વાસ્તવિક બીજ મળે.

9. નીચેનાં સમીકરણોમાંથી કયા સમીકરણનાં બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે ?

(A) $2x^2 - 3\sqrt{2}x + \frac{9}{4} = 0$

(B) $x^2 + x - 5 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 2\sqrt{2} = 0$

(D) $5x^2 - 3x + 1 = 0$

10. નીચેનામાંથી કયાં સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક નથી ?

(A) $x^2 - 4x + 3\sqrt{2} = 0$

(B) $x^2 + 4x - 3\sqrt{2} = 0$

(C) $x^2 - 4x - 3\sqrt{2} = 0$

(D) $3x^2 + 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

11. $(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$ ને

(A) ચાર વાસ્તવિક બીજ મળે.

(B) બે વાસ્તવિક બીજ મળે.

(C) વાસ્તવિક બીજ ન મળે.

(D) એક વાસ્તવિક બીજ મળે.

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : સમીકરણ $(x - 1)^2 + 2(x + 1) = 0$ ને વાસ્તવિક બીજ મળે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

ઉકેલ : ના, સમીકરણનું સાદું રૂપ આપતાં $x^2 + 3 = 0$ મળે. તેનો વિવેચક -12 ઋણ છે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનું વિધાન 'સત્ય' છે કે 'અસત્ય' ? તમારો જવાબ ચકાસો.

જો દ્વિઘાત સમીકરણમાં x નો સહગુણક શૂન્ય હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણનાં વાસ્તવિક બીજ ન મળે.

ઉકેલ : અસત્ય, કારણ કે જો a અને c નાં ચિહ્ન પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય અથવા a અને c માંથી કોઈ એક શૂન્ય હોય, તો વિવેચક $-4ac$ અનૂણ થશે.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચેનાં દ્વિઘાત સમીકરણોને બે વાસ્તવિક બીજ છે કે નહિ તે જણાવો. તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો :

(i) $x^2 - 3x + 4 = 0$

(ii) $2x^2 + x - 1 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$

(iv) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

(v) $(x + 4)^2 - 8x = 0$

(vi) $(x - \sqrt{2})^2 - 2(x + 1) = 0$

(vii) $\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

(viii) $x(1 - x) - 2 = 0$

(ix) $(x - 1)(x + 2) + 2 = 0$

(x) $(x + 1)(x - 2) + x = 0$

2. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો :

(i) પ્રત્યેક દ્વિઘાત સમીકરણને બરાબર એક બીજ હોય છે.

(ii) પ્રત્યેક દ્વિઘાત સમીકરણને ઓછામાં ઓછું એક વાસ્તવિક બીજ હોય છે.

(iii) પ્રત્યેક દ્વિઘાત સમીકરણને ઓછામાં ઓછાં બે બીજ હોય છે.

(iv) પ્રત્યેક દ્વિઘાત સમીકરણને વધુમાં વધુ બે બીજ હોય છે.

(v) જો દ્વિઘાત સમીકરણમાં x^2 ના સહગુણક અને અચળ પદના ચિહ્ન પરસ્પર વિરુદ્ધ હોય, તો તે દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક છે.

(vi) જો x^2 ના સહગુણક અને અચળ પદનાં ચિહ્ન સમાન હોય અને x નો સહગુણક શૂન્ય હોય, તો દ્વિઘાત સમીકરણનાં વાસ્તવિક બીજ ન હોય.

3. 'દ્વિઘાત સમીકરણમાં સહગુણકો પૂર્ણાંક હોય, તો પૂર્ણાંક બીજ મળે'. આ વિધાનની યથાર્થતા ચકાસો.

4. જે સમીકરણમાં સહગુણકો સંમેય સંખ્યા હોય, પરંતુ તેનાં બીજ અસંમેય સંખ્યા હોય તેવા દ્વિઘાત સમીકરણનું અસ્તિત્વ છે ? તમારા ઉત્તરની સત્યાર્થતા ચકાસો.

5. જે સમીકરણના બધા સહગુણકો ભિન્ન અસંમેય સંખ્યા હોય પરંતુ બંને બીજ સંમેય હોય, તેવા દ્વિઘાત સમીકરણનું અસ્તિત્વ છે ? શા માટે ?

6. સમીકરણ $x^2 - 0.4 = 0$ નું બીજ 0.2 હોઈ શકે ? યથાર્થતા ચકાસો.

7. જો $b = 0$, $c < 0$ હોય, તો સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ અંકીય સમાન અને વિષમ ચિહ્નવાળા હોય તે સત્ય છે ? યથાર્થતા ચકાસો.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : દ્વિઘાત સૂત્રની મદદથી દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - \sqrt{5}x - 2 = 0$ નાં બીજ શોધો.

ઉકેલ : $b^2 - 4ac = 5 - 4 \times 2 \times (-2) = 21$

આથી, સમીકરણનાં બીજ $\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{21}}{4}$ અર્થાત્ $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{21}}{4}$ અને $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{21}}{4}$ છે.

ઉદાહરણ 2 : સમીકરણ $6x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 0$ નાં બીજ અનુરૂપ દ્વિઘાત બહુપદીના અવયવની રીતે શોધો.

ઉકેલ : $6x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 6x^2 - 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x - 2$
 $= 3x(2x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(2x - \sqrt{2})$
 $= (3x + \sqrt{2})(2x - \sqrt{2})$

હવે, $6x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 0$ પરથી, $(3x + \sqrt{2})(2x - \sqrt{2}) = 0$ મળે, એટલે કે $3x + \sqrt{2} = 0$ અથવા $2x - \sqrt{2} = 0$

આથી, સમીકરણનાં બીજ $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ અથવા $\frac{\sqrt{2}}{2}$ છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. દ્વિઘાત સૂત્રની મદદથી નીચેનાં પૈકી પ્રત્યેક દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવો :

- | | |
|---|----------------------------------|
| (i) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ | (ii) $5x^2 + 13x + 8 = 0$ |
| (iii) $-3x^2 + 5x + 12 = 0$ | (iv) $-x^2 + 7x - 10 = 0$ |
| (v) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$ | (vi) $x^2 - 3\sqrt{5}x + 10 = 0$ |
| (vii) $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{11}x + 1 = 0$ | |

2. અવયવીકરણની રીતે નીચેનાં પૈકી પ્રત્યેક દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવો :

- | | |
|--|---|
| (i) $2x^2 + \frac{5}{3}x - 2 = 0$ | (ii) $\frac{2}{5}x^2 - x - \frac{3}{5} = 0$ |
| (iii) $3\sqrt{2}x^2 - 5x - \sqrt{2} = 0$ | (iv) $3x^2 + 5\sqrt{5}x - 10 = 0$ |
| (v) $21x^2 - 2x + \frac{1}{21} = 0$ | |

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : સમીકરણ $6x^2 - 7x + 2 = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક છે કે નહિ તે ચકાસો અને જો વાસ્તવિક બીજ હોય, તો પૂર્ણવર્ગની રીતે મેળવો.

ઉકેલ : વિવેચક $= b^2 - 4ac = 49 - 4 \times 6 \times 2 = 1 > 0$

આથી, સમીકરણને બે વાસ્તવિક બીજ મળે.

હવે, $6x^2 - 7x + 2 = 0$

$$\text{અર્થાત્ } 36x^2 - 42x + 12 = 0$$

$$\text{અર્થાત્ } \left(6x - \frac{7}{2}\right)^2 + 12 - \frac{49}{4} = 0$$

$$\text{અર્થાત્ } \left(6x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \text{ અથવા } \left(6x - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{તેથી સમીકરણનાં બીજ } 6x - \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2} \text{ થાય.}$$

$$\text{અર્થાત્ } 6x = 4 \text{ અથવા } 3$$

$$\text{અર્થાત્ } x = \frac{2}{3} \text{ અથવા } \frac{1}{2}.$$

ઉદાહરણ 2 : ગણિતની 30 ગુણની પરીક્ષામાં જો અજ્ઞતાએ 10 ગુણ વધારે મેળવ્યા હોત, તો આ ગુણના 9 ગણા એ તેણે ખરેખર મેળવેલા ગુણના વર્ગ બરાબર થાત, તો તેણે પરીક્ષામાં કેટલા ગુણ મેળવ્યા હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે તેણે પ્રાપ્ત કરેલા ખરેખર ગુણ x છે.

$$\text{આથી, } 9(x+10) = x^2$$

$$\therefore x^2 - 9x - 90 = 0$$

$$\therefore x^2 - 15x + 6x - 90 = 0$$

$$\therefore x(x-15) + 6(x-15) = 0$$

$$\therefore (x+6)(x-15) = 0$$

$$\text{આથી, } x = -6 \text{ અથવા } x = 15$$

x એ મેળવેલા ગુણ હોવાથી, $x \neq -6$. આથી, $x = 15$.

તેથી, અજ્ઞતાએ ગણિતની પરીક્ષામાં 15 ગુણ મેળવ્યા હશે.

ઉદાહરણ 3 : એક ટ્રેન નિશ્ચિત સરેરાશ ઝડપે 63 કિમી અંતર કાપે છે. ત્યાર પછી તે મૂળ ઝડપથી 6 કિમી/કલાક વધુ સરેરાશ ઝડપે 72 કિમી અંતર કાપે છે. પૂરેપૂરી મુસાફરી કરતાં જો તેને 3 કલાક લાગે, તો તેની મૂળ સરેરાશ ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ટ્રેનની મૂળ સરેરાશ ઝડપ x કિમી/કલાક છે.

$$\text{આથી, } \frac{63}{x} + \frac{72}{x+6} = 3$$

$$\therefore \frac{7}{x} + \frac{8}{x+6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{7(x+6)+8x}{x(x+6)} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 21(x+6) + 24x = x(x+6)$$

$$\therefore 21x + 126 + 24x = x^2 + 6x$$

$$\therefore x^2 - 39x - 126 = 0$$

$$\therefore (x + 3)(x - 42) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ અથવા } x = 42$$

x એ ટ્રેનની સરેરાશ ઝડપ હોવાથી, x ઋણ હોઈ શકે નહિ.

આથી, $x = 42$.

તેથી, ટ્રેનની મૂળ સરેરાશ ઝડપ 42 કિમી/કલાક છે.

સ્વાધ્યાય 4.4

1. નીચેનાં સમીકરણોને વાસ્તવિક બીજ છે કે નહિ તે જણાવો. જો વાસ્તવિક બીજનું અસ્તિત્વ હોય, તો તે શોધો :

(i) $8x^2 + 2x - 3 = 0$

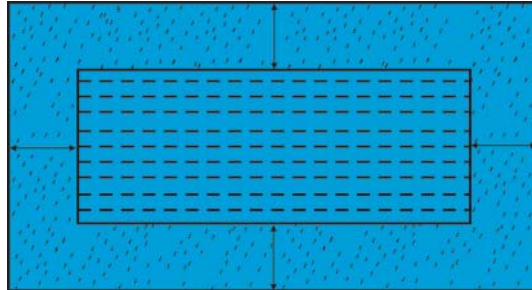
(ii) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

(iii) $5x^2 - 2x - 10 = 0$

(iv) $\frac{1}{2x-3} + \frac{1}{x-5} = 1, x \neq \frac{3}{2}, 5$

(v) $x^2 + 5\sqrt{5}x - 70 = 0$

2. જો એક પ્રાકૃતિક સંખ્યાના વર્ગમાંથી 84 નો ઘટાડો કરવામાં આવે, તો તે મૂળ સંખ્યામાં 8 ઉમેરીને મળતી સંખ્યાના ત્રણ ગણા થાય છે. આ સંખ્યા શોધો.
3. જો એક પ્રાકૃતિક સંખ્યામાં 12 નો વધારો કરીએ, તો તે તેના વ્યસ્તના 160 ગણી થાય છે, આ સંખ્યા શોધો.
4. એક ટ્રેન એકધારી ઝડપે 360 કિમી અંતર કાપે છે. જો ટ્રેનની ઝડપ 5 કિમી/કલાક વધારીએ, તો તેટલું જ અંતર કાપવા માટે 48 મિનિટ ઓછી લાગી હોત. ટ્રેનની મૂળ ઝડપ શોધો.
5. જો ઝેબાની ખરેખર જે ઉંમર છે તેના કરતાં 5 વર્ષ નાની હોય, તો તેની ઉંમર (વર્ષમાં)નો વર્ગ એ ખરેખર ઉંમરના પાંચ ગણા કરતાં 11 વર્ષ વધારે થાય. અત્યારે તેની ઉંમર કેટલી હશે ?
6. આશાની હાલની ઉંમર (વર્ષમાં) તેની પુત્રી નિશાની ઉંમરના વર્ગ કરતાં 2 વધારે છે. જ્યારે નિશા તેની માતાની હાલની ઉંમર જેટલી થાય, ત્યારે આશાની ઉંમર, નિશાની હાલની ઉંમરના 10 ગણા કરતાં એક વર્ષ ઓછી હોય, તો આશા અને નિશા, બંનેની હાલની ઉંમર શોધો.
7. 50 મી × 40 મી માપવાળી લંબચોરસ ઘાસવાળી ભૂમિના મધ્ય ભાગમાં, એક લંબચોરસ તળાવ બનાવવું છે કે જેથી તળાવની આસપાસ ઘાસનું ક્ષેત્રફળ 1184 મી² [આકૃતિ 4.1માં જુઓ.] રહે. તળાવની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.



આકૃતિ 4.1

8. બપોરના 2 વાગ્યાને t મિનિટે, ઘડિયાળમાં મિનિટકાંટાને બપોરના 3 કલાક પર આવવા માટે $\frac{t^2}{4}$ મિનિટ કરતાં 3 મિનિટ ઓછો સમય લાગે છે. t શોધો. ■

સમાંતર શ્રેણી

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- પ્રથમ પદ a સિવાયનું કોઈ પણ પદ આગળના પદમાં નિશ્ચિત સંખ્યા d ઉમેરવાથી મળે તેવી સંખ્યાઓની યાદીને સમાંતર શ્રેણી કહે છે. નિશ્ચિત સંખ્યા d ને સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત કહે છે.
સમાંતર શ્રેણીનું વ્યાપક સ્વરૂપ $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$
- જો તફાવત $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$ એકસમાન મૂલ્ય આપે, અર્થાત્ પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા k માટે $a_{k+1} - a_k$ સમાન થાય, તો સંખ્યાઓની યાદી a_1, a_2, a_3, \dots સમાંતર શ્રેણી છે.
- સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ (અથવા વ્યાપક પદ) $a_n = a + (n - 1) d$ છે. અહીં a એ પ્રથમ પદ અને d સામાન્ય તફાવત છે. નોંધીશું કે $a_1 = a$.
- સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$$

જો n પદોવાળી સમાંતર શ્રેણીનું છેલ્લું પદ l હોય, તો આ તમામ પદોનો સરવાળો

$$S_n = \frac{n}{2} [a + l] \text{ થી પણ મળે છે.}$$

કેટલીક વખત S_n ને S વડે પણ દર્શાવાય છે.

- જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો S_n હોય, તો તેનું n મું પદ

$$n > 1 \text{ માટે } a_n = S_n - S_{n-1} \text{ થાય.} \quad \text{વળી, } a_1 = S_1$$

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 અને 2 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : સમાંતર શ્રેણી 5, 8, 11, 14, ... નું 10 મું પદ

- (A) 32 (B) 35 (C) 38 (D) 185

ઉકેલ : અહીં $a = 5$, $d = 8 - 5 = 3$

$$\therefore a_{10} = a + (n - 1)d = 5 + 9 \times 3 = 5 + 27 = 32$$

ઉત્તર (A)

ઉદાહરણ 2 : જો સમાંતર શ્રેણીમાં $a = -7.2$, $d = 3.6$ અને $a_n = 7.2$ હોય, તો $n = \dots\dots\dots$

- (A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5

ઉકેલ : $a_n = a + (n - 1)d$

$$\therefore 7.2 = (-7.2) + (n - 1)(3.6)$$

$$\therefore 14.4 = (n - 1)(3.6)$$

$$\therefore \frac{14.4}{3.6} = (n - 1)$$

$$\therefore 4 + 1 = n$$

$$\therefore n = 5$$

ઉત્તર (D)

સ્વાધ્યાય 5.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 18 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. જો સમાંતર શ્રેણીમાં $d = -4$, $n = 7$, $a_n = 4$, હોય, તો $a = \dots\dots\dots$

- (A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

2. જો સમાંતર શ્રેણીમાં $a = 3.5$, $d = 0$, $n = 101$, હોય, તો $a_n = \dots\dots\dots$

- (A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

3. $-10, -6, -2, 2, \dots$ સંખ્યાઓની યાદી

(A) $d = -16$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી છે. (B) $d = 4$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી છે.

(C) $d = -4$ હોય તેવી સમાંતર શ્રેણી છે. (D) સમાંતર શ્રેણી નથી.

4. સમાંતર શ્રેણી : $-5, \frac{-5}{2}, 0, \frac{5}{2}, \dots$ નું 11 મું પદ

- (A) -20 (B) 20 (C) -30 (D) 30

5. જેનું પ્રથમ પદ -2 અને સામાન્ય તફાવત -2 હોય, તેવી સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ચાર પદો

(A) $-2, 0, 2, 4$ (B) $-2, 4, -8, 16$

(C) $-2, -4, -6, -8$ (D) $-2, -4, -8, -16$

6. જેનાં પ્રથમ બે પદો -3 અને 4 હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીનું 21 મું પદ

- (A) 17 (B) 137 (C) 143 (D) -143

7. જો સમાંતર શ્રેણીનું બીજું પદ 13 અને 5 મું પદ 25 હોય, તો આ શ્રેણીનું 7 મું પદ કેટલું થશે ?

- (A) 30 (B) 33 (C) 37 (D) 38

8. સમાંતર શ્રેણી : 21, 42, 63, 84,... નું કેટલામું પદ 210 છે ?
 (A) 9 મું (B) 10 મું (C) 11 મું (D) 12 મું
9. જો એક સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત 5 હોય, તો $a_{18} - a_{13}$ નું મૂલ્ય કેટલું થાય ?
 (A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30
10. જો કોઈ સમાંતર શ્રેણી માટે $a_{18} - a_{14} = 32$ હોય, તો તે સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત શું હશે ?
 (A) 8 (B) -8 (C) -4 (D) 4
11. બે સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત સમાન છે. આમાંની એક શ્રેણીનું પ્રથમ પદ -1 અને બીજી શ્રેણીનું પ્રથમ પદ -8 છે. તેમના ચોથા પદનો તફાવત છે.
 (A) -1 (B) -8 (C) 7 (D) -9
12. એક સમાંતર શ્રેણીના 7 માં પદના 7 ગણા એ 11 માં પદના 11 ગણા બરાબર થાય, તો તેનું 18 મું પદ થાય.
 (A) 7 (B) 11 (C) 18 (D) 0
13. સમાંતર શ્રેણી : -11, -8, -5, ..., 49 ના અંતિમ પદથી 4 થું પદ થાય.
 (A) 37 (B) 40 (C) 43 (D) 58
14. પ્રથમ 100 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધવા માટેના પ્રસંગ સાથે સંકળાયેલ પ્રખ્યાત ગણિતજ્ઞનું નામ છે.
 (A) પાયથાગોરસ (B) ન્યૂટન (C) ગાઉસ (D) યુક્લિડ
15. એક સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ -5 અને સામાન્ય તફાવત 2 હોય, તો તેનાં પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો છે.
 (A) 0 (B) 5 (C) 6 (D) 15
16. સમાંતર શ્રેણી 10, 6, 2,... નાં પ્રથમ 16 પદોનો સરવાળો છે.
 (A) -320 (B) 320 (C) -352 (D) -400
17. એક સમાંતર શ્રેણીના સંદર્ભમાં જો $a = 1$, $a_n = 20$ અને $S_n = 399$ હોય, તો $n =$
 (A) 19 (B) 21 (C) 38 (D) 42
18. સંખ્યા 3 ના પ્રથમ પાંચ ગુણિતોનો સરવાળો છે.
 (A) 45 (B) 55 (C) 65 (D) 75

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : સમાંતર શ્રેણી : 10, 5, 0, -5, ... નો સામાન્ય તફાવત $d = 5$ છે.

ઉપરનું વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે ચકાસો.

ઉકેલ : $a_2 - a_1 = 5 - 10 = -5$

સામાન્ય તફાવત $d = -5$ છે.

આથી આપેલું વિધાન અસત્ય છે.

ઉદાહરણ 2 : વાર્ષિક 10 ટકાના ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજના દરે દિવ્યાએ ₹ 1000 નું રોકાણ કર્યું. પ્રથમ વર્ષ, દ્વિતીય વર્ષ, તૃતીય વર્ષ, ના અંતે થતી રકમ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. તમારો ઉત્તર ચકાસો.

ઉકેલ : પ્રથમ વર્ષના અંતે થતી રકમ = ₹ 1100

બીજા વર્ષના અંતે થતી રકમ = ₹ 1210

ત્રીજા વર્ષના અંતે થતી રકમ = ₹ 1331 અને તે રીતે આગળ.

આથી પ્રથમ વર્ષ, દ્વિતીય વર્ષ, તૃતીય વર્ષ,... ના અંતે થતી રકમ (₹ માં)

1100, 1210, 1331, ...

અહીં, $a_2 - a_1 = 110$

$a_3 - a_2 = 121$

$a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ હોવાથી, તે સમાંતર શ્રેણી બનાવશે નહિ.

ઉદાહરણ 3 : પ્રત્યેક ધન પૂર્ણાંક n માટે સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ $n^2 + 1$ હોય તે શક્ય નથી. તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં, $a_n = n^2 + 1$

આથી, $a_1 = 1^2 + 1 = 2$

$a_2 = 2^2 + 1 = 5$

$a_3 = 3^2 + 1 = 10$

⋮

સંખ્યાઓની યાદી 2, 5, 10, ...

અહીં, $5 - 2 \neq 10 - 5$. આથી તે સમાંતર શ્રેણી બનાવશે નહિ. આથી આપેલ વિધાન સત્ય છે.

વૈકલ્પિક ઉકેલ 1 : આપણે જાણીએ છીએ કે, સમાંતર શ્રેણીમાં, $d = a_n - a_{n-1}$

અહીં, $a_n = n^2 + 1$

તેથી, $a_n - a_{n-1} = (n^2 + 1) - [(n-1)^2 + 1]$
 $= 2n - 1$

$a_n - a_{n-1}$ એ n પર આધારિત છે, આથી d અચળ સંખ્યા નથી.

તેથી, $a_n = n^2 + 1$ એ સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ નથી.

વૈકલ્પિક ઉકેલ 2 : આપણે જાણીએ છીએ કે સમાંતર શ્રેણીમાં

$a_n = a + (n-1)d$ છે. નિરીક્ષણ કરીશું કે a_n એ n માં સુરેખ બહુપદી છે.

અહીં, $a_n = n^2 + 1$ એ n માં સુરેખ બહુપદી નથી. આથી, તે સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ નથી.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. નીચેનામાંથી કઈ શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો :

(i) $-1, -1, -1, -1, \dots$

(ii) $0, 2, 0, 2, \dots$

(iii) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$

(iv) $11, 22, 33, \dots$

(v) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

(vi) $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$

(vii) $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{48}, \dots$

2. $-1, -\frac{3}{2}, -2, \frac{5}{2}, \dots$ માં $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ પરથી આ સમાંતર શ્રેણી છે તેમ કહેવું સત્ય છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.
3. સમાંતર શ્રેણી : $-3, -7, -11, \dots$, પરથી આપણે a_{30} અને a_{20} શોધ્યા સિવાય સીધા જ $a_{30} - a_{20}$ મેળવી શકીએ ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.
4. બે સમાંતર શ્રેણીનો સામાન્ય તફાવત સમાન છે. પ્રથમ સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 2 અને બીજી સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 7 છે. તેમનાં 10 મા પદોનો તફાવત અને 21મા પદોનો તફાવત સમાન છે અને તે કોઈ પણ બે અનુરૂપ પદોના તફાવતને સમાન થાય છે. શા માટે ?
5. સમાંતર શ્રેણી : $31, 28, 25, \dots$ નું કોઈ પદ 0 હોઈ શકે ? તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા ચકાસો.
6. એક ટેક્સીનું પ્રથમ કિમીનું ભાડું ₹ 15 છે. ત્યાર પછીના દરેક કિમીનું ભાડું ₹ 8 છે. આ ભાડાની રકમો સમાંતર શ્રેણી બનાવતી નથી, કારણ કે પ્રત્યેક કિમી પછી તેનું કુલ ભાડું (₹ માં) $15, 8, 8, 8, \dots$ આ વિધાન સત્ય છે ? કારણ આપો.
7. નીચેનામાંથી કઈ સ્થિતિમાં યાદીમાં સમાયેલી સંખ્યાઓ સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે ? તમારા ઉત્તરનું કારણ આપો :
- (i) જ્યારે મહિનાની ફી ₹ 400 હોય, ત્યારે વિદ્યાર્થી પાસેથી પ્રત્યેક મહિને એક શાળા દ્વારા વસૂલવામાં આવતી આખા વર્ષની ફી.
- (ii) જ્યારે ધોરણ I ની મહિનાની ફી ₹ 250 અને તે પછીના ઉપરના ધોરણ માટે ₹ 50 વધતી હોય ત્યારે એક શાળાએ ધોરણ I થી XII માં પ્રત્યેક મહિને વસૂલેલી ફી.
- (iii) જ્યારે પ્રતિ વર્ષ 10 ટકાના સાદા વ્યાજે ₹ 1000 જમા કરવામાં આવે, ત્યારે વરુણના ખાતામાં પ્રત્યેક વર્ષના અંતે જમા થતી રકમ.
- (iv) જ્યારે પ્રત્યેક સેકન્ડે બેક્ટેરિયાની સંખ્યા બમણી થતી હોય, ત્યારે પ્રત્યેક સેકન્ડ પછી ખાદ્યસામગ્રીમાં મળતા બેક્ટેરિયાની સંખ્યા.
8. નીચે આપેલું એક શ્રેણીનું વ્યાપક n મું પદ સમાંતર શ્રેણીનું છે તે કહેવું સત્ય છે ? યથાર્થતા ચકાસો.
- (i) $2n - 3$ (ii) $3n^2 + 5$ (iii) $1 + n + n^2$

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : જો સંખ્યાઓ $n - 2, 4n - 1$ અને $5n + 2$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો n નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $n - 2, 4n - 1, 5n + 2$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોવાથી,

$$(4n - 1) - (n - 2) = (5n + 2) - (4n - 1)$$

અર્થાત્, $3n + 1 = n + 3$

તેથી, $n = 1$

ઉદાહરણ 2 : સમાંતર શ્રેણી : $-11, -7, -3, \dots, 49$ ના મધ્યમ પદ (પદો)નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = -11, d = -7 - (-11) = 4, a_n = 49$

$$\text{હવે, } a_n = a + (n - 1) d$$

$$\therefore 49 = -11 + (n - 1) \times 4$$

$$\therefore 60 = (n - 1) \times 4$$

$$\therefore n = 16$$

n યુગ્મ સંખ્યા હોવાથી, બે મધ્યમ પદો મળે, તે $\frac{16}{2}$ મું અને $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ મું એટલે કે, 8 મું પદ અને 9 મું પદ.

$$a_8 = a + 7d = -11 + 7 \times 4 = 17 \text{ અને}$$

$$a_9 = a + 8d = -11 + 8 \times 4 = 21$$

તેથી, બે મધ્યમ પદો 17 અને 21 છે.

ઉદાહરણ 3 : એક સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 33 છે. જો પ્રથમ પદ અને ત્રીજા પદનો ગુણાકાર, બીજા પદ કરતાં 29 જેટલો વધારે હોય, તો તે સમાંતર શ્રેણી શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ પદો $a - d$, a , $a + d$ છે.

$$\text{તેથી, } a - d + a + a + d = 33. \text{ આથી } a = 11$$

$$\text{વળી, } (a - d)(a + d) = a + 29$$

$$\text{એટલે કે, } a^2 - d^2 = a + 29$$

$$\therefore 121 - d^2 = 11 + 29$$

$$\therefore d^2 = 81$$

$$\therefore d = \pm 9$$

આથી, બે સમાંતર શ્રેણી મળે અને તે 2, 11, 20, ... તથા 20, 11, 2, ...

સ્વાધ્યાય 5.3

1. વિભાગ A ની સમાંતર શ્રેણીને સંગત, વિભાગ B ના યોગ્ય સામાન્ય તફાવત સાથે જોડો.

વિભાગ A

વિભાગ B

$$(A_1) \quad 2, -2, -6, -10, \dots$$

$$(B_1) \quad \frac{2}{3}$$

$$(A_2) \quad a = -18, n = 10, a_n = 0$$

$$(B_2) \quad -5$$

$$(A_3) \quad a = 0, a_{10} = 6$$

$$(B_3) \quad 4$$

$$(A_4) \quad a_2 = 13, a_4 = 3$$

$$(B_4) \quad -4$$

$$(B_5) \quad 2$$

$$(B_6) \quad \frac{1}{2}$$

$$(B_7) \quad 5$$

2. નીચેની પ્રત્યેક શ્રેણી સમાંતર શ્રેણી છે કે કેમ તે ચકાસો અને પછી તેમનાં આપેલાં પદો પછીનાં ત્રણ પદો લખો :

$$(i) \quad 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots$$

$$(ii) \quad 5, \frac{14}{3}, \frac{13}{3}, 4, \dots$$

$$(iii) \quad \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \dots$$

$$(iv) \quad a + b, (a + 1) + b, (a + 1) + (b + 1), \dots$$

$$(v) \quad a, 2a + 1, 3a + 2, 4a + 3, \dots$$

3. નીચે સમાંતર શ્રેણીનાં a અને d આપ્યાં છે, પ્રથમ ત્રણ પદો લખો :

(i) $a = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{6}$

(ii) $a = -5, d = -3$

(iii) $a = \sqrt{2}, d = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4. સંખ્યાઓ $a, 7, b, 23, c$ સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો a, b અને c શોધો.
5. જે શ્રેણીનું પાંચમું પદ 19 તથા તેરમા પદ અને આઠમા પદનો તફાવત 20 હોય, તે સમાંતર શ્રેણી મેળવો.
6. એક સમાંતર શ્રેણીનું 26 મું, 11મું અને છેલ્લું પદ અનુક્રમે 0, 3 અને $-\frac{1}{5}$ છે. સામાન્ય તફાવત અને પદોની કુલ સંખ્યા શોધો.
7. એક સમાંતર શ્રેણીનાં 5 મા અને 7 મા પદોનો સરવાળો 52 અને 10 મું પદ 46 છે આ સમાંતર શ્રેણી શોધો.
8. જો સમાંતર શ્રેણીનું 7 મું પદ એ 11 મા પદ કરતાં 24 ઓછું હોય તથા પ્રથમ પદ 12 હોય, તો તે શ્રેણીનું 20 મું પદ શોધો.
9. જો સમાંતર શ્રેણીનું 9 મું પદ શૂન્ય હોય, તો સાબિત કરો કે તેનું 29 મું પદ એ 19 મા પદથી બમણું છે.
10. સમાંતર શ્રેણી 7, 10, 13,..... નું કોઈક પદ 55 છે કે નહિ ? જો હા, તો તે કેટલામું પદ છે ?
11. $k^2 + 4k + 8, 2k^2 + 3k + 6, 3k^2 + 4k + 4$ સમાંતર શ્રેણીનાં ત્રણ ક્રમિક પદો થાય તે માટે k નું મૂલ્ય મેળવો.
12. 207 નું ત્રણ ભાગમાં વિભાજન કરો કે જેથી તે સમાંતર શ્રેણીમાં હોય તથા તેમના બે નાના ભાગનો ગુણાકાર 4623 થાય.
13. એક ત્રિકોણના ખૂણાઓ સમાંતર શ્રેણીમાં છે. મોટામાં મોટો ખૂણો, સૌથી નાના ખૂણાથી બમણો છે. ત્રિકોણના બધા ખૂણાનાં માપ શોધો.
14. જો બે સમાંતર શ્રેણી 9, 7, 5, ... અને 24, 21, 18, ... ના n મા પદ સમાન હોય, તો n નું મૂલ્ય શોધો. તે પદ પણ શોધો.
15. જો સમાંતર શ્રેણીના ત્રીજા અને આઠમા પદનો સરવાળો 7 થાય અને સાતમા તથા ચૌદમા પદનો સરવાળો -3 હોય, તો 10 મું પદ શોધો.
16. સમાંતર શ્રેણી $-2, -4, -6, \dots, -100$ નું છેલ્લેથી 12 મું પદ શોધો.
17. સમાંતર શ્રેણી 53, 48, 43, ... નું પ્રથમ ત્રણ પદ કેટલામું પદ છે ?
18. 10 અને 300 વચ્ચે એવી કેટલી સંખ્યાઓ છે કે જેમને 4 વડે ભાગતાં શેષ 3 રહે ?
19. સમાંતર શ્રેણી $-\frac{4}{3}, -1, -\frac{2}{3}, \dots, 4\frac{1}{3}$ નાં બે મધ્યમ પદોનો સરવાળો શોધો.
20. સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ -5 અને છેલ્લું પદ 45 છે. જો આ સમાંતર શ્રેણીનાં પદોનો સરવાળો 120 હોય, તો પદોની કુલ સંખ્યા અને સામાન્ય તફાવત શોધો.

21. સરવાળો કરો :

(i) $1 + (-2) + (-5) + (-8) + \dots + (-236)$

(ii) $\left(4 - \frac{1}{n}\right) + \left(4 - \frac{2}{n}\right) + \left(4 - \frac{3}{n}\right) + \dots n$ પદ સુધી.

(iii) $\frac{a-b}{a+b} + \frac{3a-2b}{a+b} + \frac{5a-3b}{a+b} + \dots 11$ પદ સુધી.

22. સમાંતર શ્રેણી $-2, -7, -12, \dots$ નું કેટલામું પદ -77 છે ? આ સમાંતર શ્રેણીનું પદ -77 મળે ત્યાં સુધીનાં પદોનો સરવાળો શોધો.

23. જો $a_n = 3 - 4n$ હોય, તો દર્શાવો a_1, a_2, a_3, \dots સમાંતર શ્રેણી બનાવે છે. S_{20} પણ શોધો.

24. જો સમાંતર શ્રેણી માટે $S_n = n(4n + 1)$ હોય, તો તે શ્રેણી શોધો.

25. જો સમાંતર શ્રેણી માટે $S_n = 3n^2 + 5n$ અને $a_k = 164$ હોય, તો k શોધો.

26. જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો S_n હોય, તો સાબિત કરો કે $S_{12} = 3(S_8 - S_4)$

27. જે સમાંતર શ્રેણીનાં 4 થા અને 9 મા પદ અનુક્રમે -15 અને -30 હોય, તે સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 17 પદોનો સરવાળો શોધો.

28. જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો 36 અને પ્રથમ 16 પદોનો સરવાળો 256 હોય, તો પ્રથમ 10 પદોનો સરવાળો શોધો.

29. જે સમાંતર શ્રેણીનું મધ્યમ પદ 30 હોય, તેનાં પ્રથમ 11 પદોનો સરવાળો શોધો.

30. સમાંતર શ્રેણી : 8, 10, 12, ..., 126 નાં છેલ્લાં 10 પદોનો સરવાળો શોધો.

31. જે સંખ્યાઓ 2 અને 9 ની ગુણિત હોય, તેવી પ્રથમ સાત સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

[સૂચન : 2 અને 9 નો લ.સા.અ. લો.]

32. સમાંતર શ્રેણી : $-15, -13, -11, \dots$ નાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો -55 થાય તે માટે કેટલાં પદોનો સરવાળો કરવો જોઈએ ? બે ઉત્તર મળે છે તે માટેનું કારણ આપો.

33. પ્રથમ પદ 8 અને સામાન્ય તફાવત 20 હોય તેવી સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો એ પ્રથમ પદ -30 અને સામાન્ય તફાવત 8 હોય તેવી બીજી સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ $2n$ પદોના સરવાળા બરાબર હોય, તો n શોધો.

34. કનિકાને તેના ખિસ્સાખર્ચ માટે 1 જાન્યુઆરી 2008 ના રોજ કેટલાક રૂપિયા મળ્યા. તે આ રકમમાંથી, પ્રથમ દિવસે ₹ 1, બીજા દિવસે ₹ 2, ત્રીજા દિવસે ₹ 3 આ રીતે મહિનાના અંત સુધી તેની પિગી બેન્કમાં મૂકે છે. તે તેના ખિસ્સાખર્ચમાંથી ₹ 204 ખર્ચ પણ કરે છે અને મહિનાના અંતે હજુ તેની પાસે ₹ 100 બાકી રહે છે. તો આ મહિનામાં ખિસ્સાખર્ચ પેટે કેટલા રૂપિયા તેની પાસે હશે ?

35. યાસ્મિન પ્રથમ મહિના દરમિયાન ₹ 32, બીજા મહિને ₹ 36 અને ત્રીજા મહિને ₹ 40 બચાવે છે. જો તે આ પ્રમાણે બચત કરવાનું ચાલુ રાખે, તો કેટલા મહિનામાં તેની બચત ₹ 2000 થશે?

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : સમાંતર શ્રેણીની ચાર ક્રમિક સંખ્યાઓનો સરવાળો 32 છે અને પ્રથમ તથા છેલ્લા પદના ગુણાકારનો અને બે મધ્યમ પદોના ગુણાકારનો ગુણોત્તર 7 : 15 હોય, તો તે સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે સમાંતર શ્રેણીનાં ચાર ક્રમિક પદો

$$a - 3d, a - d, a + d, a + 3d \text{ છે.}$$

આથી, $a - 3d + a - d + a + d + a + 3d = 32$ **અથવા** $4a = 32$ **અથવા** $a = 8$

$$\text{વળી, } \frac{(a-3d)(a+3d)}{(a-d)(a+d)} = \frac{7}{15}$$

$$\therefore \frac{a^2 - 9d^2}{a^2 - d^2} = \frac{7}{15}$$

$$\therefore 15a^2 - 135d^2 = 7a^2 - 7d^2$$

$$\therefore 8a^2 - 128d^2 = 0$$

$$\therefore d^2 = \frac{8 \times 8 \times 8}{128} = 4$$

$$\therefore d = \pm 2$$

આથી, જ્યારે $a = 8, d = 2$ હોય ત્યારે તે સંખ્યાઓ 2, 6, 10, 14 છે.

જ્યારે $a = 8, d = -2$ હોય, ત્યારે તે સંખ્યાઓ 14, 10, 6, 2 છે.

ઉદાહરણ 2 : સમીકરણ $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + x = 287$ નો ઉકેલ શોધો.

ઉકેલ : $a = 1, d = 3, a_n = x$ હોય, તેવી સમાંતર શ્રેણી 1, 4, 7, 10, ..., x છે.

હવે, $a_n = a + (n-1)d$

આથી, $x = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$

$$\text{વળી, } S = \frac{n}{2}(a+l)$$

$$\text{આથી, } 287 = \frac{n}{2}(1+x) = \frac{n}{2}(1+3n-2)$$

$$\text{અથવા } 574 = n(3n-1)$$

$$\text{અથવા } 3n^2 - n - 574 = 0$$

$$\text{આથી, } n = \frac{1 \pm \sqrt{1+6888}}{6}$$

$$= \frac{1 \pm 83}{6} = \frac{84}{6} \quad \text{અથવા} \quad \frac{-82}{6}$$

$$= 14 \quad \text{અથવા} \quad \frac{-41}{3}$$

પરંતુ n નું મૂલ્ય ઋણ તથા અપૂર્ણાંક હોઈ શકે નહિ. આથી $n = 14$

તેથી, $x = 3n - 2 = 3 \times 14 - 2 = 40$.

વૈકલ્પિક રીત : અહીં 1, 4, 7, 10, ..., x એ સમાંતર શ્રેણી રચે છે. અહીં $a = 1, d = 3$ અને $S = 287$

$$\text{હવે, } S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\therefore 287 = \frac{n}{2}[2 + (n-1) \times 3]$$

$$\therefore 574 = n(3n - 1)$$

$$\therefore 3n^2 - n - 574 = 0$$

અને હવે ઉપર પ્રમાણે આગળ વધો.

સ્વાધ્યાય 5.4

1. સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો અને આ જ શ્રેણીનાં પ્રથમ સાત પદોનો સરવાળો સમાન અને તે 167 છે. જો આ જ શ્રેણીનાં પ્રથમ દસ પદોનો સરવાળો 235 હોય, તો આ શ્રેણીનાં પ્રથમ વીસ પદોનો સરવાળો શોધો.
2. (i) 2 અને 5 બંનેની ગુણિત હોય તેવી 1 અને 500 વચ્ચેની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
(ii) 2 અને 5 બંનેની ગુણિત હોય તેવી 1 થી 500 સુધીની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
(iii) 2 અથવા 5 ની ગુણિત હોય તેવી 1 થી 500 સુધીની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.
[સૂચન : (iii) : આ સંખ્યાઓ : 2 ની ગુણિત + 5 ની ગુણિત - 2 અને 5 બંનેની ગુણિત]
3. એક સમાંતર શ્રેણીનું આઠમું પદ તેના બીજા પદ કરતાં અડધું છે અને અગિયારમું પદ તેના ચોથા પદના $\frac{1}{3}$ થી 1 વધારે છે. શ્રેણીનું 15 મું પદ શોધો.
4. એક સમાંતર શ્રેણીમાં 37 પદો છે. બરાબર વચ્ચેનાં ત્રણ પદોનો સરવાળો 225 છે અને છેલ્લાં ત્રણ પદોનો સરવાળો 429 છે. સમાંતર શ્રેણી શોધો.
5. નીચે આપેલી શરતો પરથી, 100 અને 200 વચ્ચેના પૂર્ણાંકોનો સરવાળો શોધો :
(i) 9 વડે વિભાજ્ય હોય.
(ii) 9 વડે વિભાજ્ય ન હોય.
[સૂચન : (ii) : આ સંખ્યાઓ : કુલ સંખ્યા - 9 વડે વિભાજ્ય કુલ સંખ્યા]
6. સમાંતર શ્રેણીના 11 મા અને 18 મા પદનો ગુણોત્તર 2 : 3 હોય, તો 5 મા પદ અને 21 મા પદનો ગુણોત્તર શોધો તથા પ્રથમ પાંચ પદોના સરવાળાનો અને પ્રથમ 21 પદોના સરવાળાનો ગુણોત્તર શોધો.
7. જે સમાંતર શ્રેણીનું પ્રથમ પદ a , બીજું પદ b અને છેલ્લું પદ c હોય, તો દર્શાવો કે સરવાળો
$$\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$$
 છે.
8. સમીકરણ $-4 + (-1) + 2 + \dots + x = 437$ નો ઉકેલ શોધો.
9. જશપાલ સિંઘ તેમની કુલ લોન ₹ 1,18,000 એવી રીતે ચૂકવે છે કે શરૂઆતના પ્રથમ મહિને પ્રથમ હપતા પેટે ₹ 1000 આપે છે. જો તેઓ પ્રત્યેક મહિને તેમના હપતામાં ₹ 100 નો વધારો કરે, તો 30 માં હપતામાં તેમણે કેટલી રકમ ચૂકવી હશે ? 30 માં હપતા પછી હજુ લોનની કેટલી રકમ ચૂકવવાની બાકી હશે ?
10. શાળાના વિદ્યાર્થીઓ વાર્ષિકોત્સવ નિમિત્તે શાળાના એક સીધા વરંડામાં રંગીન ધજાઓ લગાવીને સુશોભિત કરવા ઈચ્છે છે. એ સર્વે દર બે મીટરના અંતરે કુલ 27 ધજાઓ લગાવવા ઈચ્છે છે. આ ધજાઓમાં વચ્ચેની ધજા જે સ્થાને લગાવવાની છે, તે સ્થાને બધી જ ધજાઓ મૂકેલી છે. ધજાઓ લગાવવાની જવાબદારી રુચિને આપવામાં આવી છે. જે સ્થાને ધજાઓ રાખી છે ત્યાં રુચિએ પોતાનાં પુસ્તકો મૂક્યાં છે. તે એક વખતમાં એક જ ધજા લઈ જાય છે. આ કાર્ય પૂર્ણ કરીને પાછા ફરતી વખતે પુસ્તકો લે છે તે દરમિયાન તેને કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ? ધજા સાથે લઈને તેને કેટલું મહત્તમ અંતર કાપ્યું હશે ?



ત્રિકોણ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- એકરૂપતા અને સમરૂપતા, બે બહુકોણની સમરૂપતાની શરતો, ત્રિકોણની સમરૂપતા, શિરોબિંદુઓની સંગતતા અને સમરૂપતા, ત્રિકોણની સમરૂપતાની શરતો : (i) ખૂખૂખૂ અથવા ખૂખૂ (ii) બાબાબા (iii) બાખૂબા.
- સમપ્રમાણતાનું મૂળભૂત પ્રમેય અને તેનું પ્રતીપ. જો ત્રિકોણની કોઈ એક બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા બાકીની બે બાજુઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે, તો તે બાજુઓ પર કપાતા રેખાખંડો તે બાજુઓનું સમપ્રમાણમાં વિભાજન કરે છે.
- બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર, તેમની અનુરૂપ બાજુઓની લંબાઈઓના વર્ગના ગુણોત્તર બરાબર હોય છે.
- કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણો બનાવતા શિરોબિંદુથી કર્ણ પર વેધ દોરવામાં આવે, તો તેથી બનતા બે ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણને સમરૂપ હોય છે અને આ બે ત્રિકોણો પરસ્પર પણ સમરૂપ હોય છે.
- પાયથાગોરસનું પ્રમેય અને તેનું પ્રતીપ. કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણની લંબાઈનો વર્ગ એ તે ત્રિકોણની બાકીની બાજુઓની લંબાઈના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

વિધાન સત્ય અને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 અને 2 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 6.1 માં, જીવાઓ AB અને CD નું છેદબિંદુ

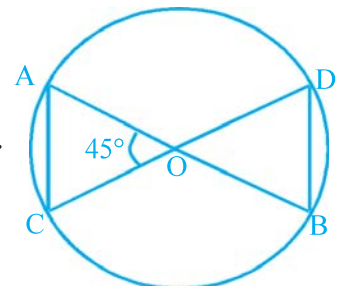
O છે તથા $OB = OD$ હોય, તો ત્રિકોણ OAC અને ODB

- (A) સમબાજુ છે પણ સમરૂપ નથી. (B) સમદ્વિબાજુ છે પણ સમરૂપ નથી.
 (C) સમબાજુ છે અને સમરૂપ છે. (D) સમદ્વિબાજુ છે અને સમરૂપ છે.

ઉકેલ : એક જ વૃત્તખંડ CADBમાં $\angle A = \angle D$

તે જ પ્રમાણે $\angle C = \angle B$. ખૂખૂ શરત પ્રમાણે ત્રિકોણ OAC અને ODB સમરૂપ છે.

ઉત્તર (D)

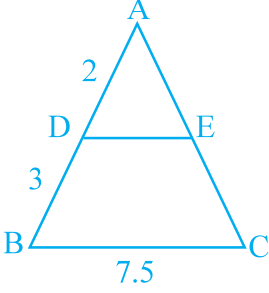


આકૃતિ 6.1

ઉદાહરણ 2 : D અને E એ ત્રિકોણ ABC ની બાજુઓ અનુક્રમે AB અને AC પરનાં એવાં બિંદુઓ છે કે જેથી $AD = 2$ સેમી, $BD = 3$ સેમી, $BC = 7.5$ સેમી તથા $DE \parallel BC$ થાય. તો DE ની લંબાઈ (સેમીમાં) છે.

- (A) 2.5 (B) 3 (C) 5 (D) 6

ઉકેલ :



$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ હોવાથી,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\therefore \frac{2}{5} = \frac{DE}{7.5}$$

$$\therefore \frac{2}{5} \times 7.5 = DE$$

$$\therefore 3 = DE$$

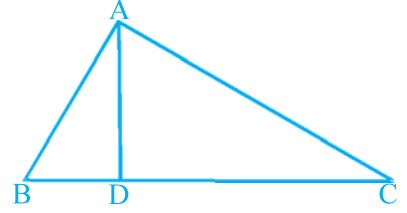
ઉત્તર (B)

સ્વાધ્યાય 6.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 12 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. આકૃતિ 6.2 માં, $\angle BAC = 90^\circ$ અને $AD \perp BC$ છે, તો

- (A) $BD \cdot CD = BC^2$ (B) $AB \cdot AC = BC^2$
(C) $BD \cdot CD = AD^2$ (D) $AB \cdot AC = AD^2$



આકૃતિ 6.2

2. સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોની લંબાઈ 16 સેમી અને 12 સેમી છે. આ સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુની લંબાઈ થાય.

- (A) 9 સેમી (B) 10 સેમી (C) 8 સેમી (D) 20 સેમી

3. જો $\triangle ABC \sim \triangle EDF$ તથા $\triangle ABC$ અને $\triangle DEF$ સમરૂપ ના હોય, તો નીચે આપેલ વિકલ્પોમાં કયો વિકલ્પ સત્ય નથી ?

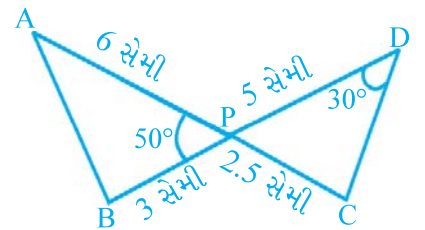
- (A) $BC \cdot EF = AC \cdot FD$ (B) $AB \cdot EF = AC \cdot DE$
(C) $BC \cdot DE = AB \cdot EF$ (D) $BC \cdot DE = AB \cdot FD$

4. જો ત્રિકોણ ABC અને PQRમાં $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ હોય, તો

- (A) $\triangle PQR \sim \triangle CAB$ (B) $\triangle PQR \sim \triangle ABC$
(C) $\triangle CBA \sim \triangle PQR$ (D) $\triangle BCA \sim \triangle PQR$

5. આકૃતિ 6.3 માં, બે રેખાખંડો AC અને BD પરસ્પર બિંદુ P માં છેદે છે. $PA = 6$ સેમી, $PB = 3$ સેમી, $PC = 2.5$ સેમી, $PD = 5$ સેમી, $\angle APB = 50^\circ$ અને $\angle CDP = 30^\circ$ હોય, તો $\angle PBA =$

- (A) 50° (B) 30° (C) 60° (D) 100°



આકૃતિ 6.3

6. જો બે ત્રિકોણો DEF અને PQR માં, $\angle D = \angle Q$ અને $\angle R = \angle E$, હોય તો નીચેનામાંથી કયો વિકલ્પ સત્ય નથી ?
- (A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$ (C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$
7. ત્રિકોણ ABC અને DEF માં, $\angle B = \angle E$, $\angle F = \angle C$ અને $AB = 3 DE$ છે. તો આ બે ત્રિકોણો
- (A) એકરૂપ છે પણ સમરૂપ નથી. (B) સમરૂપ છે પણ એકરૂપ નથી.
(C) એકરૂપ નથી અને સમરૂપ પણ નથી. (D) એકરૂપ પણ છે અને સમરૂપ પણ છે.
8. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ તથા $\frac{BC}{QR} = \frac{1}{3}$ આપેલ હોય, તો $\frac{ar(PQR)}{ar(BCA)} = \dots\dots\dots$
- (A) 9 (B) 3 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{9}$
9. $\Delta ABC \sim \Delta DFE$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 50^\circ$, $AB = 5$ સેમી, $AC = 8$ સેમી અને $DF = 7.5$ સેમી આપેલ હોય, તો નીચેના પૈકી
- (A) $DE = 12$ સેમી, $\angle F = 50^\circ$ (B) $DE = 12$ સેમી, $\angle F = 100^\circ$
(C) $EF = 12$ સેમી, $\angle D = 100^\circ$ (D) $EF = 12$ સેમી, $\angle D = 30^\circ$
10. જો ત્રિકોણ ABC અને DEF માં $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FD}$ અને
- (A) $\angle B = \angle E$ (B) $\angle A = \angle D$ (C) $\angle B = \angle D$ (D) $\angle A = \angle F$
11. જો $\Delta ABC \sim \Delta QRP$, $\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{9}{4}$, $AB = 18$ સેમી અને $BC = 15$ સેમી હોય, તો $PR = \dots\dots\dots$
- (A) 10 સેમી (B) 12 સેમી (C) $\frac{20}{3}$ સેમી (D) 8 સેમી
12. જો ΔPQR માં $PS = QS = RS$ થાય તે રીતે બાજુ PQ પર બિંદુ S આવેલું હોય, તો
- (A) $PR \cdot QR = RS^2$ (B) $QS^2 + RS^2 = QR^2$
(C) $PR^2 + QR^2 = PQ^2$ (D) $PS^2 + RS^2 = PR^2$

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : ΔABC માં, $AB = 24$ સેમી, $BC = 10$ સેમી અને $AC = 26$ સેમી છે. શું આપેલ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.

ઉકેલ : અહીં, $AB^2 = 576$, $BC^2 = 100$ અને $AC^2 = 676$.

તેથી, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ આમ આપેલ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

ઉદાહરણ 2 : ΔDEF માં બાજુઓ DE અને DF પર અનુક્રમે બે બિંદુઓ P અને Q છે. $DP = 5$ સેમી, $DE = 15$ સેમી, $DQ = 6$ સેમી અને $QF = 18$ સેમી છે. શું $PQ \parallel EF$ થશે ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{DP}{PE} = \frac{5}{15-5} = \frac{1}{2}$ અને $\frac{DQ}{QF} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

આમ, $\frac{DP}{PE} \neq \frac{DQ}{QF}$, માટે PQ અને EF સમાંતર નથી.

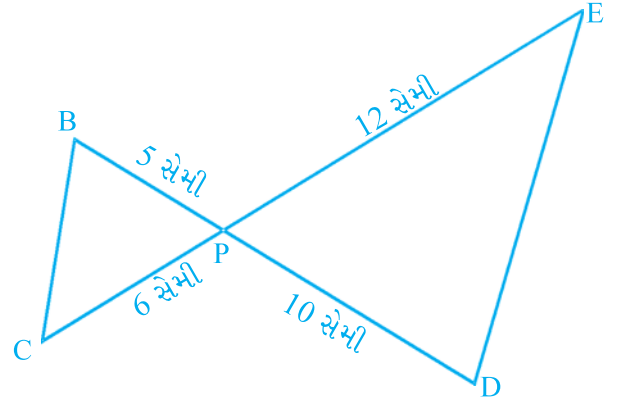
ઉદાહરણ 3 : $\Delta FED \sim \Delta STU$ આપેલ છે. $\frac{DE}{ST} = \frac{EF}{TU}$ સત્ય છે ? શા માટે ?

ઉકેલ : ના, કારણ કે સાચી સંગતતા $F \leftrightarrow S$, $E \leftrightarrow T$, $D \leftrightarrow U$ છે.

અને આ સંગતતા માટે $\frac{EF}{ST} = \frac{DE}{TU}$ થાય.

સ્વાધ્યાય 6.2

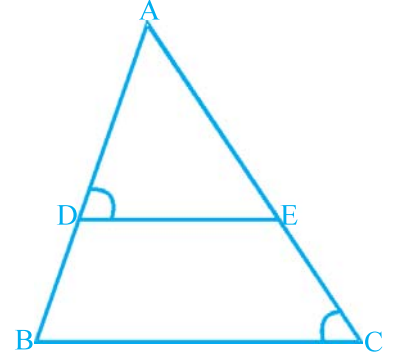
- જેની બાજુઓનાં માપ 25 સેમી, 5 સેમી અને 24 સેમી હોય તેવો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ મળે ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.
- $\Delta DEF \sim \Delta RPQ$ આપેલ છે. $\angle D = \angle R$ અને $\angle F = \angle P$ સત્ય છે ? શા માટે ?
- ΔPQR ની બાજુઓ PQ અને PR પર અનુક્રમે બિંદુઓ A અને B એ પ્રકારે આવેલા છે કે જેથી $PQ = 12.5$ સેમી, $PA = 5$ સેમી, $BR = 6$ સેમી અને $PB = 4$ સેમી છે. $AB \parallel QR$ છે ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.
- આકૃતિ 6.4 માં, BD અને CE પરસ્પર બિંદુ P માં છેદે છે. $\Delta PBC \sim \Delta PDE$ છે ? શા માટે ?



આકૃતિ 6.4

- ત્રિકોણો PQR અને MSTમાં, $\angle P = 55^\circ$, $\angle Q = 25^\circ$, $\angle M = 100^\circ$ અને $\angle S = 25^\circ$ છે. $\Delta QPR \sim \Delta TSM$ છે ? શા માટે ?
- નીચે આપેલ વિધાન સત્ય છે ? શા માટે ?
“જો બે ચતુષ્કોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય તો તે બે ચતુષ્કોણો સમરૂપ થાય.”
- કોઈ એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને પરિમિતિ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બે બાજુઓ તથા પરિમિતિથી ત્રણ ગણી છે. આ બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે ? કેમ ?
- જો બે કાટકોણ ત્રિકોણમાં, એક ત્રિકોણનો કોઈ એક લઘુકોણ બીજા ત્રિકોણના લઘુકોણને સમાન હોય, તો શું તમે કહી શકશો કે આ બે ત્રિકોણો સમરૂપ છે ? કેમ ?
- બે સમરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ વેધનો ગુણોત્તર $\frac{3}{5}$ છે. એવું કહી શકાય કે તેમનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર $\frac{6}{5}$ છે ? કેમ ?

10. ΔPQR ની બાજુ QR પર બિંદુ D એવું આવેલ છે કે જેથી $PD \perp QR$ થાય. $\Delta PQD \sim \Delta RPD$ છે તેમ કહી શકાય ? કેમ ?
11. આકૃતિ 6.5 માં, જો $\angle D = \angle C$ હોય, તો $\Delta ADE \sim \Delta ACB$ છે તેમ કહી શકાય ? કેમ ?
12. “જો બે ત્રિકોણોમાં, એક ત્રિકોણનો કોઈ એક ખૂણો બીજા ત્રિકોણના ખૂણાને સમાન હોય તથા પહેલા ત્રિકોણની બે બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓને સમપ્રમાણમાં હોય તો આ ત્રિકોણો સમરૂપ છે.” આ વિધાન સત્ય છે ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.



આકૃતિ 6.5

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : એક કાટકોણ ત્રિકોણમાં પાયા (કર્ણ સિવાયની અન્ય બે બાજુઓ)ની લંબાઈ 16 સેમી અને 8 સેમી છે. આ ત્રિકોણને અંતર્ગત મોટામાં મોટા ચોરસની બાજુની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\angle B$ કાટખૂણો હોય તેવો એક કાટકોણ ત્રિકોણ ABC છે તથા $AB = 16$ સેમી અને $BC = 8$ સેમી છે. આ ત્રિકોણમાં રચી શકાય તેવો મોટામાં મોટો ચોરસ $BRSP$ આકૃતિ 6.6 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે.

ધારો કે $PB = x$ સેમી

તેથી, $AP = (16-x)$ સેમી

ΔAPS અને ΔABC માં, $\angle A = \angle A$ અને $\angle APS = \angle ABC$ (પ્રત્યેક 90° ના છે.)

તેથી, $\Delta APS \sim \Delta ABC$ (ખૂબૂ સમરૂપતા)

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{PS}{BC}$$

$$\therefore \frac{16-x}{16} = \frac{x}{8}$$

$$\therefore 128 - 8x = 16x$$

$$\therefore x = \frac{128}{24} = \frac{16}{3}$$

આમ, માંગેલ ચોરસની બાજુની લંબાઈ $\frac{16}{3}$ સેમી છે.

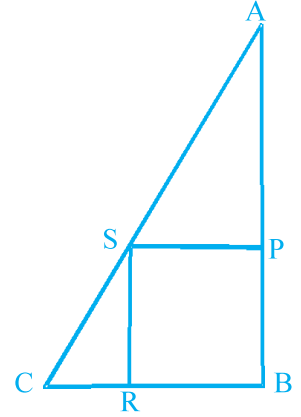
ઉદાહરણ 2 : કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણની લંબાઈ 25 સેમી છે અને અન્ય બે બાજુઓમાંથી એક બાજુની લંબાઈ બીજી બાજુ કરતાં 5 સેમી વધારે છે, તો અન્ય બે બાજુઓની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે કોઈ એક બાજુની લંબાઈ x સેમી છે. તેથી બીજી બાજુની લંબાઈ $(x + 5)$ સેમી થાય.

માટે પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી,

$$x^2 + (x + 5)^2 = (25)^2$$

$$\therefore x^2 + x^2 + 10x + 25 = 625$$



આકૃતિ 6.6

$$\therefore x^2 + 5x - 300 = 0$$

$$\therefore x^2 + 20x - 15x - 300 = 0$$

$$\therefore x(x+20) - 15(x+20) = 0$$

$$\therefore (x-15)(x+20) = 0$$

તેથી $x = 15$ અથવા $x = -20$

કોઈ પણ બાજુની લંબાઈ ઋણ ના હોઈ શકે. આથી $x = -20$ શક્ય નથી. તેથી $x = 15$ સેમી અને

બીજી બાજુની લંબાઈ = $(15 + 5)$ સેમી = 20 સેમી

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 6.7 માં

$$\angle D = \angle E \text{ અને } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ છે.}$$

સાબિત કરો કે ΔBAC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

$$\text{ઉકેલ : } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ (આપેલ છે.)}$$

માટે, $DE \parallel BC$

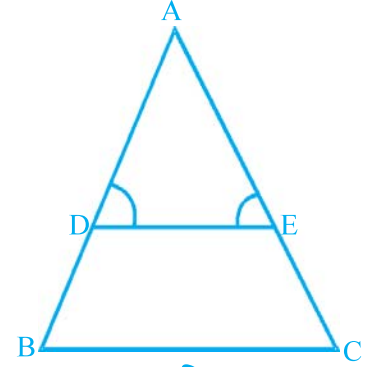
તેથી, $\angle D = \angle B$ અને $\angle E = \angle C$ (અનુરૂપ ખૂણાઓ)

પરંતુ, $\angle D = \angle E$

માટે, $\angle B = \angle C$

તેથી, $AB = AC$

એટલે કે, ΔBAC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 6.7

(સમપ્રમાણતાના મૂળભૂત પ્રમેયનું પ્રતીપ)

(1)

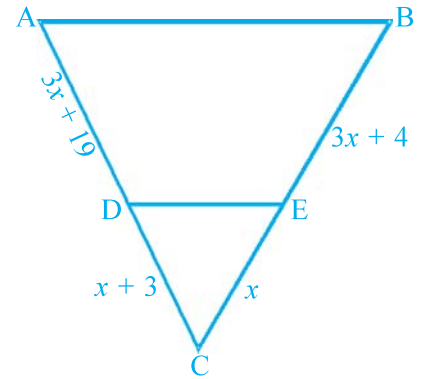
(આપેલ છે.)

[પરિણામ (1) પરથી]

(સમાન ખૂણાની સામેની બાજુઓ)

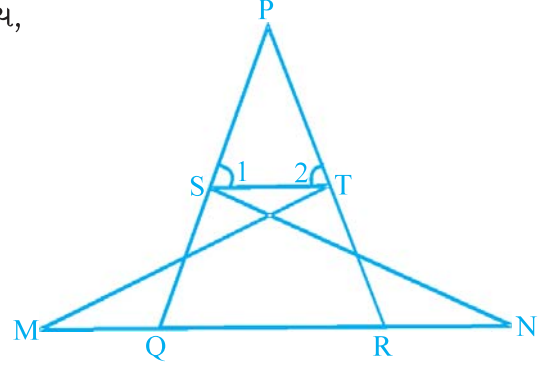
સ્વાધ્યાય 6.3

1. ΔPQR માં, $PR^2 - PQ^2 = QR^2$ તથા M એ બાજુ PR નું એવું બિંદુ છે કે જેથી $QM \perp PR$. સાબિત કરો કે $QM^2 = PM \times MR$.
2. આકૃતિ 6.8 માં, $DE \parallel AB$ છે, તો x નું મૂલ્ય શોધો.



આકૃતિ 6.8

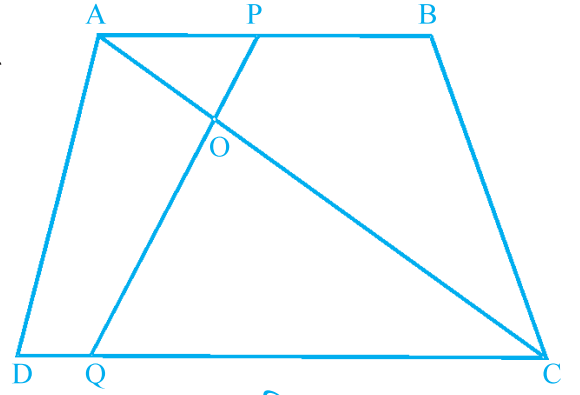
3. આકૃતિ 6.9 માં, જો $\angle 1 = \angle 2$ અને $\Delta NSQ \cong \Delta MTR$ હોય, તો સાબિત કરો કે, $\Delta PTS \sim \Delta PRQ$.



આકૃતિ 6.9

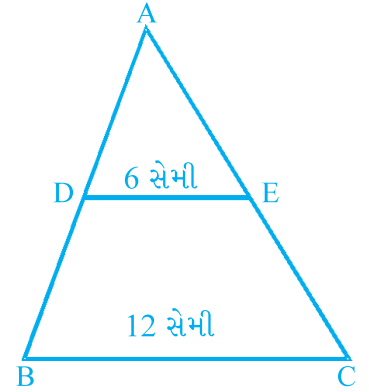
4. સમલંબ ચતુષ્કોણ PQRS ના વિકર્ણો પરસ્પર બિંદુ O માં છેદે છે. $PQ \parallel RS$ અને $PQ = 3 RS$ છે. ત્રિકોણો POQ અને ROS નાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

5. આકૃતિ 6.10 માં, જો $AB \parallel DC$ અને AC અને PQ પરસ્પર બિંદુ O માં છેદે, તો સાબિત કરો કે, $OA \cdot CQ = OC \cdot AP$.



આકૃતિ 6.10

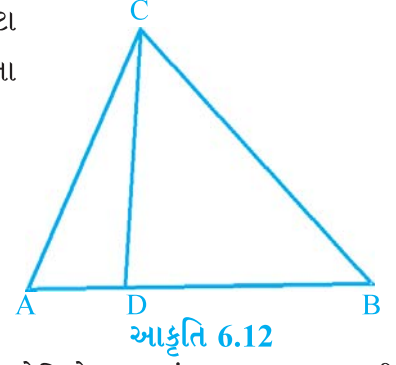
6. એક સમબાજુ ત્રિકોણમાં બાજુની લંબાઈ 8 સેમી હોય તો તેના વેધની લંબાઈ શોધો.
7. જો $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 4$ સેમી, $DE = 6$ સેમી, $EF = 9$ સેમી અને $FD = 12$ સેમી હોય, તો ΔABC ની પરિમિતિ શોધો.
8. આકૃતિ 6.11 માં, જો $DE \parallel BC$ હોય, તો $ar (ADE)$ અને $ar (DECB)$ નો ગુણોત્તર શોધો.



આકૃતિ 6.11

9. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં $AB \parallel DC$ છે. P અને Q એ અનુક્રમે બાજુઓ AD અને BC પર $PQ \parallel DC$ થાય તે રીતે આવેલાં બિંદુઓ છે. જો $PD = 18$ સેમી, $BQ = 35$ સેમી અને $QC = 15$ સેમી હોય, તો AD શોધો.
10. બે સમરૂપ ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ બાજુઓનો ગુણોત્તર 2 : 3 છે. જો નાના ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 48 સેમી² હોય, તો મોટા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
11. ΔPQR માં, બિંદુ N એ PR પર આવેલ છે કે જેથી $QN \perp PR$. જો $PN \cdot NR = QN^2$, તો સાબિત કરો કે $\angle PQR = 90^\circ$.

12. બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ 36 સેમી² અને 100 સેમી² છે. જો મોટા ત્રિકોણની કોઈ એક બાજુની લંબાઈ 20 સેમી હોય, તો તેને અનુરૂપ નાના ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈ શોધો.
13. આકૃતિ 6.12 માં, જો $\angle ACB = \angle CDA$, $AC = 8$ સેમી અને $AD = 3$ સેમી, તો BD શોધો.



14. 15 મીટર ઊંચા ટાવરના પડછાયાની લંબાઈ 24 મી છે અને તે જ સમયે ટેલિફોનના થાંભલાના પડછાયાની લંબાઈ 16 મીટર છે, તો થાંભલાની ઊંચાઈ શોધો.
15. શિરોલંબ દીવાલ સાથે ટેકવેલી 10 મીટર લાંબી નિસરણીનો નીચેનો છેડો દીવાલથી 6 મીટર દૂર છે, તો નિસરણીનો ઉપરનો છેડો દીવાલના જે બિંદુ સુધી પહોંચે તે બિંદુની જમીનથી ઊંચાઈ શોધો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 6.13 માં, OB એ રેખાખંડ DE નો લંબદ્વિભાજક છે. $FA \perp OB$ અને FE રેખાખંડ OB ને

બિંદુ C માં છેદે છે. સાબિત કરો કે $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2}{OC}$.

ઉકેલ : $\triangle AOF$ અને $\triangle BOD$ માં,

$\angle O = \angle O$ (સામાન્ય ખૂણો) અને $\angle A = \angle B$

માટે, $\triangle AOF \sim \triangle BOD$

તેથી, $\frac{OA}{OB} = \frac{FA}{DB}$

(1)

વળી, $\triangle FAC$ અને $\triangle EBC$ માં,

$\angle A = \angle B$

અને $\angle FCA = \angle ECB$

માટે, $\triangle FAC \sim \triangle EBC$

તેથી, $\frac{FA}{EB} = \frac{AC}{BC}$

પરંતુ $EB = DB$

તેથી $\frac{FA}{DB} = \frac{AC}{BC}$

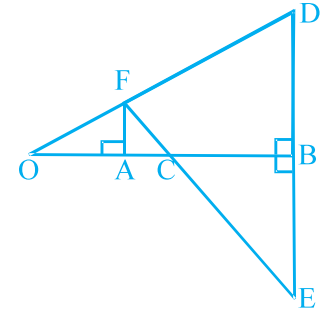
(2)

માટે, પરિણામ (1) અને (2) પરથી આપણને, $\frac{AC}{BC} = \frac{OA}{OB}$ મળશે.

એટલે કે, $\frac{OC-OA}{OB-OC} = \frac{OA}{OB}$

અથવા $OB \cdot OC - OA \cdot OB = OA \cdot OB - OA \cdot OC$

અથવા $OB \cdot OC + OA \cdot OC = 2 OA \cdot OB$



આકૃતિ 6.13

(પ્રત્યેક 90°)

(અભિકોણ)

(ખૂબી સમરૂપતા)

(DE નું મધ્યબિંદુ B છે.)

$$\therefore (OB + OA) \cdot OC = 2 OA \cdot OB$$

$$\therefore \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2}{OC} \quad [\text{બંને બાજુને } OA \cdot OB \cdot OC \text{ વડે ભાગતાં}]$$

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે જો ત્રિકોણમાં કોઈ એક બાજુનો વર્ગ એ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય, તો પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટકોણ હોય.

ઉકેલ : ધોરણ X ના ગણિતના પાઠ્યપુસ્તકમાં આપેલ પ્રમેય 6.9 ની સાબિતી જુઓ.

ઉદાહરણ 3 : વિમાનમથકથી કોઈ એક વિમાન ઉત્તર દિશા તરફ 300 કિમી/કલાકની ઝડપથી ઉડ્યન આરંભે છે. તે જ સમયે, અન્ય એક વિમાન પણ આ જ વિમાનમથકથી પશ્ચિમ દિશા તરફ 400 કિમી/કલાકની ઝડપથી ઉડ્યન શરૂ કરે છે, તો $1\frac{1}{2}$ કલાક પછી આ બે વિમાન વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે ?

ઉકેલ : પહેલા વિમાને $1\frac{1}{2}$ કલાકમાં કાપેલું અંતર = $300 \times \frac{3}{2}$ કિમી = 450 કિમી

$$\text{અને બીજા વિમાને } 1\frac{1}{2} \text{ કલાકમાં કાપેલું અંતર} = \frac{400 \times 3}{2} \text{ કિમી} = 600 \text{ કિમી}$$

આકૃતિ 6.14 માં બતાવ્યા પ્રમાણે $1\frac{1}{2}$ કલાક પછી બંને વિમાનો અનુક્રમે A અને B સ્થાને હશે.

માટે, OA = 450 કિમી અને OB = 600 કિમી.

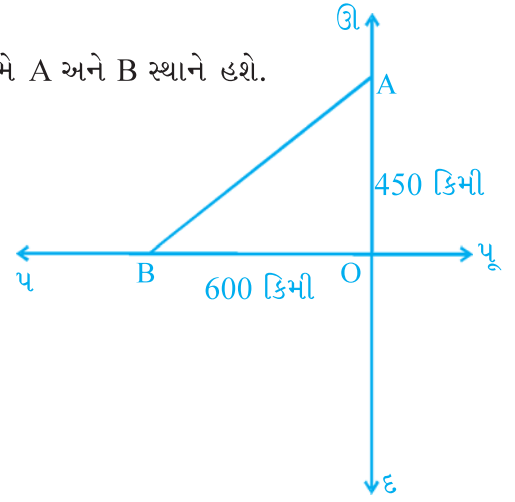
ΔAOB પરથી, આપણને

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \text{ મળે.}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB^2 &= (450)^2 + (600)^2 \\ &= (150)^2 \times 3^2 + (150)^2 \times 4^2 \\ &= 150^2 (3^2 + 4^2) \\ &= 150^2 \times 5^2 \end{aligned}$$

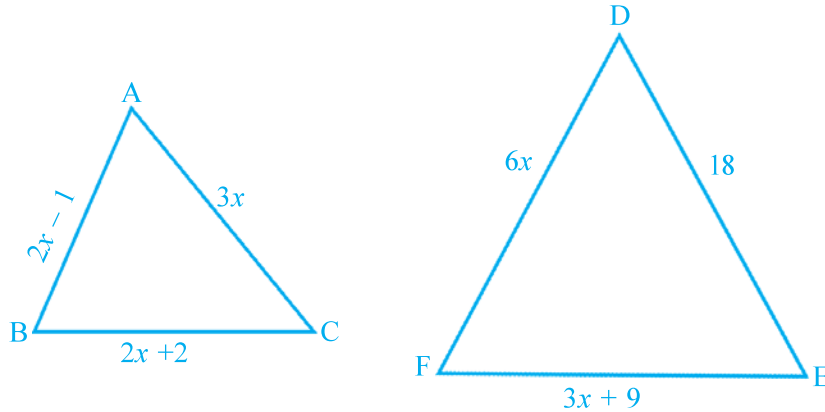
$$\therefore AB = 150 \times 5 = 750$$

આમ, $1\frac{1}{2}$ કલાક પછી બે વિમાન વચ્ચેનું અંતર 750 કિમી હશે.



આકૃતિ 6.14

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 6.15 માં, જો $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ હોય અને તેમની બાજુઓની લંબાઈ (સેમીમાં) આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે હોય, તો પ્રત્યેક ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 6.15

ઉકેલ : $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

(આપેલ છે.)

$$\text{માટે, } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

$$\text{તેથી, } \frac{2x-1}{18} = \frac{2x+2}{3x+9} = \frac{3x}{6x}$$

$$\text{હવે, } \frac{2x-1}{18} = \frac{3x}{6x} \text{ લેતાં, આપણને}$$

$$\frac{2x-1}{18} = \frac{1}{2} \text{ મળે.}$$

$$\therefore 4x - 2 = 18$$

$$\therefore x = 5$$

$$\text{માટે, } AB = 2 \times 5 - 1 = 9, BC = 2 \times 5 + 2 = 12,$$

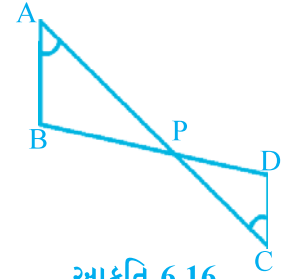
$$CA = 3 \times 5 = 15, DE = 18, EF = 3 \times 5 + 9 = 24 \text{ અને } FD = 6 \times 5 = 30$$

$$\text{આમ, } AB = 9 \text{ સેમી, } BC = 12 \text{ સેમી, } CA = 15 \text{ સેમી,}$$

$$DE = 18 \text{ સેમી, } EF = 24 \text{ સેમી અને } FD = 30 \text{ સેમી.}$$

સ્વાધ્યાય 6.4

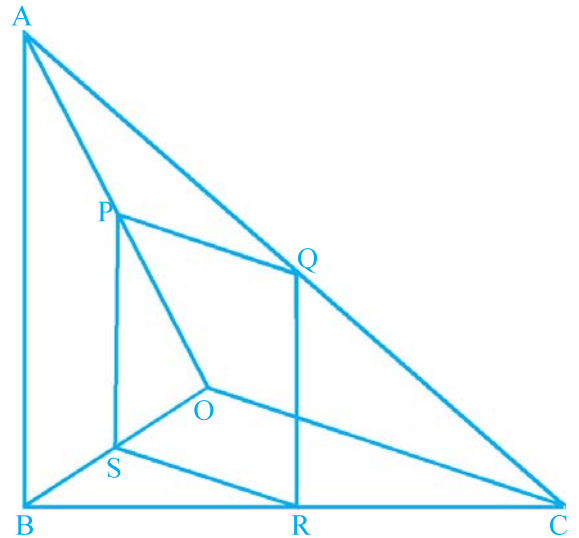
1. આકૃતિ 6.16 માં, જો $\angle A = \angle C$, $AB = 6$ સેમી, $BP = 15$ સેમી, $AP = 12$ સેમી અને $CP = 4$ સેમી હોય, તો PD અને CD ની લંબાઈ શોધો.



2. $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ તથા $AB = 5$ સેમી, $AC = 7$ સેમી, $DF = 15$ સેમી અને $DE = 12$ સેમી આપેલ છે. આ બંને ત્રિકોણોની બાકીની બાજુઓની લંબાઈ શોધો.

3. સાબિત કરો કે ત્રિકોણની કોઈ એક બાજુને સમાંતર રેખા બાકીની બે બાજુઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે, તો આ બે બાજુઓ સમાન ગુણોત્તરમાં વિભાજિત થાય છે.

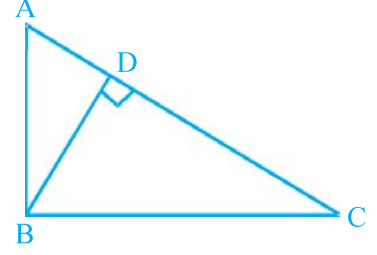
4. આકૃતિ 6.17 માં, જો PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય અને $AB \parallel PS$ હોય, તો સાબિત કરો કે $OC \parallel SR$.



5. શિરોલંબ દીવાલ સાથે એક 5 મી લાંબી નિસરણીનો ઉપરનો છેડો દીવાલ પર 4 મી ની ઊંચાઈ સુધી પહોંચે તે રીતે ગોઠવેલ છે. જો નિસરણીના નીચેના છેડાને દીવાલ તરફ 1.6 મી ખસેડવામાં આવે, તો નિસરણીનો ઉપરનો છેડો દીવાલ પર કેટલા મીટર ઉપરની તરફ ખસશે ?

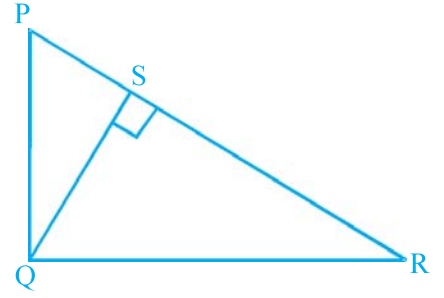
6. કોઈ એક શહેર A થી શહેર B જવા માટેનો રસ્તો શહેર C થઈને એવી રીતે જાય છે કે જેથી $AC \perp CB$ થાય. $AC = 2x$ કિમી અને $CB = 2(x + 7)$ કિમી છે. શહેર A અને B ને જોડતો 26 કિમી લાંબો સીધો ધોરીમાર્ગ બનાવવાની યોજના છે, તો આ ધોરીમાર્ગ બન્યા પછી શહેર A થી શહેર B જવા માટે કેટલું અંતર ઓછું કાપવું પડશે.
7. 18 મી ઊંચા ધ્વજસ્તંભના પડછાયાથી લંબાઈ 9.6 મી છે. ધ્વજસ્તંભની ટોચથી પડછાયાના અંત્યબિંદુ સુધીનું અંતર શોધો.
8. શેરીમાં એક થાંભલા પર વીજળીનો બલ્બ જમીનથી 6 મી ઊંચે લગાડવામાં આવેલ છે. જો 1.5 મી ઊંચી સ્ત્રીના પડછાયાની લંબાઈ 3 મી હોય, તો આ સ્ત્રીનું થાંભલાથી અંતર શોધો.

9. આકૃતિ 6.18 માં, ત્રિકોણ ABC માં ખૂણો B કાટકોણ છે તથા $BD \perp AC$ છે. જો $AD = 4$ સેમી અને $CD = 5$ સેમી હોય, તો BD અને AB શોધો.



આકૃતિ 6.18

10. આકૃતિ 6.19 માં, કાટકોણ ત્રિકોણ PQR માં ખૂણો Q કાટખૂણો છે અને $QS \perp PR$. જો $PQ = 6$ સેમી અને $PS = 4$ સેમી હોય, તો QS, RS અને QR શોધો.



આકૃતિ 6.19

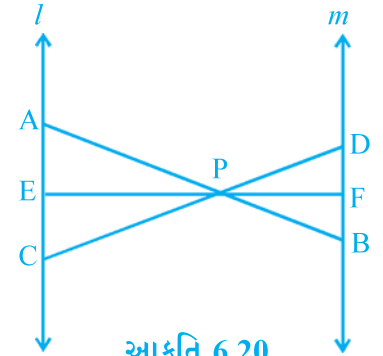
11. ΔPQR માં, $PD \perp QR$ થાય તેવું બિંદુ D એ QR પર આવેલ છે. જો $PQ = a$, $PR = b$, $QD = c$ અને $DR = d$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(a + b)(a - b) = (c + d)(c - d)$.

12. ચતુષ્કોણ ABCD માં, જો $\angle A + \angle D = 90^\circ$ હોય, તો સાબિત કરો કે $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

[સૂચન : AB અને DC બિંદુ E માં મળે તે રીતે લંબાવો]

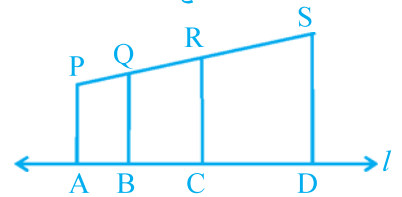
13. આકૃતિ 6.20 માં, $l \parallel m$ છે તથા રેખાખંડો AB, CD અને EF નું સંગમબિંદુ P છે. સાબિત કરો કે

$$\frac{AE}{BF} = \frac{AC}{BD} = \frac{CE}{FD}$$



આકૃતિ 6.20

14. આકૃતિ 6.21 માં, PA, QB, RC અને SD એ કોઈ એક રેખા l ને લંબ આવેલ છે. $AB = 6$ સેમી, $BC = 9$ સેમી, $CD = 12$ સેમી અને $SP = 36$ સેમી છે, તો PQ, QR અને RS શોધો.

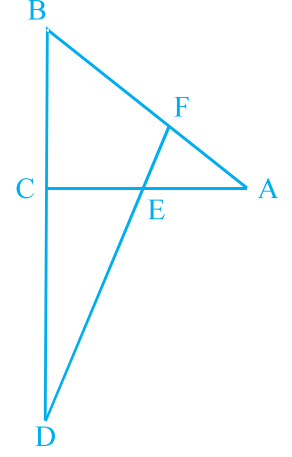


આકૃતિ 6.21

15. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCDમાં $AB \parallel DC$ છે તથા વિકર્ણો AC અને BD નું છેદબિંદુ O છે. બિંદુ O માંથી AB ને સમાંતર અને AD ને P માં તથા BC ને Q માં છેદતો એક રેખાખંડ PQ દોરેલ છે. સાબિત કરો કે $PO = QO$.
16. આકૃતિ 6.22 માં, રેખાખંડ DF, $\triangle ABC$ ની બાજુ AC ને તેના મધ્યબિંદુ E માં છેદે છે તથા

$$\angle AEF = \angle AFE \text{ છે. સાબિત કરો કે } \frac{BD}{CD} = \frac{BF}{CE}.$$

[સૂચન : AB પર $CG \parallel DF$ થાય તે રીતે બિંદુ G એવું લો.]



આકૃતિ 6.22

17. સાબિત કરો કે કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ પર દોરેલા અર્ધવર્તુળનું ક્ષેત્રફળ તે ત્રિકોણની અન્ય બે બાજુઓ પર દોરેલાં અર્ધવર્તુળોનાં ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું હોય છે.
18. સાબિત કરો કે કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ પર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ તે ત્રિકોણની અન્ય બે બાજુઓ પર દોરેલા સમબાજુ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું હોય છે.



યામભૂમિતિ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

અંતરસૂત્ર, વિભાજનસૂત્ર, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

- બે બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ છે.
- બિંદુ P (x, y) નું ઊગમબિંદુથી અંતર $\sqrt{x^2 + y^2}$ છે.
- બિંદુઓ A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ P ના યામ $\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$ છે.

- બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ છે.

- બિંદુઓ A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) અને C (x_3, y_3) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$\frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$$

ના માનક જેટલું છે. જો A, B અને C સમરેખ ન હોય, તો આ અભિવ્યક્તિનું મૂલ્ય શૂન્યેતર છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 3 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : જો બિંદુઓ $(2, -2)$ અને $(-1, x)$ વચ્ચેનું અંતર 5 હોય, તો x નું કોઈ એક મૂલ્ય છે.

(A) -2

(B) 2

(C) -1

(D) 1

ઉકેલ : $5 = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-2 - x)^2}$

$$\begin{aligned} \therefore 5 &= \sqrt{9 + 4 + 4x + x^2} \\ \therefore 25 &= 13 + 4x + x^2 \\ \therefore x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ \therefore (x + 6)(x - 2) &= 0 \\ \therefore x &= -6 \text{ અથવા } x = 2 \end{aligned}$$

ઉત્તર (B)

ઉદાહરણ 2 : બિંદુઓ A (-2, 8) અને B (-6, -4) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ છે.

- (A) (-4, -6) (B) (2, 6) (C) (-4, 2) (D) (4, 2)

ઉકેલ : મધ્યબિંદુના યામ = $\left(\frac{-2-6}{2}, \frac{8-4}{2}\right) = (-4, 2)$

ઉત્તર (C)

ઉદાહરણ 3 : બિંદુઓ A (9, 0), B (9, 6), C (-9, 6) અને D (-9, 0) એ નાં શિરોબિંદુઓ છે.

- (A) ચોરસ (B) લંબચોરસ (C) સમબાજુ ચતુષ્કોણ (D) સમલંબ ચતુષ્કોણ

ઉકેલ : $AB = \sqrt{(9-9)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{0+6^2} = 6$

$BC = \sqrt{(9+9)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{18^2+0} = 18$

$CD = \sqrt{(-9+9)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{0+6^2} = 6$

$AD = \sqrt{(-9-9)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{18^2+0} = 18$

અહીં $AB = CD$ તથા $BC = AD$ છે. માટે, ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

નોંધ : ખરેખર તો અહીંથી જ કહી શકાય કે $AB \neq BC$ હોવાથી ABCD ચોરસ કે સમબાજુ ચતુષ્કોણ નથી. સમલંબ તો નથી જ. આથી લંબચોરસ એક જ વિકલ્પ રહે છે.

તથા $AC = \sqrt{(9+9)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{324+36} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$

$BD = \sqrt{(9+9)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{324+36} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$

$\therefore AC = BD$ છે.

$\therefore ABCD$ લંબચોરસ છે.

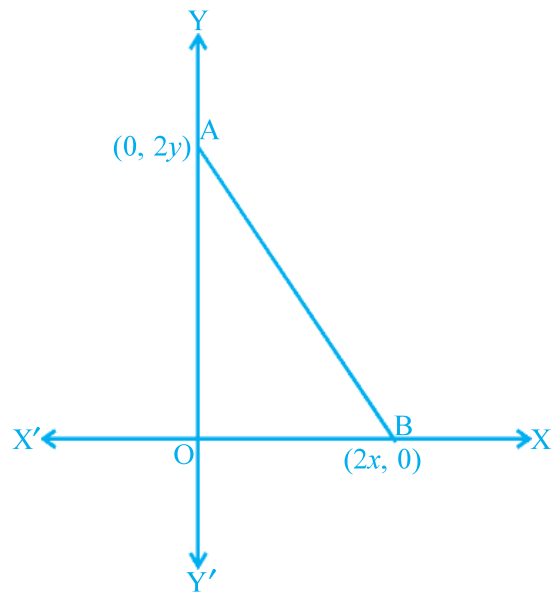
ઉત્તર (B)

સ્વાધ્યાય 7.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 20 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. બિંદુ P (2, 3) નું x-અક્ષથી અંતર છે.
(A) 2 (B) 3 (C) 1 (D) 5
2. બિંદુઓ A (0, 6) અને B (0, -2) વચ્ચેનું અંતર છે.
(A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) 2
3. બિંદુ P (-6, 8) નું ઊગમબિંદુથી અંતર છે.
(A) 8 (B) $2\sqrt{7}$ (C) 10 (D) 6
4. બિંદુઓ (0, 5) અને (-5, 0) વચ્ચેનું અંતર છે.
(A) 5 (B) $5\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) 10

5. લંબચોરસ AOBC નાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ A (0, 3), O (0, 0) અને B (5, 0) છે. તેના વિકર્ણની લંબાઈ છે.
 (A) 5 (B) 3 (C) $\sqrt{34}$ (D) 4
6. (0, 4), (0, 0) અને (3, 0) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણની પરિમિતિ છે.
 (A) 5 (B) 12 (C) 11 (D) $7+\sqrt{5}$
7. A (3, 0), B (7, 0) અને C (8, 4) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ છે.
 (A) 14 (B) 28 (C) 8 (D) 6
8. બિંદુઓ (-4, 0), (4, 0), (0, 3) એ નાં શિરોબિંદુઓ છે.
 (A) કાટકોણ ત્રિકોણ (B) સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ
 (C) સમબાજુ ત્રિકોણ (D) વિષમબાજુ ત્રિકોણ
9. બિંદુઓ (7, -6) અને (3, 4) ને જોડતા રેખાખંડનું 1:2 ગુણોત્તરમાં અંત:વિભાજન કરતું બિંદુમાં આવેલું છે.
 (A) ચરણ I (B) ચરણ II (C) ચરણ III (D) ચરણ IV
10. બિંદુઓ A (-2, -5) અને B (2, 5) ને જોડતા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક પર આવેલું બિંદુ છે.
 (A) (0, 0) (B) (0, 2) (C) (2, 0) (D) (-2, 0)
11. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ A (-2, 3), B (6, 7) અને C (8, 3) હોય, તો ચોથા શિરોબિંદુ D ના યામ છે.
 (A) (0, 1) (B) (0, -1) (C) (-1, 0) (D) (1, 0)
12. જો બિંદુ P (2, 1) એ બિંદુઓ A (4, 2) અને B (8, 4) ને જોડતા રેખાખંડ પરનું બિંદુ હોય, તો
 (A) $AP = \frac{1}{3} AB$ (B) $AP = PB$ (C) $PB = \frac{1}{3} AB$ (D) $AP = \frac{1}{2} AB$
13. જો P $\left(\frac{a}{3}, 4\right)$ એ બિંદુઓ Q (-6, 5) અને R (-2, 3) ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ હોય, તો $a = \dots\dots\dots$
 (A) -4 (B) -12 (C) 12 (D) -6
14. બિંદુઓ A (1, 5) અને B (4, 6) ને જોડતા રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક y-અક્ષને બિંદુમાં છેદે છે.
 (A) (0, 13) (B) (0, -13) (C) (0, 12) (D) (13, 0)
15. આકૃતિ 7.1 માં દર્શાવેલ ΔAOB નાં ત્રણ શિરોબિંદુઓથી સમાન અંતરે આવેલ બિંદુના યામ છે.
 (A) (x, y) (B) (y, x)
 (C) $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$
16. ઊગમબિંદુને કેન્દ્ર લઈને દોરેલું વર્તુળ બિંદુ $\left(\frac{13}{2}, 0\right)$ માંથી પસાર થાય છે. નીચેના પૈકી કયું બિંદુ વર્તુળના અંદરના ભાગમાં નથી.
 (A) $\left(\frac{-3}{4}, 1\right)$ (B) $\left(2, \frac{7}{3}\right)$
 (C) $\left(5, \frac{-1}{2}\right)$ (D) $\left(-6, \frac{5}{2}\right)$



આકૃતિ 7.1

17. કોઈ એક રેખા y -અક્ષ અને x -અક્ષને અનુક્રમે બિંદુઓ P અને Q માં છેદે છે. જો બિંદુ $(2, -5)$ એ PQ નું મધ્યબિંદુ હોય, તો P અને Q ના યામ અનુક્રમે છે.
- (A) $(0, -5)$ અને $(2, 0)$ (B) $(0, 10)$ અને $(-4, 0)$
 (C) $(0, 4)$ અને $(-10, 0)$ (D) $(0, -10)$ અને $(4, 0)$
18. $(a, b + c)$, $(b, c + a)$ અને $(c, a + b)$ શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ
- (A) $(a + b + c)^2$ છે. (B) 0 છે. (C) $a + b + c$ છે. (D) abc છે.
19. બિંદુઓ $(4, p)$ અને $(1, 0)$ વચ્ચેનું અંતર 5 હોય, તો $p =$
- (A) માત્ર 4 (B) ± 4 (C) માત્ર -4 (D) 0
20. બિંદુઓ A $(1, 2)$, O $(0, 0)$ અને C (a, b) સમરેખ હોય, તો
- (A) $a = b$ (B) $a = 2b$ (C) $2a = b$ (D) $a = -b$

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

નીચે આપેલાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે કારણ સહિત જણાવો :

ઉદાહરણ 1 : બિંદુઓ A $(-1, 0)$, B $(3, 1)$, C $(2, 2)$ અને D $(-2, 1)$, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નાં શિરોબિંદુઓ છે.

ઉકેલ : સત્ય છે. બંને વિકર્ણો AC અને BD ના મધ્યબિંદુના યામ $(\frac{1}{2}, 1)$ છે, એટલે કે વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

ઉદાહરણ 2 : $(4, 5)$, $(7, 6)$ અને $(6, 3)$ સમરેખ બિંદુઓ છે.

ઉકેલ :

$$\begin{aligned} \text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} &= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| \\ &= \frac{1}{2} |4(6 - 3) + 7(3 - 5) + 6(5 - 6)| \\ &= \frac{1}{2} |4(3) + 7(-2) + 6(-1)| \\ &= \frac{1}{2} |12 - 14 - 6| \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \\ &= 4 \text{ ચો. એકમ} \end{aligned}$$

અસત્ય છે. આપેલા શિરોબિંદુઓથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 4 ચોરસ એકમ હોવાથી તે સમરેખ બિંદુઓ નથી.

ઉદાહરણ 3 : A $(-1, 0)$ અને B $(7, -6)$ ને જોડતા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક અને y -અક્ષનું છેદબિંદુ P $(0, -7)$ છે.

ઉકેલ : સત્ય છે. બિંદુ P $(0, -7)$ એ y -અક્ષનું બિંદુ છે અને તે બંને બિંદુઓ $(-1, 0)$ અને $(7, -6)$ થી $\sqrt{50}$ એકમ અંતરે છે.

સ્વાધ્યાય 7.2

નીચે આપેલાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે કારણ સહિત જણાવો :

- જેનાં શિરોબિંદુઓ A $(-2, 0)$, B $(2, 0)$ અને C $(0, 2)$ હોય તેવો ΔABC અને જેનાં શિરોબિંદુઓ D $(-4, 0)$ E $(4, 0)$ અને F $(0, 4)$ હોય તેવો ΔDEF છે. આ ત્રિકોણો સમરૂપ ત્રિકોણો છે.
- બિંદુ P $(-4, 2)$ એ બિંદુઓ A $(-4, 6)$ અને B $(-4, -6)$ ને જોડતા રેખાખંડ પર આવેલું છે.
- $(0, 5)$, $(0, -9)$ અને $(3, 6)$ એ સમરેખ બિંદુઓ છે.

4. બિંદુઓ A (-1, 1) અને B (3, 3) ને જોડતા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક અને y-અક્ષનું છેદબિંદુ P (0, 2) છે.
5. બિંદુઓ A (3, 1), B (12, -2) અને C (0, 2) એ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ ન હોઈ શકે.
6. બિંદુઓ A (4, 3), B (6, 4), C (5, -6) અને D (-3, 5) એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.
7. બિંદુ P (5, 0) એ ઊગમબિંદુને કેન્દ્ર તરીકે લઈને દોરેલા વર્તુળનું બિંદુ છે. બિંદુ Q (6, 8) એ આ વર્તુળના બહારના ભાગમાં છે.
8. બિંદુ A (2, 7) એ બિંદુઓ P (6, 5) અને Q (0, -4) ને જોડતા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક પર આવેલું છે.
9. બિંદુ P (5, -3) એ બિંદુઓ A (7, -2) અને B (1, -5) ને જોડતા રેખાખંડનું ત્રણ એકરૂપ રેખાખંડોમાં વિભાજન કરતાં બે બિંદુઓ પૈકીનું એક બિંદુ છે.
10. બિંદુઓ A (-6, 10), B (-4, 6) અને C (3, -8) એ $AB = \frac{2}{9}AC$ હોય તેવાં સમરેખ બિંદુઓ છે.
11. બિંદુ P (-2, 4) એ 6 સેમી ત્રિજ્યા અને C (3, 5) કેન્દ્ર હોય તેવા વર્તુળનું બિંદુ છે.
12. બિંદુઓ A (-1, -2), B (4, 3), C (2, 5) અને D (-3, 0) ને ક્રમમાં જોડતા લંબચોરસ બને છે.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : જો બિંદુ P (x, y) એ બિંદુઓ A (3, 4) અને B (k, 6) ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ હોય તથા $x + y - 10 = 0$, તો k નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : A (3, 4) અને B (k, 6) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુના યામ $= \left(\frac{3+k}{2}, \frac{4+6}{2} \right) = \left(\frac{3+k}{2}, 5 \right)$

તેથી, $\left(\frac{3+k}{2}, 5 \right) = (x, y)$

માટે, $\frac{3+k}{2} = x$ અને $5 = y$.

હવે $x + y - 10 = 0$ હોવાથી, આપણને $\frac{3+k}{2} + 5 - 10 = 0$ મળશે.

એટલે કે, $3 + k = 10$

માટે, $k = 7$.

ઉદાહરણ 2 : $\triangle ABC$ નું એક શિરોબિંદુ A (1, -4) છે. બિંદુ A માંથી પસાર થતી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ (2, -1) અને (0, -1) હોય, તો ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે શિરોબિંદુઓ B અને C ના યામ અનુક્રમે (a, b) અને (x, y) છે.

તેથી, $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{-4+b}{2} \right) = (2, -1)$

માટે, $1 + a = 4$, $-4 + b = -2$

$\therefore a = 3$, $b = 2$

તેમ જ, $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{-4+y}{2} \right) = (0, -1)$

માટે, $1 + x = 0$, $-4 + y = -2$
અર્થાત્, $x = -1$, $y = 2$

આમ, ΔABC નાં શિરોબિંદુઓના યામ $A (1, -4)$, $B (3, 2)$ અને $C (-1, 2)$ છે.

$$\begin{aligned}\Delta ABC \text{નું ક્ષેત્રફળ} &= \frac{1}{2}[1(2-2)+3(2+4)-1(-4-2)] \\ &= \frac{1}{2}[18+6] \\ &= 12 \text{ ચોરસ એકમ}\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 3 : બિંદુઓ $P (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $Q (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ અને $R (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ દ્વારા બનતો ΔPQR કયા પ્રકારનો હશે ?

ઉકેલ : અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$PQ = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$PR = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2} = \sqrt{2 + 6 + 2\sqrt{12} + 2 + 6 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{16} = 4$$

$$RQ = \sqrt{(-\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2} - \sqrt{6})^2} = \sqrt{2 + 6 - 2\sqrt{12} + 2 + 6 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{16} = 4$$

આમ, $PQ = PR = RQ = 4$, હોવાથી, બિંદુઓ P, Q, R એક સમબાજુ ત્રિકોણ બનાવશે.

ઉદાહરણ 4 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ $ABCD$ નાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ $A (x_1, y_1)$, $B (x_2, y_2)$ અને $C (x_3, y_3)$ છે, તો ચોથા શિરોબિંદુ D ના યામ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 અને y_3 ના સ્વરૂપમાં શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ D ના યામ (x, y) છે. આપણે જાણીએ છીએ કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

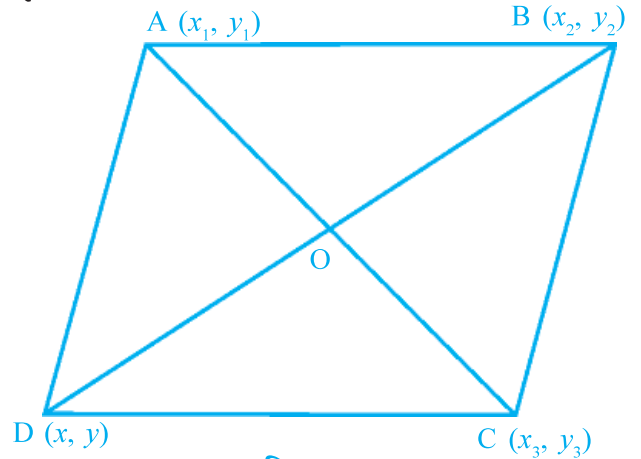
માટે, AC નું મધ્યબિંદુ = BD નું મધ્યબિંદુ

$$\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2} \right) = \left(\frac{x_2 + x}{2}, \frac{y_2 + y}{2} \right)$$

$$\therefore x_1 + x_3 = x_2 + x \text{ અને } y_1 + y_3 = y_2 + y$$

$$\therefore x_1 + x_3 - x_2 = x \text{ અને } y_1 + y_3 - y_2 = y$$

આમ શિરોબિંદુ D ના યામ $(x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$



આકૃતિ 7.2

સ્વાધ્યાય 7.3

1. બિંદુઓ $A (-5, 6)$, $B (-4, -2)$ અને $C (7, 5)$ કયા પ્રકારનો ત્રિકોણ બનાવશે?
2. બિંદુ $(7, -4)$ થી $2\sqrt{5}$ અંતરે આવેલા x -અક્ષના બિંદુના યામ શોધો. આવાં કેટલાં બિંદુઓ મળશે ?
3. બિંદુઓ $A (2, -2)$, $B (7, 3)$, $C (11, -1)$ અને $D (6, -6)$ ને ક્રમમાં જોડતા કયા પ્રકારનો ચતુષ્કોણ બનશે ?
4. બિંદુઓ $A (-3, -14)$ અને $B (a, -5)$ વચ્ચેનું અંતર 9 એકમ હોય, a શોધો.
5. બિંદુઓ $A (-5, 4)$ અને $B (-1, 6)$ થી સમાન અંતરે આવેલા બિંદુના યામ શોધો. આવાં કેટલાં બિંદુઓ મળશે?

6. બિંદુઓ A (-5, -2) અને B(4, -2) ને જોડતા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક પર આવેલું x -અક્ષ પરનું બિંદુ Q શોધો. બિંદુઓ Q, A અને B થી બનતા ત્રિકોણનો પ્રકાર જણાવો.
7. જો (5, 1), (-2, -3) અને (8, 2m) એ સમરેખ બિંદુઓ હોય, તો m શોધો.
8. જો બિંદુ A (2, -4), બિંદુઓ P (3, 8) અને Q (-10, y) થી સમાન અંતરે આવેલ હોય, તો y શોધો. P અને Q વચ્ચેનું અંતર પણ શોધો.
9. (-8, 4), (-6, 6) અને (-3, 9) શિરોબિંદુઓવાળા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
10. બિંદુઓ (-4, -6) અને (-1, 7) ને જોડતા રેખાખંડનું x -અક્ષ કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો. વિભાજન બિંદુના યામ પણ શોધો.
11. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ અને B (2, -5) ને જોડતા રેખાખંડનું બિંદુ $P\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{12}\right)$ કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો.
12. જો બિંદુ P (9a - 2, -b), બિંદુઓ A (3a + 1, -3) અને B (8a, 5) ને જોડતા રેખાખંડનું 3 : 1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો a અને b શોધો.
13. બિંદુઓ A (10, -6) અને B (k, 4) ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ (a, b) હોય તથા $a - 2b = 18$ હોય, તો k અને અંતર AB શોધો.
14. કોઈ એક વર્તુળના કેન્દ્રના યામ (2a, a - 7) છે. જો આ વર્તુળ બિંદુ (11, -9) માંથી પસાર થતું હોય અને તેનો વ્યાસ $10\sqrt{2}$ એકમ હોય તો a નું મૂલ્ય શોધો.
15. બિંદુ P બિંદુઓ A (3, 2) અને B (5, 1) ને જોડતા રેખાખંડનું 1:2 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. જો બિંદુ P રેખા $3x - 18y + k = 0$ પર આવેલું હોય, તો k નું મૂલ્ય શોધો.
16. જો $D\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, E (7, 3) અને $F\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ એ ΔABC ની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ હોય, તો ΔABC નું ક્ષેત્રફળ શોધો.
17. ΔABC માં $\angle B$ કાટખૂણો છે. બિંદુઓ A (2, 9), B (a, 5) અને C (5, 5) એ ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ હોય તો a શોધો. ΔABC નું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.
18. $PR = \frac{3}{5}PQ$ થાય તે રીતના બિંદુઓ P (-1, 3) અને Q (2, 5) ને જોડતા રેખાખંડ પર આવેલા બિંદુ R ના યામ શોધો.
19. A (k + 1, 2k), B (3k, 2k + 3) અને C (5k - 1, 5k) સમરેખ બિંદુઓ હોય, તો k શોધો.
20. બિંદુઓ (8, -9) અને (2, 1) ને જોડતા રેખાખંડનું, રેખા $2x + 3y - 5 = 0$ દ્વારા કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન થાય છે તે શોધો. વિભાજન બિંદુના યામ પણ શોધો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : ત્રિકોણ ABC ની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ D, E અને F ના યામ અનુક્રમે (3, 4), (8, 9) અને (6, 7) છે. આ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ શોધો.

ઉકેલ : D અને F અનુક્રમે AB અને ACનાં મધ્યબિંદુઓ હોવાથી, મધ્યબિંદુ પ્રમેય પ્રમાણે, આપણે DFEB ને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સાબિત કરી શકીએ. ધારો કે બિંદુ B ના યામ (x, y) છે.

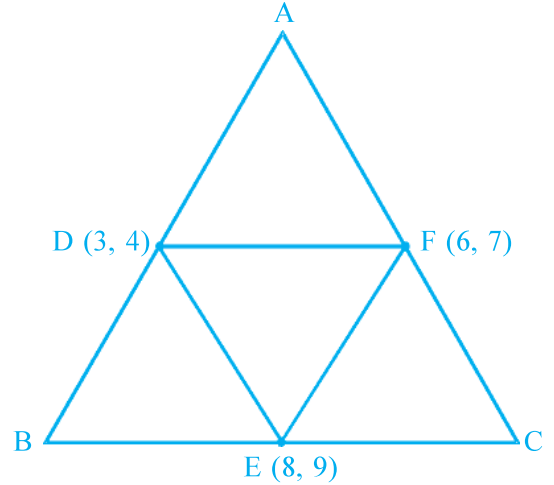
વિભાગ (D) ના નમૂનાના પ્રશ્ન 4 પ્રમાણે,

$$x = 3 + 8 - 6 = 5$$

$$y = 4 + 9 - 7 = 6$$

આમ, B (5, 6) એ આપેલ ત્રિકોણનું અન્ય શિરોબિંદુ છે.

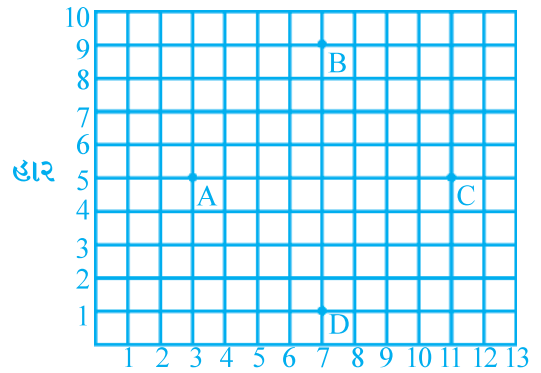
આ જ પ્રમાણે, DFCE અને DAFE પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. તેથી બિંદુ A ના યામ $(3 + 6 - 8, 4 + 7 - 9) = (1, 2)$ છે. અને બિંદુ C ના યામ $(8 + 6 - 3, 9 + 7 - 4) = (11, 12)$ છે. આમ, આપેલ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ A (1, 2), B (5,6) અને C (11, 12) છે.



સ્વાધ્યાય 7.4

આકૃતિ 7.3

- સમબાજુ ત્રિકોણનાં કોઈ બે શિરોબિંદુના યામ $(-4, 3)$ અને $(4, 3)$ હોય, તો ત્રીજા શિરોબિંદુના યામ શોધો. અહીં ઊગમબિંદુ ત્રિકોણના અંદરના ભાગમાં આવેલ છે.
- A (6, 1), B (8, 2) અને C (9, 4) એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ છે. જો E એ બાજુ DC નું મધ્યબિંદુ હોય, તો ΔADE નું ક્ષેત્રફળ શોધો.
- A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) અને C (x_3, y_3) એ ΔABC નાં શિરોબિંદુઓ છે.
 - A માંથી દોરેલી મધ્યગા BC ને D માં મળે છે. બિંદુ D ના યામ શોધો.
 - $AP : PD = 2 : 1$ થાય તેવા AD પર આવેલા બિંદુ P ના યામ શોધો.
 - $BQ : QE = 2 : 1$ અને $CR : RF = 2 : 1$ થાય તેવા મધ્યગા BE અને CF પર આવેલાં બિંદુઓ અનુક્રમે Q અને R ના યામ શોધો.
 - ત્રિકોણ ABC ના મધ્યકેન્દ્રના યામ શોધો.
- જો બિંદુઓ A (1, -2), B (2, 3), C (a, 2) અને D (-4, -3) એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો a શોધો તથા AB ને પાયો લઈને તેને સંગત વેધની લંબાઈ શોધો.
- કોઈ શાળાના વિદ્યાર્થીઓ ક્વાયતના અભ્યાસ માટે રમતના મેદાનમાં આકૃતિ 7.4 માં બતાવ્યા પ્રમાણે હાર અને સ્તંભમાં ગોઠવાયેલા છે. A, B, C અને D એ કોઈ ચાર વિદ્યાર્થીઓનાં સ્થાન દર્શાવે છે. શું એ શક્ય છે કે જશપાલને આ ક્વાયતમાં કોઈ એવા સ્થાને ઊભો રાખી શકાય કે જેથી તે A, B, C અને D થી સમાન અંતરે હોય ? જો હા, તો તેનું સ્થાન ક્યાં હશે ?



સ્તંભ
આકૃતિ 7.4

- આયુષ તેના ઘરેથી ઓફિસ ચાલીને જાય છે. તે ઓફિસે જતાં પહેલાં સૌપ્રથમ બેન્કમાં જાય છે, ત્યાંથી તે તેની પુત્રીની શાળામાં અને ત્યારબાદ ઓફિસે પહોંચે છે. જો તેનું ઘર (2, 4) પર આવેલું હોય, બેન્ક (5, 8) પર હોય, શાળા (13, 14) પર હોય અને ઓફિસ (13, 26) પર આવેલ હોય તથા આપેલા યામ કિમીમાં હોય તો આયુષે ઓફિસ જવા માટે કેટલું વધારાનું અંતર કાપ્યું હશે ? (ધારો કે તેણે કાપેલાં બધાં જ અંતરો સીધી રેખામાં છે.)



ત્રિકોણમિતિનો પરિચય અને તેના ઉપયોગો

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- $\angle B$ કાટખૂણો હોય તેવા ત્રિકોણ ABC માં $\angle A$ માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તર નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

$$\angle A \text{ નો } \text{sine} = \sin A = \frac{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ નો } \text{cosine} = \cos A = \frac{\angle A \text{ ની પાસેની બાજુ}}{\text{કર્ણ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ નો } \text{tangent} = \tan A = \frac{\angle A \text{ ની સામેની બાજુ}}{\angle A \text{ ની પાસેની બાજુ}} = \frac{BC}{AB}$$

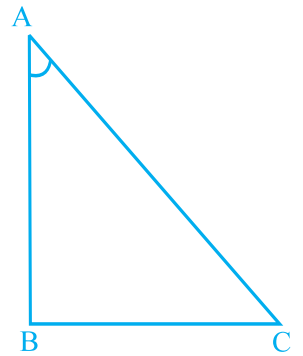
$$\angle A \text{ નો } \text{cosecant} = \text{cosec } A = \frac{1}{\sin A} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A \text{ નો } \text{secant} = \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ નો } \text{cotangent} = \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

- જો ખૂણાનું માપ સમાન રહે, તો તે ખૂણા માટેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્યોમાં ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ પ્રમાણે કોઈ પરિવર્તન થતું નથી.
- જો કોઈ એક ખૂણાના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરનું મૂલ્ય આપેલ હોય, તો અન્ય ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનાં મૂલ્યો શોધી શકાય છે.



આકૃતિ 8.1

- $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ અને 90° માપના ખૂણાના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો

A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	અવ્યાખ્યાયિત
$\operatorname{cosec} A$	અવ્યાખ્યાયિત	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	અવ્યાખ્યાયિત
$\cot A$	અવ્યાખ્યાયિત	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

- $\sin A$ અને $\cos A$ નું મૂલ્ય ક્યારેય 1થી વધારે ન હોય અને $\sec A$ તથા $\operatorname{cosec} A$ નું મૂલ્ય હંમેશાં એક અથવા એકથી વધારે હોય.
- કોટિકોણ વિશેના ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરો :
 $\sin (90^\circ - A) = \cos A, \cos (90^\circ - A) = \sin A$
 $\tan (90^\circ - A) = \cot A, \cot (90^\circ - A) = \tan A$
 $\sec (90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A, \operatorname{cosec} (90^\circ - A) = \sec A$
- ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ :
 $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$
 $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$
 $\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$
- દૃષ્ટિરેખા એ નિરીક્ષકની આંખથી નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થ સુધી લંબાવેલ રેખા છે.
- નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો ઉત્સેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજ રેખાથી ઊંચે હોય ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજ રેખા વડે બનતો ખૂણો.
- નિરીક્ષણ હેઠળના પદાર્થનો અવસેધકોણ એટલે, જ્યારે નિરીક્ષણ હેઠળનો પદાર્થ ક્ષૈતિજ રેખાથી નીચે હોય ત્યારે દૃષ્ટિરેખા અને ક્ષૈતિજ રેખા વડે બનતો ખૂણો.
- પદાર્થની ઊંચાઈ અથવા લંબાઈ અથવા બે પદાર્થો વચ્ચેનું અંતર ત્રિકોણમિતીય ગુણોત્તરોનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકાય છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 3 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : $(\sin 30^\circ + \cos 30^\circ) - (\sin 60^\circ + \cos 60^\circ)$ નું મૂલ્ય છે.

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

ઉકેલ : $(\sin 30^\circ + \cos 30^\circ) - (\sin 60^\circ + \cos 60^\circ)$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 0$$

ઉત્તર (B)

ઉદાહરણ 2 : $\frac{\tan 30^\circ}{\cot 60^\circ}$ નું મૂલ્ય છે.

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 1

$$\text{ઉકેલ : } \frac{\tan 30^\circ}{\cot 60^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 1$$

ઉત્તર (D)

ઉદાહરણ 3 : $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)$ નું મૂલ્ય છે.

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

ઉકેલ : $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

ઉત્તર (B)

સ્વાધ્યાય 8.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 15 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. જો $\cos A = \frac{4}{5}$ હોય, તો $\tan A = \dots\dots\dots$

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$

2. જો $\sin A = \frac{1}{2}$ હોય, તો $\cot A = \dots\dots\dots$
- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1
3. $[\operatorname{cosec}(75^\circ + \theta) - \sec(15^\circ - \theta) - \tan(55^\circ + \theta) + \cot(35^\circ - \theta)]$ નું મૂલ્ય $\dots\dots\dots$ છે.
- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$
4. જો $\sin \theta = \frac{a}{b}$ હોય, તો $\cos \theta = \dots\dots\dots$
- (A) $\frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ (D) $\frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$
5. જો $\cos(\alpha + \beta) = 0$ હોય, તો $\sin(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$ થાય.
- (A) $\cos \beta$ (B) $\cos 2\beta$ (C) $\sin \alpha$ (D) $\sin 2\alpha$
6. $(\tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ)$ નું મૂલ્ય $\dots\dots\dots$ છે.
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$
7. જો $\cos 9\alpha = \sin \alpha$ જ્યાં, $9\alpha < 90^\circ$ હોય તો, $\tan 5\alpha$ નું મૂલ્ય $\dots\dots\dots$ છે.
- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 1 (D) 0
8. $\triangle ABC$ માં $\angle C$ કાટખૂણો હોય, તો $\cos(A+B)$ નું મૂલ્ય $\dots\dots\dots$ છે.
- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
9. જો $\sin A + \sin^2 A = 1$ હોય, તો $(\cos^2 A + \cos^4 A)$ નું મૂલ્ય $\dots\dots\dots$ છે.
- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 3
10. જો $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ અને $\cos \beta = \frac{1}{2}$ આપેલ હોય, તો $(\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$
- (A) 0° (B) 30° (C) 60° (D) 90°
11. $\left[\frac{\sin^2 22^\circ + \sin^2 68^\circ}{\cos^2 22^\circ + \cos^2 68^\circ} + \sin^2 63^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ \right]$ નું મૂલ્ય $\dots\dots\dots$ છે.
- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0
12. જો $4 \tan \theta = 3$ હોય, તો $\left(\frac{4 \sin \theta - \cos \theta}{4 \sin \theta + \cos \theta} \right) = \dots\dots\dots$
- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

13. જો $\sin \theta - \cos \theta = 0$, તો $(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) = \dots\dots\dots$

- (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

14. $\sin (45^\circ + \theta) - \cos (45^\circ - \theta) = \dots\dots\dots$

- (A) $2\cos \theta$ (B) 0 (C) $2\sin \theta$ (D) 1

15. 6 મી ઊંચા થાંભલાના જમીન પરના પડછાયાની લંબાઈ $2\sqrt{3}$ મી હોય, તો સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ $\dots\dots\dots$ છે.

- (A) 60° (B) 45° (C) 30° (D) 90°

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

આપેલ વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે કારણ સહિત દર્શાવો :

ઉદાહરણ 1 : $\sin \theta + \cos \theta$ નું મૂલ્ય હંમેશા 1 થી વધારે હોય છે.

ઉકેલ : અસત્ય.

$\theta = 0^\circ$ માટે $(\sin \theta + \cos \theta)$ નું મૂલ્ય = 1.

ઉદાહરણ 2 : θ નું મૂલ્ય વધે તો $\tan \theta$ ($\theta < 90^\circ$) નું મૂલ્ય પણ વધે છે.

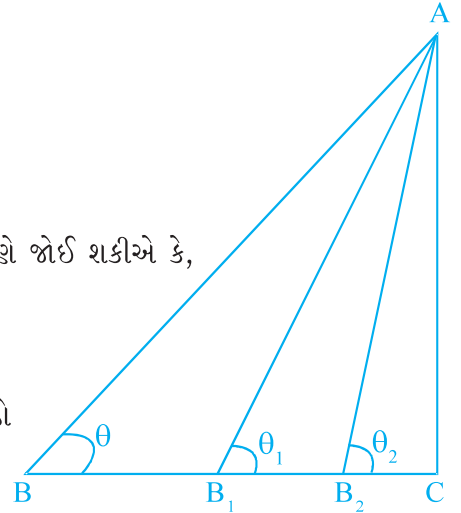
ઉકેલ : સત્ય છે.

આકૃતિ 8.2માં, બાજુ BC પર બિંદુ B ને બિંદુ C ની નજીક લાવતાં આપણે જોઈ શકીએ કે,

(i) θ નું મૂલ્ય વધે છે ($\theta_1 > \theta$, $\theta_2 > \theta_1$, ...) અને

(ii) BC ની લંબાઈ ઘટે છે ($B_1C < BC$, $B_2C < B_1C$, ...)

આમ, લંબ AC ની લંબાઈ નિશ્ચિત છે અને પાયા BC ની લંબાઈમાં ઘટાડો થાય છે. તેથી, θ નું મૂલ્ય વધે તો $\tan \theta$ નું મૂલ્ય પણ વધે છે.



આકૃતિ 8.2

ઉદાહરણ 3 : θ ના મૂલ્યમાં થતા વધારાને લીધે $\tan \theta$ નું મૂલ્ય $\sin \theta$ ના મૂલ્ય કરતાં વધુ ઝડપથી વધે છે.

ઉકેલ : સત્ય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે θ ના મૂલ્યમાં થતાં વધારાને લીધે $\sin \theta$ નું મૂલ્ય વધે છે પરંતુ $\cos \theta$ નું મૂલ્ય ઘટે છે.

હવે $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ છે.

હવે θ નું મૂલ્ય વધતાં, $\sin \theta$ વધશે પરંતુ $\cos \theta$ ઘટશે. માટે, $\tan \theta$ ના કિસ્સામાં અંશ વધશે અને છેદ ઘટશે. પરંતુ

$\sin \theta$ માં, જે હકીકતમાં $\frac{\sin \theta}{1}$ છે, ફક્ત અંશનું મૂલ્ય વધશે અને છેદ ફક્ત 1 જ રહેશે.

આથી θ નું મૂલ્ય વધતાં $\sin \theta$ ના મૂલ્ય કરતાં $\tan \theta$ નું મૂલ્ય વધુ ઝડપથી વધે છે.

ઉદાહરણ 4 : કોઈ ધન સંખ્યા 'a' માટે $\sin \theta$ નું મૂલ્ય $\left(a + \frac{1}{a}\right)$ શક્ય છે.

ઉકેલ : અસત્ય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$ અથવા $a + \frac{1}{a} \geq 2$, પરંતુ $\sin \theta$ નું મૂલ્ય 1 થી વધારે નથી.

વૈકલ્પિક રીતે, ત્રણ શક્યતા સંભવી શકે.

શક્યતા 1. જો $a < 1$, તો $\left(a + \frac{1}{a}\right) > 1$ કારણ કે $\frac{1}{a} > 1$

શક્યતા 2. જો $a = 1$, તો $\left(a + \frac{1}{a}\right) > 1$

શક્યતા 3. જો $a > 1$, તો $\left(a + \frac{1}{a}\right) > 1$

અહીં, $\sin \theta$ નું મૂલ્ય 1 થી મોટું નથી.

સ્વાધ્યાય 8.2

નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે કારણ સહિત જણાવો :

1. $\frac{\tan 47^\circ}{\cot 43^\circ} = 1$
2. $(\cos^2 23^\circ - \sin^2 67^\circ)$ નું મૂલ્ય ધન સંખ્યા છે.
3. $(\sin 80^\circ - \cos 80^\circ)$ નું મૂલ્ય ઋણ સંખ્યા છે.
4. $\sqrt{(1 - \cos^2 \theta) \sec^2 \theta} = \tan \theta$
5. જો $\cos A + \cos^2 A = 1$ હોય, તો $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$.
6. $(\tan \theta + 2)(2 \tan \theta + 1) = 5 \tan \theta + \sec^2 \theta$
7. જો ટાવરના પડછાયાની લંબાઈ વધે તો સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ પણ વધે.
8. તળાવની સપાટીથી 3 મીટર ઊંચે રહેલા પ્લેટફોર્મ પર ઊભેલો માણસ, વાદળ અને તેના તળાવમાં પડતા પ્રતિબિંબનું અવલોકન કરે છે, તો વાદળના ઉત્સેધકોણનું માપ અને તેના પ્રતિબિંબ માટેના અવસેધકોણનું માપ સમાન હશે.
9. $a \neq 1$ હોય તેવી કોઈક ધન સંખ્યા a માટે $2 \sin \theta$ નું મૂલ્ય $\left(a + \frac{1}{a}\right)$ હોઈ શકે.
10. $\cos \theta = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ હોય તેવી બે ભિન્ન સંખ્યાઓ a અને b મળી શકે. જ્યાં $ab > 0$.
11. ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ 30° છે. જો ટાવરની ઊંચાઈ બમણી કરવામાં આવે, તો તેની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ પણ બમણું થશે.
12. જો ટાવરની ઊંચાઈ અને તેના પાયાથી નિરીક્ષણ બિંદુના અંતર બંનેમાં 10 ટકાનો વધારો થાય, તો તેના ઉત્સેધકોણના માપમાં કોઈ ફેરફાર થશે નહિ.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta + 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 1$

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

માટે, $(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^3 = 1$

$$\therefore (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3 + 3\sin^2\theta \cos^2\theta (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$$

$$\therefore \sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta \cos^2\theta = 1$$

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે $(\sin^4\theta - \cos^4\theta + 1) \operatorname{cosec}^2\theta = 2$

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : ડા.બા.} &= (\sin^4\theta - \cos^4\theta + 1) \operatorname{cosec}^2\theta \\ &= [(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 1] \operatorname{cosec}^2\theta \\ &= (\sin^2\theta - \cos^2\theta + 1) \operatorname{cosec}^2\theta \\ &= 2\sin^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta \\ &= 2 = જ.બા. \end{aligned}$$

$$[\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$[1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta]$$

ઉદાહરણ 3 : જો $\alpha + \beta = 90^\circ$ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$\sqrt{\cos\alpha \operatorname{cosec}\beta - \cos\alpha \sin\beta} = \sin\alpha$$

$$\text{ઉકેલ : } \sqrt{\cos\alpha \operatorname{cosec}\beta - \cos\alpha \sin\beta} = \sqrt{\cos\alpha \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) - \cos\alpha \sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$[\alpha + \beta = 90^\circ \text{ આપેલ છે}]$$

$$= \sqrt{\cos\alpha \sec\alpha - \cos\alpha \cos\alpha}$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$= \sin\alpha$$

$$(\sin\alpha > 0)$$

ઉદાહરણ 4 : જો $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$, તો સાબિત કરો કે $\tan\theta + \cot\theta = 1$

$$\text{ઉકેલ : } \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$$

$$(\text{આપેલ છે.})$$

$$\therefore (\sin\theta + \cos\theta)^2 = 3$$

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta \cos\theta = 3$$

$$2\sin\theta \cos\theta = 2$$

(A)

$$[\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$\therefore \sin\theta \cos\theta = 1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$\therefore 1 = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta \cos\theta}$$

માટે, $\tan\theta + \cot\theta = 1$

નોંધ : આ પ્રશ્ન શક્ય જ નથી.

$\sin\theta + \cos\theta$ નું મહત્તમ મૂલ્ય $\sqrt{2}$ થી વધે નહીં.

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 2$$

વર્ગ અનુણ હોવાથી $(\sin\theta + \cos\theta)^2 \leq 2$

$$\therefore \sin\theta + \cos\theta \leq \sqrt{2}$$

આથી $\sin\theta + \cos\theta$ ક્યારેય $\sqrt{3}$ થશે નહીં.

હવે, $\sin\theta \leq 1$, $\cos\theta \leq 1$ હોવાથી જો (A) પ્રમાણે $\sin\theta \cdot \cos\theta = 1$ તો $\sin\theta = 1 = \cos\theta$ જરૂરી છે. આ શક્ય નથી, કારણ કે $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 2$ થઈ જાય. $\tan\theta + \cot\theta = 1$ શક્ય નથી, કારણ કે સંખ્યા તથા તેના વ્યસ્તનો સરવાળો હંમેશાં 1 થી વધારે જ થાય.

સ્વાધ્યાય 8.3

સાબિત કરો : (પ્રશ્ન 1 થી 7)

1. $\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta$

2. $\frac{\tan A}{1+\sec A} - \frac{\tan A}{1-\sec A} = 2 \operatorname{cosec} A$

3. જો $\tan A = \frac{3}{4}$ હોય, તો $\sin A \cos A = \frac{12}{25}$

4. $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\tan \alpha + \cot \alpha) = \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha$

5. $(\sqrt{3}+1)(3-\cot 30^\circ) = \tan^3 60^\circ - 2 \sin 60^\circ$

6. $1 + \frac{\cot^2 \alpha}{1+\operatorname{cosec} \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$

7. $\tan \theta + \tan (90^\circ - \theta) = \sec \theta \sec (90^\circ - \theta)$

8. જો h મી ઊંચા ટાવરના પડછાયાની લંબાઈ $\sqrt{3}h$ મી હોય, તો સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ શોધો.

9. જો $\sqrt{3} \tan \theta = 1$ હોય, તો $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta$ નું મૂલ્ય શોધો.

10. 15 મીટર લાંબી નિસરણીનો છેડો શિરોલંબ દીવાલની ટોચને અડે છે. જો નિસરણી દીવાલ સાથે 60° માપનો ખૂણો બનાવે તો દીવાલની ઊંચાઈ શોધો.

11. સાદું રૂપ આપો : $(1 + \tan^2 \theta)(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)$

12. જો $2\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2$, તો θ નું મૂલ્ય શોધો.

13. સાબિત કરો કે $\frac{\cos^2 (45^\circ + \theta) + \cos^2 (45^\circ - \theta)}{\tan(60^\circ + \theta) \tan(30^\circ - \theta)} = 1$

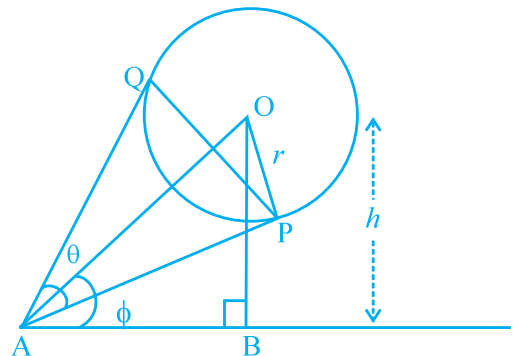
14. 1.5 મી ઊંચાઈવાળો એક નિરીક્ષક 22 મીટર ઊંચા ટાવરથી 20.5 મીટરના અંતરે ઊભો છે. નિરીક્ષકની આંખથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનું માપ શોધો.

15. સાબિત કરો કે $\tan^4 \theta + \tan^2 \theta = \sec^4 \theta - \sec^2 \theta$.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : r ત્રિજ્યાવાળું એક ગોળાકાર બલૂન જમીન પર રહેલા નિરીક્ષકની આંખ આગળ θ માપનો આંતરે છે. જો બલૂનના કેન્દ્રના ઉત્સેધકોણનું માપ ϕ હોય, તો બલૂનના કેન્દ્રની જમીનથી ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : આકૃતિ 8.3 માં, O એ બલૂનનું કેન્દ્ર છે તથા ત્રિજ્યા $OP = r$ અને $\angle PAQ = \theta$. વળી, $\angle OAB = \phi$.



આકૃતિ 8.3

ધારો કે જમીનથી બલૂનના કેન્દ્રની ઊંચાઈ h છે. આમ, $OB = h$.

હવે, ΔOAP માં, $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{r}{d}$, જ્યાં $OA = d$ (1)

વળી, ΔOAB માં, $\sin \phi = \frac{h}{d}$. (2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી આપણને, $\frac{\sin \phi}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{h}{d}}{\frac{r}{d}} = \frac{h}{r}$

અથવા $h = r \sin \phi \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2}$.

ઉદાહરણ 2 : એક સુરેખ માર્ગથી શિરોલંબ રહેલા બલૂનમાંથી કોઈ એક સમયે બે મોટરકારનાં અવસેધકોણના માપ 45° અને 60° છે. જો આ સમયે બે મોટરકાર વચ્ચેનું અંતર 100 મીટર હોય, તો બલૂનની ઊંચાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ P પર રહેલા બલૂનની ઊંચાઈ h મીટર છે. (જુઓ આકૃતિ 8.4). ધારો કે A અને B બે મોટરકાર છે.

આમ $AB = 100$ મીટર. ΔPAQ માં, $AQ = PQ = h$

હવે, ΔPBQ માં, $\frac{PQ}{BQ} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ અથવા $\frac{h}{h-100} = \sqrt{3}$

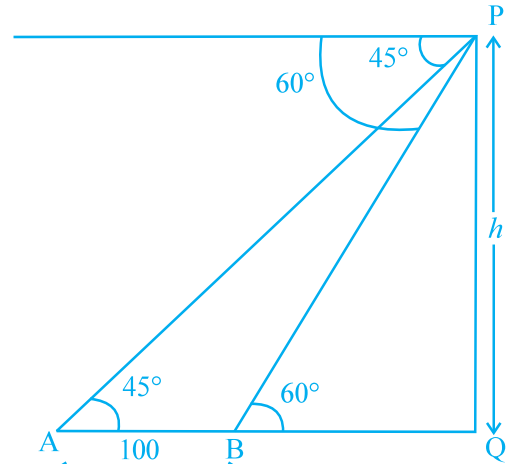
અથવા $h = \sqrt{3}(h-100)$

માટે $h = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{100\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 50(3 + \sqrt{3})$

તેથી, બલૂનની ઊંચાઈ $50(3 + \sqrt{3})$ મીટર છે.

ઉદાહરણ 3 : તળાવની સપાટીથી h મીટર ઊંચાઈએ આવેલા બિંદુથી વાદળના ઉત્સેધકોણનું માપ θ અને તળાવમાં મળતા તે જ વાદળના પ્રતિબિંબના અવસેધકોણનું માપ ϕ જણાય છે. સાબિત કરો કે તળાવની સપાટીથી વાદળની

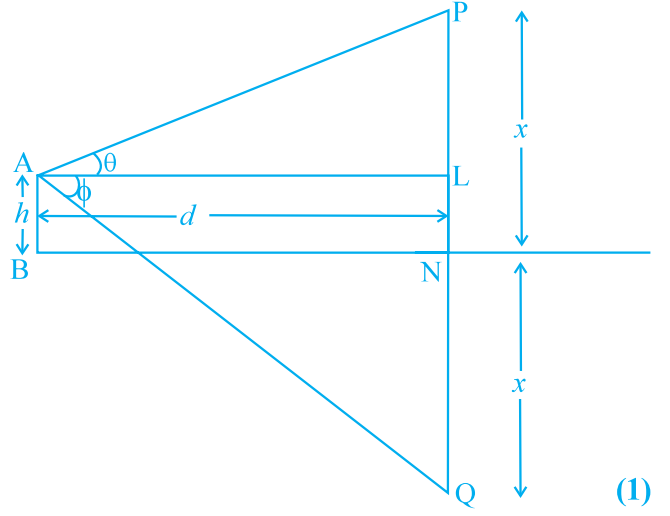
ઊંચાઈ $h \left(\frac{\tan \phi + \tan \theta}{\tan \phi - \tan \theta} \right)$ છે.



આકૃતિ 8.4

ઉકેલ : ધારો કે બિંદુ P વાદળની સ્થિતિ અને બિંદુ Q એ તળાવમાં તેનું પ્રતિબિંબ દર્શાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.5.) ધારો કે A એ નિરીક્ષણ બિંદુ છે તથા $AB = h$.

ધારો કે તળાવની સપાટીથી વાદળની ઊંચાઈ x છે તથા $AL = d$.



આકૃતિ 8.5

હવે ΔPAL પરથી, $\frac{x-h}{d} = \tan \theta$ (1)

ΔQAL પરથી, $\frac{x+h}{d} = \tan \phi$ (2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી, આપણને

$$\frac{x+h}{x-h} = \frac{\tan \phi}{\tan \theta}$$

અથવા, $\frac{2x}{2h} = \frac{\tan \phi + \tan \theta}{\tan \phi - \tan \theta}$ (યોગ-વિયોગ પ્રમાણ)

માટે, $x = h \left(\frac{\tan \phi + \tan \theta}{\tan \phi - \tan \theta} \right)$.

સ્વાધ્યાય 8.4

1. જો $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = p$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\cos \theta = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$.
2. સાબિત કરો કે $\sqrt{\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta} = \tan \theta + \cot \theta$
3. જમીન પરના કોઈ એક બિંદુએથી એક ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30° છે. જો નિરીક્ષક તે ટાવર તરફ 20 મીટર ચાલે, તો ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 15° વધે છે. તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.
4. જો $1 + \sin^2 \theta = 3 \sin \theta \cos \theta$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\tan \theta = 1$ અથવા $\frac{1}{2}$.
5. $\sin \theta + 2 \cos \theta = 1$ હોય, તો સાબિત કરો કે $2 \sin \theta - \cos \theta = 2$.
6. ટાવરના તળિયામાંથી પસાર થતી રેખા પર તળિયાથી s અને t મી દૂર આવેલા બે બિંદુથી ટાવરની ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ કોટિકોણનાં માપ છે. સાબિત કરો કે ટાવરની ઊંચાઈ \sqrt{st} છે.

7. સૂર્યના ઉત્સેધકોણનું માપ 60° થી ઘટીને 30° થતાં સમતલ જમીન પર શિરોલંબ રહેલા ટાવરના પડછાયાની લંબાઈમાં 50 મીટરનો વધારો થાય છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.
8. h ઊંચાઈના એક શિરોલંબ ધ્વજસ્તંભને સમક્ષિતિજ જમીન પર શિરોલંબ રહેલા ટાવર પર મૂકવામાં આવેલ છે જમીન પરના એક બિંદુથી આ ધ્વજસ્તંભના તળિયા અને ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ અનુક્રમે α અને β છે. સાબિત કરો કે ટાવરની ઊંચાઈ $\left(\frac{h \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} \right)$ છે.
9. જો $\tan \theta + \sec \theta = l$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\sec \theta = \frac{l^2 + 1}{2l}$.
10. જો $\sin \theta + \cos \theta = p$ અને $\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta = q$, તો સાબિત કરો કે $q(p^2 - 1) = 2p$.
11. જો $a \sin \theta + b \cos \theta = c$, તો સાબિત કરો કે $a \cos \theta - b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, $a^2 + b^2 \geq c^2$.
12. સાબિત કરો કે $\frac{1 + \sec \theta - \tan \theta}{1 + \sec \theta + \tan \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$
13. એક શિરોલંબ ટાવરના તળિયેથી બીજા કોઈ 30 મીટર ઊંચા શિરોલંબ ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° છે અને બીજા ટાવરના તળિયેથી પ્રથમ ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 30° છે, તો બંને ટાવર વચ્ચેનું અંતર તથા પ્રથમ ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.
14. h મીટર ઊંચા એક શિરોલંબ ટાવર પરથી ટાવરના તળિયામાંથી પસાર થતી રેખા પર રહેલા બે પદાર્થોના અવસેધકોણનાં માપ α અને β છે. ($\beta > \alpha$). આ બે પદાર્થો વચ્ચેનું અંતર શોધો.
15. દીવાલ પાસે એક નિસરણી જમીન સાથે α માપનો ખૂણો બનાવે તે રીતે મૂકેલ છે. તેના તળિયાનો ભાગ દીવાલથી p જેટલો દૂર લઈ જતાં તેનો ઉપરનો છેડો q જેટલો નીચે ઊતરે છે અને જમીન સાથે β માપનો ખૂણો બનાવે છે, તો સાબિત કરો કે $\frac{p}{q} = \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\sin \alpha - \sin \beta}$.
16. જમીન પરના એક બિંદુથી શિરોલંબ ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° છે. આ બિંદુથી શિરોલંબ દિશામાં 10 મીટર ઊંચે આવેલ બીજા કોઈ બિંદુથી ટાવરની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 45° છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.
17. એક ઈમારતની બારી જમીનથી h મીટર ઊંચાઈએ આવેલ છે. બારીમાંથી અવલોકન કરતાં, આ શેરીમાં સામેની બાજુએ રહેલી બીજી ઈમારતની ટોચના ઉત્સેધકોણ અને તળિયાના અવસેધકોણનાં માપ અનુક્રમે α અને β છે. સાબિત કરો કે બીજી ઈમારતની ઊંચાઈ $h(1 + \tan \alpha \cot \beta)$ મીટર છે.
18. એક ઈમારતની નીચેની બારી જમીનથી 2 મીટરની ઊંચાઈ પર છે અને તેની ઉપરની બારી, નીચેની બારીથી શિરોલંબ દિશામાં 4 મીટર ઉપરની બાજુએ આવેલ છે. આ બે બારીઓમાંથી અવલોકન કરતાં કોઈ એક વિશિષ્ટ પરિસ્થિતિમાં એક બલૂનના ઉત્સેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 60° અને 30° મળે છે, તો બલૂનની જમીનથી ઊંચાઈ શોધો.

વર્તુળ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- સ્પર્શક અને વર્તુળ પરના તેના સ્પર્શબિંદુનો અર્થ.
- વર્તુળનો સ્પર્શક એ સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યાને લંબ રેખા હોય છે.
- વર્તુળની બહારના ભાગમાં આવેલા બિંદુમાંથી વર્તુળને બે અને ફક્ત બે જ સ્પર્શક દોરી શકાય છે.
- વર્તુળની બહારના ભાગમાં આવેલાં બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા બે સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 3 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : વર્તુળની બે ત્રિજ્યાઓ, કેન્દ્ર આગળ 130° માપનો ખૂણો બનાવે, તો આ બે ત્રિજ્યાઓના વર્તુળ પર રહેલાં અંત્યબિંદુઓમાંથી દોરેલા સ્પર્શકો વડે બનતા ખૂણાનું માપ છે.

- (A) 90° (B) 50° (C) 70° (D) 40°

ઉકેલ : વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ અને તેના વર્તુળ પરનાં અંત્યબિંદુઓના સ્પર્શકોથી ચક્રીય ચતુષ્કોણ રચાય છે તથા ત્રિજ્યાઓ સ્પર્શબિંદુ આગળ લંબ હોય છે.

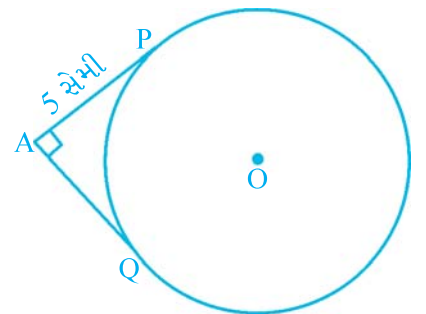
ઉત્તર (B)

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 9.1 માં, O કેન્દ્રિત વર્તુળની બહારના ભાગમાં આવેલા બિંદુ A માંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકો AP અને AQ પરસ્પર લંબ છે અને પ્રત્યેકની લંબાઈ 5 સેમી છે, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.

- (A) 10 સેમી (B) 7.5 સેમી
(C) 5 સેમી (D) 2.5 સેમી

ઉકેલ: ત્રિજ્યાઓ અને તેના વર્તુળ પરનાં અંત્યબિંદુઓના સ્પર્શકોથી ચોરસ રચાય છે.

ઉત્તર (C)



આકૃતિ 9.1

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 9.2 માં, PQ એ વર્તુળની જીવા છે અને PT એ વર્તુળને બિંદુ P આગળ દોરેલો સ્પર્શક છે, $\angle QPT = 60^\circ$. તો $\angle PRQ = \dots\dots\dots$

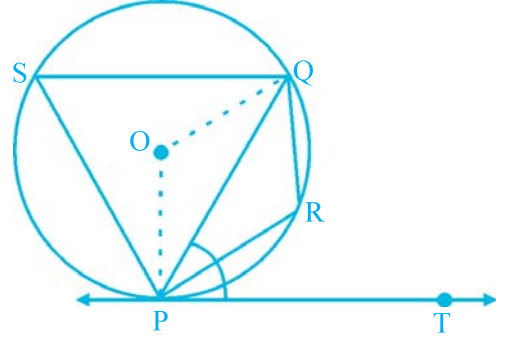
- (A) 135° (B) 150°
(C) 120° (D) 110°

ઉકેલ : વૈકલ્પિક વૃત્તખંડનો ખૂણો $\angle PSQ = 60^\circ$

SQRP ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે. આથી $\angle QRP = 120^\circ$.

[સૂચન : $\angle OPQ = \angle OQP = 30^\circ$, માટે $\angle POQ = 120^\circ$.

વળી, $\angle PRQ = \frac{1}{2}$ [વિપરીત $\angle POQ$]

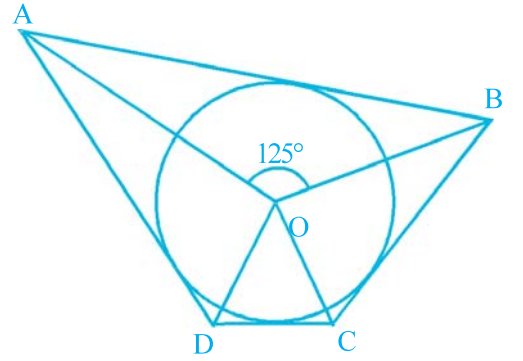


આકૃતિ 9.2

સ્વાધ્યાય 9.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 10 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

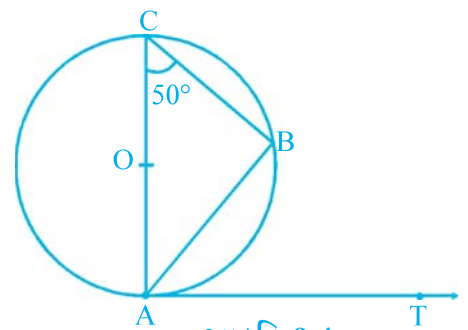
1. બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ 4 સેમી અને 5 સેમી છે, તો કોઈ એક વર્તુળનો સ્પર્શક હોય તેવી બીજા વર્તુળની જીવાની લંબાઈ છે.
(A) 3 સેમી (B) 6 સેમી
(C) 9 સેમી (D) 1 સેમી



આકૃતિ 9.3

2. આકૃતિ 9.3 માં જો $\angle AOB = 125^\circ$, તો $\angle COD = \dots\dots\dots$
(A) 62.5° (B) 45°
(C) 35° (D) 55°

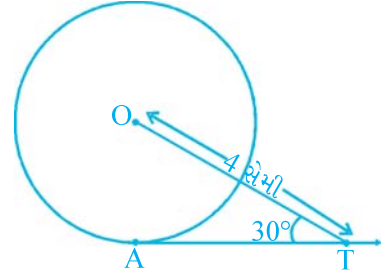
3. આકૃતિ 9.4 માં, AB એ જીવા છે અને AOC એ વ્યાસ છે તથા $\angle ACB = 50^\circ$. જો AT એ બિંદુ A આગળ દોરેલો સ્પર્શક હોય તો $\angle BAT = \dots\dots\dots$
(A) 65° (B) 60°
(C) 50° (D) 40°



આકૃતિ 9.4

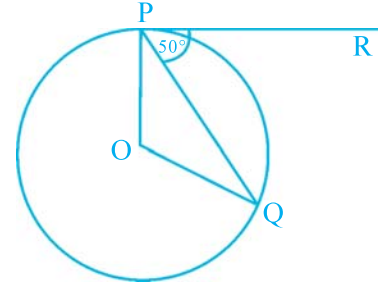
4. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કેન્દ્ર O થી 13 સેમી અંતરે આવેલા બિંદુ P માંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની જોડ PQ અને PR છે, તો ચતુષ્કોણ PQOR નું ક્ષેત્રફળ છે.
(A) 60 સેમી² (B) 65 સેમી² (C) 30 સેમી² (D) 32.5 સેમી²
5. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વ્યાસ AB ના અંત્યબિંદુ A માંથી સ્પર્શક XAY દોરેલ છે. બિંદુ A થી 8 સેમી અંતરે આવેલ XY ને સમાંતર હોય તેવી જીવા CD ની લંબાઈ છે.
(A) 4 સેમી (B) 5 સેમી (C) 6 સેમી (D) 8 સેમી

6. આકૃતિ 9.5 માં AT એ O કેન્દ્રિત વર્તુળનો સ્પર્શક છે.
OT = 4 સેમી તથા $\angle OTA = 30^\circ$ હોય, તો AT =
- (A) 4 સેમી (B) 2 સેમી
(C) $2\sqrt{3}$ સેમી (D) $4\sqrt{3}$ સેમી



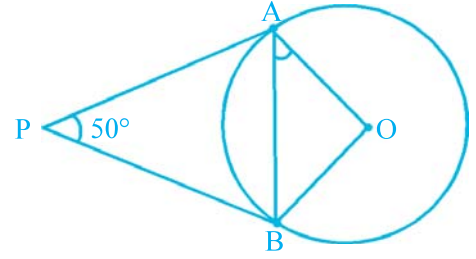
આકૃતિ 9.5

7. આકૃતિ 9.6 માં, જો O એ વર્તુળનું કેન્દ્ર હોય, PQ એ જીવા હોય અને સ્પર્શક PR બિંદુ P આગળ જીવા PQ સાથે 50° નો ખૂણો આંતરે તો $\angle POQ = \dots\dots\dots$
- (A) 100° (B) 80°
(C) 90° (D) 75°



આકૃતિ 9.6

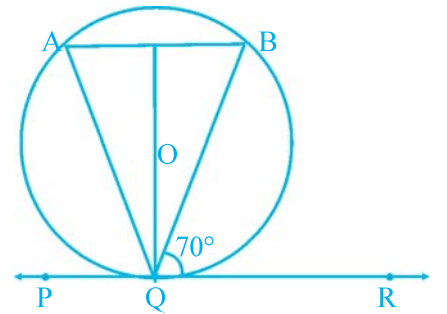
8. આકૃતિ 9.7 માં, PA અને PB એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના સ્પર્શકો છે. $\angle APB = 50^\circ$ હોય, તો $\angle OAB = \dots\dots\dots$
- (A) 25° (B) 30°
(C) 40° (D) 50°



આકૃતિ 9.7

9. 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના બે સ્પર્શકો એકબીજા સાથે 60° માપનો ખૂણો બનાવે, તો પ્રત્યેક સ્પર્શકની લંબાઈ
- (A) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ સેમી (B) 6 સેમી (C) 3 સેમી (D) $3\sqrt{3}$ સેમી

10. આકૃતિ 9.8 માં, જો PQR એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો બિંદુ Q આગળ દોરેલો સ્પર્શક છે, AB એ PR ને સમાંતર જીવા છે તથા $\angle BQR = 70^\circ$, તો $\angle AQB = \dots\dots\dots$
- (A) 20° (B) 40°
(C) 35° (D) 45°

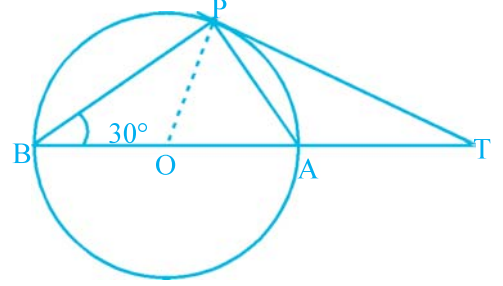


આકૃતિ 9.8

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

આપેલ વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે કારણ સહિત દર્શાવો.

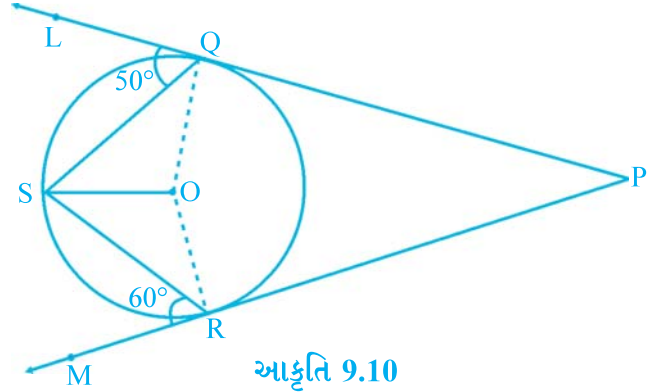
ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 9.9 માં, BOA એ વર્તુળનો વ્યાસ છે અને બિંદુ P થી દોરેલ સ્પર્શક લંબાવેલ BA ને બિંદુ T માં છેદે છે. જો $\angle PBO = 30^\circ$ હોય, તો $\angle PTA = 30^\circ$ થાય.



આકૃતિ 9.9

ઉકેલ : સત્ય છે. અહીં $\angle BPA = 90^\circ$, $\angle PAB = \angle OPA = 60^\circ$ છે. વળી, $OP \perp PT$. માટે, $\angle APT = 30^\circ$ હોવાથી $\angle PTA = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 9.10 માં, PQL અને PRM એ O કેન્દ્રિત વર્તુળનાં બિંદુઓ અનુક્રમે Q અને R પર દોરેલા સ્પર્શકો છે. S એ વર્તુળનું એવું બિંદુ છે કે જેથી $\angle SQL = 50^\circ$ તથા $\angle SRM = 60^\circ$ થાય તો $\angle QSR$ નું માપ 40° છે.



આકૃતિ 9.10

ઉકેલ : અસત્ય છે.

અહીં $\angle OSQ = \angle OQS = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ અને $\angle RSO = \angle SRO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. માટે, $\angle QSR = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$.

સ્વાધ્યાય 9.2

નીચે આપેલાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે કારણ સહિત દર્શાવો :

- જો જીવા AB એ વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનું માપ 60° હોય, તો બિંદુઓ A અને B આગળ દોરેલા સ્પર્શકો વચ્ચેનો ખૂણો પણ 60° નો હશે.
- વર્તુળની બહારના બિંદુએથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકની લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા કરતાં વધારે હોય છે.
- O કેન્દ્રિત વર્તુળના બહારના ભાગમાં આવેલ બિંદુ P માંથી દોરેલા સ્પર્શકની લંબાઈ હંમેશાં OP કરતાં ઓછી હોય છે.
- એક વર્તુળના બે સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 0° પણ હોઈ શકે.
- બિંદુ P માંથી, O કેન્દ્ર અને a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને દોરેલા બે સ્પર્શકો વચ્ચેનો ખૂણો 90° હોય, તો $OP = a\sqrt{2}$.
- બિંદુ P માંથી, O કેન્દ્ર અને a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને દોરેલા બે સ્પર્શકો વચ્ચેનો ખૂણો 60° હોય, તો $OP = a\sqrt{3}$.
- $AB = AC$ હોય તેવા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC ના બહિર્વૃત્તને બિંદુ A આગળ દોરેલો સ્પર્શક, બાજુ BC ને સમાંતર છે.
- રેખાખંડ PQ ને બિંદુ A પર સ્પર્શતા વર્તુળના કેન્દ્ર, PQ ના લંબદ્વિભાજક પર આવેલાં હોય છે.
- રેખાખંડ PQ નાં અંત્યબિંદુઓ P અને Q માંથી પસાર થતાં વર્તુળોનાં કેન્દ્રો PQ ના લંબદ્વિભાજક પર આવેલાં હોય છે.

10. એક વર્તુળનો વ્યાસ AB છે અને AC જવા છે તથા $\angle BAC = 30^\circ$. જો બિંદુ C માંથી દોરેલો સ્પર્શક લંબાવેલ AB ને બિંદુ D માં છેદે, તો $BC = BD$ થાય.

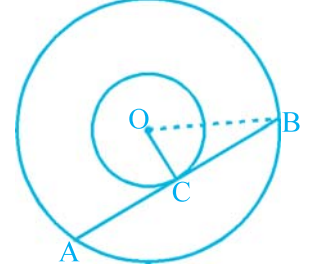
ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : જો d_1, d_2 ($d_2 > d_1$) એ બે સમકેન્દ્રી વર્તુળના વ્યાસ હોય તથા કોઈ એક વર્તુળની જવા બીજા વર્તુળનો સ્પર્શક હોય અને તેની લંબાઈ c હોય, તો સાબિત કરો કે $d_2^2 = c^2 + d_1^2$.

ઉકેલ : ધારો કે એક વર્તુળની જવા AB બીજા વર્તુળને બિંદુ C માં સ્પર્શે છે. તેથી $\triangle OCB$ કાટકોણ ત્રિકોણ છે (જુઓ આકૃતિ 9.11). પાયથાગોરસના પ્રમેય અનુસાર, $OC^2 + CB^2 = OB^2$.

$$\text{માટે, } \left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 = \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2$$

$$\text{માટે, } d_2^2 = c^2 + d_1^2.$$



આકૃતિ 9.11

(બિંદુ C, AB ને દુભાગે છે.)

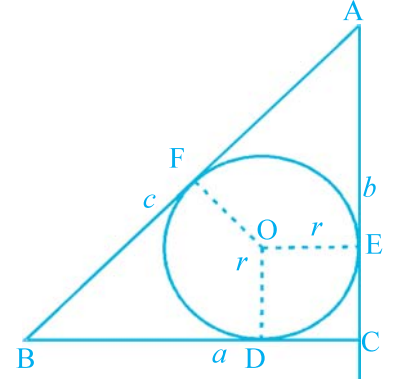
ઉદાહરણ 2 : a, b, c એ કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓ છે. c એ કર્ણ છે. સાબિત કરો કે આપેલ ત્રિકોણની બાજુઓને સ્પર્શતા r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળ માટે $r = \frac{a + b - c}{2}$ થાય.

ઉકેલ : ધારો કે કોઈ એક વર્તુળ, કાટકોણ $\triangle ABC$ ની બાજુઓ BC, CA અને AB ને અનુક્રમે બિંદુ D, E અને F માં સ્પર્શે છે, જ્યાં $BC = a$, $CA = b$ અને $AB = c$ છે. (જુઓ આકૃતિ 9.12). તેથી $AE = AF$ અને $BD = BF$. વળી, $CE = CD = r$.

એટલે કે, $b - r = AF$, $a - r = BF$

અથવા $AB = c = AF + BF = b - r + a - r$

$$\text{માટે, } r = \frac{a + b - c}{2}$$

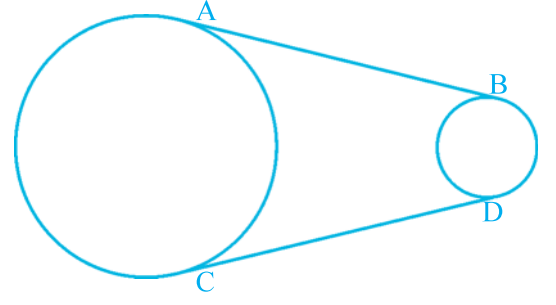


આકૃતિ 9.12

સ્વાધ્યાય 9.3

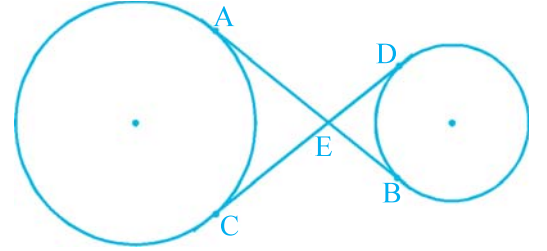
- બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોમાં, બહારના વર્તુળની ત્રિજ્યા 5 સેમી છે તથા તેની 8 સેમી લંબાઈવાળી જવા AC, અંદરના વર્તુળનો સ્પર્શક છે. અંદરના વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
- PQ અને PR એ O કેન્દ્રિત વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરવામાં આવેલા સ્પર્શકો છે. સાબિત કરો કે QORP એ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.
- O કેન્દ્રિત વર્તુળના બહારના બિંદુ B માંથી બે સ્પર્શકો BC અને BD દોરેલા છે, જેથી $\angle DBC = 120^\circ$ થાય, સાબિત કરો કે $BC + BD = BO$, એટલે કે $BO = 2BC$.
- સાબિત કરો કે બે પરસ્પર છેદતી બે રેખાઓને સ્પર્શતા વર્તુળનું કેન્દ્ર તે રેખાઓ વડે બનતા ખૂણાના દ્વિભાજક પર આવેલું હોય છે.

5. આકૃતિ 9.13 માં AB અને CD એ બે અસમાન ત્રિજ્યાઓવાળા વર્તુળના સામાન્ય સ્પર્શકો હોય, તો સાબિત કરો કે $AB = CD$.
6. ઉપર્યુક્ત પ્રશ્ન 5 માં જો બે વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે $AB = CD$.



આકૃતિ 9.13

7. આકૃતિ 9.14 માં, બે વર્તુળોના સામાન્ય સ્પર્શકો AB અને CD પરસ્પર બિંદુ E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે $AB = CD$.
8. કોઈ એક વર્તુળની જીવા PQ, આપેલા વર્તુળના કોઈ એક બિંદુ R માંથી પસાર થતા સ્પર્શકને સમાંતર છે, તો સાબિત કરો કે બિંદુ R, ચાપ PRQ ને દુભાગે છે.



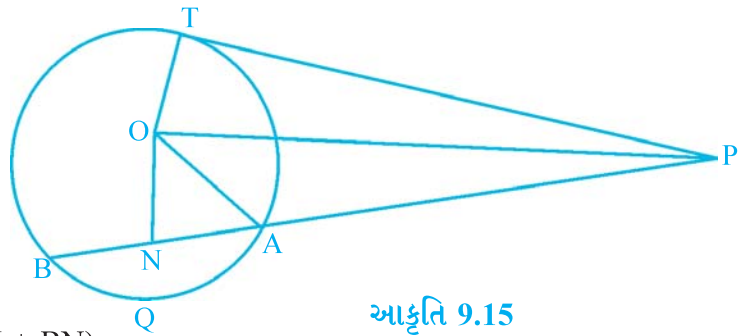
આકૃતિ 9.14

9. સાબિત કરો કે કોઈ એક વર્તુળની જીવાનાં અંત્યબિંદુઓમાંથી દોરેલા સ્પર્શકો આપેલી જીવા સાથે સમાન માપનો ખૂણો બનાવે છે.
10. સાબિત કરો કે કોઈ એક વર્તુળનો વ્યાસ AB, બિંદુ A માંથી દોરેલા સ્પર્શકને સમાંતર હોય તેવી બધી જ જીવાઓને દુભાગે છે.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 9.15 માં, O કેન્દ્રિત વર્તુળની બહારના બિંદુ P માંથી એક સ્પર્શક PT અને રેખાખંડ PAB દોરેલ છે. ON એ જીવા AB ને લંબ છે. સાબિત કરો કે

- (i) $PA \cdot PB = PN^2 - AN^2$
(ii) $PN^2 - AN^2 = OP^2 - OT^2$
(iii) $PA \cdot PB = PT^2$



આકૃતિ 9.15

ઉકેલ :

- (i) $PA \cdot PB = (PN - AN)(PN + BN)$
 $= (PN - AN)(PN + AN)$ (AN = BN)
 $= PN^2 - AN^2$
- (ii) $PN^2 - AN^2 = (OP^2 - ON^2) - AN^2$ (ON ⊥ PN હોવાથી)
 $= OP^2 - (ON^2 + AN^2)$
 $= OP^2 - OA^2$ (ON ⊥ AN હોવાથી)
 $= OP^2 - OT^2$ (OA = OT હોવાથી)

(iii) પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$$PA \cdot PB = OP^2 - OT^2$$

$$= PT^2$$

($\angle OTP = 90^\circ$ હોવાથી)

ઉદાહરણ 2 : જો કોઈ એક વર્તુળ, ΔABC ની બાજુ BC ને બિંદુ P માં તથા લંબાવેલી બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે બિંદુ Q અને R માં સ્પર્શે, તો સાબિત કરો કે $AQ = \frac{1}{2} (BC + CA + AB)$

ઉકેલ : જુઓ આકૃતિ 9.16.

પાઠ્યપુસ્તકમાં આપેલ પ્રમેય 10.2 પ્રમાણે,

$$BQ = BP$$

$$CP = CR \text{ અને}$$

$$AQ = AR$$

હવે, $2AQ = AQ + AR$

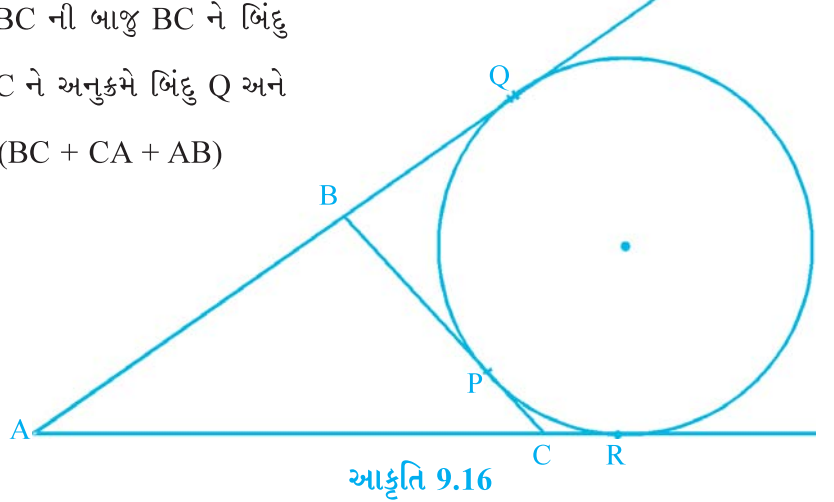
$$= (AB + BQ) + (AC + CR)$$

$$= AB + BP + AC + CP$$

$$= (BP + CP) + AC + AB$$

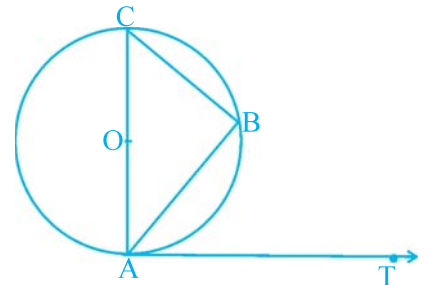
$$= BC + CA + AB$$

એટલે કે, $AQ = \frac{1}{2} (BC + CA + AB)$.



સ્વાધ્યાય 9.4

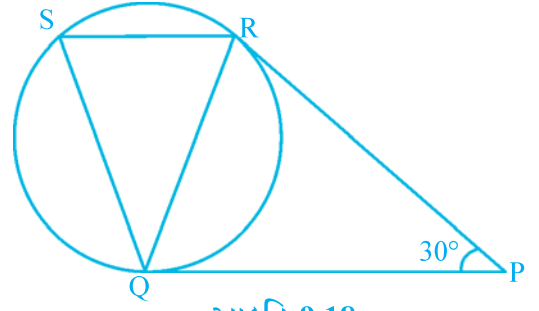
- એક વર્તુળને પરિગત ષટ્કોણ ABCDEF માટે સાબિત કરો કે $AB + CD + EF = BC + DE + FA$.
- $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ની અર્ધ-પરિમિતિનું માપ s છે. એક વર્તુળ ΔABC ની બાજુઓ BC, CA, AB ને અનુક્રમે D, E, F માં સ્પર્શે, તો સાબિત કરો કે $BD = s - b$.
- O કેન્દ્રિત વર્તુળના બહારના ભાગમાં આવેલ બિંદુ P માંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકો PA અને PB છે. વર્તુળના કોઈ એક બિંદુ E માંથી એક સ્પર્શક એવો દોરવામાં આવે છે કે જે સ્પર્શક PA અને PB ને અનુક્રમે C અને D માં છેદે. જો $PA = 10$ સેમી હોય તો ત્રિકોણ PCD ની પરિમિતિ શોધો.
- આકૃતિ 9.17 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જો AB એ O કેન્દ્રિત વર્તુળની જિવા હોય, AC તેનો વ્યાસ હોય તથા AT એ બિંદુ A માંથી દોરેલ સ્પર્શક હોય, તો સાબિત કરો કે, $\angle BAT = \angle ACB$.



આકૃતિ 9.17

- O અને O' કેન્દ્ર ધરાવતા તથા ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 3 સેમી અને 4 સેમી હોય, તેવાં બે વર્તુળો પરસ્પર બિંદુ P અને Q માં એવી રીતે છેદે જેથી OP અને O'P એ બંને વર્તુળોના સ્પર્શક બને, તો સામાન્ય જિવા PQ ની લંબાઈ શોધો.

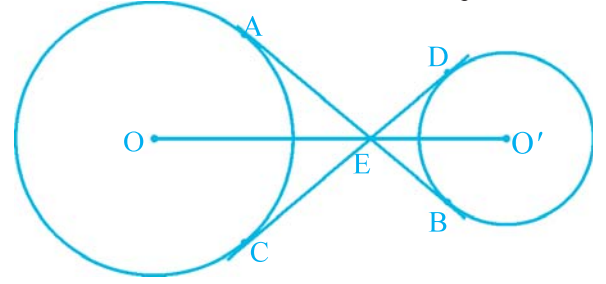
6. કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં $\angle B = 90^\circ$ છે તથા AB ને વ્યાસ લઈને દોરેલું વર્તુળ કર્ણ AC ને બિંદુ P માં છેદે છે. સાબિત કરો કે બિંદુ P માંથી દોરેલો સ્પર્શક BC ને દુભાગે છે.
7. આકૃતિ 9.18 માં PQ અને PR એ વર્તુળના સ્પર્શકો છે જેથી $\angle RPQ = 30^\circ$ હોય. સ્પર્શક PQ ને સમાંતર હોય તેવી જવા RS છે, તો $\angle RQS$ શોધો.



આકૃતિ 9.18

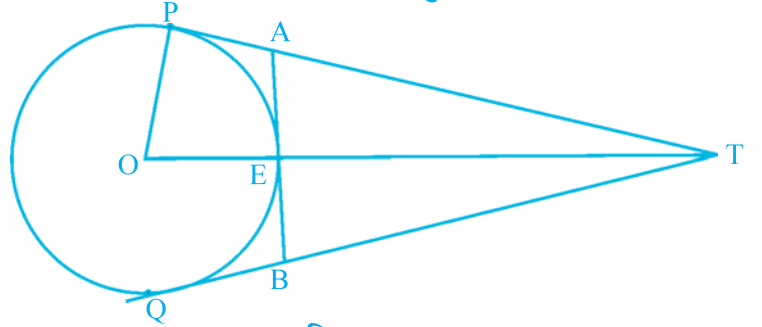
[સૂચન : Q માંથી પસાર થતી QP ને લંબ રેખા દોરો.]

8. O કેન્દ્રિત વર્તુળમાં AB એક વ્યાસ છે તથા AC તેની જવા છે તથા $\angle BAC = 30^\circ$. બિંદુ C માંથી દોરેલો સ્પર્શક લંબાવેલ બાજુ AB ને બિંદુ D માં છેદે છે. સાબિત કરો કે $BC = BD$.
9. સાબિત કરો કે વર્તુળના કોઈ એક ચાપના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતો સ્પર્શક તે ચાપનાં અંત્યબિંદુઓને જોડતી જવાને સમાંતર હોય છે.
10. આકૃતિ 9.19 માં, O અને O' કેન્દ્રવાળા બે વર્તુળના સામાન્ય સ્પર્શકો AB અને CD પરસ્પર બિંદુ E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે બિંદુઓ O, E અને O' સમરેખ છે.



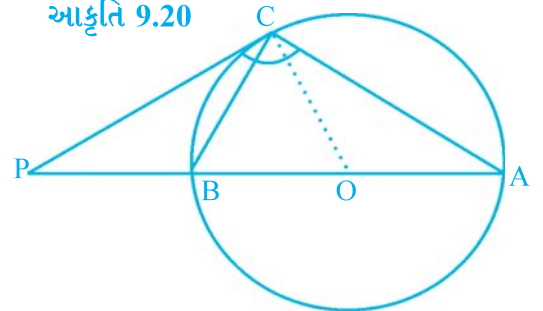
આકૃતિ 9.19

11. આકૃતિ 9.20 માં O એ 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું કેન્દ્ર છે. $OT = 13$ સેમી થાય તેવું બિંદુ T આપેલ છે તથા OT, વર્તુળને બિંદુ E માં છેદે છે. જો AB એ બિંદુ E પરનો સ્પર્શક હોય તો AB ની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 9.20

12. કોઈ એક વર્તુળના બિંદુ C પરનો સ્પર્શક અને લંબાવેલ વ્યાસ AB પરસ્પર બિંદુ P માં છેદે છે. જો $\angle PCA = 110^\circ$ હોય, તો $\angle CBA$ શોધો. [જુઓ આકૃતિ 9.21].



આકૃતિ 9.21

[સૂચન : બિંદુ C ને કેન્દ્ર O સાથે જોડો]

13. 9 સેમી ત્રિજ્યાવાળા એક વર્તુળને અંતર્ગત તથા $AB = AC = 6$ સેમી હોય તેવા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધો.
14. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કેન્દ્ર O થી 13 સેમી અંતરે એક બિંદુ A આવેલું છે. AP અને AQ અનુક્રમે બિંદુ P અને Q પરના સ્પર્શકો છે. જો લઘુચાપ PQ પર આવેલ કોઈ બિંદુ R પરથી દોરેલો સ્પર્શક, AP ને B માં તથા AQ ને C માં છેદે તો $\triangle ABC$ ની પરિમિતિ શોધો.



રચનાઓ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પનાઓ અને પરિણામો

- રેખાખંડનું આપેલા ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન
- આપેલ સ્કેલ માપન પ્રમાણે આપેલ ત્રિકોણને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરવી. સ્કેલમાપન 1 કરતાં ઓછું અથવા 1 કરતાં વધારે હોઈ શકે.
- વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શકોની જોડની રચના.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 અને 2 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : એક રેખાખંડ AB નું $p : q$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરવા, (p અને q ધન પૂર્ણાંક છે) $\angle BAX$ લઘુકોણ થાય તે રીતે એક કિરણ AX રચો અને કિરણ AX પર સમાન અંતરે જેમની સંખ્યા ઓછામાં ઓછી થાય તેવાં બિંદુઓ નક્કી કરો.

- (A) p અને q થી વધારે (B) $p + q$ (C) $p + q - 1$ (D) pq

ઉકેલ : ઉત્તર (B)

ઉદાહરણ 2 : એક વર્તુળ પર એવા બે સ્પર્શકો રચો જેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 35° થાય. વર્તુળ પર બે ત્રિજ્યાઓના અંત્યબિંદુએ સ્પર્શકો દોરવા બે ત્રિજ્યાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ થાય.

- (A) 105° (B) 70° (C) 140° (D) 145°

ઉકેલ : ઉત્તર (D)

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

કયું વિધાન સત્ય કે અસત્ય છે તે કારણ સહિત દર્શાવો :

ઉદાહરણ 1 : ભૌમિતિક રચનાથી, એક રેખાખંડનું $(2+\sqrt{3}):(2-\sqrt{3})$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન શક્ય છે.

ઉકેલ : અસત્ય, જ્યાં $2+\sqrt{3}:2-\sqrt{3}$ નું સાદું રૂપ $7+4\sqrt{3}:1$ માં થાય. અહીં $7+4\sqrt{3}$ એ ધન પૂર્ણાંક નથી, જ્યારે 1 છે.

સ્વાધ્યાય 10.2

1. ભૌમિતિક રચનાથી, એક આપેલ રેખાખંડનું $\sqrt{3}:\frac{1}{\sqrt{3}}$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન શક્ય છે. આ સત્ય છે ?
2. આપેલ ત્રિકોણ ABC ને સમરૂપ એવો ત્રિકોણ રચો જેની બાજુઓ આપેલા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓના $\frac{7}{3}$ ગણી થાય. જ્યાં X એ BC ની જે બાજુએ A છે, તેની વિરુદ્ધ બાજુએ હોય છે, તે રીતે BC સાથે લઘુકોણ બનાવતું કિરણ BX દોરો. કિરણ BX પર સમાન અંતરે બિંદુઓ B_1, B_2, \dots, B_7 નક્કી કરો. C સાથે B_3 જોડો અને રેખાખંડ B_3C ને સમાંતર B_6C' દોરો. BC પર C' લો, અંતમાં AC ને સમાંતર રેખાખંડ $A'C'$ દોરો.
3. 3.5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળમાં કેન્દ્રથી 3 સેમી દૂર આવેલા બિંદુ P માંથી વર્તુળના સ્પર્શકોની જોડીની રચના કરો.
4. એક વર્તુળ પર જેમની વચ્ચેના ખૂણાઓનું માપ 170° હોય તેવી બે સ્પર્શકોની જોડ રચો.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : 4 સેમી બાજુવાળો સમબાજુ ત્રિકોણ ABC દોરો. જેની બાજુઓ ત્રિકોણ ABC ની બાજુઓ કરતાં $\frac{3}{5}$ ગણી હોય એવા ત્રિકોણની રચના કરો. નવો ત્રિકોણ પણ સમબાજુ છે ?

ઉકેલ : હા, નવો ત્રિકોણ પણ સમબાજુ છે, તે માટે ધોરણ Xના ગણિતના પાઠ્યપુસ્તકનાં અનુરૂપ પગલાંને અનુસરો.

સ્વાધ્યાય 10.3

1. 7 સેમીનો એક રેખાખંડ દોરો. તેના પર 3:5 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતું બિંદુ P શોધો.
2. $BC = 12$ સેમી, $AB = 5$ સેમી અને $\angle B = 90^\circ$ હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC દોરો. જેની બાજુઓ ત્રિકોણની બાજુઓ કરતાં $\frac{2}{3}$ ગણી હોય એવા ત્રિકોણની રચના કરો. નવો ત્રિકોણ પણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે ?
3. $BC = 6$ સેમી, $CA = 5$ સેમી અને $AB = 4$ સેમી હોય તેવો ત્રિકોણ ABC દોરો. જેની બાજુઓ ત્રિકોણની બાજુઓ કરતાં $\frac{5}{3}$ ગણી હોય તેવા ત્રિકોણની રચના કરો.
4. 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કેન્દ્રથી 6 સેમી દૂર આવેલા બિંદુમાંથી સ્પર્શકની રચના કરો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : $AB = 4$ સેમી અને $\angle ABC = 60^\circ$ હોય તેવો એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ $ABCD$ આપેલ છે. તેને બે ત્રિકોણો ABC અને ADC માં વિભાજિત કરો. $\triangle ABC$ ની બાજુઓ કરતાં $\frac{2}{3}$ ગણી બાજુઓવાળા ત્રિકોણ $AB'C'$ ની રચના કરો. CD ને સમાંતર રેખાખંડ $C'D'$ દોરો. AD પર D' લો. શું $AB'C'D'$ એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે ? કારણ આપો.

ઉકેલ : આકૃતિ 10.1 માં બતાવ્યા પ્રમાણે, $AB = 4$ સેમી અને $\angle ABC = 60^\circ$ થાય તેવો એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ $ABCD$ દોરો અને AC જોડો.

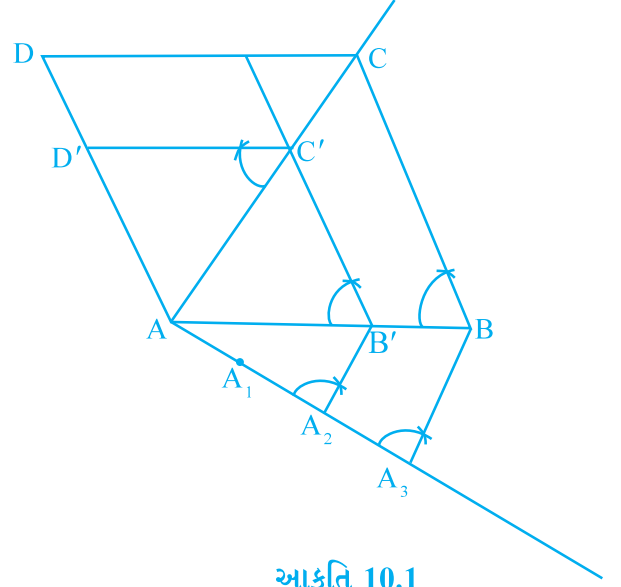
$\triangle ABC$ ની બાજુઓ કરતાં $\frac{2}{3}$ ગણી હોય એવા સમરૂપ ત્રિકોણ $AB'C'$ ની રચના કરો. (જુઓ આકૃતિ 10.1.) ધોરણ X ના ગણિતના પાઠ્યપુસ્તક પરથી અનુસરો. અંતમાં CD ને સમાંતર રેખાખંડ $C'D'$ દોરો.

$$\text{હવે, } \frac{AB'}{AB} = \frac{2}{3} = \frac{AC'}{AC}$$

$$\text{પરંતુ, } \frac{AC'}{AC} = \frac{CD'}{CD} = \frac{AD'}{AD} = \frac{2}{3}$$

$$\text{તેથી, } AB' = B'C' = C'D' = AD' = \frac{2}{3} AB.$$

$\therefore AB'C'D'$ એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 10.1

સ્વાધ્યાય 10.4

- $AB = 5$ સેમી અને $AC = 7$ સેમીવાળા બે રેખાખંડો AB અને AC વચ્ચે 60° નો ખૂણો છે. AB અને AC પર અનુક્રમે $AP = \frac{3}{4}AB$ અને $AQ = \frac{1}{4}AC$ તેવાં બિંદુઓ P અને Q આવેલાં છે, બિંદુઓ P અને Q જોડો અને PQ ની લંબાઈ માપો.
- $BC = 5$ સેમી, $AB = 3$ સેમી અને $\angle ABC = 60^\circ$ હોય તેવો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ $ABCD$ દોરો. વિકર્ણ BD એ તેનું ત્રિકોણો BCD અને ABD માં વિભાજિત કરે છે. $\triangle BDC$ ની બાજુઓ કરતાં $\frac{4}{3}$ ગણી હોય એવા સમરૂપ ત્રિકોણ $BD'C'$ ની રચના કરો. DA ને સમાંતર રેખાખંડ $D'A'$ દોરો. A' એ લંબાવેલ BA પર આવેલ છે. શું $A'BC'D'$ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે ?

3. 3 સેમી અને 5 સેમી ત્રિજ્યાઓવાળાં સમકેન્દ્રી વર્તુળો દોરો. બહારના વર્તુળ પરના એક બિંદુએથી બીજા વર્તુળ પર સ્પર્શકોની જોડ બીજા વર્તુળ પર રચો. સ્પર્શકની લંબાઈ માપો અને સાચી ગણતરી ચકાસો.
4. $AB = AC = 6$ સેમી અને $BC = 5$ સેમી હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC દોરો. $PQ = 8$ સેમી હોય એવા ΔABC ને સમરૂપ ત્રિકોણ PQR ની રચના કરો અને રચનાને પ્રમાણિત કરો.
5. $AB = 5$ સેમી, $BC = 6$ સેમી અને $\angle ABC = 60^\circ$ હોય એવો ત્રિકોણ ABC દોરો. ΔABC ની બાજુઓ કરતાં $\frac{5}{7}$ ગણી હોય એવા ΔABC ને સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરો. રચનાને પ્રમાણિત કરો.
6. 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. 60° ખૂણો બને એવા સ્પર્શકોની જોડ રચો. રચનાને પ્રમાણિત કરો. વર્તુળના કેન્દ્રથી બે સ્પર્શકોના છેદબિંદુ સુધીનું અંતર માપો.
7. $AB = 4$ સેમી, $BC = 6$ સેમી અને $AC = 9$ સેમીવાળો ત્રિકોણ ABC દોરો. ΔABC ની બાજુઓ કરતાં $\frac{3}{2}$ ગણી હોય એવા સમરૂપ ત્રિકોણની રચના કરો. રચનાને પ્રમાણિત કરો. શું બે ત્રિકોણો એકરૂપ છે ? નોંધો કે ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓ અને બે બાજુઓ બે સમાન છે.



વર્તુળ સંબંધિત ક્ષેત્રફળ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પના અને પરિણામો

સરળ બંધ આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ, વર્તુળનો પરિઘ અને ક્ષેત્રફળ, વર્તુળાકાર પથનું ક્ષેત્રફળ (એટલે કે વલયનું ક્ષેત્રફળ) વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ અને કેન્દ્રસ્થ ખૂણો - ગુરુવૃત્તાંશ અને લઘુવૃત્તાંશ. વૃત્તખંડ - ગુરુવૃત્તખંડ અને લઘુવૃત્તખંડ.

• વર્તુળનો પરિઘ = $2\pi r$ અને વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = πr^2 , જ્યાં r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.

• ત્રિજ્યા r_1 અને r_2 ($r_1 > r_2$) વાળા બે સમકેન્દ્રીય વર્તુળ વચ્ચે રચાતા

$$\text{વર્તુળાકાર માર્ગનું ક્ષેત્રફળ} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 - r_2^2).$$

• r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ θ ખૂણો રચતા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$, θ એ ખૂણાનું માપ અંશમાં છે.

• ત્રિજ્યા r અને કેન્દ્ર આગળ રચિત ખૂણો θ હોય, તેવા વર્તુળના વૃત્તાંશના ચાપની લંબાઈ = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$.

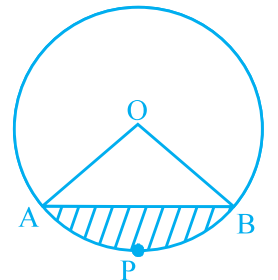
(θ એ ખૂણાનું અંશ માપ છે.)

• આકૃતિ 11.1 માં વર્તુળના લઘુવૃત્તખંડ APB નું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ OAPBનું ક્ષેત્રફળ - Δ OABનું ક્ષેત્રફળ

• r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ = πr^2 - અનુરૂપ લઘુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ

• r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ = πr^2 - અનુરૂપ લઘુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ

નોંધ : જો π ની કિંમત આપેલ ના હોય, તો તે $\frac{22}{7}$ લેવી.



આકૃતિ 11.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 અને 2 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : જો વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ 154 સેમી² હોય, તો તેની પરિમિતિ

- (A) 11 સેમી (B) 22 સેમી (C) 44 સેમી (D) 55 સેમી

ઉકેલ : વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = 154 સેમી²

$$\therefore \pi r^2 = 154$$

$$\therefore r^2 = \frac{154}{\pi}$$

$$\therefore r^2 = \frac{154 \times 7}{22} = 49$$

$$\therefore r = 7 \text{ સેમી}$$

વર્તુળની પરિમિતિ = વર્તુળનો પરિઘ

$$= 2\pi r$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$$

$$= 44 \text{ સેમી}$$

ઉત્તર (C)

ઉદાહરણ 2 : જો θ એ r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તાંશના ખૂણાનું માપ અંશમાં હોય, તો તે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ

- (A) $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$ (B) $\frac{\pi r^2 \theta}{180}$ (C) $\frac{2 \pi r \theta}{360}$ (D) $\frac{2 \pi r \theta}{180}$

ઉકેલ : ઉત્તર (A)

સ્વાધ્યાય 11.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 10 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. જો R_1 અને R_2 ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળોનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો, R ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ક્ષેત્રફળ જેટલો થાય, તો

(A) $R_1 + R_2 = R$ (B) $R_1^2 + R_2^2 = R^2$

(C) $R_1 + R_2 < R$ (D) $R_1^2 + R_2^2 < R^2$

2. જો R_1 અને R_2 ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળોના પરિઘનો સરવાળો, R ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના પરિઘ જેટલો હોય, તો

(A) $R_1 + R_2 = R$ (B) $R_1 + R_2 > R$

(C) $R_1 + R_2 < R$ (D) R_1, R_2 અને R ના સંબંધ વિશે કશું ચોક્કસ કહી શકાય નહિ.

3. જો વર્તુળનો પરિઘ અને ચોરસની પરિમિતિ સમાન હોય, તો

(A) વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

(B) વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ > ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

(C) વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ < ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

(D) વર્તુળના ક્ષેત્રફળ અને ચોરસના ક્ષેત્રફળના સંબંધ વિશે કશું ચોક્કસ કહી શકાય નહિ.

4. r એકમ ત્રિજ્યાવાળા અર્ધવર્તુળને અંતર્ગત સૌથી મોટા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ
- (A) r^2 ચોરસ એકમ (B) $\frac{1}{2} r^2$ ચોરસ એકમ
(C) $2r^2$ ચોરસ એકમ (D) $\sqrt{2} r^2$ ચોરસ એકમ
5. જો વર્તુળની પરિમિતિ ચોરસની પરિમિતિ જેટલી હોય, તો તેમના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર
- (A) 22 : 7 (B) 14 : 11 (C) 7 : 22 (D) 11 : 14
6. એક વિસ્તારમાં એક વર્તુળાકાર બગીચો એવી રીતે બનાવવામાં આવે છે કે તેનું ક્ષેત્રફળ 16 મી અને 12 મી વ્યાસના બે વર્તુળાકાર બગીચાનાં ક્ષેત્રફળના સરવાળા બરાબર હોય, તો નવા બગીચાની ત્રિજ્યા હોય.
- (A) 10 મી (B) 15 મી (C) 20 મી (D) 24 મી
7. 6 સેમી બાજુના ચોરસને અંતર્ગત વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ
- (A) 36π સેમી² (B) 18π સેમી² (C) 12π સેમી² (D) 9π સેમી²
8. 8 સેમી ત્રિજ્યાના વર્તુળને અંતર્ગત ચોરસનું ક્ષેત્રફળ
- (A) 256 સેમી² (B) 128 સેમી² (C) $64\sqrt{2}$ સેમી² (D) 64 સેમી²
9. 36 સેમી અને 20 સેમી વ્યાસવાળાં બે વર્તુળોના પરિઘના સરવાળાને સમાન પરિઘવાળા વર્તુળની ત્રિજ્યા
- (A) 56 સેમી (B) 42 સેમી (C) 28 સેમી (D) 16 સેમી
10. એક વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ, 24 સેમી અને 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળોનાં ક્ષેત્રફળોના સરવાળા જેટલું હોય, તો તે વર્તુળનો વ્યાસ
- (A) 31 સેમી (B) 25 સેમી (C) 62 સેમી (D) 50 સેમી

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

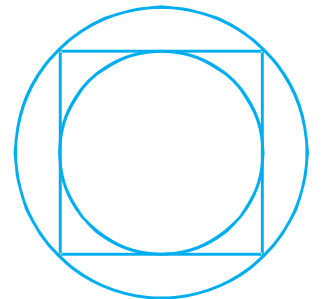
ઉદાહરણ 1 : નીચેનું વિધાન સત્ય છે ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો :

વર્તુળના વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ = અનુરૂપ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ – અનુરૂપ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

ઉકેલ : વિધાન સાચું નથી. તે ફક્ત લઘુવૃત્તખંડ માટે સાચું છે. ગુરુવૃત્તખંડના કિસ્સામાં, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, અનુરૂપ વૃત્તાંશના ક્ષેત્રફળમાં ઉમેરવું પડે.

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 11.2 માં વર્તુળ એક ચોરસમાં અંતર્ગત છે. તે ચોરસની બાજુ 5 સેમી છે અને બીજું વર્તુળ ચોરસનું પરિવૃત્ત છે. શું એવું કહેવું સાચું છે કે બહારના વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ, અંદરના વર્તુળના ક્ષેત્રફળ કરતાં બમણું છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.

ઉકેલ : તે સત્ય છે, કારણ કે અંતર્ગત વર્તુળનો વ્યાસ = 5 સેમી અને બહારના વર્તુળનો વ્યાસ = ચોરસનો વિકર્ણ = $5\sqrt{2}$ સેમી.

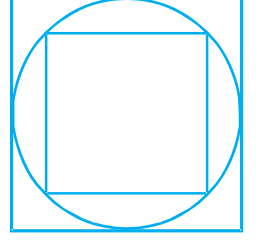


આકૃતિ 11.2

તેથી, $A_1 = \pi \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$ અને $A_2 = \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2$, તેથી $\frac{A_1}{A_2} = 2$

સ્વાધ્યાય 11.2

1. a સેમી બાજુવાળા ચોરસમાં અંતર્ગત વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ πa^2 સેમી² છે ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.
2. એ કહેવું સાચું છે કે a સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને બહિર્ગત ચોરસની પરિમિતિ $8a$ સેમી છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.
3. આકૃતિ 11.3 માં, d વ્યાસવાળા વર્તુળને અંતર્ગત એક ચોરસ છે અને બીજો ચોરસ તે વર્તુળને બહિર્ગત છે. શું બહારના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ, અંદરના ચોરસના ક્ષેત્રફળ કરતાં ચાર ગણું છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.
4. એમ કહેવું સાચું છે કે વર્તુળના વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ તેના અનુરૂપ વૃત્તાંશના ક્ષેત્રફળથી ઓછું છે ? શા માટે ?
5. તે સાચું છે કે એક પરિભ્રમણ દરમિયાન d સેમી વ્યાસના વર્તુળાકાર ચક્રએ કાપેલું અંતર $2\pi d$ સેમી છે ? શા માટે ?



આકૃતિ 11.3

6. s મીટર અંતર કાપવામાં, એક r ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળાકાર ચક્ર, $\frac{s}{2\pi r}$ પરિભ્રમણ કરે છે. આ વિધાન સાચું છે ? શા માટે ?
7. વર્તુળના ક્ષેત્રફળની અંકીય કિંમત તેના પરિઘની અંકીય કિંમત કરતાં વધુ છે. આ વિધાન સાચું છે ? શા માટે ?
8. જો r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ચાપની લંબાઈ, $2r$ ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના ચાપની લંબાઈ જેટલી હોય, તો પહેલા વર્તુળના અનુરૂપ વૃત્તાંશનો ખૂણો, બીજા વર્તુળના અનુરૂપ વૃત્તાંશના ખૂણા કરતાં બમણો હોય. આ વિધાન અસત્ય છે ? શા માટે ?
9. જેના અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ સમાન હોય, તેવાં બે ભિન્ન વર્તુળોના બે વૃત્તાંશનાં ક્ષેત્રફળ સરખાં હોય. આ વિધાન સત્ય છે ? શા માટે ?
10. બે ભિન્ન વર્તુળોનાં બે વૃત્તાંશનાં ક્ષેત્રફળ સરખાં છે. શું તે જરૂરી છે કે તેનાં અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ સરખી હોય ? શા માટે ?
11. a સેમી લંબાઈ અને b સેમી પહોળાઈ ($a > b$)વાળા લંબચોરસની અંતર્ગત દોરેલા મોટામાં મોટા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ πb^2 સેમી² છે ? શા માટે ?
12. બે વર્તુળોના પરિઘ સમાન છે. તો તેમના ક્ષેત્રફળ સમાન હોય તે આવશ્યક છે ?
13. બે વર્તુળોનાં ક્ષેત્રફળ સમાન છે. તો તેમના પરિઘ સમાન હોય તે આવશ્યક છે ?
14. શું તે કહેવું સાચું છે કે p સેમી વ્યાસના વર્તુળને અંતર્ગત ચોરસનું ક્ષેત્રફળ p^2 સેમી² છે ? શા માટે ?

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : એવા વર્તુળનો વ્યાસ શોધો કે જેનું ક્ષેત્રફળ અનુક્રમે 20 સેમી અને 48 સેમી વ્યાસ હોય તેવાં બે વર્તુળોનાં ક્ષેત્રફળના સરવાળા બરાબર હોય.

ઉકેલ : અહીં પહેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા $r_1 = \frac{20}{2}$ સેમી = 10 સેમી

અને બીજા વર્તુળની ત્રિજ્યા $r_2 = \frac{48}{2}$ સેમી = 24 સેમી

તેથી, તેમનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો = $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (10)^2 + \pi (24)^2 = \pi \times 676$ (1)

ધારો કે, નવા વર્તુળની ત્રિજ્યા r સેમી છે. તેનું ક્ષેત્રફળ = πr^2 (2)

તેથી, (1) અને (2) પરથી

$$\pi r^2 = \pi \times 676 \quad \text{અથવા} \quad r^2 = 676$$

એટલે કે, $r = 26$

આમ, નવા વર્તુળની ત્રિજ્યા = 26 સેમી

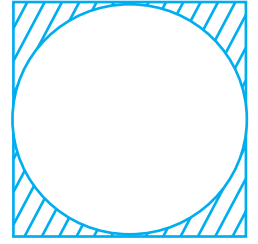
તેથી, નવા વર્તુળનો વ્યાસ = 2×26 સેમી = 52 સેમી

ઉદાહરણ 2 : 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અને 120° નો કેન્દ્રીય ખૂણો ધરાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ} &= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \\ &= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times (21)^2 \text{ સેમી}^2 \\ &= 22 \times 21 \text{ સેમી}^2 \\ &= 462 \text{ સેમી}^2 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 11.4 માં 7.5 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ એક ચોરસમાં અંતર્ગત છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

$$\begin{aligned} \text{ઉકેલ : વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ} &= \pi r^2 \\ &= 3.14 \times (7.5)^2 \text{ સેમી}^2 \\ &= 176.625 \text{ સેમી}^2 \end{aligned}$$



આકૃતિ 11.4

દેખીતી રીતે જ, ચોરસની બાજુ = વર્તુળનો વ્યાસ = 15 સેમી

તેથી, ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = 15^2 સેમી² = 225 સેમી²

તેથી રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ = 225 સેમી² – 176.625 સેમી² = 48.375 સેમી²

ઉદાહરણ 4 : 36 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ 54π સેમી² છે. વૃત્તાંશને અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે કેન્દ્રીય ખૂણાનું અંશ માપ θ છે.

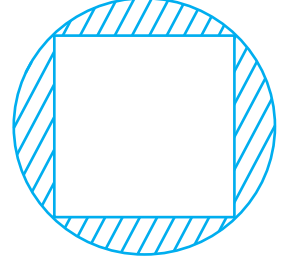
$$\text{તેથી,} \quad \frac{\pi \times (36)^2 \theta}{360} = 54\pi$$

$$\text{અથવા} \quad \theta = \frac{54 \times 360}{36 \times 36} = 15$$

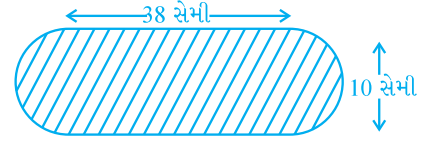
$$\begin{aligned} \text{હવે, ચાપની લંબાઈ} &= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r \\ &= \frac{15}{360} \times 2\pi \times 36 \text{ સેમી} \\ &= 3\pi \text{ સેમી} \end{aligned}$$

સ્વાધ્યાય 11.3

1. 15 સેમી અને 18 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળોના પરિઘના સરવાળા બરાબર જેનો પરિઘ હોય એવા વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
2. આકૃતિ 11.5 માં, 8 સેમી વિકર્ણવાળો એક ચોરસ વર્તુળમાં અંતર્ગત છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. 28 સેમી ત્રિજ્યા અને કેન્દ્રીય ખૂણો 45° હોય, તેવા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. એક મોટરસાઈકલનાં પૈડાંની ત્રિજ્યા 35 સેમી છે. 66 કિમી પ્રતિ કલાકની ઝડપ રાખવા માટે પૈડાંએ પ્રતિ મિનિટ કેટલા પરિભ્રમણ કરવા પડે ?
5. 20 મી \times 16 મી પરિમાણવાળા લંબચોરસ ખેતરના કોઈ એક ખૂણે, 14 મી લંબાઈના દોરડાથી એક ગાય બાંધેલી છે, તો ગાય ચરી શકે તેટલા ખેતરના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
6. આકૃતિ 11.6 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ફૂલોની ક્યારી (જેના બંને છેડા અર્ધ વર્તુળાકાર છે) નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

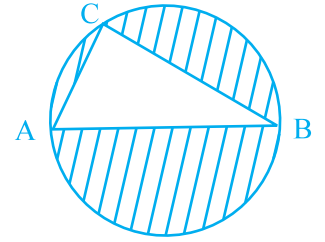


આકૃતિ 11.5



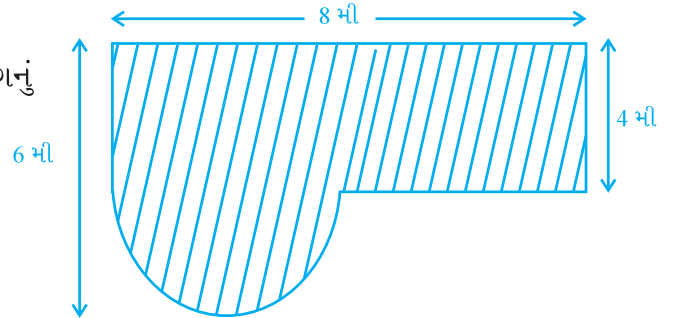
આકૃતિ 11.6

7. આકૃતિ 11.7 માં AB એ વર્તુળનો વ્યાસ છે AC = 6 સેમી અને BC = 8 સેમી છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



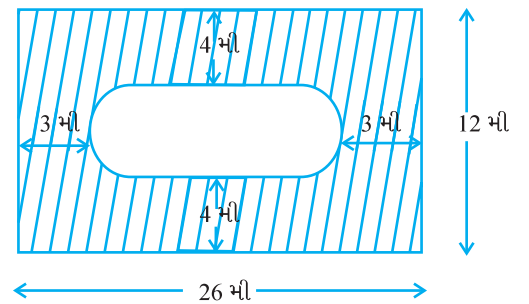
આકૃતિ 11.7

8. આકૃતિ 11.8 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.8

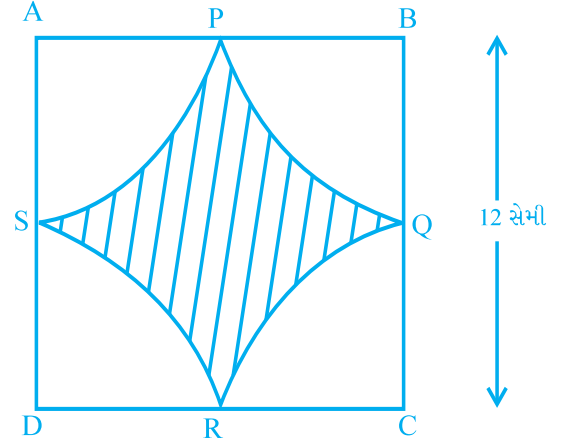
9. આકૃતિ 11.9 ના રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.9

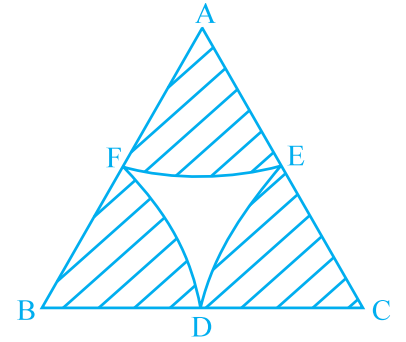
10. 14 સેમીની ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તાંશનો ખૂણો 60° નો હોય એવા લઘુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

11. આકૃતિ 11.10 માં રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ચોરસ ABCD ની બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે અને તેમને A, B, C અને D ને કેન્દ્ર ગણીને દોરેલાં ચાપ જોડીમાં છેદે છે. ($\pi = 3.14$ લો.)



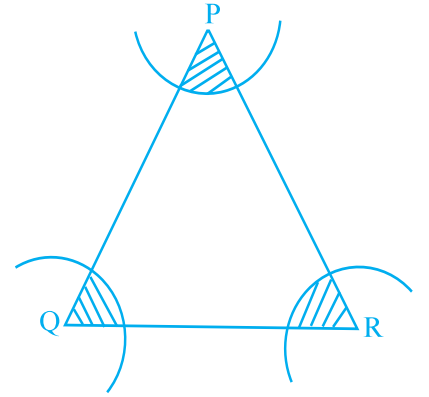
આકૃતિ 11.10

12. આકૃતિ 11.11 માં 10 સેમી બાજુવાળા સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ A, B અને C ને કેન્દ્ર ગણી દોરેલાં ચાપ બાજુઓ BC, CA અને AB ને અનુક્રમે D, E અને F માં છેદે છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



આકૃતિ 11.11

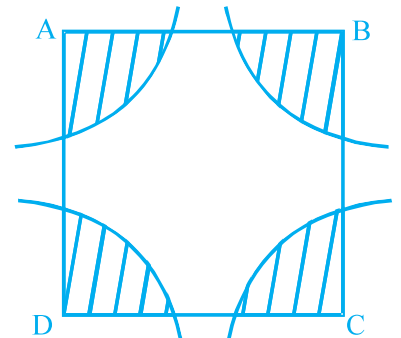
13. આકૃતિ 11.12 માં P, Q અને R ને કેન્દ્ર લઈ 14 સેમીની ત્રિજ્યાનાં ચાપ દોરેલા છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.12

14. એક વર્તુળાકાર બગીચાની ચારે બાજુ 21 મી પહોળાઈનો એક રસ્તો આવેલો છે. જો બગીચાની ત્રિજ્યા 105 મી હોય, તો રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

15. આકૃતિ 11.13 માં ચતુષ્કોણ ABCD નાં શિરોબિંદુઓ A, B, C અને D ને કેન્દ્ર ગણી 21 સેમીની ત્રિજ્યાનાં ચાપ દોરેલા છે. રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.13

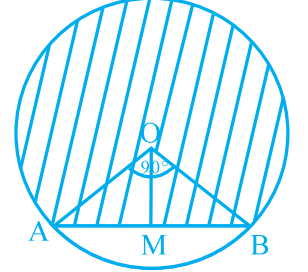
16. 20 સેમી લંબાઈના એક તારના ટુકડાને વાળીને એક વર્તુળના ચાપ-આકારમાં ફેરવવામાં આવે છે અને તે કેન્દ્ર આગળ 60° નો ખૂણો આંતરે છે, તો તે વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ 90° નો ખૂણો આંતરે છે. વર્તુળના અનુરૂપ ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : ધારો કે 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા AB છે. તે વર્તુળનું કેન્દ્ર O છે. (આકૃતિ 11.4 જુઓ.)

અહીં, $\angle AOB = 90^\circ$ અને આપણે ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું છે (તે રેખાંકિત છે). $\angle AOB = 90^\circ$ હોવાથી, ગુરુવૃત્તખંડનો ખૂણો $= 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$



આકૃતિ 11.14

$$\begin{aligned} \text{તેથી, ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ} &= \frac{270}{360} \times \pi \times (10)^2 \text{ સેમી}^2 \\ &= \frac{3}{4} \times 3.14 \times 100 \text{ સેમી}^2 \\ &= 75 \times 3.14 \text{ સેમી}^2 = 235.5 \text{ સેમી}^2 \end{aligned}$$

હવે, ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, $OM \perp AB$ દોરો.

$$\text{તેથી, } AM = \frac{1}{2} AB \text{ અને } \angle AOM = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ.$$

$$\text{હવે, } \frac{AM}{OA} = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{તેથી, } AM = 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ સેમી}$$

$$\text{તેથી, } AB = 10\sqrt{2} \text{ સેમી અને } OM = OA \cos 45^\circ = 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ સેમી} = 5\sqrt{2} \text{ સેમી}$$

$$\begin{aligned} \text{તેથી, } \Delta OAB \text{નું ક્ષેત્રફળ} &= \frac{1}{2} \text{ પાયો} \times \text{ઊંચાઈ} \\ &= \frac{1}{2} 10\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \text{ સેમી}^2 = 50 \text{ સેમી}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{તેથી, માંગેલા ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ} \\ &= 235.5 \text{ સેમી}^2 + 50 \text{ સેમી}^2 = 285.5 \text{ સેમી}^2 \end{aligned}$$

ΔOAB ના ક્ષેત્રફળ માટેની બીજી રીત

$$\angle AOB = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned} \text{તેથી, } \Delta OAB \text{નું ક્ષેત્રફળ} &= \frac{1}{2} OA \times OB \\ &= \frac{1}{2} 10 \times 10 \text{ સેમી}^2 = 50 \text{ સેમી}^2 \end{aligned}$$

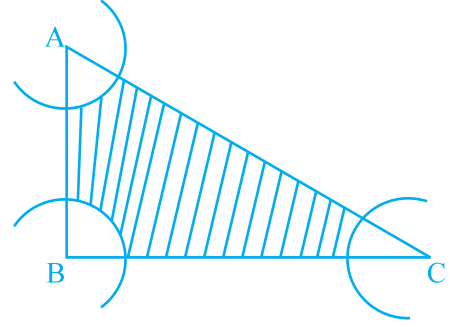
ઉદાહરણ 2 : ત્રિકોણ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A, B અને C ને કેન્દ્ર લઈ, આકૃતિ 11.15 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 5 સેમી ત્રિજ્યાનાં ચાપ દોરેલા છે. જો AB = 14 સેમી, BC = 48 સેમી અને CA = 50 સેમી તો રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : ખૂણા A વાળાં વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{\angle A}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{\angle A}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 \text{ સેમી}^2$$

ખૂણા B વાળાં વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 \text{ સેમી}^2$$



આકૃતિ 11.15

અને ખૂણા C વાળા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{\angle C}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 \text{ સેમી}^2$

તેથી, ત્રણેય વૃત્તાંશનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો (સેમી²માં)

$$= \frac{\angle A}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 + \frac{\angle B}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2 + \frac{\angle C}{360^\circ} \times \pi \times (5)^2$$

$$= \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{360^\circ} \times 25 \pi$$

$$= \frac{180^\circ}{360^\circ} \times 25 \pi \text{ સેમી}^2 \text{ (કારણ કે } \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ)$$

$$= 25 \times \frac{\pi}{2} \text{ સેમી}^2 = 25 \times 1.57 \text{ સેમી}^2 = 39.25 \text{ સેમી}^2$$

હવે, ΔABC નું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે આપણે શોધીશું કે,

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{48 + 50 + 14}{2} \text{ સેમી} = 56 \text{ સેમી}$$

હેરોનના સૂત્ર મુજબ,

$$\begin{aligned} ar(ABC) &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{56 \times 8 \times 6 \times 42} \text{ સેમી}^2 \\ &= 336 \text{ સેમી}^2 \end{aligned}$$

તેથી, રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ = ΔABC નું ક્ષેત્રફળ - ત્રણ વૃત્તાંશનું કુલ ક્ષેત્રફળ

$$= (336 - 39.25) \text{ સેમી}^2 = 296.75 \text{ સેમી}^2$$

ar(ABC) માટેની બીજી રીત

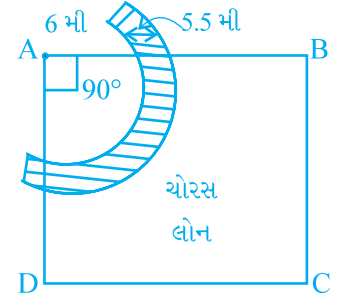
$$\text{અહીં, } AB^2 + BC^2 = (14)^2 + (48)^2 = 2500 = (50)^2 = (CA)^2$$

તેથી, $\angle B = 90^\circ$ (પાયથાગોરસ પ્રમેયના પ્રતીપ પ્રમાણે)

$$\text{તેથી, } ar(ABC) = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times 14 \times 48 \text{ સેમી}^2 = 336 \text{ સેમી}^2$$

ઉદાહરણ 3 : 20 મી બાજુવાળા ઘાસથી આચ્છાદિત ચોરસના કોઈ એક ખૂણા પર 6 મી લંબાઈના દોરડાથી એક વાછરડું બાંધેલું છે. જો દોરડાની લંબાઈ 5.5 મી વધારવામાં આવે, તો વાછરડું ચરી શકે તેટલું વધારાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, ચોરસ લોનના કોઈ એક ખૂણા A પર વાછરડું બાંધેલું છે. (આકૃતિ 11.16 જુઓ.)



આકૃતિ 11.16

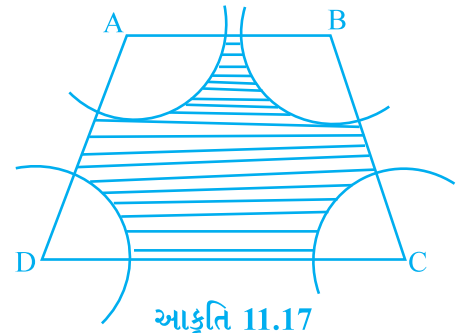
તેથી, વધેલું ક્ષેત્રફળ = બે વૃત્તાંશનો તફાવત કે જેનો કેન્દ્રીય ખૂણો 90° અને ત્રિજ્યા 11.5 મી (6 મી + 5.5 મી) અને 6 મી હોય. તે આકૃતિમાં રેખાંકિત ભાગ દ્વારા દર્શાવેલ છે.

તેથી, માંગેલું વધારાનું ક્ષેત્રફળ

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{90}{360} \times \pi \times 11.5^2 - \frac{90}{360} \times \pi \times 6^2 \right] \text{મી}^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} \times (11.5 + 6) (11.5 - 6) \text{મી}^2 \\
 &= \frac{22}{7 \times 4} \times 17.5 \times 5.5 \text{મી}^2 \\
 &= 75.625 \text{મી}^2
 \end{aligned}$$

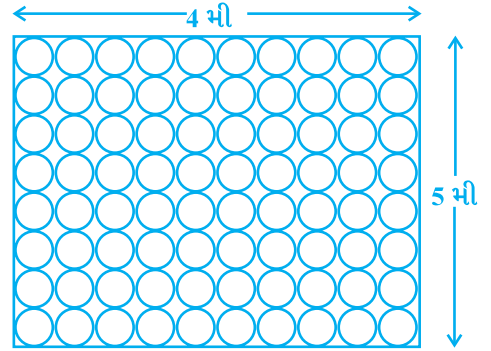
સ્વાધ્યાય 11.4

1. એક વર્તુળાકાર રમતના મેદાનનું ક્ષેત્રફળ 22176 મી² છે. આ મેદાનની ફરતે વાડ બનાવવાનો ખર્ચ પ્રતિ મીટરના ₹ 50 દરે શોધો.
2. એક ટ્રેક્ટરના આગળ અને પાછળનાં પૈડાંના વ્યાસ અનુક્રમે 80 સેમી અને 2 મી છે. જો આગળનું પૈડું 1400 પરિભ્રમણ કરે, તો તેટલું અંતર કાપવા પાછળનાં પૈડાંએ કેટલાં પરિભ્રમણ કરવા પડે ?
3. ત્રિકોણીય ખેતરની બાજુઓ 15 મી, 16 મી અને 17 મી છે. ગાય, ભેંસ અને ઘોડો તે ખેતરમાં ચરી શકે તે રીતે ખેતરના ત્રણ ખૂણાઓએ 7 મી લાંબા દોરડાથી બાંધેલા છે, આ ત્રણ પ્રાણીઓ દ્વારા ન ચરી શકાય તેવા ખેતરના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. 12 સેમી ત્રિજ્યાવાળા જેને અનુરૂપ વૃત્તાંશનો કેન્દ્રીય ખૂણો 60° હોય તેવા વર્તુળના વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)
5. એક વર્તુળાકાર તળાવનો વ્યાસ 17.5 મી છે. તેની બહાર 2 મી પહોળાઈનો રસ્તો છે. ₹ 25 પ્રતિ મી² ના દરે રસ્તાના બાંધકામનો ખર્ચ શોધો.
6. આકૃતિ 11.17 માં, ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે. $AB \parallel DC$ છે. $AB = 18$ સેમી, $DC = 32$ સેમી અને AB અને DC, વચ્ચેનું અંતર = 14 સેમી. જો A, B, C અને D ને કેન્દ્ર ગણીને 7 સેમી સમાન ત્રિજ્યાનાં ચાપ દોરેલાં હોય, તો આકૃતિમાં દર્શાવેલા રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



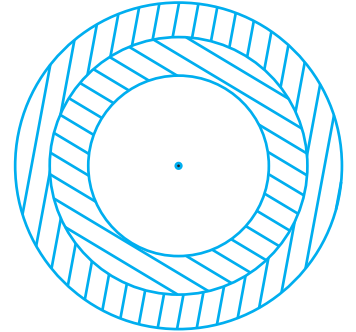
આકૃતિ 11.17

7. જે દરેકની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી હોય તેવાં ત્રણ વર્તુળો એવી રીતે દોરેલાં છે કે દરેક બાકીના બેને સ્પર્શે. આ વર્તુળોની વચ્ચે ઘેરાતા ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
8. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના એક વૃત્તાંશના અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ 3.5 સેમી છે. તો આ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
9. 7 સેમી ત્રિજ્યાના ચાર વર્તુળાકાર પૂંઠાના ટુકડાઓ એક કાગળ ઉપર એવી રીતે ગોઠવેલા છે કે જેથી દરેક ટુકડો બીજા બે ટુકડાઓને સ્પર્શે છે. આ ટુકડાઓની વચ્ચે રચાતા અંધ ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
10. જેનું ક્ષેત્રફળ 784 સેમી² છે તેવા એક ચોરસ પૂંઠા પર, મહત્તમ માપની ચાર વર્તુળાકાર તકતીઓ એવી રીતે ગોઠવેલી છે કે દરેક વર્તુળાકાર તકતી બીજી બે તકતીઓને સ્પર્શે અને ચોરસ પૂંઠાની દરેક બાજુ બે વર્તુળાકાર તકતીઓનો સ્પર્શક છે. ચોરસ પૂંઠાનો જેટલો ભાગ બાકી રહે તે ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
11. આકૃતિ 11.18 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, એક ઓરડાના ભોંયતળિયાનાં પરિમાણ 5 મી \times 4 મી અને તેના પર 50 સેમી વ્યાસવાળી વર્તુળાકાર લાદી ઢાંકેલી છે. લાદી દ્વારા ન રોકાયેલ ભોંયતળિયાના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



આકૃતિ 11.18

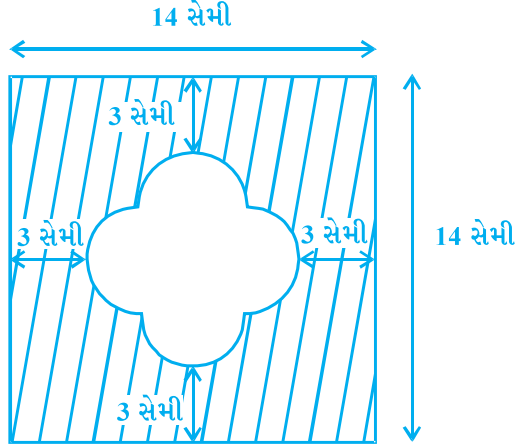
12. એક સમબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ વર્તુળ પર છે. જો વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ 1256 સેમી² હોય, તો સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)
13. આકૃતિ 11.19 માં બતાવ્યા પ્રમાણે, એક તિરંદાજી નિશાનમાં ત્રણ સમકેન્દ્રીય વર્તુળોથી રચાતા ત્રણ ભાગ છે. જો સમકેન્દ્રી વર્તુળોના વ્યાસનો ગુણોત્તર $1 : 2 : 3$ હોય, તો તે ત્રણેય ભાગનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.



આકૃતિ 11.19

14. એક ઘડિયાળના મિનિટકાંટાની લંબાઈ 5 સેમી છે. મિનિટકાંટાએ સવારના $6:05$ અને સવારના $6:40$ દરમિયાન આંતરેલા ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
15. કેન્દ્રીય ખૂણો 200° હોય, તેવા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ 770 સેમી² છે. આ વૃત્તાંશને અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ શોધો.
16. 7 સેમી અને 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળોના બે વૃત્તાંશના કેન્દ્રીય ખૂણાઓ અનુક્રમે 120° અને 40° છે. તે બે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો અને તેને અનુરૂપ ચાપની લંબાઈ પણ શોધો. તમે શું અવલોકન કર્યું ?

17. આકૃતિ 11.20 માં રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.20

18. 176 મી અંતર કાપવા, 1.54 મી^2 ક્ષેત્રફળવાળા વર્તુળાકાર પૈડાએ કરેલાં પરિભ્રમણની સંખ્યા શોધો.
19. 5 સેમી લંબાઈની જીવા, કેન્દ્ર આગળ 90° નો ખૂણો આંતરે, તો વર્તુળના બે વૃત્તખંડોનાં ક્ષેત્રફળનો તફાવત શોધો.
20. 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના 120° ના ખૂણાવાળા વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ અને તેને અનુરૂપ ગુરુવૃત્તખંડના ક્ષેત્રફળનો તફાવત શોધો.



પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પના અને પરિણામો

- બે ઘનને જોડતાં બનતા પદાર્થની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ જેમ કે, લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોળો અને અર્ધગોળો.
- બે ઘનને જોડતાં બનતા પદાર્થનું ઘનફળ જેમ કે, લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોળો અને અર્ધગોળો.
- શંકુના આડછેદમાં વપરાતાં સૂત્રો :

$$(i) \text{ શંકુના આડછેદનું ઘનફળ} = \frac{1}{3} \pi h [r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$$

$$(ii) \text{ શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = \pi(r_1 + r_2)l, \text{ જ્યાં } l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

$$(iii) \text{ ઘન શંકુના આડછેદની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ} = \pi l(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2,$$

h = આડછેદની ઊંચાઈ, l = આડછેદની તિર્યક ઊંચાઈ અને

r_1 અને r_2 એ આડછેદના બે પાયાઓની ત્રિજ્યાઓ

- ઘન અર્ધગોળો : જો r એ અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા હોય, તો

$$\text{વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = 2\pi r^2$$

$$\text{સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ} = 3\pi r^2 \text{ અને ઘનફળ} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

- પોલા ગોળાનું ઘનફળ = $\frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_2^3)$, જ્યાં r_1 અને r_2 અનુક્રમે તેની બહારની અને અંદરની ત્રિજ્યાઓ છે.

આ સમગ્ર પ્રકરણમાં, જો π ની બીજી કોઈ કિંમત આપી ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 5 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :



આકૃતિ 12.1

ઉદાહરણ 1 : એક ગળણી (જુઓ આકૃતિ 12.1.) નું સંયોજન છે.

- (A) શંકુ અને નળાકાર (B) શંકુનો આડછેદ અને નળાકાર
(C) અર્ધગોળો અને નળાકાર (D) અર્ધગોળો અને શંકુ

ઉકેલ : ઉત્તર (B)

ઉદાહરણ 2 : 2.1 સેમી ત્રિજ્યાની એક લખોટીને, 5 સેમી ત્રિજ્યા અને 6 સેમી ઊંચાઈના પાણીથી સંપૂર્ણ ભરેલા નળાકાર પ્યાલામાં મૂકવામાં આવે, તો નળાકાર પ્યાલામાંથી કેટલું પાણી બહાર આવશે ?

- (A) 38.8 સેમી³ (B) 55.4 સેમી³ (C) 19.4 સેમી³ (D) 471.4 સેમી³

ઉકેલ : નળાકાર પ્યાલામાંથી બહાર આવતાં પાણીનું ઘનફળ = લખોટીનું ઘનફળ

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3 \\ &= 38.8 \text{ સેમી}^3 \end{aligned}$$

ઉત્તર (A)

ઉદાહરણ 3 : એક ઘનાકાર આઈસક્રીમ પેટીની અંદરની ધાર 22 સેમી છે. તે પેટીમાંના આઈસક્રીમને 2 સેમી ત્રિજ્યા અને 7 સેમી ઊંચાઈના આઈસક્રીમ કોનમાં ધાર સુધી ભરીને કેટલાંક બાળકોને વહેંચવામાં આવે છે. કેટલાં બાળકોને આઈસક્રીમ કોન મળી શકે ?

- (A) 163 (B) 263 (C) 363 (D) 463

ઉકેલ : ઘનાકાર પેટીનું ઘનફળ = $(22 \times 22 \times 22)$ સેમી³

$$\begin{aligned} \text{આઈસક્રીમ કોનનું ઘનફળ} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 2 \times 2 \times 7 \\ &= \frac{88}{3} \text{ સેમી}^3 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{આઈસક્રીમ કોન મેળવનાર બાળકોની સંખ્યા} = \left(\frac{22 \times 22 \times 22 \times 3}{88} \right) = 363$$

ઉત્તર (C)

ઉદાહરણ 4 : h સેમી ઊંચાઈના શંકુના આડછેદના બે અંત્યતલની ત્રિજ્યાઓ r_1 સેમી અને r_2 સેમી છે. શંકુના આડછેદનું ઘનફળ સેમી³ માં

- (A) $\frac{1}{3} \pi h [r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$ (B) $\frac{1}{3} \pi h [r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2]$
(C) $\frac{1}{3} \pi h [r_1^2 - r_2^2 + r_1 r_2]$ (D) $\frac{1}{3} \pi h [r_1^2 - r_2^2 - r_1 r_2]$

ઉકેલ : ઉત્તર (A)

ઉદાહરણ 5 : 4.2 સેમી ધારના એક ઘનમાંથી મોટામાં મોટો લંબવૃત્તીય શંકુ કાપતાં, શંકુનું ઘનફળ

(A) 9.7 સેમી³ (B) 77.6 સેમી³ (C) 58.2 સેમી³ (D) 19.4 સેમી³

ઉકેલ : ઘનની ધારની લંબાઈ = શંકુનો વ્યાસ = 4.2 સેમી

∴ શંકુની ત્રિજ્યા = 2.1 સેમી

શંકુની ઊંચાઈ = 4.2 સેમી

∴ શંકુનું ઘનફળ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 4.2$$

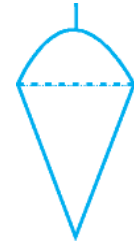
$$= 19.4 \text{ સેમી}^3$$

ઉત્તર (D)

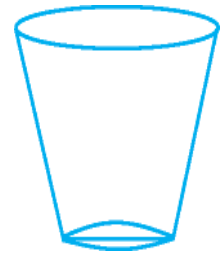
સ્વાધ્યાય 12.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 20 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

- એક છેડેથી છોલેલી નળાકાર પેન્સિલ કોનું સંયોજન છે ?
 (A) શંકુ અને નળાકાર (B) શંકુનો આડછેદ અને નળાકાર
 (C) અર્ધગોળો અને નળાકાર (D) બે નળાકાર
- સુરાહી કોનું સંયોજન છે ?
 (A) ગોળો અને નળાકાર (B) અર્ધગોળો અને નળાકાર
 (C) બે અર્ધગોળાઓ (D) નળાકાર અને શંકુ
- એક ઓળંબો કોનું સંયોજન છે ? (આકૃતિ 12.2 જુઓ.)
 (A) શંકુ અને નળાકાર (B) અર્ધગોળો અને શંકુ
 (C) શંકુનો આડછેદ અને નળાકાર (D) ગોળો અને નળાકાર



આકૃતિ 12.2



આકૃતિ 12.3

- સામાન્ય રીતે ગ્લાસનો આકાર (આકૃતિ 12.3 જુઓ.) સ્વરૂપમાં હોય છે.
 (A) શંકુ (B) શંકુનો આડછેદ
 (C) નળાકાર (D) ગોળો
- ગીલ્લી દંડાની રમતમાં ગીલ્લીનો આકાર (જુઓ આકૃતિ 12.4.), નું સંયોજન છે.
 (A) બે નળાકાર (B) શંકુ અને નળાકાર
 (C) બે શંકુ અને એક નળાકાર (D) બે નળાકાર અને એક શંકુ



આકૃતિ 12.4

6. બેડમિન્ટન રમવા માટેના ફૂલ (શટલકોક)નો આકાર નું સંયોજન છે.
 (A) નળાકાર અને ગોળો (B) નળાકાર અને અર્ધગોળો
 (C) ગોળો અને શંકુ (D) શંકુનો આડછેદ અને અર્ધગોળો
7. એક શંકુને તેના પાયાને સમાંતર સમતલથી કાપવામાં આવે છે અને આ રીતે બનેલા સમતલની એક બાજુના શંકુને દૂર કરવામાં આવે છે. સમતલની બીજી બાજુ બાકી રહેલા નવા ભાગને કહે છે.
 (A) શંકુનો આડછેદ (B) શંકુ (C) નળાકાર (D) ગોળો
8. અંદરની ધાર 22 સેમી હોય, તેવો એક પોલો ઘન, જેનો વ્યાસ 0.5 સેમી હોય તેવી ગોળાકાર લખોટીઓથી ભરેલો છે. આથી ઘનની $\frac{1}{8}$ જગ્યા ખાલી રહે છે, તો ઘનમાં સમાતી લખોટીઓની સંખ્યા
 (A) 142296 (B) 142396 (C) 142496 (D) 142596
9. જેનો અંદરનો અને બહારનો વ્યાસ અનુક્રમે 4 સેમી અને 8 સેમી હોય તેવા ધાતુના ગોળાને ઓગાળી તેમાંથી પાયાનો વ્યાસ 8 સેમી હોય, તેવા શંકુમાં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે. આ શંકુની ઊંચાઈ છે.
 (A) 12 સેમી (B) 14 સેમી (C) 15 સેમી (D) 18 સેમી
10. લોખંડનો એક ઘન ટુકડો લંબઘનાકાર સ્વરૂપમાં છે. તેનાં પરિમાણ 49 સેમી \times 33 સેમી \times 24 સેમી છે. તેને ગોળાના સ્વરૂપમાં ઢાળવામાં આવે છે. આ ગોળાની ત્રિજ્યા થાય.
 (A) 21 સેમી (B) 23 સેમી (C) 25 સેમી (D) 19 સેમી
11. એક કડિયો 22.5 સેમી \times 11.25 સેમી \times 8.75 સેમી માપની દરેક ઈંટ વડે 270 સેમી \times 300 સેમી \times 350 સેમી પરિમાણવાળી દીવાલ ચણે છે. એમ ધારવામાં આવે છે કે $\frac{1}{8}$ જગ્યા સિમેન્ટ દ્વારા રોકાયેલી છે, તો દીવાલ ચણવા માટે વપરાયેલી ઈંટોની સંખ્યા થાય.
 (A) 11100 (B) 11200 (C) 11000 (D) 11300
12. પાયાનો વ્યાસ 2 સેમી અને ઊંચાઈ 16 સેમી હોય તેવા સખત ધાતુના નળાકારને ઓગાળીને સમાન માપના 12 નક્કર ગોળાઓ બનાવવામાં આવે છે, તો દરેક ગોળાનો વ્યાસ છે.
 (A) 4 સેમી (B) 3 સેમી (C) 2 સેમી (D) 6 સેમી
13. 45 સેમી ત્રાંસી ઊંચાઈવાળી ડોલની ઉપરની અને તળિયાની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 28 સેમી અને 7 સેમી છે. ડોલની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ હોય.
 (A) 4950 સેમી² (B) 4951 સેમી² (C) 4952 સેમી² (D) 4953 સેમી²
14. એક દવાની કેપ્સ્યુલ, 0.5 સેમી વ્યાસના નળાકાર અને બંને છેડે બે અર્ધગોળાઓ લગાડીને બનાવેલી છે. આખી કેપ્સ્યુલની લંબાઈ 2 સેમી છે. કેપ્સ્યુલની ક્ષમતા થાય.
 (A) 0.36 સેમી³ (B) 0.35 સેમી³ (C) 0.34 સેમી³ (D) 0.33 સેમી³
15. સમાન પાયાની ત્રિજ્યા r વાળા બે નક્કર અર્ધગોળાઓ એકબીજાને પાયા સાથે જોડેલા છે. આ નવા ગોળાની વક્સપાટીનું ક્ષેત્રફળ થાય.
 (A) $4\pi r^2$ (B) $6\pi r^2$ (C) $3\pi r^2$ (D) $8\pi r^2$

16. r સેમી ત્રિજ્યા અને h સેમી ઊંચાઈ ($h > 2r$) ના એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં મહત્તમ વ્યાસનો એક ગોળો આવી શકે.
- (A) r સેમી (B) $2r$ સેમી (C) h સેમી (D) $2h$ સેમી
17. એક આકારમાંથી બીજા આકારમાં ઘનનું રૂપાંતર કરતાં, નવા આકારનું ઘનફળ
- (A) વધે છે (B) ઘટે છે (C) એમ જ રહે છે (D) બમણું થાય
18. ડોલની બે વર્તુળાકાર ધારનો વ્યાસ 44 સેમી અને 24 સેમી છે. ડોલની ઊંચાઈ 35 સેમી છે. ડોલની ક્ષમતા છે.
- (A) 32.7 લિટર (B) 33.7 લિટર (C) 34.7 લિટર (D) 31.7 લિટર
19. એક લંબવૃત્તીય શંકુમાં પાયાના સમતલને સમાંતર બનાવેલો આડછેદ છે.
- (A) વર્તુળ (B) શંકુનો આડછેદ (C) ગોળો (D) અર્ધગોળો
20. બે ગોળાના ઘનફળનો ગુણોત્તર 64 : 27 છે. તેમની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર
- (A) 3 : 4 (B) 4 : 3 (C) 9 : 16 (D) 16 : 9

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

નીચેનાં વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે કહો અને તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા જણાવો :

ઉદાહરણ 1 : જો પાયાની ત્રિજ્યા r અને ઊંચાઈ h વાળા શંકુને, શંકુ જેટલી જ સમાન પાયાની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈવાળા નળાકાર પર મૂકવામાં આવે, તો બનતી આકૃતિની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $\pi r\sqrt{h^2 + r^2} + 2\pi rh$.

ઉકેલ : સત્ય. વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ એક સાથે લેતાં, તે અલગથી લીધેલા વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું થાય.

ઉદાહરણ 2 : એક ગોળાકાર ધાતુના દડાને ઓગાળીને, આઠ નવા એકસરખા દડા બનાવવામાં આવે છે, તો દરેક નવા દડાની ત્રિજ્યા, મૂળ દડાની ત્રિજ્યાના $\frac{1}{8}$ મા ભાગ જેટલી હોય.

ઉકેલ : અસત્ય. મૂળ ધાતુના દડાની ત્રિજ્યા r છે અને ઓગાળ્યા પછી બનતા નવા દડાની ત્રિજ્યા r_1 છે.

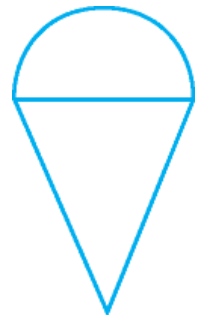
તેથી, $\frac{4}{3}\pi r^3 = 8 \times \frac{4}{3}\pi r_1^3$. તેથી $r_1 = \frac{r}{2}$.

ઉદાહરણ 3 : બે એકસમાન, a બાજુવાળા નક્કર ઘન એકબીજા સાથે જોડાયેલા છે, તો પરિણામી લંબઘનની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $12a^2$ છે.

ઉકેલ : અસત્ય. a બાજુવાળા ઘનની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $6a^2$ છે. જો a બાજુવાળી બે સમાન બાજુઓ એકબીજા સાથે જોડવામાં આવે, તો તેથી બનતા લંબઘનની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $10a^2$ છે.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 12.5 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, એક ભમરડાની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ, એ અર્ધગોળાની સપાટીના કુલ ક્ષેત્રફળ અને શંકુની સપાટીના કુલ ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું હોય છે.

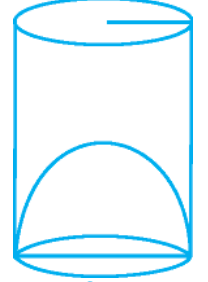
ઉકેલ : અસત્ય. ભમરડાની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ એ અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને શંકુની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળનાં સરવાળા જેટલું હોય છે.



આકૃતિ 12.5

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે પાત્રની ખરેખર ક્ષમતા એ નળાકારના ઘનફળ અને અર્ધગોળાના ઘનફળના તફાવત જેટલી છે.

ઉકેલ : સત્ય. પાત્રની ખરેખર ક્ષમતા, એ પાત્રની અંદરની ખાલી જગ્યા છે, તેમાં કંઈક પ્રવાહી ઉમેરતાં તેટલી જગ્યા એ રોકે છે.

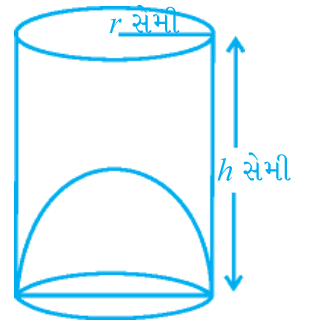


આકૃતિ 12.6

સ્વાધ્યાય 12.2

નીચેનાં વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય તે કહો અને તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા જણાવો :

1. બે સમાન ઘન અર્ધગોળાઓ તેમના સમાન પાયાની ત્રિજ્યા r સેમીથી જોડાયેલા છે. સંયોજનની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $6\pi r^2$ છે.
2. r ત્રિજ્યા અને h ઊંચાઈના એક ઘન નળાકારને તેના જેટલી જ ઊંચાઈ અને ત્રિજ્યાવાળા નળાકાર પર મૂકવામાં આવે છે. આ રીતે બનતા આકારની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $4\pi rh + 4\pi r^2$ છે.
3. r ત્રિજ્યા અને h ઊંચાઈના એક ઘન શંકુને તેના જેટલી જ ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈના ઘન નળાકાર પર મૂકવામાં આવે છે. આ સંયોજિત ઘનની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $\pi r \left[\sqrt{r^2 + h^2} + 3r + 2h \right]$.
4. a બાજુવાળા એક ઘનાકાર ખોખામાં એક ઘન દડો બરાબર બંધબેસતો આવે તેમ મૂકેલો છે. દડાનું ઘનફળ $\frac{4}{3}\pi a^3$ છે.
5. શંકુના આડછેદનું ઘનફળ $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2]$ છે, જ્યાં h એ આડછેદની સીધી ઊંચાઈ છે અને r_1 અને r_2 તેના બે છેડાની ત્રિજ્યાઓ છે.
6. આકૃતિ 12.7 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, તળિયેથી ઉપરની તરફ આવેલા અર્ધગોળાકાર ભાગ સાથે નળાકાર પાત્રની ક્ષમતા $\frac{\pi r^2}{3}(3h - 2r)$.



આકૃતિ 12.7

7. શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $\pi l (r_1 + r_2)$, છે જ્યાં $l = \sqrt{h^2 + (r_1 + r_2)^2}$, આડછેદના બે છેડાઓની ત્રિજ્યા r_1 અને r_2 છે અને h એ ઊંચાઈ છે.
8. એક જ ધાતુના પતરામાંથી બનેલા એક પોલા નળાકાર પાયાની ઉપર શંકુના આડછેદ આકારની ધાતુની પુલ્લી ડોલ આવેલી છે. ઉપયોગમાં લીધેલા શંકુના આડછેદની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + વર્તુળાકાર પાયાનું ક્ષેત્રફળ + નળાકારની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળ ધાતુના પતરાની સપાટીના ક્ષેત્રફળને સમાન હોય છે.

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : 14 સેમી ધારના ઘનમાંથી એક મહત્તમ માપનો શંકુ કાપવામાં આવેલો છે. શંકુની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો અને શંકુને કાપ્યા પછી ઘનની બાકી વધેલી સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : 14 સેમી ધારના ઘનમાંથી એક મહત્તમ માપનો શંકુ કાપતા તેની પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને ઊંચાઈ 14 સેમી થશે.

$$\begin{aligned}
 \text{શંકુની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ} &= \pi r l + \pi r^2 \\
 &= \frac{22}{7} \times 7 \times \sqrt{7^2 + 14^2} + \frac{22}{7} (7)^2 \\
 &= \frac{22}{7} \times 7 \times \sqrt{245} + 154 \\
 &= (154\sqrt{5} + 154) \text{ સેમી}^2 \\
 &= 154 (\sqrt{5} + 1) \text{ સેમી}^2
 \end{aligned}$$

$$\text{ઘનની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = 6 \times (14)^2 = 6 \times 196 = 1176 \text{ સેમી}^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{તેથી, શંકુને કાપ્યા પછી ઘનની બાકી વધેલી સપાટીનું ક્ષેત્રફળ} &= (1176 - 154 - 154\sqrt{5}) \text{ સેમી}^2 \\
 &= (1022 - 154\sqrt{5}) \text{ સેમી}^2.
 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 2 : 10.5 સેમી ત્રિજ્યાના એક ધાતુના ગોળાને ઓગાળીને 3.5 સેમી ત્રિજ્યા અને 3 સેમી ઊંચાઈના શંકુ બનાવ્યા છે. આ રીતે બનતા શંકુની સંખ્યા શોધો.

$$\text{ઉકેલ : ધાતુના ગોળાનું ઘનફળ} = \frac{4}{3} \pi (10.5)^3 \text{ સેમી}^3$$

$$3.5 \text{ સેમી ત્રિજ્યા અને } 3 \text{ સેમી ઊંચાઈના શંકુનું ઘનફળ} = \frac{1}{3} \pi (3.5)^2 \times 3 \text{ સેમી}^3$$

$$\text{આ રીતે બનતા શંકુની સંખ્યા} = \frac{\frac{4}{3} \pi \times 10.5 \times 10.5 \times 10.5}{\frac{1}{3} \pi \times 3.5 \times 3.5 \times 3} = 126$$

ઉદાહરણ 3 : એક નહેર 300 સેમી પહોળી અને 120 સેમી ઊંડી છે. નહેરમાં પાણી 20 કિમી/કલાકની ઝડપથી વહે છે. જો 8 સેમી ઊંચાઈનું પાણી રાખવું હોય, તો 20 મિનિટમાં કેટલા ક્ષેત્રફળમાં પાણી પીવડાવી શકાય ?

$$\begin{aligned}
 \text{ઉકેલ : એક કલાકમાં નહેરમાં વહેતા પાણીનું ઘનફળ} &= \text{નહેરની પહોળાઈ} \times \text{નહેરની ઊંડાઈ} \times \text{નહેરના પાણીની ઝડપ} \\
 &= 3 \times 1.2 \times 20 \times 1000 \text{ મી}^3 = 72000 \text{ મી}^3.
 \end{aligned}$$

$$20 \text{ મિનિટમાં વહેતા પાણીનું ઘનફળ} = \frac{72000 \times 20}{60} \text{ મી}^3 = 24000 \text{ મી}^3$$

8 સેમી એટલે કે 0.08 મી ઊંચાઈનું પાણી રાખવા માટે, જરૂરી ક્ષેત્રફળ

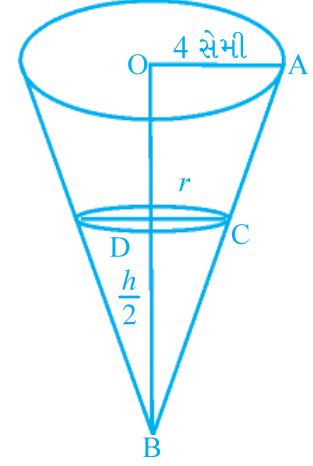
$$= \frac{24000}{0.08} \text{ મી}^2 = 300000 \text{ મી}^2 = 30 \text{ હેક્ટર.}$$

ઉદાહરણ 4 : 4 સેમી ત્રિજ્યાના એક શંકુને, તેની ધરીના મધ્યબિંદુ અને પાયાને સમાંતર દોરેલા સમતલ દ્વારા બે ભાગમાં વિભાજિત કરવામાં આવે છે. બંને ભાગના ઘનફળની સરખામણી કરો.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલા શંકુની ઊંચાઈ h છે. શંકુનું તેની ધરીના મધ્યબિંદુ અને પાયાને સમાંતર દોરેલા સમતલ દ્વારા બે ભાગમાં વિભાજન કરતાં આપણને નીચે પ્રમાણેની માહિતી મળે (જુઓ આકૃતિ 12.8.) :

બે સમરૂપ ત્રિકોણો OAB અને DCB માં, આપણી પાસે

$$\frac{OA}{CD} = \frac{OB}{BD}. \text{ તેથી } \frac{4}{r} = \frac{h}{\frac{h}{2}}. \text{ તેથી, } r = 2.$$



$$\text{તેથી, } \frac{\text{નાના શંકુનું ઘનફળ}}{\text{શંકુના આડછેદના ઘનફળ}} = \frac{\frac{1}{3}\pi \times (2)^2 \times \left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{h}{2}\right) [4^2 + 2^2 + 4 \times 2]} = \frac{1}{7}$$

તેથી, નાના શંકુના ઘનફળ અને શંકુના આડછેદના ઘનફળનો ગુણોત્તર 1 : 7 છે.

ઉદાહરણ 5 : ધાતુના ત્રણ ઘનની ધારનો ગુણોત્તર 3 : 4 : 5 છે. તેમને ઓગાળીને એક જ ઘનમાં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે. તેનો વિકર્ણ $12\sqrt{3}$ સેમી છે. આ ત્રણ ઘનની ધાર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે ત્રણ ઘનની ધાર (સેમીમાં) અનુક્રમે $3x$, $4x$ અને $5x$ છે.

$$\text{ઓગાળ્યા પછી ઘનનું ઘનફળ} = (3x)^3 + (4x)^3 + (5x)^3 = 216x^3 \text{ સેમી}^3$$

ધારો કે ઓગાળ્યા પછી બનતા નવા ઘનની બાજુ a છે.

$$\text{તેથી, } a^3 = 216x^3$$

$$\text{તેથી, } a = 6x, \text{ વિકર્ણ} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

પણ નવા ઘનનો વિકર્ણ $12\sqrt{3}$ સેમી આપેલો છે. માટે $a\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$, એટલે કે $a = 12$.

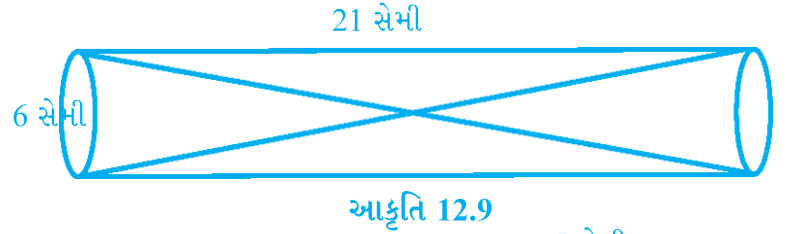
તેથી $x = 2$. માટે ત્રણ ઘનની ધાર અનુક્રમે 6 સેમી, 8 સેમી અને 10 સેમી છે.

સ્વાધ્યાય 12.3

- જેની ધાર 3 સેમી, 4 સેમી અને 5 સેમી હોય તેવા ધાતુના ત્રણ ઘનને ઓગાળીને એક ઘન બનાવેલ છે. આ રીતે બનતા ઘનની ધાર શોધો.
- એક લંબઘન સીસાનાં પરિમાણ 9 સેમી \times 11 સેમી \times 12 સેમી છે. આ લંબઘન સીસામાંથી 3 સેમી વ્યાસની કેટલી ગોળીઓ બને ?
- એક ડોલ શંકુના આડછેદના આકારની છે અને 28.490 લિટર પાણી ધરાવે છે. તેના મથાળા અને તળિયાની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 28 સેમી અને 21 સેમી છે. ડોલની ઊંચાઈ શોધો.

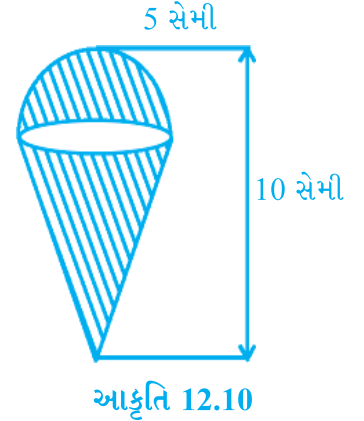
4. 8 સેમી ત્રિજ્યા અને 12 સેમી ઊંચાઈના એક શંકુનું, તેના ધરીના મધ્યબિંદુ અને પાયાને સમાંતર દોરેલા સમતલ દ્વારા બે ભાગમાં વિભાજન કરવામાં આવે છે. આ બે ભાગના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.
5. બે સમાન ઘન પૈકી પ્રત્યેકનું ઘનફળ 64 સેમી³ છે. તેમને બંને બાજુથી જોડેલા છે. બનતા પરિણામી લંબઘનની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શું થશે ?
6. 7 સેમી બાજુવાળા એક નક્કર ઘનમાંથી 7 સેમી ઊંચાઈ અને 3 સેમી ત્રિજ્યાનો એક શંકુ કોતરવામાં આવે છે. ઘનના બાકી રહેલા ભાગનું ઘનફળ શોધો.
7. બે સમાન શંકુઓની પાયાની ત્રિજ્યા 8 સેમી અને ઊંચાઈ 15 સેમી છે. આ બે શંકુઓ એકબીજા સાથે પાયા દ્વારા જોડાયેલા છે. આ રીતે બનતા આકારની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

8. આકૃતિ 12.9 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે નક્કર શંકુઓ A અને B એક નળાકાર નળીમાં મૂકેલા છે. તેમની ક્ષમતાઓનો ગુણોત્તર 2:1 છે. શંકુની ઊંચાઈ અને ક્ષમતા શોધો. નળાકારના બાકી રહેલા ભાગનું ઘનફળ પણ શોધો.



આકૃતિ 12.9

9. આકૃતિ 12.10 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 5 સેમી ત્રિજ્યા અને 10 સેમી ઊંચાઈનો એક આઈસક્રીમ કોન આઈસ્ક્રીમથી પૂરેપૂરો ભરેલો છે. આઈસક્રીમનું ઘનફળ શોધો. આપેલ છે કે $\frac{1}{6}$ ભાગમાં આઈસક્રીમ ભરેલો નથી.



આકૃતિ 12.10

10. થોડું પાણી ભરેલા 7 સેમી વ્યાસના નળાકાર પાત્રમાં 1.4 સેમી વ્યાસની લખોટીઓ નાંખવામાં આવે છે. પાણીનું સ્તર 5.6 સેમી ઊંચું આવે તે માટે નાખવી જોઈતી લખોટીઓની સંખ્યા શોધો.
11. એક નક્કર લંબઘનાકાર સીસાના ટુકડાનાં પરિમાણ 66 સેમી, 42 સેમી અને 21 સેમી છે. તેમાંથી 4.2 સેમી વ્યાસની કેટલી સીસાની ગોળાકાર ગોળીઓ પ્રાપ્ત થાય ?
12. એક સીસાના નક્કર ઘનની ધારનું માપ 44 સેમી છે. તેમાંથી 4 સેમી વ્યાસની કેટલી સીસાની ગોળાકાર ગોળીઓ બનાવી શકાય ?
13. 25 સેમી × 16 સેમી × 10 સેમી પરિમાણની દરેક ઈંટથી એક 24 મી લાંબી, 0.4 મી જાડી અને 6 મી ઊંચાઈની દીવાલ બનાવેલી છે. જો દીવાલના ઘનફળના $\frac{1}{10}$ મા ભાગ સિમેન્ટ ભરેલો હોય, તો દીવાલ બનાવવા માટે કેટલી ઈંટોનો ઉપયોગ કરવો પડે ?

14. 10 સેમી ઊંચાઈ અને 4.5 સેમી વ્યાસના લંબવૃત્તીય નળાકાર બનાવવા માટે 1.5 સેમી પાયાનો વ્યાસ અને 0.2 સેમી ઊંચાઈની કેટલી ધાતુની ગોળાકાર તક્તીઓ ઓગાળવી પડે ?

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : એક ડોલની ઊંચાઈ 30 સેમી અને તેના નીચેના અને ઉપરના છેડાની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 10 સેમી અને 20 સેમી હોય તેવા શંકુના આડછેદ આકારની ડોલની ક્ષમતા અને સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ₹ 25 પ્રતિ લિટરના દરે પાત્રમાં પૂરેપૂરાં ભરેલા દૂધની કિંમત પણ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : ડોલની ક્ષમતા (કે ઘનફળ) = $\frac{\pi h}{3} [r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$

અહીં, $h = 30$ સેમી, $r_1 = 20$ સેમી અને $r_2 = 10$ સેમી.

તેથી ડોલની ક્ષમતા = $\frac{3.14 \times 30}{3} [20^2 + 10^2 + 20 \times 10]$ સેમી³ = 21.980 લિટર

1 લિટર દૂધની કિંમત = ₹ 25

21.980 લિટર દૂધની કિંમત = ₹ 21.980 × 25 = ₹ 549.50

ડોલની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ = ડોલની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + તળિયાની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$$= \pi l (r_1 + r_2) + \pi r_2^2$$

$$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

હવે, $l = \sqrt{900 + 100}$ સેમી = 31.62 સેમી

માટે, ડોલની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $3.14 \times 31.62 (20 + 10) + 3.14 (10)^2$

$$= 3.14 [948.6 + 100] \text{ સેમી}^2$$

$$= 3.14 [1048.6] \text{ સેમી}^2 = 3292.6 \text{ સેમી}^2 \text{ (આશરે)}$$

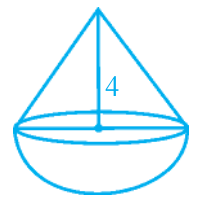
ઉદાહરણ 2 : એક નક્કર રમકડું, અર્ધગોળાની ઉપર લંબવૃત્તીય શંકુ લગાવેલ હોય તેવા સ્વરૂપમાં છે. શંકુની ઊંચાઈ 4 સેમી છે અને તેના પાયાનો વ્યાસ 8 સેમી છે. રમકડાનું ઘનફળ નક્કી કરો. જો એક ઘન રમકડાને બહિર્ગત હોય, તો ઘન અને રમકડાનાં ઘનફળનો તફાવત શોધો. રમકડાની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે અર્ધગોળા અને શંકુની ત્રિજ્યા r છે અને શંકુની ઊંચાઈ h છે. (જુઓ આકૃતિ 12.11.) અહીં $h = r = 4$

રમકડાનું ઘનફળ = અર્ધગોળાનું ઘનફળ + શંકુનું ઘનફળ

$$= \frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 4^3 + \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4^2 \times 4 \right) \text{ સેમી}^3 = \frac{1408}{7} \text{ સેમી}^3.$$



આકૃતિ 12.11

એક ઘન આપેલા નક્કર પદાર્થને પરિગત છે. માટે ઘનની ધાર 8 સેમી થવી જોઈએ.

ઘનનું ઘનફળ = 8^3 સેમી³ = 512 સેમી³.

ઘન અને રમકડાના ઘનફળનો તફાવત = $\left(512 - \frac{1408}{7}\right)$ સેમી³ = 310.86 સેમી³

રમકડાની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ = શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$$= \pi r l + 2\pi r^2, \text{ જ્યાં } l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$= \pi r (l + 2r)$$

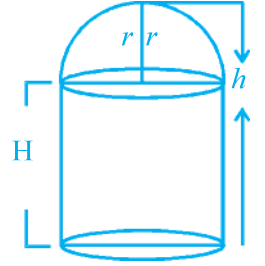
$$= \frac{22}{7} \times 4 \left[\sqrt{4^2 + 4^2} + 2 \times 4 \right] \text{ સેમી}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 4 [4\sqrt{2} + 8] \text{ સેમી}^2$$

$$= \frac{88 \times 4}{7} [\sqrt{2} + 2] \text{ સેમી}^2$$

$$= 171.68 \text{ સેમી}^2$$

ઉદાહરણ 3 : એક મકાન નળાકાર સ્વરૂપમાં છે તેની ઉપર અર્ધગોળાકાર ગુંબજ આવેલો છે. (આકૃતિ 12.12 જુઓ.) ગુંબજનો પાયાનો વ્યાસ, મકાનની ઊંચાઈના $\frac{2}{3}$ મા ભાગ જેટલો છે. જો મકાનમાં $67\frac{1}{21}$ મી³ હવા હોય, તો મકાનની ઊંચાઈ શોધો.



આકૃતિ 12.12

ઉકેલ : ધારો કે, અર્ધગોળાકાર ગુંબજની ત્રિજ્યા r મીટર અને મકાનની કુલ ઊંચાઈ h મીટર છે.

ગુંબજના પાયાનો વ્યાસ ઊંચાઈના $\frac{2}{3}$ મા ભાગ જેટલો હોવાથી, $2r = \frac{2}{3}h$. એટલે કે $r = \frac{h}{3}$. ધારો કે નળાકાર

ભાગની ઊંચાઈ H મીટર છે. તેથી $H = h - \frac{h}{3} = \frac{2}{3}h$ મીટર

મકાનની અંદરની હવાનું ઘનફળ = ગુંબજની અંદરની હવાનું ઘનફળ + નળાકારની અંદરની હવાનું ઘનફળ

$$= \frac{2}{3} \pi r^3 + \pi r^2 H, \text{ જ્યાં } H \text{ એ નળાકાર ભાગની ઊંચાઈ છે.}$$

$$= \frac{2}{3} \pi \left(\frac{h}{3}\right)^3 + \pi \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} h = \frac{8}{81} \pi h^3 \text{ ઘન મીટર}$$

મકાનની અંદરની હવાનું ઘનફળ $67\frac{1}{21}$ મી³ છે. માટે $\frac{8}{81} \pi h^3 = \frac{1408}{21}$. એટલે કે $h = 6$ મીટર

સ્વાધ્યાય 12.4

1. 8 સેમી ત્રિજ્યાના ધાતુના એક નક્કર અર્ધગોળાને ઓગાળીને પાયાની ત્રિજ્યા 6 સેમી હોય, તેવા લંબવૃત્તીય શંકુમાં ઢાળવામાં આવે છે, તો તેથી બનતા શંકુની ઊંચાઈ નક્કી કરો.
2. એક લંબઘન પાણીની ટાંકીનો પાયો $11 \text{ મી} \times 6 \text{ મી}$ છે. તેમાં 5 મી ઊંચાઈ સુધી પાણી ભરેલું છે. જો ટાંકીમાંના પાણીને 3.5 મી ત્રિજ્યાવાળી નળાકાર ટાંકીમાં નાખવામાં આવે, તો ટાંકીમાં પાણીની ઊંચાઈ શોધો.
3. જેનું બહારનાં પરિમાણ 36 સેમી, 25 સેમી અને 16.5 સેમી હોય અને લોખંડની જાડાઈ 1.5 સેમીની આપેલી હોય તેવા ખુલ્લા ખોખાને બાંધવા માટે કેટલા ઘન સેમી લોખંડની જરૂર પડે ? જો એક ઘન સેમી લોખંડનું વજન 7.5 ગ્રામ હોય, તો ખોખાનું વજન શોધો.
4. નળાકાર આકારની શાહી પેનની નળી (રીફ્લ) 7 સેમી લાંબી અને 5 મીમી વ્યાસની છે. આખી ભરેલી શાહીવાળી પેનની રીફ્લથી સરેરાશ 3300 શબ્દો લખાય છે. એક લિટરના પાંચમા ભાગની શાહીભરેલી શીશીમાંથી કેટલા શબ્દો લખી શકાય ?
5. 5 મિમી વ્યાસની નળાકાર નળીમાંથી 10 મી/મિનિટના દરે પાણી બહાર નીકળે છે. જેના પાયાનો વ્યાસ 40 સેમી અને ઊંડાઈ 24 સેમી છે. તેવા શંકુ આકારના પાત્રને ભરાતાં કેટલો સમય લાગે ?
6. એક ચોખાનો ઢગલો 9 મી વ્યાસ અને 3.5 મી ઊંચાઈ હોય તેવા શંકુ આકારનો છે. આ ઢગલામાં રહેલા ચોખાનું ઘનફળ શોધો. આ ઢગલાને ઢાંકવા માટે કેટલું કાપડ જરૂરી છે ?
7. એક કારખાનામાં દરરોજ 1,20,000 પેન્સિલોનું ઉત્પાદન થાય છે. પેન્સિલનો આકાર નળાકાર છે અને દરેકની લંબાઈ 25 સેમી અને પાયાનો પરિઘ 1.5 સેમી છે. એક દિવસમાં ઉત્પાદિત થયેલ પેન્સિલની વક્સપાટીને રંગ કરવાનો ખર્ચ ₹ 0.05 પ્રતિ ડેસિમી²ના દરે કેટલો થશે ?
8. 50 મી લંબાઈના અને 44 મી પહોળાઈના લંબઘન તળાવમાં 14 સેમી વ્યાસની નળી દ્વારા 15 કિમી/કલાકના દરથી પાણી વહે છે. કેટલા સમયમાં તળાવમાંના પાણીની ઊંચાઈ 21 સેમી વધે ?
9. $4.4 \text{ મી} \times 2.6 \text{ મી} \times 1 \text{ મી}$ પરિમાણના લોખંડના નક્કર લંબઘન ટુકડાને ઓગાળીને અંદરની ત્રિજ્યા 30 સેમી અને જાડાઈ 5 સેમી હોય તેવા પોલા નળાકારમાં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે, તો નળાકાર નળીની લંબાઈ શોધો.
10. 500 માણસો એક 80 મી લાંબા અને 50 મી પહોળા લંબઘન તળાવમાં ડૂબકી મારે છે. જો એક માણસથી સરેરાશ 0.04 મી^3 પાણી ઊંચે જતું હોય, તો તળાવમાં પાણી કેટલું ઊંચું જશે ?
11. અંદરનાં પરિમાણ $16 \text{ સેમી} \times 8 \text{ સેમી} \times 8 \text{ સેમી}$ હોય, તેવા લંબઘન ખોખામાં 2 સેમી ત્રિજ્યાવાળા 16 કાચના ગોળાઓ ભરવામાં આવે છે અને પછી ખોખામાં પાણી ભરવામાં આવે છે. ખોખામાં ભરાયેલા પાણીનું ઘનફળ શોધો.

12. 16 સેમી ઊંચાઈવાળા દૂધના એક પાત્રને ધાતુના પતરામાંથી બનાવવામાં આવે છે. પત્રું શંકુના આડછેદના સ્વરૂપમાં છે અને તેની નીચેના તથા ઉપરના છેડાની ત્રિજ્યા અનુક્રમે 8 સેમી અને 20 સેમી છે. પાત્રમાં ભરી શકાય તેટલા દૂધનો ભાવ ₹ 22 પ્રતિ લિટરના દરે શોધો.
13. એક 32 સેમી ઊંચાઈની અને પાયાની ત્રિજ્યા 18 સેમીની રેતીથી ભરેલી નળાકાર ડોલ છે. આ ડોલને જમીન પર ખાલી કરવામાં આવે છે અને રેતીના શંકુ આકારના ઢગલાની ઊંચાઈ 24 સેમી હોય, તો ઢગલાની ત્રિજ્યા અને ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો.
14. એક રોકેટ લંબવૃત્તીય નળાકાર સ્વરૂપમાં છે. તે નીચેના છેડેથી બંધ છે અને તેની ઉપર નળાકાર જેટલી જ ત્રિજ્યાનો શંકુ લાગેલો છે. નળાકારનો વ્યાસ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 6 સેમી અને 12 સેમી છે. જો શંકુ આકારની ત્રાંસી ઊંચાઈ 5 સેમી હોય, તો રોકેટનું સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ શોધો. [$\pi = 3.14$ લો.]
15. એક મકાન નળાકાર સ્વરૂપમાં છે અને તેના ઉપર અર્ધગોળાકાર ગુંબજ છે. તેમાં $41\frac{19}{21}$ મી³ હવા છે. જો ગુંબજનો અંદરનો વ્યાસ, તેની ભોંયતળિયાની કુલ ઊંચાઈ જેટલો હોય, તો મકાનની ઊંચાઈ શોધો.
16. એક અર્ધગોળાકાર વાટકીની અંદરની ત્રિજ્યા 9 સેમી છે અને તે પ્રવાહીથી પૂરેપૂરી ભરેલી છે. આ પ્રવાહીને દરેકની ત્રિજ્યા 1.5 સેમી અને ઊંચાઈ 4 સેમી હોય તેવી નળાકાર આકારની શીશીઓમાં ભરવામાં આવે છે. વાટકીને ખાલી કરવા કેટલી શીશીઓની જરૂર પડે ?
17. એક નક્કર લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ 120 સેમી અને ત્રિજ્યા 60 સેમી છે. તેને 180 સેમી ઊંચાઈવાળી પાણી ભરેલા લંબવૃત્તીય નળાકારમાં મૂકવામાં આવે છે કે જેથી તે તળિયાને સ્પર્શે. જો નળાકારની ત્રિજ્યા શંકુની ત્રિજ્યા જેટલી જ હોય, તો નળાકારમાં બાકી રહેલા પાણીનું ઘનફળ શોધો.
18. જેની અંદરની ત્રિજ્યા 1 સેમી હોય, તેવી એક નળાકાર નળીમાંથી પાણી 40 સેમી/સે ના દરે એક ખાલી નળાકાર ટાંકીમાં વહી રહ્યું છે. ટાંકીના પાયાની ત્રિજ્યા 40 સેમી છે, તો અડધા કલાકમાં ટાંકીમાં પાણી કેટલું ઊંચું આવશે?
19. 22 મી × 20 મી પરિમાણના છાપરાં પરથી વરસાદનું પાણી, પાયાનો વ્યાસ 2 મી અને ઊંચાઈ 3.5 મી હોય તેવા નળાકાર પાત્રમાં પડે છે. જો છાપરાં પરથી ભેગું થયેલું પાણી આ નળાકાર પાત્રમાં જ પડતું હોય, તો વરસાદી પાણીની ઊંચાઈ સેમીમાં શોધો.
20. લાકડાંનું બનેલું એક પેન સ્ટેન્ડ લંબઘનાકાર છે. તેમાં અનુક્રમે શંકુ આકારના અને ઘનાકારના ચાર અવસેધો પેન અને પિનને જકડવા માટે રાખેલા છે. લંબઘનનાં પરિમાણ 10 સેમી, 5 સેમી અને 4 સેમી છે. દરેક શંકુ આકારના અવસેધની ત્રિજ્યા 0.5 સેમી અને ઊંચાઈ 2.1 સેમી છે. ઘનાકાર અવસેધની ધાર 3 સેમી છે. સમગ્ર સ્ટેન્ડમાંના લાકડાંનું ઘનફળ શોધો.

આંકડાશાસ્ત્ર અને સંભાવના

વિહંગાવલોકન

મુખ્ય સંકલ્પના અને પરિણામો

આંકડાશાસ્ત્ર

મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપો

(a) વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક

(i) વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક શોધવા એવું ધારવામાં આવે છે કે દરેક વર્ગ અંતરાલની આવૃત્તિ તેની મધ્યકિંમતની આસપાસ કેન્દ્રિત હોય છે.

(ii) મધ્યક શોધવા માટેની સીધી રીત

$$\text{મધ્યક } (\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i},$$

જ્યાં x_i એ i માં વર્ગ અંતરાલની મધ્યકિંમત અને f_i એ તેને અનુરૂપ આવૃત્તિ છે.

(iii) મધ્યક શોધવા માટેની ધારેલા મધ્યકની રીત

$$\text{મધ્યક } (\bar{x}) = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i},$$

a એ ધારેલો મધ્યક અને $d_i = x_i - a$ એ દરેક i માટે a માંથી x_i નું વિચલન છે.

(iv) મધ્યક શોધવા માટેની સરેરાશ વિચલનની રીત

$$\text{મધ્યક } (\bar{x}) = a + h \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right),$$

જ્યાં a એ ધારેલો મધ્યક, h એ વર્ગલંબાઈ અને $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

(v) જો વર્ગલંબાઈ અસમાન હોય, તો h ને તમામ d_i ના સમાન ભાજક તરીકે લઈ (iv)માંનું સૂત્ર લાગુ પાડી શકાય.

(b) વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક

- (i) વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણમાં, ફક્ત આવૃત્તિઓને જોઈને બહુલક નક્કી કરી શકાય નહિ. વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક શોધવા માટે, સૌથી વધુ આવૃત્તિવાળો વર્ગ શોધો. આ વર્ગને **બહુલકીય વર્ગ** કહે છે. માહિતીનો બહુલક એ આ બહુલકીય વર્ગમાં આવતી કિંમત છે.
- (ii) વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક નીચેના સૂત્રના ઉપયોગથી શોધી શકાય :

$$\text{બહુલક} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h,$$

જ્યાં l એ બહુલકીય વર્ગની અધઃસીમા, h એ વર્ગની લંબાઈ, f_1 એ બહુલકીય વર્ગની આવૃત્તિ અને f_0 અને f_2 એ અનુક્રમે બહુલકીય વર્ગની પહેલાની અને પછીના વર્ગની આવૃત્તિ છે.

(c) વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ

- (i) સંચયી આવૃત્તિ કોષ્ટક ‘થી ઓછા’ અને ‘થી વધુ’ પ્રકારનું વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ મેળવો.
- (ii) જે n એ અવલોકનોની કુલ સંખ્યા હોય તો, એવો વર્ગ મેળવો કે જેની સંચયી આવૃત્તિ $\frac{n}{2}$ કરતાં તરત જ વધુ હોય. આ વર્ગને **મધ્યસ્થ વર્ગ** કહે છે.
- (iii) વર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યસ્થની ગણતરી નીચેના સૂત્ર દ્વારા કરી શકાય :

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) h,$$

જ્યાં, l એ મધ્યસ્થ વર્ગની અધઃસીમા, n એ અવલોકનોની સંખ્યા, h એ વર્ગલંબાઈ, cf એ મધ્યસ્થ વર્ગથી પહેલા વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ અને f એ મધ્યસ્થ વર્ગની આવૃત્તિ છે.

(d) સંચયી આવૃત્તિ વિતરણનું આલેખ (ઓજીવ) દ્વારા નિરૂપણ – ‘થી ઓછા’ અને ‘થી વધુ’ પ્રકાર

- (i) વર્ગીકૃત માહિતીના સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ (થી ઓછા)ના આલેખ પરથી મધ્યસ્થ શોધવો.
- (ii) સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ (થી ઓછા’ અને ‘થી વધુ’ પ્રકાર)ના આલેખ પરથી મધ્યસ્થ શોધવો અને તેમાં આલેખના છેદબિંદુ પરથી યામ મેળવવા.

સંભાવના

- યાદચ્છિક પ્રયોગો, પ્રયોગોનાં પરિણામો, ઘટના, પ્રાથમિક ઘટના
- સમસંભાવી પરિણામો
- ઘટના E ઉદ્ભવે તેની પ્રાયોગિક (અથવા આનુભાવિક) સંભાવના $[P(E) \text{ વડે દર્શાવાય}]$ નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના E ઉદ્ભવે તે માટેના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયોગનાં તમામ શક્ય પરિણામોની કુલ સંખ્યા}}$$

અહીં પ્રયોગનાં પરિણામો *સમસંભાવી* છે.

- કોઈ પણ ઘટનાની સંભાવના 0 અને 1 ની વચ્ચે હોઈ શકે. કોઈ ખાસ કિસ્સામાં તે 0 અથવા 1 પણ હોઈ શકે.

• પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 હોય છે..

• કોઈ પણ ઘટના E માટે, $P(E) + P(\bar{E}) = 1$,

જ્યાં \bar{E} એ 'E ન હોય' તેની ઘટના છે. \bar{E} ને ઘટના E ની પૂરક ઘટના કહે છે.

• અશક્ય ઘટના, નિશ્ચિત અથવા ચોક્કસ ઘટના

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 6 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 1 : નક્કી કરવા સંચયી આવૃત્તિ-કોષ્ટક તૈયાર કરવું એ આવશ્યક છે.

- (A) મધ્યક (B) મધ્યસ્થ (C) બહુલક (D) ઉપરનાં ત્રણેય માપ

ઉકેલ : ઉત્તર (B)

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલા વર્ગીકરણમાં :

માસિક આવકનો વિસ્તાર (₹ માં)	કુટુંબની સંખ્યા
₹ 10,000 થી વધુ આવક	100
₹ 13,000 થી વધુ આવક	85
₹ 16,000 થી વધુ આવક	69
₹ 19,000 થી વધુ આવક	50
₹ 22,000 થી વધુ આવક	33
₹ 25,000 થી વધુ આવક	15

જેની આવકમર્યાદા (₹ માં) 16000 – 19000 હોય, તેવાં કુટુંબોની સંખ્યા

- (A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 19

₹ 16,000 થી વધુ આવક = 69

₹ 19,000 થી વધુ આવક = 50

∴ 16,000 – 19,000 ની આવકમર્યાદા = 69 – 50 = 19

ઉકેલ : ઉત્તર (D)

ઉદાહરણ 3 : એક વર્ગખંડના 60 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

ઊંચાઈ (સેમીમાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
150-155	15
155-160	13
160-165	10
165-170	8
170-175	9
175-180	5

બહુલકીય વર્ગની અધ:સીમા અને મધ્યસ્થ વર્ગની ઊર્ધ્વસીમાનો સરવાળો

- (A) 310 (B) 315 (C) 320 (D) 330

બહુલકીય વર્ગ = સૌથી વધુ આવૃત્તિવાળો વર્ગ = 150 – 155

∴ બહુલકીય વર્ગની અધ:સીમા = 150

$$\frac{n}{2} \text{ મું અવલોકન} = \frac{60}{2} \text{ મું અવલોકન} = 30 \text{ મું અવલોકન}$$

$$\therefore \text{સંચયી આવૃત્તિ પ્રમાણે મધ્યસ્થ વર્ગ} = 160 - 165$$

$$\therefore \text{મધ્યસ્થ વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા} = 165$$

$$\text{બહુલકીય વર્ગની અધઃસીમા અને મધ્યસ્થ વર્ગની ઊર્ધ્વસીમાનો સરવાળો} = 150 + 165 = 315$$

ઉકેલ : ઉત્તર (B)

ઉદાહરણ 4 : નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા કોઈ ઘટનાની સંભાવના હોઈ શકે ?

(A) - 0.04

(B) 1.004

(C) $\frac{18}{23}$

(D) $\frac{8}{7}$

ઉકેલ : ઉત્તર (C)

(કારણ કે સંભાવના અનુણ તથા 1 થી નાની સંખ્યા હોય)

ઉદાહરણ 5 : સારી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પત્તું પસંદ કરવામાં આવે છે. તે પત્તું ચિત્રવાળું હોય, તેની સંભાવના

(A) $\frac{3}{13}$

(B) $\frac{4}{13}$

(C) $\frac{6}{13}$

(D) $\frac{9}{13}$

ઉકેલ : ચિત્રવાળાં પત્તાંની સંખ્યા = 12

$$\therefore \text{સંભાવના} = P(E) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

ઉત્તર (A)

ઉદાહરણ 6 : એક થેલામાં 3 લાલ દડા, 5 સફેદ દડા અને 7 કાળા દડા છે. થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે કોઈ દડાને પસંદ કરવામાં આવે, તો તે દડો લાલ પણ ન હોય કે કાળો પણ ન હોય, તેની સંભાવના કેટલી ?

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{7}{15}$

(D) $\frac{8}{15}$

ઉકેલ : દડાની કુલ સંખ્યા = 3 + 5 + 7 = 15

દડો લાલ પણ ન હોય કે કાળો પણ ન હોય, એટલે કે તે સફેદ હોય.

$$\therefore \text{સંભાવના} = P(E) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

ઉત્તર (B)

સ્વાધ્યાય 13.1

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલા ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ક્રમાંક 1 થી 26 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

1. સૂત્ર $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$ લઈએ, તો વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક શોધતાં d_i એ a માંથી નું વિચલન છે.

(A) વર્ગની અધઃસીમા

(B) વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા

(C) વર્ગની મધ્યકિંમત

(D) મધ્યકિંમતની આવૃત્તિ

2. વર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યકની ગણતરી કરતી વખતે, આપણે ધારીએ છીએ કે આવૃત્તિઓ
 (A) બધા જ વર્ગો પર સરખી રીતે વહેંચાયેલ છે (B) વર્ગની મધ્યકિંમતો પર કેન્દ્રસ્થ છે.
 (C) વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા પર કેન્દ્રસ્થ છે. (D) વર્ગની અધઃસીમા પર કેન્દ્રસ્થ છે.
3. જો x_i એ વર્ગીકૃત માહિતીના વર્ગ અંતરાલોનાં મધ્યબિંદુઓ હોય, f_i એ તેને અનુરૂપ આવૃત્તિઓ હોય અને \bar{x} એ મધ્યક હોય, તો $\sum (f_i x_i - \bar{x}) = \dots\dots\dots$.
 (A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) 2

4. $\bar{x} = a + h \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right)$ સૂત્રમાં, વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યક શોધવા માટે, $u_i = \dots\dots\dots$.
 (A) $\frac{x_i + a}{h}$ (B) $h(x_i - a)$ (C) $\frac{x_i - a}{h}$ (D) $\frac{a - x_i}{h}$

5. વર્ગીકૃત માહિતીના ‘થી ઓછા’ અને ‘થી વધુ’ પ્રકારના સંયથી આવૃત્તિ વક્રના છેદ બિંદુનો x -યામ (કોટિ) આપે છે.
 (A) મધ્યક (B) મધ્યસ્થ (C) બહુલક (D) ઉપરના ત્રણેય

6. નીચે આપેલા વિતરણ માટે :

વર્ગ	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
આવૃત્તિ	10	15	12	20	9

મધ્યસ્થ વર્ગ અને બહુલકીય વર્ગની અધઃસીમાઓનો સરવાળો

- (A) 15 (B) 25 (C) 30 (D) 35

7. નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ માટે :

વર્ગ	0-5	6-11	12-17	18-23	24-29
આવૃત્તિ	13	10	15	8	11

મધ્યસ્થ વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા

- (A) 17 (B) 17.5 (C) 18 (D) 18.5

8. નીચેના વિતરણ માટે :

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
10 થી ઓછા	3
20 થી ઓછા	12
30 થી ઓછા	27
40 થી ઓછા	57
50 થી ઓછા	75
60 થી ઓછા	80

બહુલકીય વર્ગ છે.

- (A) 10-20 (B) 20-30 (C) 30-40 (D) 50-60

9. નીચેની માહિતી પ્રમાણે :

વર્ગ	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
આવૃત્તિ	4	5	13	20	14	7	4

મધ્યસ્થ વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા અને બહુલકીય વર્ગની અધઃસીમાનો તફાવત

- (A) 0 (B) 19 (C) 20 (D) 38

10. 150 રમતવીરોને 110 મીટરની અંતરાય દોડસ્પર્ધા માટે લાગતો સમય (સેકન્ડમાં) નીચેના કોષ્ટકમાં છે :

વર્ગ	13.8-14	14-14.2	14.2-14.4	14.4-14.6	14.6-14.8	14.8-15
આવૃત્તિ	2	4	5	71	48	20

જેને સ્પર્ધા પૂરી કરતાં 14.6 સેકન્ડ કરતાં ઓછો સમય લાગે તેવા રમતવીરોની સંખ્યા

- (A) 11 (B) 71 (C) 82 (D) 130

11. નીચેના વિતરણનો વિચાર કરો :

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 કે તેથી વધુ	63
10 કે તેથી વધુ	58
20 કે તેથી વધુ	55
30 કે તેથી વધુ	51
40 કે તેથી વધુ	48
50 કે તેથી વધુ	42

30-40 વર્ગની આવૃત્તિ

- (A) 3 (B) 4 (C) 48 (D) 51

12. અશક્ય ઘટનાની સંભાવના છે.

- (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

13. નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા કોઈ પણ ઘટનાની સંભાવના હોય તે શક્ય નથી ?

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) 0.1 (C) 3 % (D) $\frac{17}{16}$

14. કોઈ ઘટના લગભગ બનવી સંભવ નથી. તેની સંભાવનાની નજીક છે.

- (A) 0.0001 (B) 0.001 (C) 0.01 (D) 0.1

15. જો કોઈ ઘટનાની સંભાવના p હોય, તો તેની પૂરક ઘટનાની સંભાવના હશે.

- (A) $p - 1$ (B) p (C) $1 - p$ (D) $1 - \frac{1}{p}$

16. કોઈ ચોક્કસ બનાવની ટકા તરીકે રજૂ કરાતી સંભાવના ક્યારેય ન હોઈ શકે.

- (A) 100 થી ઓછી (B) 0 થી ઓછી અને 100 વધુ
(C) 1 થી વધુ (D) કોઈ પણ પૂર્ણ સંખ્યા

17. જો $P(A)$ ને કોઈ ઘટના A ની સંભાવના તરીકે દર્શાવવામાં આવે, તો

- (A) $P(A) < 0$ (B) $P(A) > 1$ (C) $0 \leq P(A) \leq 1$ (D) $P(A) = 2$

18. 52 પત્તાના ઢગમાંથી એક પત્તું પસંદ કરવામાં આવે છે. તે લાલ ચિત્રવાળું પત્તું હોય, તેની સંભાવના છે.
- (A) $\frac{3}{26}$ (B) $\frac{3}{13}$ (C) $\frac{2}{13}$ (D) $\frac{1}{2}$
19. યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા, લીપ વર્ષ ન હોય તેવા વર્ષમાં 53 રવિવાર આવે તેની સંભાવના છે.
- (A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$
20. જ્યારે એક પાસો ફેંકવામાં આવે છે ત્યારે તેના પર 3 થી નાની અયુગ્મ સંખ્યા આવે તેની સંભાવના છે.
- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0
21. 52 પત્તાના ઢગમાંથી એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે. ઘટના E એવી છે કે તે પત્તું લાલનો એકો નથી. E માટેનાં શક્ય પરિણામોની સંખ્યા છે.
- (A) 4 (B) 13 (C) 48 (D) 51
22. 400 ઈંડાના જથ્થામાંથી એક ખરાબ ઈંડું મળવાની સંભાવના 0.035 છે. જથ્થામાં ખરાબ ઈંડાની સંખ્યા હોય.
- (A) 7 (B) 14 (C) 21 (D) 28
23. એક છોકરી ગણતરી કરે છે કે તેને એક લોટરીમાં પ્રથમ ઈનામ મળવાની સંભાવના 0.08 છે. જો 6000 ટિકિટ વેચાઈ હોય, તો તેણે કેટલી ટિકિટ ખરીદી હશે ?
- (A) 40 (B) 240 (C) 480 (D) 750
24. 1 થી 40 અંક લખેલી મુદ્રિત ટિકિટોના એક થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે એક ટિકિટ ખેંચવામાં આવે છે. પસંદ કરેલી ટિકિટનો અંક 5 નો ગુણિત હોય, તેની સંભાવના
- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$
25. 1 થી 100 અંકમાંથી કોઈ એક અંક યાદચ્છિક પસંદ કરો, તો તે અંક અવિભાજ્ય હોય તેની સંભાવના હોય.
- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{13}{50}$
26. એક શાળામાં A, B, C, D અને E એમ 5 વિભાગો છે. એક વર્ગમાં 23 વિદ્યાર્થીઓ છે વિભાગ Aમાં 4, વિભાગ B માં 8, વિભાગ C માં 5, વિભાગ D માં 2 અને બાકીના વિભાગ E માં છે. વર્ગ પ્રતિનિધિ તરીકે યાદચ્છિક રીતે એક વિદ્યાર્થીને પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલો વિદ્યાર્થી A, B અને C માંથી ન હોય, તેની સંભાવના હોય.
- (A) $\frac{4}{23}$ (B) $\frac{6}{23}$ (C) $\frac{8}{23}$ (D) $\frac{17}{23}$

કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : અવર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક અને જ્યારે માહિતી વર્ગીકૃત હોય, ત્યારે ગણતરીમાં લીધેલો મધ્યક હંમેશાં સરખો હોય છે. શું તમે આ વિધાન સાથે સંમત છો ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો :

ઉકેલ : આ વિધાન સાચું નથી, કારણ કે જ્યારે આપણે વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક શોધીએ છીએ ત્યારે એવું ધારવામાં આવે છે કે, દરેક વર્ગની આવૃત્તિ વર્ગની મધ્યકિંમત પર કેન્દ્રસ્થ છે. આ કારણથી, મધ્યકની બે કિંમતો એટલે કે, અવર્ગીકૃત અને વર્ગીકૃત માહિતી પરથી મળતી કિંમતો સમાન ન પણ હોય.

ઉદાહરણ 2 : એ કહેવું સાચું છે કે, ઓજીવ એ આવૃત્તિ-વિતરણનું આલેખાત્મક નિરૂપણ છે ? કારણ આપો.

ઉકેલ : ઓજીવ એ આવૃત્તિ-વિતરણનું આલેખાત્મક નિરૂપણ છે તે કહેવું સત્ય નથી. આવૃત્તિ-વિતરણનું આલેખાત્મક નિરૂપણ ઓજીવ ન પણ હોઈ શકે. તે સ્તંભાલેખ પણ હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 3 : જો કોઈ પણ પરિસ્થિતિમાં શક્ય બે જ પરિણામો હોય, તો દરેક પરિણામની સંભાવના $\frac{1}{2}$ હશે. સત્ય કે અસત્ય ? કેમ ?

ઉકેલ : અસત્ય, કારણ કે જ્યારે બે પરિણામો સમસંભાવી હોય ત્યારે જ દરેક પરિણામની સંભાવના $\frac{1}{2}$ હોય.

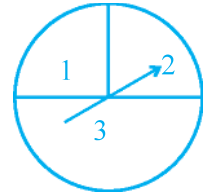
સ્વાધ્યાય 13.2

1. અવર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ અને આ જ માહિતીને વર્ગીકૃત કરીને શોધેલો મધ્યસ્થ હંમેશાં સરખો હોય. શું તમે વિચારો છો કે આ સાચું વિધાન છે ? કારણ આપો.
2. વર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યકની ગણતરીમાં, સરખી લંબાઈવાળા વર્ગો માટે, આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકીએ

$$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

જ્યાં a એ ધારેલો મધ્યક છે. a કોઈ એક વર્ગનું મધ્યબિંદુ જ હોય. શું છેલ્લું વિધાન સાચું છે ? તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા નક્કી કરો.

3. તે કહેવું સાચું છે કે વર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યક, બહુલક અને મધ્યસ્થ હંમેશાં જુદા જ હોય ? તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા ચકાસો.
4. વર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યસ્થ વર્ગ અને બહુલકીય વર્ગ હંમેશાં અસમાન જ હોય ? તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા ચકાસો.
5. ત્રણ બાળકોવાળાં કુટુંબમાં, એક પણ છોકરી નથી, એક છોકરી હોય, બે છોકરીઓ હોય કે ત્રણ છોકરીઓ દરેકની સંભાવના $\frac{1}{4}$ છે. આ સાચું છે ?



આકૃતિ 13.1

6. તીરને ગોળ ફેરવવાની એક રમતમાં તે કોઈ એક પ્રદેશ (1, 2 કે 3) દર્શાવીને ઊભું રહે છે. (આકૃતિ 13.1). પરિણામો 1, 2 કે 3 મેળવા સમસંભાવી છે ? કારણ આપો.
7. અપૂર્વ બે પાસાંને એક વખત ફેંકે છે અને પાસા પર દેખાતાં અંકોના ગુણાકારની ગણતરી કરે છે. પીહુ એક પાસો ફેંકે છે અને તેના ઉપર આવતા અંકનો વર્ગ કરે છે. 36 નો અંક મેળવવાની તક સૌથી વધુ કોને છે ? કેમ ?
8. આપણે જ્યારે સિક્કો ઉછાળીએ છીએ ત્યારે તેનાં બે શક્ય પરિણામો છે. છાપ અથવા કાંટો. તેથી દરેક પ્રયત્નની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે. તમારા ઉત્તરની યથાર્થતા કહો.
9. એક વિદ્યાર્થી કહે છે કે, જો તમે એક પાસો ફેંકો તો તે 1 બતાવે છે કે 1 નથી બતાવતો. તેથી 1 મેળવવાની સંભાવના અને '1 નહિ' મેળવવાની સંભાવના, પ્રત્યેક $\frac{1}{2}$ બરાબર છે. આ સાચું છે ?

10. હું ત્રણ સિક્કાઓ એકસાથે ઉછાળું છું. શક્ય પરિણામો છે : છાપ ન આવે, 1 છાપ આવે, 2 છાપ અને 3 છાપ આવે. તેથી છાપ ન આવે તેની સંભાવના $\frac{1}{4}$ છે. આ તારણમાં ખોટું શું છે ?
11. જો તમે એક સિક્કાને 6 વખત ઉછાળો અને દરેક કિસ્સામાં છાપ જ આવે, તો શું તમે કહી શકો કે, છાપ આવવાની સંભાવના 1 છે ? કારણ આપો.
12. સુખ્યા એક સિક્કાને 3 વખતે ઉછાળે છે અને દરેક વખતે કાંટો મળે છે. શું તમે વિચારો છો કે ફરી વખત ઉછાળતાં પરિણામ કાંટો જ મળશે ? કારણ આપો.
13. જો હું એક સિક્કાને 3 વખત ઉછાળું અને દરેક વખતે છાપ આવે તો ચોથી વખત ઉછાળતી વખતે શું હું આશા રાખી શકું કે કાંટો આવે તેની શક્યતા વધુ છે ? તમારા ઉત્તરને સમર્થન આપે તેવું કારણ આપો.
14. એક થેલીમાં 1 થી 100 અંક લખેલી ચિટ્ટીઓ છે. જો ફાતિમા થેલીમાંથી યાદચ્છિક રીતે ચિટ્ટી પસંદ કરે, તો તે અયુગ્મ સંખ્યા હોય અથવા તે યુગ્મ સંખ્યા હોય. જો કે આ પરિસ્થિતિમાં પરિણામની ફક્ત બે જ શક્યતાઓ છે. તેથી દરેકની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે. યથાર્થતા ચકાસો.

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલા વિતરણનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરો :

વર્ગ	12.5-17.5	17.5-22.5	22.5-27.5	27.5-32.5	32.5-37.5
આવૃત્તિ	2	22	19	14	13

ઉકેલ : આપેલા વિતરણનું માંગેલું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

વર્ગ	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
12.5-17.5	2	2
17.5-22.5	22	24
22.5-27.5	19	43
27.5-32.5	14	57
32.5-37.5	13	70

ઉદાહરણ 2 : એક સર્વેક્ષણમાં મેળવેલ 110 કામદારોનું દૈનિક વેતન નીચે કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

રોજનું વેતન (₹ માં)	કામદારોની સંખ્યા
100-120	10
120-140	15
140-160	20
160-180	22
180-200	18
200-220	12
220-240	13

આ કામદારોના દૈનિક વેતનનો મધ્યક શોધો.

ઉકેલ : પહેલાં આપણે દરેક વર્ગની મધ્યકિંમત x_i શોધીશું અને પછી નીચે પ્રમાણે આગળ વધીશું :

દૈનિક વેતન (₹ માં) વર્ગો	મધ્યકિંમત (x_i)	કામદારોની સંખ્યા (f_i)	fix_i
100-120	110	10	1100
120-140	130	15	1950
140-160	150	20	3000
160-180	170	22	3740
180-200	190	18	3420
200-220	210	12	2520
220-240	230	13	2990
		$\Sigma f_i = 110$	$\Sigma f_i x_i = 18720$

$$\text{માટે, મધ્યક} = \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{18720}{110} = 170.20$$

તેથી, કામદારોના દૈનિક વેતનનો મધ્યક ₹ 170.20.

નોંધ : દૈનિક વેતનનો મધ્યક ધારેલા મધ્યકની રીતે અથવા સરેરાશ વિચલનની રીતે પણ શોધી શકાય.

ઉદાહરણ 3 : એક પરીક્ષામાં 100 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ (ટકામાં) નીચે પ્રમાણે છે :

ગુણ	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
આવૃત્તિ	14	16	18	23	18	8	3

ગુણનો મધ્યસ્થ (ટકામાં) નક્કી કરો.

ઉકેલ :

ગુણ (વર્ગો)	વિદ્યાર્થીઓનીસંખ્યા (આવૃત્તિ)	સંચયી આવૃત્તિ
30-35	14	14
35-40	16	30
40-45	18	48
45-50	23	71 ← મધ્યસ્થ વર્ગ
50-55	18	89
55-60	8	97
60-65	3	100

અહીં, $n = 100$.

માટે, $\frac{n}{2} = 50$, આ અવલોકન વર્ગ 45-50 માં આવે.

l (મધ્યસ્થ વર્ગની અધ:સીમા) = 45

$$cf \text{ (મધ્યસ્થ વર્ગની પહેલાંના વર્ગની સંયતી આવૃત્તિ) } = 48$$

$$f \text{ (મધ્યસ્થ વર્ગની આવૃત્તિ) } = 23$$

$$h \text{ (વર્ગલંબાઈ) } = 5$$

$$\begin{aligned} \text{મધ્યસ્થ} &= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) h \\ &= 45 + \left(\frac{50 - 48}{23} \right) \times 5 \\ &= 45 + \frac{10}{23} = 45.4 \end{aligned}$$

તેથી, ગુણનો મધ્યસ્થ 45.4 % છે.

ઉદાહરણ 4 : એક ગામમાં ખેતીલાયક જમીનનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે છે :

જમીનનું ક્ષેત્રફળ (હેક્ટરમાં)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
કુટુંબની સંખ્યા	20	45	80	55	40	12

ગામની ખેતીલાયક જમીનનો બહુલક શોધો.

ઉકેલ : અહીં સૌથી વધુ આવૃત્તિ 80 છે અને આ આવૃત્તિને અનુરૂપ વર્ગ 5-7 છે.

તેથી, બહુલકીય વર્ગ 5-7 છે.

$$l \text{ (બહુલકીય વર્ગની અધઃસીમા) } = 5$$

$$f_1 \text{ (બહુલકીય વર્ગની આવૃત્તિ) } = 80$$

$$f_0 \text{ (બહુલકીય વર્ગની પહેલાંના વર્ગની આવૃત્તિ) } = 45$$

$$f_2 \text{ (બહુલકીય વર્ગની પછીના વર્ગની આવૃત્તિ) } = 55$$

$$h \text{ (વર્ગલંબાઈ) } = 2$$

$$\begin{aligned} \text{બહુલક} &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\ &= 5 + \left(\frac{80 - 45}{2(80) - 45 - 55} \right) \times 2 \\ &= 5 + \frac{35}{60} \times 2 \end{aligned}$$

$$= 5 + \frac{35}{30}$$

$$= 5 + 1.2 = 6.2$$

તેથી, ગામની ખેતીલાયક જમીનનો બહુલક 6.2 હેક્ટર છે.

સ્વાધ્યાય 13.3

1. નીચેના વિતરણનો મધ્યક શોધો :

વર્ગ	1-3	3-5	5-7	7-10
આવૃત્તિ	9	22	27	17

2. 20 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિતની પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણના મધ્યકની ગણતરી કરો :

ગુણ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	4	7	6	1

3. નીચે આપેલી માહિતીનો મધ્યક શોધો :

વર્ગ	4-7	8-11	12-15	16-19
આવૃત્તિ	5	4	9	10

4. નીચેનું કોષ્ટક 30 દિવસમાં સારીકાએ લખીને પૂર્ણ કરેલા પોતાના પુસ્તકનાં પૃષ્ઠોની સંખ્યા દર્શાવે છે :

રોજ લખેલાં પૃષ્ઠોની સંખ્યા	16-18	19-21	22-24	25-27	28-30
દિવસોની સંખ્યા	1	3	4	9	13

રોજ લખેલાં પૃષ્ઠોની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો.

5. 50 નોકરની દૈનિક આવક કોષ્ટકમાં નીચે પ્રમાણે છે :

આવક (₹ માં)	1-200	201-400	401-600	601-800
નોકરની સંખ્યા	14	15	14	7

નોકરની દૈનિક આવકનો મધ્યક શોધો.

6. એક વિમાન 120 મુસાફરોની બેઠક ધરાવે છે. 100 ઉડ્યન દરમિયાન રોકાયેલી બેઠકોની સંખ્યા નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી છે :

બેઠકોની સંખ્યા	100-104	104-108	108-112	112-116	116-120
આવૃત્તિ	15	20	32	18	15

ઉડ્યન દરમિયાન રોકાયેલી બેઠકોની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો.

7. 50 મલ્લનું વજન (કિગ્રામાં) નીચેના કોષ્ટકમાં નોંધાયેલું છે :

વજન (કિગ્રામાં)	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
મલ્લની સંખ્યા	4	14	21	8	3

મલ્લનાં વજનનો મધ્યક શોધો.

8. ઉત્પાદકે પરીક્ષણ કરેલી એક જ બનાવટની 50 મોટરકારે પ્રતિ લિટર કાપેલા અંતરની વિગત નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

કાપેલું અંતર (કિમી/લિટર)	10-12	12-14	14-16	16-18
મોટરકારની સંખ્યા	7	12	18	13

કાપેલાં અંતરનો મધ્યક શોધો.

ઉત્પાદકનો દાવો હતો કે તે બનાવટની મોટરકારની સરેરાશ 16 કિમી/લિટર છે. શું તમે આ દાવા સાથે સંમત છો ?

9. 40 માણસોના વજન (કિગ્રામાં)નું વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

વજન (કિગ્રામાં)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
માણસોની સંખ્યા	4	4	13	5	6	5	2	1

ઉપર આપેલી માહિતીનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ (થી ઓછા પ્રકારનું) કોષ્ટક રચો.

10. નીચેનું કોષ્ટક એક પરીક્ષામાં 800 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ દર્શાવે છે :

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
10 થી ઓછા	10
20 થી ઓછા	50
30 થી ઓછા	130
40 થી ઓછા	270
50 થી ઓછા	440
60 થી ઓછા	570
70 થી ઓછા	670
80 થી ઓછા	740
90 થી ઓછા	780
100 થી ઓછા	800

ઉપર આપેલી માહિતી માટે આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરો.

11. નીચે આપેલી માહિતી પરથી આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવો :

ગુણ (90માંથી)	ઉમેદવારોની સંખ્યા
80 કે તેથી વધુ	4
70 કે તેથી વધુ	6
60 કે તેથી વધુ	11
50 કે તેથી વધુ	17
40 કે તેથી વધુ	23
30 કે તેથી વધુ	27
20 કે તેથી વધુ	30
10 કે તેથી વધુ	32
0 કે તેથી વધુ	34

12. એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈના નીચે આપેલા વિતરણમાં અજ્ઞાત સંખ્યાઓ a, b, c, d, e, f શોધો :

ઊંચાઈ (સેમીમાં)	આવૃત્તિ	સંયયી આવૃત્તિ
150-155	12	a
155-160	b	25
160-165	10	c
165-170	d	43
170-175	e	48
175-180	2	f
કુલ	50	

13. કોઈ એક દિવસે હોસ્પિટલમાં દાકતરી સારવાર લેતાં 300 દર્દીઓની ઉંમર નીચે પ્રમાણે છે :

ઉંમર (વર્ષમાં)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
દર્દીઓની સંખ્યા	60	42	55	70	53	20

આ પરથી

- થી ઓછા પ્રકારનું સંયયી આવૃત્તિ-વિતરણ શોધો.
- થી વધુ પ્રકારનું સંયયી આવૃત્તિ-વિતરણ શોધો.

14. એક વર્ગના 50 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણનું સંયયી આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે આપેલ છે :

ગુણ	20 થી ઓછા	40 થી ઓછા	60 થી ઓછા	80 થી ઓછા	100 થી ઓછા
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	17	22	29	37	50

માહિતી પરથી આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક બનાવો.

15. 600 કુટુંબોની સાપ્તાહિક આવક નીચે કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

અઠવાડિક આવક (₹ માં)	કુટુંબોની સંખ્યા
0-1000	250
1000-2000	190
2000-3000	100
3000-4000	40
4000-5000	15
5000-6000	5
કુલ	600

આવકનો મધ્યસ્થ શોધો.

16. એક ક્રિકેટ તાલીમ કેન્દ્રના 33 ખેલાડીઓની મહત્તમ બોલિંગની ઝડપ, કિમી પ્રતિ કલાકમાં નીચે આપેલ છે :

ઝડપ (કિમી/કલાક)	85-100	100-115	115-130	130-145
ખેલાડીઓની સંખ્યા	11	9	8	5

બોલિંગની ઝડપનો મધ્યસ્થ શોધો.

17. 100 કુટુંબની માસિક આવક નીચે આપેલ છે :

આવક (₹ માં)	કુટુંબની સંખ્યા
0-5000	8
5000-10000	26
10000-15000	41
15000-20000	16
20000-25000	3
25000-30000	3
30000-35000	2
35000-40000	1

બહુલકીય આવકની ગણતરી કરો.

18. નીચેના કોષ્ટકમાં કોફીના 70 પેકેટ્સનું વજન આપેલ છે.

વજન (ગ્રામમાં)	પેકેટ્સની સંખ્યા
200-201	12
201-202	26
202-203	20
203-204	9
204-205	2
205-206	1

બહુલકીય વજન શોધો.

19. બે પાસાંઓને એક જ સમયે ફેંકવામાં આવે છે.

(i) બંને પાસાં પર એક જ અંક મળે તેની સંભાવના શોધો.

(ii) બંને પાસાં પર ભિન્ન અંક મેળવવાની સંભાવના શોધો.

20. બે પાસાંઓને એકસાથે ફેંકવામાં આવે છે. પાસા પર આવતાં અંકોનો સરવાળો નીચે પ્રમાણે મળે તેની સંભાવના શોધો :

(i) 7 (ii) અવિભાજ્ય સંખ્યા (iii) 1

21. બે પાસાંઓ એકસાથે ફેંકવામાં આવે છે. પાસા પર આવતાં અંકોનો ગુણાકાર નીચે પ્રમાણે મળે તેની સંભાવના શોધો :

(i) 6 (ii) 12 (iii) 7

22. બે પાસાંઓને એક જ સમયે ફેંકવામાં આવે છે અને ઉપર આવતા અંકોના ગુણાકારને નોંધવામાં આવે છે. ગુણાકાર 9 થી ઓછો હોય તેવી સંભાવના શોધો.

23. બે પાસાંઓ અનુક્રમે 1, 2, 3, 4, 5, 6 અને 1, 1, 2, 2, 3, 3, એમ અંકિત છે. તેને ફેંકવામાં આવે છે અને તેની ઉપરના અંકોના સરવાળાને નોંધવામાં આવે છે. દરેક સરવાળો અલગથી 2 થી 9 ની વચ્ચે મળે તેની સંભાવના શોધો.

24. એક સિક્કાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે. વધુમાં વધુ એક છાપ મળે તેની સંભાવના શોધો.

25. એક સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. શક્ય પરિણામો નોંધો.

(i) તમામ છાપ (ii) ઓછામાં ઓછી બે છાપ મળવાની સંભાવના શોધો.

26. બે પાસાંઓને એક જ સમયે ફેંકવામાં આવે છે. બંને પાસાં પરના અંકોનો તફાવત 2 હોય તેવી સંભાવના નક્કી કરો.

27. એક થેલીમાં 10 લાલ, 5 ભૂરા અને 7 લીલા દડા છે. એક દડાને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. આ દડો (i) લાલ દડો (ii) લીલો દડો (iii) ભૂરો ન હોય તેવો દડો હોવાની સંભાવના શોધો.

28. 52 પત્તાના ઢગમાંથી ફુલ્લીના રાજા, રાણી અને ગુલામને કાઢી નાંખીને તેને બરાબર ચીપવામાં આવે છે. બાકી રહેલાં પત્તામાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે, તો તે પત્તું
- (i) લાલનું હોય (ii) રાજા હોય તેની સંભાવના શોધો.
29. પ્રશ્ન 28 નો સંદર્ભ લો. તે પત્તું
- (i) ફુલ્લીનું હોય (ii) લાલનો દસ્સો હોય તેની સંભાવના શોધો.
30. રમતનાં 52 પત્તામાંથી બધા ગુલામ, રાણી અને રાજાને દૂર કરવામાં આવે છે. બાકી રહેલાં પત્તાને સારી રીતે ચીપવામાં આવે છે અને પછી યાદચ્છિક રીતે એક પત્તું પસંદ કરવામાં આવે છે અને પછી યાદચ્છિક રીતે એક પત્તું પસંદ કરવામાં આવે છે. એકકાની કિંમત 1 અને તે જ રીતે બીજાં પત્તાની કિંમત હોય, તો પત્તાની કિંમત
- (i) 7 (ii) 7 થી વધુ (iii) 7 થી ઓછી હોય તેની સંભાવના શોધો.
31. 0 અને 100 ની વચ્ચેથી એક પૂર્ણાંક પસંદ કરવામાં આવે છે.
- (i) 7 થી વિભાજ્ય હોય (ii) 7 થી વિભાજ્ય ન હોય તેવી સંભાવના શોધો.
32. એક ખોખામાં 2 થી 101 અંકના કાર્ડ્સ મૂકેલાં છે. એક કાર્ડને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. તો તે કાર્ડ
- (i) યુગ્મ અંક (ii) પૂર્ણ વર્ગ સંખ્યા દર્શાવે તેની સંભાવના શોધો.
33. અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોનો એક અક્ષર યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. તે અક્ષર વ્યંજન હોય તેની સંભાવના શોધો.
34. એક ખોખામાં સંપૂર્ણ રીતે બંધ કરેલાં 1000 પરબીડિયાં છે, તે પૈકીના 10 માં દરેકમાં ₹ 100 રોકડ ઇનામ, 100 માં દરેકમાં ₹ 50 રોકડ ઇનામ, 200 માં દરેકમાં ₹ 10 રોકડ ઇનામ છે અને બાકીનામાં કોઈ પણ રોકડ ઇનામ નથી. જો તેને સારી રીતે મિશ્ર કરવામાં આવે અને કોઈ એક પરબીડિયું ઉઠાવવામાં આવે, તો તેમાં રોકડ ઇનામ ન હોય તેની સંભાવના શોધો.
35. ખોખા A માં 25 ચિટ્ટીઓ (ચબરખીઓ) રાખેલી છે. તેમાં 19 પર ₹ 1 લખેલું છે અને બાકીની દરેક પર ₹ 5 લખેલું છે. ખોખા B માં 50 ચિટ્ટીઓ (ચબરખીઓ) મૂકેલી છે. તેમાં 45 પર ₹ 1 લખેલ છે અને બાકીની દરેક પર ₹ 13 લખેલું છે. બંને ખોખામાંની ચિટ્ટીઓને ત્રીજા ખોખામાં નાંખીને બરાબર મિશ્ર કરવામાં આવે છે. યાદચ્છિક રીતે એક ચિટ્ટી ખેંચવામાં આવે છે તો તે ₹ 1 સિવાયની હોય તેની સંભાવના શોધો.
36. 24 વીજળીના ગોળા ધરાવતાં એક ખોખામાં 6 ખામીયુક્ત ગોળાઓ છે. એક ગોળાને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે, તો તે ગોળો ખામીયુક્ત ન હોય તેની સંભાવના શું હશે ? જો પસંદ કરેલો ગોળો ખામીયુક્ત હોય અને જો તેને પાછો મૂકવામાં ન આવે અને બાકીનામાંથી યાદચ્છિક રીતે બીજો ગોળો પસંદ કરવામાં આવે, તો બીજો ગોળો ખામીયુક્ત હોય, તેની સંભાવના શોધો.
37. એક રમતમાં, 3 ભૂરાં અને બાકીનાં લાલ એમ 8 ત્રિકોણો અને 6 ભૂરાં અને બાકીનાં લાલ એમ 10 ચોરસ છે. યાદચ્છિક રીતે એક ખોવાઈ જાય છે. તો તે
- (i) ત્રિકોણ (ii) ચોરસ (iii) ભૂરાં રંગનો ચોરસ (iv) લાલ રંગનો ત્રિકોણ હોવાની સંભાવના શોધો.
38. એક રમતનું પ્રવેશશુલ્ક ₹ 5 છે. રમતમાં સિક્કાને 3 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો એક કે બે છાપ બતાવે તો શ્વેતાને તેનું પ્રવેશશુલ્ક પાછું મળે છે. જો તે 3 છાપ પાડે તો પ્રવેશશુલ્કની બમણી રકમ પાછી મળે. નહિતર તેણી હારી જશે. સિક્કાને 3 વખત ઉછાળતા તે
- (i) પ્રવેશશુલ્ક ગુમાવશે.
(ii) પ્રવેશશુલ્કની બમણી રકમ મેળવશે.
(iii) ફક્ત તેનું પ્રવેશશુલ્ક જ મળશે, તેની સંભાવના શોધો.

39. એક પાસાની છ બાજુઓ પર 0, 1, 1, 1, 6, 6 અંકિત છે. આવા બે પાસાને એકસાથે ફેંકવામાં આવે છે અને કુલ અવલોકનોને નોંધવામાં આવે છે.
- (i) કેટલાં જુદાં-જુદાં અવલોકનો શક્ય છે ?
- (ii) કુલ 7 મળવાની સંભાવના કેટલી ?
40. 48 મોબાઇલ ફોનના જથ્થામાંથી 42 સારા છે, 3 માં ફક્ત સાધારણ ખામી છે અને 3 માં મોટી ખામી છે. વર્નિકા એવા જ ફોન ખરીદે છે કે જે સારા હોય, વેપારી એવા જ ફોન ખરીદે છે કે જેમાં કોઈ મોટી ખામી ન હોય. જથ્થામાંથી એક ફોન યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. તો તે
- (i) વર્નિકાને સ્વીકાર્ય હોય અને (ii) વેપારીને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના શોધો.
41. એક થેલીમાં x લાલ, $2x$ સફેદ અને $3x$ ભૂરા એમ 24 દડાઓ છે. યાદચ્છિક રીતે એક દડો પસંદ કરવામાં આવે છે. તે (i) લાલ ન હોય અને (ii) સફેદ હોય તેની સંભાવના શોધો.
42. મેળાની એક રમતમાં દરેક પૂંઠા ઉપર એક જ સંખ્યા દર્શાવી હોય તેવાં 1 થી 1000 સંખ્યા લખેલાં પૂંઠાં એક ખોખામાં મૂકવામાં આવેલ છે. યાદચ્છિક રીતે દરેક ખેલાડી એક પૂંઠું પસંદ કરે છે અને તે પૂંઠાને પાછું મૂકવામાં આવતું નથી. જો પસંદ કરેલું પૂંઠું 500 થી વધુનો પૂર્ણ વર્ગ અંક ધરાવતું હોય, તો ખેલાડી ઈનામ જીતે છે. તો
- (i) પહેલો ખેલાડી ઈનામ જીતે.
- (ii) જો પહેલો ખેલાડી જીતેલો હોય, તો બીજો ખેલાડી ઈનામ જીતે તેની સંભાવના શોધો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : 20 વર્ષ કે તેથી વધુ ઉંમરના 1000 માણસોનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ (થી ઓછા પ્રકારનું) નીચે આપેલું છે. ઉંમરની સરેરાશ શોધો.

થી ઓછી ઉંમર (વર્ષમાં)	30	40	50	60	70	80
માણસોની સંખ્યા	100	220	350	750	950	1000

ઉકેલ : પહેલાં, આપણે આપેલી માહિતીનું આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવીશું અને પછી મધ્યકની ગણતરી કરવા મધ્યકિંમત (x_i) , u_i અને $f_i u_i$ ની ગણતરી નીચે મુજબ કરીશું :

વર્ગ	આવૃત્તિ (f_i)	મધ્યકિંમત (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i u_i$
20-30	100	25	-2	-200
30-40	120	35	-1	-120
40-50	130	45 = a	0	0
50-60	400	55	1	400
60-70	200	65	2	400
70-80	50	75	3	150
	$\sum f_i = 1000$			$\sum f_i u_i = 630$

આપણે ધારેલો મધ્યક $(a) = 45$ લીધેલો છે. અહીં, $h =$ વર્ગલંબાઈ $= 10$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\begin{aligned}\text{મધ્યક} = \bar{x} &= a + h \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \\ &= 45 + 10 \left(\frac{630}{1000} \right) \\ &= 45 + 6.3 = 51.3\end{aligned}$$

આમ, ઉંમરનો મધ્યક 51.3 વર્ષ છે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેના વિતરણનો મધ્યક 18 છે. વર્ગ અંતરાલ 19-21 માં આવૃત્તિ f એ ખૂટતી આવૃત્તિ છે. f શોધો.

વર્ગ-અંતરાલ	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
આવૃત્તિ	3	6	9	13	f	5	4

ઉકેલ :

વર્ગ-અંતરાલ	મધ્યકિંમત (x_i)	આવૃત્તિ (f_i)	$u_i = \frac{x_i - 18}{2}$	$f_i u_i$
11-13	12	3	-3	-9
13-15	14	6	-2	-12
15-17	16	9	-1	-9
17-19	18	13	0	0
19-21	20	f	1	f
21-23	22	5	2	10
23-25	24	4	3	12
		$\sum f_i = 40 + f$		$\sum f_i u_i = f - 8$

ધારો કે, ધારેલો મધ્યક $a = 18$. અહીં $h = 2$

$$\begin{aligned}\text{મધ્યક} = \bar{x} &= a + h \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \\ &= 18 + 2 \left(\frac{f - 8}{40 + f} \right)\end{aligned}$$

$$\bar{x} = 18 \text{ (આપેલ છે.)}$$

$$\text{તેથી, } 18 = 18 + \frac{2(f - 8)}{40 + f}$$

$$\text{અથવા } f = 8$$

તેથી, વર્ગ-અંતરાલ 19-21 ની આવૃત્તિ 8 છે.

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલા વિતરણનો મધ્યસ્થ 14.4 છે. જો કુલ આવૃત્તિ 20 હોય, તો x અને y ની કિંમતો શોધો.

વર્ગ-અંતરાલ	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30
આવૃત્તિ	4	x	5	y	1

ઉકેલ :

વર્ગ-અંતરાલ	આવૃત્તિ	સંયુક્ત આવૃત્તિ
0-6	4	4
6-12	x	$4 + x$
12-18	5	$9 + x$
18-24	y	$9 + x + y$
24-30	1	$10 + x + y$

$n = 20$ આપેલ છે.

તેથી, $10 + x + y = 20$, એટલે કે, $x + y = 10$ (1)

તે પણ આપેલ છે કે મધ્યસ્થ = 14.4

તે 12-18 ના વર્ગ-અંતરાલમાં આવેલ છે.

તેથી, $l = 12$, $f = 5$, $cf = 4 + x$, $h = 6$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) h \text{ અથવા } 14.4 = 12 + \left(\frac{10 - (4 + x)}{5} \right) 6$$

$$\text{અથવા } 14.4 = 12 + \left(\frac{6 - x}{5} \right) 6 \text{ અથવા } x = 4 \quad (2)$$

(1) અને (2) પરથી, $y = 6$.

સ્વાધ્યાય 13.4

1. નીચેના વિતરણ માટે વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો મધ્યક શોધો :

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 અને તેથી વધુ	80
10 અને તેથી વધુ	77
20 અને તેથી વધુ	72
30 અને તેથી વધુ	65
40 અને તેથી વધુ	55
50 અને તેથી વધુ	43
60 અને તેથી વધુ	28
70 અને તેથી વધુ	16
80 અને તેથી વધુ	10
90 અને તેથી વધુ	8
100 અને તેથી વધુ	0

2. નીચેના વિતરણ માટે મધ્યક શોધો :

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
10 થી ઓછા	5
20 થી ઓછા	9
30 થી ઓછા	17
40 થી ઓછા	29
50 થી ઓછા	45
60 થી ઓછા	60
70 થી ઓછા	70
80 થી ઓછા	78
90 થી ઓછા	83
100 થી ઓછા	85

3. નીચે આપેલી માહિતી પરથી એક શહેરના 100 રહેવાસીઓની ઉંમરનો મધ્યક શોધો :

સમાન કે વધુ ઉંમર (વર્ષમાં)	0	10	20	30	40	50	60	70
માણસોની સંખ્યા	100	90	75	50	25	15	5	0

4. નીચે આપેલા કોષ્ટકમાં આ ના 70 પેકેટ્સનું વજન આપેલું છે, તો પેકેટ્સના વજનનો મધ્યક શોધો.

વજન (ગ્રામમાં)	પેકેટ્સની સંખ્યા
200-201	13
201-202	27
202-203	18
203-204	10
204-205	1
205-206	1

5. ઉપરના પ્રશ્ન 4 નો સંદર્ભ લો.

આ માહિતીનો 'થી ઓછા' પ્રકારનો ઓજીવ દોરો અને વજનનો મધ્યક શોધવા તેનો ઉપયોગ કરો.

6. ઉપરના પ્રશ્ન 4 નો સંદર્ભ લો.

માહિતી માટે 'થી ઓછા' પ્રકારનો અને 'થી વધુ' પ્રકારનો ઓજીવ દોરો અને વજનનો મધ્યસ્થ શોધવા માટે તેનો ઉપયોગ કરો.

7. નીચેનું કોષ્ટક 280 માણસોનો પગાર બતાવે છે તે પરથી માહિતીના મધ્યસ્થ અને બહુલકની ગણતરી કરો :

પગાર (હજાર રૂપિયામાં)	માણસોની સંખ્યા
5-10	49
10-15	133
15-20	63
20-25	15
25-30	6
30-35	7
35-40	4
40-45	2
45-50	1

8. નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યક 50 છે, પણ વર્ગો 20-40 અને 60-80 ની આવૃત્તિઓ અનુક્રમે f_1 અને f_2 છે. જો તમામ આવૃત્તિઓનો સરવાળો 120 હોય, તો આ ખૂટતી આવૃત્તિઓ શોધો.

વર્ગ	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
આવૃત્તિ	17	f_1	32	f_2	19

9. નીચેની માહિતીનો મધ્યસ્થ 50 છે. જો તમામ આવૃત્તિઓનો સરવાળો 90 હોય, તો p અને q ની કિંમત શોધો :

ગુણ	આવૃત્તિ
20-30	p
30-40	15
40-50	25
50-60	20
60-70	q
70-80	8
80-90	10

10. નીચે 96 બાળકોની ઊંચાઈનું (સેમીમાં) વિતરણ આપેલું છે :

ઊંચાઈ (સેમીમાં)	બાળકોની સંખ્યા
124-128	5
128-132	8
132-136	17
136-140	24
140-144	16
144-148	12
148-152	6
152-156	4
156-160	3
160-164	1

આ માહિતી માટે ‘થી ઓછા’ પ્રકારનો સંચયી આવૃત્તિ વક્ર દોરો અને બાળકોની ઊંચાઈના મધ્યસ્થની ગણતરીમાં તેનો ઉપયોગ કરો.

11. નીચેના કોષ્ટકમાં 200 કુટુંબના સર્વેક્ષણમાં ખેતીલાયક જમીનનું માપ આપેલ છે તે પરથી જમીનની માલિકીના માપના મધ્યસ્થ અને બહુલકની ગણતરી કરો.

ખેતીલાયક જમીનનું માપ (હેક્ટરમાં)	કુટુંબની સંખ્યા
0-5	10
5-10	15
10-15	30
15-20	80
20-25	40
25-30	20
30-35	5

12. નીચેના કોષ્ટકમાં એક શહેરના 66 દિવસ માટેના વાર્ષિક વરસાદી નોંધ આપેલ છે.

વરસાદ (સેમીમાં)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
દિવસોની સંખ્યા	22	10	8	15	5	6

સંચયી આવૃત્તિ વક્ર (ઓજીવ) (‘થી વધુ પ્રકાર’ અને ‘થી ઓછા પ્રકાર’)નો ઉપયોગ કરીને વરસાદનો મધ્યસ્થ શોધો.

13. નીચે આપેલા આવૃત્તિ-વિતરણમાં મોબાઇલ ફોન દ્વારા કરેલા 100 કોલ્સની સમય-અવધિ આપેલી છે :

સમય-અવધિ (સેકન્ડમાં)	કોલ્સની સંખ્યા
95-125	14
125-155	22
155-185	28
185-215	21
215-245	15

એક કોલ માટેની સરેરાશ સમય-અવધિ (સેકન્ડમાં) શોધો અને સંચયી આવૃત્તિ વક્ર પરથી મધ્યસ્થ પણ શોધો.

14. એક શાળાની ભાલાફેંકની સ્પર્ધામાં 50 બાળકો ભાગ લે છે. ફેંકેલા અંતર (મીટરમાં)ની નીચે આપેલ છે :

અંતર (મીટરમાં)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	6	11	17	12	4

- સંચયી આવૃત્તિ-કોષ્ટક તૈયાર કરો.
- સંચયી આવૃત્તિ વક્ર ('થી ઓછા' પ્રકારનો) દોરો અને આ વક્ર પરથી મધ્યસ્થ અંતરની ગણતરી કરો.
- મધ્યસ્થના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને મધ્યસ્થ અંતરની ગણતરી કરો.
- (ii) અને (iii) માં ગણેલું મધ્યસ્થ અંતર સરખું છે ?



પ્રશ્નપત્રનું પરિરૂપ (CBSE)

ગણિત
ધોરણ X

સમય : 3 કલાક

કુલ ગુણ : 80

પ્રશ્નના જુદા-જુદા પ્રકાર પ્રમાણે અને હેતુઓ પ્રમાણે ગુણભાર :

(A) વિષયવસ્તુ/વિષય એકમ પ્રમાણે ગુણભાર :

ક્રમ. નં.	વિષયવસ્તુ	ગુણભાર
1.	સંખ્યાપદ્ધતિ	04
2.	બીજગણિત	20
3.	ત્રિકોણમિતિ	12
4.	યામભૂમિતિ	08
5.	ભૂમિતિ	16
6.	માપન	10
7.	આંકડાશાસ્ત્ર અને સંભાવના	10
		કુલ : 80

(B) પ્રશ્નના પ્રકાર પ્રમાણે ગુણભાર :

ક્રમ. નં.	પ્રશ્નપત્રનું સ્વરૂપ	દરેક પ્રશ્નનો ગુણભાર	પ્રશ્નોની સંખ્યા	કુલ ગુણ
1.	બહુવિકલ્પી પ્રશ્નો	01	10	10
2.	કારણ સહિત ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો	02	05	10
3.	ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો	03	10	30
4.	વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો	06	05	30
કુલ			30	80

(C) વિકલ્પોનું સ્વરૂપ :

બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે, એટલે કે પસંદગીમાં સમગ્ર વિકલ્પ નથી, પણ આંતરિક રીતે 2 ગુણનો એક પ્રશ્ન, 3 ગુણના ત્રણ પ્રશ્નો અને 6 ગુણના બે પ્રશ્નો આવેલા છે.

(D) કઠિનતા-મૂલ્ય પ્રમાણે પ્રશ્નોના ગુણભાર :

ક્રમ. નં.	પ્રશ્નોના અંદાજિત કઠિનતા-મૂલ્ય	ટકાવારી પ્રમાણે ગુણ
(1)	સરળ	20
(2)	મધ્યમ	60
(3)	કઠિન	20

નોંધ : વ્યક્તિ-વ્યક્તિ પ્રમાણે કઠિનતાનું મૂલ્ય બદલાઈ શકે છે. પ્રત્યેક પ્રશ્નપત્રનું પરીક્ષણ તૈયાર કરનાર/પરીક્ષા લેનારના સમગ્ર જૂથની સામાન્ય અપેક્ષાને ધ્યાનમાં રાખીને કરવામાં આવે છે. આ વ્યવસ્થા દરેક તબક્કે ગુણની વહેંચણી આદર્શ રહે તે માટે પ્રશ્નપત્રને માત્ર તેના ગુણભાર પ્રમાણે સંતુલિત બનાવાય છે.

પ્રશ્નપત્રની રૂપરેખા
ગણિત
ધોરણ X (CBSE)

પ્રશ્નનું સ્વરૂપ એકમો ↓ →	MCQ	SAR	SA	LA	કુલ
સંખ્યાપદ્ધતિ	2(2)	2(1)	–	–	4(3)
બીજગણિત બહુપદીઓ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ દ્વિઘાત સમીકરણ સમાંતર શ્રેણી	3(3)	2(1)	9(3)	6(1)	20(8)
ત્રિકોણમિતિ ત્રિકોણમિતિનો પરિચય ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગો	1(1)	2(1)	3(1)	6(1)	12(4)
યામભૂમિતિ	1(1)	4(2)	3(1)	-	8(4)
ભૂમિતિ ત્રિકોણ, વર્તુળ-રચના	1(1)	–	9(3)	6(1)	16(5)
માપન વર્તુળ સંબંધિત ક્ષેત્રફળ પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ	1(1)	–	3(1)	6(1)	10(3)
આંકડાશાસ્ત્ર અને સંભાવના	1(1)	–	3(1)	6(1)	10(3)
કુલ	10(10)	10(5)	30(10)	30(5)	80(30)

સારાંશ

બહુ વિકલ્પી પ્રશ્નો (MCQ)	પ્રશ્નોની સંખ્યા : 10	ગુણ : 10
કારણ સહિત ટૂંકજવાબી પ્રશ્નો (SAR)	પ્રશ્નોની સંખ્યા : 05	ગુણ : 10
ટૂંકજવાબી પ્રશ્નો (SA)	પ્રશ્નોની સંખ્યા : 10	ગુણ : 30
વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો (LA)	પ્રશ્નોની સંખ્યા : 05	ગુણ : 30
કુલ	30	80

ગણિત

સેટ I

ધોરણ X (CBSE)

કુલ ગુણ : 80

સમય : 3 કલાક

સામાન્ય સૂચનાઓ

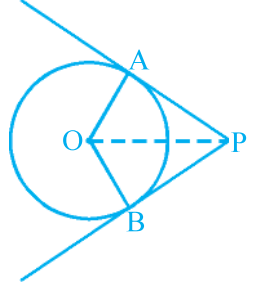
1. બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
2. પ્રશ્નપત્રના 30 પ્રશ્નોને ચાર વિભાગ A, B, C અને D માં વહેંચેલા છે. વિભાગ A માં પ્રત્યેક 1 ગુણનો હોય તે રીતના 10 પ્રશ્નો, વિભાગ B માં 2 ગુણ હોય તે રીતના 5 પ્રશ્નો, વિભાગ C માં પ્રત્યેક 3 ગુણનો હોય તે રીતના 10 પ્રશ્નો અને વિભાગ D માં પ્રત્યેક 6 ગુણના હોય તે રીતના 5 પ્રશ્નોનો સમાવેશ થાય છે.
3. સમગ્ર પ્રશ્નપત્રમાં વિકલ્પ આપવામાં આવ્યા નથી પરંતુ 2 ગુણનો એક પ્રશ્ન, દરેક 3 ગુણના ત્રણ પ્રશ્નો અને દરેક 6 ગુણના બે પ્રશ્નો આંતરિક વિકલ્પો આપવામાં આવ્યા છે.
4. રચનાના પ્રશ્નમાં, આકૃતિ સ્વચ્છ અને આપેલ માપ પ્રમાણે દોરવી.
5. કેલક્યુલેટરનો ઉપયોગ કરી શકાશે નહિ.

વિભાગ A

1. $\frac{47}{2^35^2}$ સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ કેટલાં દશાંશ-સ્થળ સુધી સાન્ત છે ?
 (A) 5 (B) 2 (C) 3 (D) 1
 2. યુક્લિડના ભાગાકારના પૂર્વપ્રમેય માટે દર્શાવો કે બે ધન પૂર્ણાંકો a અને b ને સંગત અનન્ય અનૂણ પૂર્ણાંકો q અને r એવા મળે કે જેથી $a = bq + r$, જ્યાં
 (A) $0 \leq r \leq a$ (B) $0 < r < b$ (C) $0 \leq r \leq b$ (D) $0 \leq r < b$
 3. બહુપદી $p(x) = (x - 2)^2 + 4$ નાં શૂન્યોની સંખ્યા છે.
 (A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) 3
 4. સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ સુસંગત નથી. જો આમ બને તો
 (A) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (B) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ તથા $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (C) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ તથા $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (D) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
 5. દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + kx + 9 = 0$ ને વાસ્તવિક બીજ હોય, તો k ની નાનામાં નાની કિંમત છે.
 (A) -6 (B) 6 (C) 36 (D) -3
- બિંદુઓ P અને Q ના યામ (4, -3) અને (-1, 7) છે. $\frac{PR}{PQ} = \frac{3}{5}$ માટે રેખાખંડ PQ પર બિંદુ Rનો કોટિ છે.
- (A) $\frac{18}{5}$ (B) $\frac{17}{5}$ (C) $\frac{17}{8}$ (D) 1

7. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, બિંદુ P માંથી O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને સ્પર્શકો PA અને PB દોરેલા છે, તો ચતુષ્કોણ OAPB હંમેશાં છે.

- (A) ચોરસ (B) સમબાજુ ચતુષ્કોણ
(C) ચક્રીય ચતુષ્કોણ (D) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

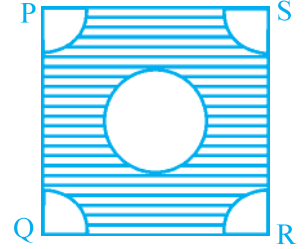


8. જો કોઈક ખૂણા θ માટે, $\cot 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ હોય, તો $\sin 3\theta$ ની કિંમત છે, જ્યાં $2\theta \leq 90^\circ$

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) 1 (C) 0 (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે 4 સેમી બાજુવાળા ચોરસના પ્રત્યેક ખૂણા પર 1 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો ચતુર્થાંશ ભાગ કપાયેલો છે તથા 2 સેમી વ્યાસવાળું એક વર્તુળ પણ કાપેલું છે. ચોરસના બાકીના ભાગનું ક્ષેત્રફળ છે.

- (A) $(16 - 2\pi)$ સેમી² (B) $(16 - 5\pi)$ સેમી²
(C) 2π સેમી² (D) 5π સેમી²



10. અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરતાં, 'MATHEMATICS' શબ્દની પસંદગીની સંભાવના છે.

- (A) $\frac{11}{26}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{9}{26}$ (D) $\frac{4}{13}$

વિભાગ B

11. કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે 4^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય થાય કે નહિ ? તમારા ઉત્તર માટે કારણ આપો.
12. સમાંતર શ્રેણીના n મા પદના સૂત્રનો ઉપયોગ કર્યા સિવાય, સમાંતર શ્રેણી : 5, 17, 29, 41, ... નું કયું પદ 15મા પદથી 120 વધારે છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

અથવા

શું સમાંતર શ્રેણી 3, 7, 11,.... નું કોઈ પદ 144 છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

13. બિંદુઓ P, Q અને R ના યામ અનુક્રમે (3, 4), (3, -4) અને (-3, 4) છે. ΔPQR નું ક્ષેત્રફળ 24 ચોરસ એકમ છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.
14. એક રેખાખંડની લંબાઈ 10 એકમ છે. જો એક અંત્યબિંદુ (2, -3) અને બીજાં અંત્યબિંદુનો કોટિ 10 છે જ્યારે તેનો ભુજ 3 અથવા -9 છે. બંને ઉત્તર માટે ચકાસણી કરો.

15. $\frac{3}{\operatorname{cosec} \theta}$ ની મહત્તમ કિંમત શું છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

વિભાગ C

16. બહુપદી $f(x) = 4\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ નાં શૂન્યો શોધો અને તેમનાં શૂન્યો તથા સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ ચકાસો.

અથવા

બહુપદી $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 4$ ને બહુપદી $g(x)$ વડે ભાગતાં, ભાગાકાર $q(x)$ અને શેષ બહુપદી $r(x)$ અનુક્રમે $x - 3$ અને $-3x + 5$ છે. બહુપદી $g(x)$ શોધો.

17. સમીકરણો $5x - y = 5$ અને $3x - y = 3$ નો આલેખની મદદથી ઉકેલ શોધો.
 18. જો સમાંતર શ્રેણીનાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $4n - n^2$ હોય, તો 10મું પદ અને n મું પદ શોધો.

અથવા

સમાંતર શ્રેણી 9, 17, 25, ... નાં કેટલાં પદોનો સરવાળો 636 છે ?

19. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ ક્રમમાં (1, 2), (4, y), (x, 6) અને (3, 5) હોય, તો x અને y ની કિંમતો શોધો.
 20. ΔABC ની બાજુઓ AB, BC અને મધ્યગા AD અનુક્રમે ΔPQR ની બાજુઓ PQ, QR અને મધ્યગા PM ને સમપ્રમાણમાં છે. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ સાબિત કરો.
 21. ત્રિકોણ ABC એ 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને પરિગત છે. રેખાખંડ BD અને DC એ BC નું સ્પર્શબિંદુ D આગળ અનુક્રમે 8 સેમી અને 7 સેમી લંબાઈના રેખાખંડમાં વિભાજન કરે છે. બાજુઓ AB અને AC શોધો.
 22. 6 સેમી આધાર અને 5 સેમી વેધવાળા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની રચના કરો અને પછી બીજો ત્રિકોણ રચો જેની બાજુઓ, સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ કરતાં $\frac{7}{5}$ ગણી હોય.

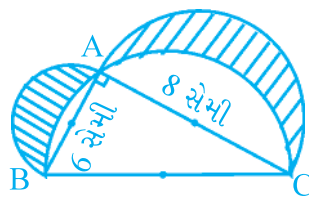
23. સાબિત કરો કે, $\frac{\cos\theta - \sin\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta}$.

અથવા

કિંમત મેળવો :

$$\left\{ \frac{3 \cos 43^\circ}{\sin 47^\circ} \right\}^2 - \frac{\cos 37^\circ \operatorname{cosec} 53^\circ}{\tan 5^\circ \tan 25^\circ \tan 45^\circ \tan 65^\circ \tan 85^\circ}$$

24. આકૃતિમાં ત્રિકોણ ABC માં A કાટખૂણો છે. AB ઉપર અર્ધવર્તુળ દોરેલું છે. AC અને BC વ્યાસ છે, તો રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



25. એક થેલીમાં સફેદ, કાળા અને લાલ દડાઓ છે. થેલીમાંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવાનો છે. સફેદ દડો મેળવવાની સંભાવના $\frac{3}{10}$ છે અને કાળો દડો મેળવવાની સંભાવના $\frac{2}{5}$ છે, તો લાલ દડો મેળવવાની સંભાવના શોધો. જો થેલીમાં 20 કાળા દડાઓ હોય, તો થેલીમાં રહેલા દડાઓની કુલ સંખ્યા શોધો.

વિભાગ D

26. જો એક પુસ્તકની કિંમત 5 રૂપિયા ઘટે તો એક વ્યક્તિ 300 રૂપિયામાં 5 વધારે પુસ્તક ખરીદી શકે છે. પુસ્તકની મૂળ કિંમત શોધો.

અથવા

બે મિત્રોની ઉંમરનો સરવાળો 20 વર્ષ છે. 4 વર્ષ પહેલાં તેમની ઉંમરનો ગુણાકાર 48 હતો. શું આ સંભવ છે ? જો હા તો તેમની હાલની ઉંમર શોધો.

27. સાબિત કરો કે વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે. ઉપરના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, જો ચતુષ્કોણ ABCD એક વર્તુળને પરિગત હોય, તો સાબિત કરો કે $AB + CD = AD + BC$.

અથવા

સાબિત કરો કે બે સમરૂપ ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર તેમની અનુરૂપ બાજુઓના વર્ગોના ગુણોત્તર બરાબર હોય છે. ઉપરના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલો. B કાટકોણ હોય તેવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC છે. બાજુઓ AC અને AB પર અનુક્રમે બે સમબાજુ ત્રિકોણો ACD અને ABE રચો. ΔABE અને ΔACD નાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

28. એક ટાવરની ટોચ પરથી અવલોકન કરતાં 50 મીટર ઊંચી ઈમારતની ટોચ અને તળિયાના અવસેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 30° અને 60° છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો અને ટાવર અને ઈમારત વચ્ચેનું સમક્ષિતિજ અંતર શોધો.
29. 3 મીટર વ્યાસવાળા એક વર્તુળ પર એક કૂવો 14 મીટર સુધી ખોદવામાં આવે છે. તેમાંથી નીકળેલી માટીને 4 મીટર પહોળા વર્તુળાકાર વલયમાં સમાન રીતે પાથરીને ઓટલો બનાવ્યો છે, તો ઓટલાની ઊંચાઈ શોધો.
30. નીચેનું કોષ્ટક એક વર્ષ દરમિયાન એક દવાખાનામાં દાખલ થયેલા દર્દીઓની ઉંમર દર્શાવે છે :

ઉંમર વર્ષમાં	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
દર્દીઓની સંખ્યા	6	11	21	23	14	5

ઉપર આપેલ માહિતી માટે બહુલક અને મધ્યક શોધો.

મૂલ્યાંકન પદ્ધતિ
વિભાગ A

1. C 2. D 3. C 4. C 5. A 6. D
7. C 8. B 9. A 10. D

ગુણ

(1 × 10 = 10)

વિભાગ B

11. ના ($\frac{1}{2}$)
 $4^n = 2^{2n}$
 તેથી, 4^n ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં ફક્ત 2 અવિભાજ્ય અવયવ છે. તેથી તેના અંતમાં શૂન્ય શક્ય નથી. ($1\frac{1}{2}$)
12. 25 મું પદ ($\frac{1}{2}$)
 10 પદોમાં 120 ઉમેરતાં (જ્યાં $d = 12$)
 તેથી, $15 + 10 = 25$ ($1\frac{1}{2}$)

અથવા

- ના ($\frac{1}{2}$)
 અહીં, $a = 3$ (અયુગ્મ), $d = 4$ (યુગ્મ)
 સરવાળો (અયુગ્મ + યુગ્મ) = અયુગ્મ, પણ 144 યુગ્મ છે. ($1\frac{1}{2}$)
13. હા ($\frac{1}{2}$)
 અહીં, $PQ = 8$,
 $PR = 6$, તેથી ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ ચોરસ એકમ ($1\frac{1}{2}$)
14. ધારો કે બિંદુ y નો ભુજ છે, તો $(10 - 2)^2 + (y + 3)^2 = 10^2$ એટલે કે, $y + 3 = \pm 6$
 એટલે કે, $y = 3$ અથવા -9 ($1 + 1$)
15. વધુમાં વધુ કિંમત = 3 ($\frac{1}{2}$)
 જ્યાં $\frac{3}{\cos \theta} = 3 \sin \theta$ અને $\sin \theta \leq 1$, તેથી $3 \sin \theta \leq 3$ ($1\frac{1}{2}$)

વિભાગ C

16. $p(x) = 4\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(2x^2 - x - 1) = 2\sqrt{3}(2x + 1)(x - 1)$
 તેથી, બે શૂન્યો $-\frac{1}{2}, 1$ (1)
 અહીં $a = 4\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = -2\sqrt{3}$

તેથી, $\alpha + \beta = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, $-\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ એટલે કે, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ (1)

$\alpha\beta = \left(-\frac{1}{2}\right)1 = -\frac{1}{2}$, $\frac{c}{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$ એટલે કે, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ (1)

અથવા

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

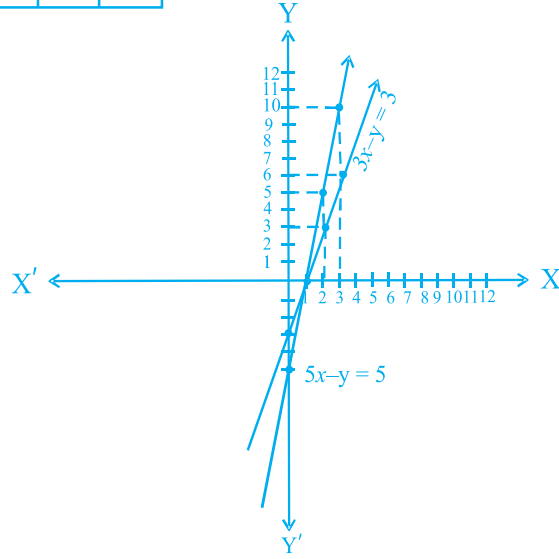
તેથી, $x^3 - 5x^2 + 6x - 4 = g(x)(x - 3) + (-3x + 5)$ (1)

તેથી, $g(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x - 4 + 3x - 5}{x - 3} = \frac{x^3 - 5x^2 + 9x - 4}{x - 3} = x^2 - 2x + 3$ (2)

17. $5x - y = 5$ $3x - y = 3$

x	1	2	3
y	0	5	10

x	1	2	3
y	0	3	6



સાચા આલેખ માટે

ઉકેલ $x = 1, y = 0$

18. $S = 4n - n^2$. તેથી, $t_{10} = S_{10} - S_9$ (2)

$$= (40 - 100) - (36 - 81)$$

$$= -60 + 45 = -15$$

$$t_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (4n - n^2) - [4(n-1) - (n-1)^2]$$

$$= 4n - n^2 - 4n + 4 + n^2 + 1 - 2n$$

$$= 5 - 2n$$

અથવા

$$a = 9, d = 8, S_n = 636$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \text{ ઉપયોગ કરો. } 636 = \frac{n}{2} [18 + (n-1)8] \quad (1\frac{1}{2})$$

ઉકેલતાં $n = 12$ મળે.

$(1\frac{1}{2})$

19. ધારો કે $A(1, 2)$, $B(4, y)$ અને $C(x, 6)$ તથા $D(3, 5)$ શિરોબિંદુઓ છે.

$$AC \text{ નું મધ્યબિંદુ } \left(\frac{x+1}{2}, 4 \right)$$

$(\frac{1}{2})$

$$BD \text{ નું મધ્યબિંદુ } \left(\frac{7}{2}, \frac{y+5}{2} \right)$$

$(\frac{1}{2})$

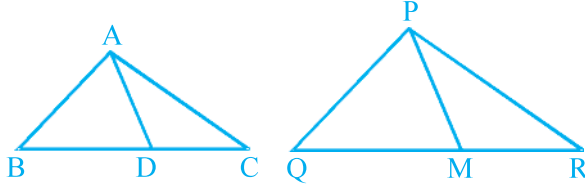
ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, તેથી $\frac{x+1}{2} = \frac{7}{2}$ એટલે કે, $x = 6$

(1)

$$\frac{y+5}{2} = 4 \text{ એટલે કે, } y = 3$$

(1)

20.



$$\text{પક્ષ } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$$

તેથી, $\Delta ABD \sim \Delta PQM$

(બાબાબા)

$(1\frac{1}{2})$

તેથી, $\angle B = \angle Q$. પરંતુ, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ એટલે કે, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ [બાખૂબા શરત]

$(1\frac{1}{2})$

21. ધારો કે $AE (=AF) = x$ સેમી.

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{નું ક્ષેત્રફળ} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (AB + BC + AC) \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

$$\text{એટલે કે, } 4s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$(\frac{1}{2})$

$$16s = (s-a)(s-b)(s-c)$$

$(\frac{1}{2})$

$$\therefore 16(15+x) = x \cdot 8 \cdot 7, \text{ માટે, } x = 6$$

(1)

તેથી, $AB = 14$ સેમી અને $AC = 13$ સેમી

$(\frac{1}{2})$

22. પાયો 6 સેમી અને વેધ 5 સેમીવાળો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ રચો.

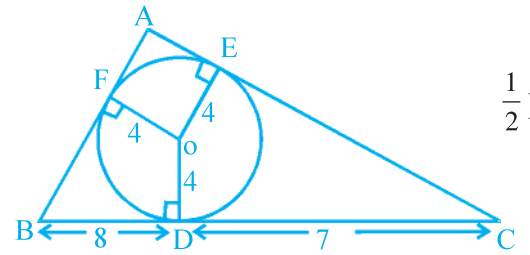
(1)

તેને સમરૂપ, બાજુઓના $\frac{7}{5}$ ગણી હોય તેવો ત્રિકોણ રચો.

(2)

$$23. \text{ ડા.બા. } = \frac{\cos\theta - \sin\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\cot\theta - 1 + \operatorname{cosec}\theta}{1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta}$$

(1)



$$\begin{aligned}
&= \frac{\cot \theta - 1 + \operatorname{cosec} \theta}{1 - (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)} \\
&= \frac{\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta - 1}{(\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta) - (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)} \\
&= \frac{\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta - 1}{(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta - 1)} \\
&= \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta}
\end{aligned} \tag{1}$$

અથવા

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{3 \cos 43^\circ}{\sin 47^\circ} \right]^2 - \frac{\cos 37^\circ \operatorname{cosec} 53^\circ}{\tan 5^\circ \tan 25^\circ \tan 45^\circ \tan 65^\circ \tan 85^\circ} \\
&= \left[\frac{3 \cos 43^\circ}{\cos 43^\circ} \right]^2 - \frac{\cos 37^\circ \sec 37^\circ}{\tan 5^\circ \tan 25^\circ (1) \cot 25^\circ \cot 5^\circ} \\
&= (3)^2 - \frac{1}{1} = 9 - 1 = 8
\end{aligned} \tag{2}$$

24.

$$\text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ} = \begin{cases} \text{AB વ્યાસવાળા અર્ધવર્તુળનું ક્ષેત્રફળ} + \\ \text{AC વ્યાસવાળા અર્ધવર્તુળના ક્ષેત્રફળ} + \\ \text{કાટકોણ ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ} - \\ \text{BC વ્યાસવાળા અર્ધવર્તુળનું ક્ષેત્રફળ} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ} &= \frac{1}{2} \pi \cdot (3)^2 + \frac{1}{2} \pi (4)^2 + \frac{1}{2} \times 6 \times 8 - \frac{1}{2} \pi (5)^2 \text{ ચોરસ એકમ} \\
&= 24 + \frac{1}{2} \pi (9 + 16 - 25) = 24 \text{ ચોરસ એકમ}
\end{aligned} \tag{1}$$

$$25. P(\text{લાલ દડો}) = 1 - \{P(\text{સફેદ દડો}) + P(\text{કાળો દડો})\} \tag{1}$$

$$= 1 - \left\{ \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \right\} = \frac{3}{10} \tag{\frac{1}{2}}$$

ધારો કે દડાની કુલ સંખ્યા y છે.

$$\text{તેથી, } \frac{20}{y} = \frac{2}{5} \text{ એટલે કે } y = 50 \tag{1 \frac{1}{2}}$$

વિભાગ D

26. ધારો કે એક પુસ્તકની મૂળ કિંમત x રૂપિયા છે.

$$\text{તેથી } 300 \text{ રૂપિયાનાં પુસ્તકોની સંખ્યા} = \frac{300}{x} \tag{\frac{1}{2}}$$

$$\text{જ્યારે પુસ્તકની કિંમત } (x - 5) \text{ ત્યારે પુસ્તકોની સંખ્યા} = \frac{300}{x - 5} \tag{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{300}{x-5} - \frac{300}{x} = 5 \quad (2)$$

$$\therefore 300(x-x+5) = 5x(x-5)$$

$$\therefore 300 = x(x-5) \text{ એટલે કે, } x^2 - 5x - 300 = 0 \quad (1)$$

$$\therefore x = 20, x = -15 \text{ (શક્ય નથી.)} \quad (1)$$

$$\therefore \text{એક પુસ્તકની કિંમત} = 20 \text{ રૂપિયા} \quad (1)$$

અથવા

ધારો કે એકની હાલની ઉંમર વર્ષ x , તેથી બીજાની ઉંમર વર્ષ $= (20 - x)$ છે.

તેથી, 4 વર્ષ પહેલાં, તેમની ઉંમર $x - 4$, $16 - x$ વર્ષ છે. (1)

$$\therefore (x-4)(16-x) = 48$$

$$\therefore -x^2 + 16x + 4x - 64 - 48 = 0 \quad (1 \frac{1}{2})$$

$$\therefore x^2 - 20x + 112 = 0 \quad (1)$$

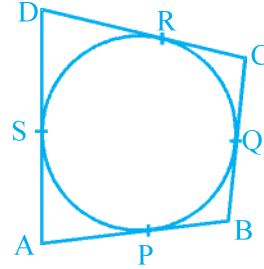
$$\text{અહીંયા } b^2 - 4ac = \sqrt{(20)^2 - 4(112)} = \sqrt{-48} \quad (1 \frac{1}{2})$$

તેથી સમીકરણને વાસ્તવિક બીજ નથી. (1)

આથી આપેલી પરિસ્થિતિ શક્ય નથી. (1)

27. સાચા પક્ષ, સાધ્ય, રચના અને આકૃતિ માટે, (2)
સાચી સાબિતી માટે (2)

$$\left. \begin{array}{l} AP = AS \\ BP = BQ \\ DR = DS \\ CR = CQ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(વર્તુળને બહારના બિંદુમાંથી દોરેલા} \\ \text{સ્પર્શકો સમાન હોય છે.)} \end{array}$$



$$\text{સરવાળો કરતાં, } (AP + BP) + (DR + CR) = (AS + DS) + (BQ + CQ) \quad (1)$$

$$\therefore AB + CD = AD + BC \quad (1)$$

અથવા

સાચા પક્ષ, સાધ્ય, રચના અને આકૃતિ માટે (2)

સાચી સાબિતી માટે (2)

$$\text{ધારો કે } AB = BC = a \text{ એટલે કે, } AC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a \quad (1 \frac{1}{2})$$

$$\frac{\Delta ABE \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta ACD \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2} \quad (1 \frac{1}{2})$$

28. સાચી આકૃતિ માટે, (1)

$$\Delta ABD \text{ માં, } \frac{AB}{BD} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\therefore AB = \sqrt{3} BD \quad (I)$$

$$\Delta ACE \text{ માં, } \frac{AE}{EC} = \frac{AE}{BD} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \frac{(AB - 50)}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ એટલે કે, } \sqrt{3} (AB - 50) = BD$$

$$\text{સમીકરણ (I) પરથી, } AB = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} (AB - 50)$$

$$\text{એટલે કે, } AB = 3AB - 150 \text{ એટલે કે,}$$

$$AB = 75 \text{ મી}$$

$$BD = \sqrt{3} (75 - 50) = 25\sqrt{3} \text{ મી}$$

$$29. \text{ કાઢેલી માટીનું ઘનફળ} = \pi r^2 h = \pi (1.5)^2 \times 14 = 31.5 \pi \text{ મી}^3$$

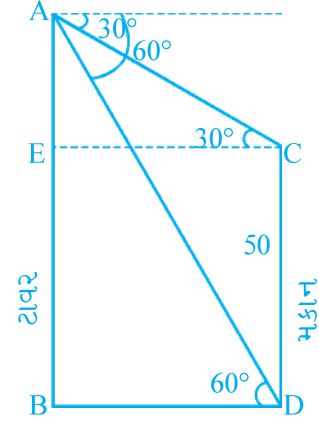
$$\text{ગોળાકાર વલયનું ક્ષેત્રફળ} = \pi[R^2 - r^2] = \pi[(5.5)^2 - (1.5)^2]$$

$$= \pi(7)(4) = 28\pi \text{ મી}^2$$

ધારો કે ઓટલાની ઊંચાઈ h મીટર

$$\therefore 28\pi \times h = 31.5 \pi$$

$$\therefore h = \frac{31.5}{28} = 1.125 \text{ મી}$$



(1)

(1)

(1)

(1)

(2)

(1)

(1)

30.

ઉંમર (વર્ષમાં)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	કુલ
દર્દીઓની સંખ્યા (f_1)	6	11	21	23	14	5	80
વર્ગની મધ્યકિંમત (x_i)	10	20	30	40	50	60	
$f_i x_i$	60	220	630	920	700	300	2830

 $(\frac{1}{2})$

(1)

$$\text{મધ્યક} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2830}{80} = 35.375 \text{ વર્ષ}$$

(1)

બહુલક વર્ગ (35 - 45)

 $(\frac{1}{2})$

$$\text{તેથી, બહુલક} = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

(1)

$$l = 35, f_1 = 23, f_0 = 21, f_2 = 14 \text{ અને } h = 10 \text{ મૂકતાં,}$$

(1)

$$\text{આપણી પાસે બહુલક} = 35 + \frac{2}{11} \times 10 = 36.81 \text{ વર્ષ}$$

(1)

નોંધ : વૈકલ્પિક સાચા ઉકેલ માટે પ્રોત્સાહન આપવું.



કુલ ગુણ : 80

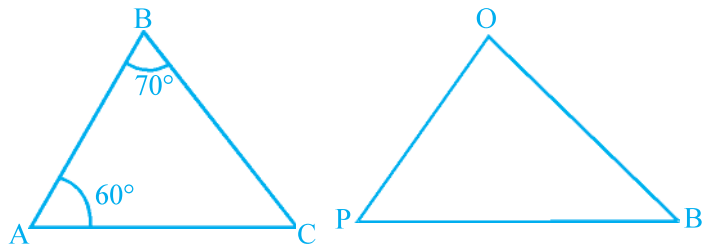
સમય : 3 કલાક

સામાન્ય સૂચનાઓ

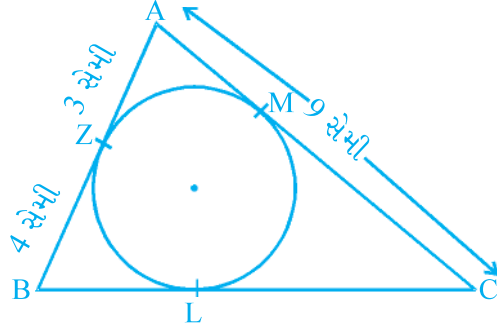
1. બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
2. પ્રશ્નપત્રના 30 પ્રશ્નોને ચાર વિભાગ A, B, C અને D માં વહેંચેલા છે. વિભાગ A માં પ્રત્યેક 1 ગુણનો હોય તે રીતના 10 પ્રશ્નો, વિભાગ B માં 2 ગુણ હોય તે રીતના 5 પ્રશ્નો, વિભાગ C માં પ્રત્યેક 3 ગુણનો હોય તે રીતના 10 પ્રશ્નો અને વિભાગ D માં પ્રત્યેક 6 ગુણના હોય તે રીતના 5 પ્રશ્નોનો સમાવેશ થાય છે.
3. સમગ્ર પ્રશ્નપત્રમાં વિકલ્પ આપવામાં આવ્યા નથી, પરંતુ 2 ગુણનો એક પ્રશ્ન, દરેક 3 ગુણના ત્રણ પ્રશ્નો અને દરેક 6 ગુણના બે પ્રશ્નો આંતરિક વિકલ્પો આપવામાં આવ્યા છે.
4. રચનાના પ્રશ્નમાં, આકૃતિ સ્વચ્છ અને આપેલ માપ પ્રમાણે દોરવી.
5. કેલક્યુલેટરનો ઉપયોગ કરી શકાશે નહિ.

વિભાગ A

1. એવો મહત્તમ ધન પૂર્ણાંક શોધો કે જેના વડે 318 અને 739 ને ભાગીએ તો શેષ અનુક્રમે 3 અને 4 રહે.
(A) 110 (B) 7 (C) 35 (D) 105
 2. નીચે આપેલા આલેખમાં બહુપદી $f(x)$ ના -2 અને 2 વચ્ચે કેટલાં શૂન્યો આવેલાં છે :
(A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 1
-
3. દ્વિઘાત સમીકરણ $3\sqrt{3}x^2 + 10x + \sqrt{3} = 0$ નો વિવેચક છે.
(A) 8 (B) 64 (C) $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (D) $-\sqrt{3}$
 4. જો $\frac{6}{5}$, a , 4 સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો a ની કિંમત છે.
(A) 1 (B) 13 (C) $\frac{13}{5}$ (D) $\frac{26}{5}$
 5. જો નીચેની આકૃતિમાં, $\triangle ABC \sim \triangle QPR$ હોય, તો $\angle Q$ નું માપ છે.
(A) 60° (B) 90° (C) 70° (D) 50°



6. આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે, વર્તુળ ΔABC નું અંતઃવૃત્ત હોય, તો BC ની લંબાઈ છે.
 (A) 7 સેમી (B) 8 સેમી (C) 9 સેમી (D) 10 સેમી



7. જો $\sin \theta = \frac{1}{3}$ હોય, તો $(9 \cot^2 \theta + 9)$ ની કિંમત છે.
 (A) 1 (B) 81 (C) 9 (D) $\frac{1}{81}$
8. એક શંકુના આડછેદના બે છેડાની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે 20 સેમી અને 11 સેમી છે અને તેની ઊંચાઈ 40 સેમી છે. તેની તિર્યક ઊંચાઈ છે.
 (A) 41 સેમી (B) $20\sqrt{5}$ સેમી (C) 49 સેમી (D) $\sqrt{521}$ સેમી
9. એક થેલીના 40 દડાઓમાં કેટલાક લાલ, કેટલાક ભૂરા અને બાકીના કાળા દડાઓ છે. જો લાલ દડો પસંદ કરવાની સંભાવના $\frac{11}{20}$ અને ભૂરો દડો પસંદ કરવાની સંભાવના $\frac{1}{5}$ હોય, તો થેલીમાં કાળા દડાની સંખ્યા છે.
 (A) 5 (B) 25 (C) 10 (D) 30
10. એક પછી એક એમ બે સિક્કા ઉછાળવામાં આવે ત્યારે વધુમાં વધુ એક વખત છાપ મળવાની સંભાવના છે.
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1

વિભાગ B

11. નીચેનામાંથી સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ કયું છે ? કારણ આપો.
 $3n + 1, 2n^2 + 3, n^3 + n$
12. બિંદુઓ $(-3, -3), (-3, 2)$ અને $(-3, 5)$ સમરેખ છે ? કારણ આપો.
13. બિંદુ D એ BC નું મધ્યબિંદુ હોય તેવા ABC અને BDE બે સમબાજુ ત્રિકોણો છે. ત્રિકોણ ABC અને ત્રિકોણ BDE ના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શું છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.
14. $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$ અને $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$, $0^\circ < A + B < 90^\circ$ અને $A - B > 0^\circ$. $\angle A$ અને $\angle B$ ની કિંમત શું છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

15. એક સિક્કો બે વખત ઉછાળો અને દરેક વખતે તેના પરિણામની નોંધ કરો. શું તમે કહી શકશો કે બે વખત સિક્કો ઉછાળતાં એક વખત જ છાપ મળે છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

અથવા

એક પાસાને એક વખત ઉછાળતાં અવિભાજ્ય સંખ્યા મળે તેની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે. આ સાચું છે ? તમારો ઉત્તર ચકાસો.

વિભાગ C

16. ધન પૂર્ણાંક q માટે, દર્શાવો કે અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંકના વર્ગનું સ્વરૂપ $8q + 1$ છે.

અથવા

ધન પૂર્ણાંક m અને n માટે, $\frac{357}{5000}$ સંમેય સંખ્યાના છેદને $2^m 5^n$ સ્વરૂપમાં લખો. તેનું ભાગાકારની ક્રિયા કર્યા વગર દશાંશ-સ્વરૂપમાં નિરૂપણ કરો.

17. જો $(x - 2)$ એ $x^3 + ax^2 + bx + 16$ નો એક અવયવ હોય અને $b = 4a$ હોય, તો a અને b ની કિંમત શોધો.

18. એક બાળકની 3 વર્ષ પહેલાંની ઉંમરનો વ્યસ્ત અને તેની 5 વર્ષ પછીની ઉંમરના વ્યસ્તની સંખ્યાઓનો સરવાળો $\frac{1}{3}$ છે. બાળકની હાલની ઉંમર શોધો.

અથવા

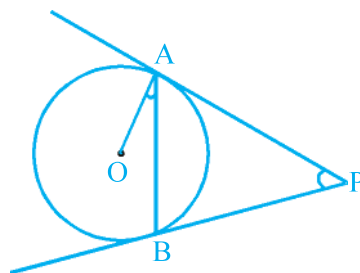
દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરી $6a^2x^2 - 7abx - 3b^2 = 0$, $a \neq 0$ નો x માટે ઉકેલ શોધો.

19. જે 7 વડે વિભાજ્ય હોય તેવી બે અંકોની તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો શોધો.

20. રેખા $x + 3y - 14 = 0$ એ બિંદુઓ A $(-2, 4)$ અને B $(3, 7)$ ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે ?

21. ચતુષ્કોણના ક્રમમાં શિરોબિંદુઓ $(-4, -2)$, $(-3, -5)$, $(3, -2)$ અને $(2, 3)$ હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

22. O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બહારના બિંદુ P માંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો PA અને PB દોરેલા છે. સાબિત કરો કે $\angle APB = 2\angle OAB$. (નીચેની આકૃતિ જુઓ).



23. 3 સેમી, 5 સેમી અને 7 સેમી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરી તથા પછી આ ત્રિકોણની બાજુઓને અનુરૂપ $\frac{5}{3}$ ગણી બાજુવાળા ત્રિકોણની રચના કરો.

24. સાબિત કરો કે, $(1 + \cot\theta + \tan\theta)(\sin\theta - \cos\theta) = \frac{\sec\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta} - \frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sec^2\theta}$.

અથવા

કિંમત શોધો : $\frac{\cos^2 32^\circ + \cos^2 58^\circ}{\sec^2 50^\circ - \cot^2 40^\circ} - 4 \tan 13^\circ \tan 37^\circ \tan 53^\circ \tan 77^\circ$

25. એક સમબાજુ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $49\sqrt{3}$ સેમી² છે. ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈથી અડધી લંબાઈની ત્રિજ્યાવાળા અને પ્રત્યેક શિરોબિંદુ કેન્દ્ર હોય તેવાં વર્તુળ દોર્યાં છે. વર્તુળમાં સમાવેશ ન થયા હોય તેવા ત્રિકોણના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

$[\sqrt{3}=1.73, \text{ અને } \pi=\frac{22}{7}]$

વિભાગ D

26. એક થેલીમાં સફેદ અને લાલ દડાઓ છે. સફેદ દડાના અડધા એ લાલ દડાના એક તૃતીયાંશ બરાબર છે. કુલ દડાના બમણા એ લાલ દડાના ત્રણ ગણાથી 8 વધારે છે. થેલીમાં દરેક પ્રકારના કેટલા દડાઓ રહેલા છે ?

27. કાટકોણ ત્રિકોણના, કર્ણનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે તેમ સાબિત કરો.

ઉપરના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી, ત્રિકોણ ABC માં જો $AD \perp BC$ હોય, તો સાબિત કરો કે $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

28. એક ટાવરની ટોચ પર 5 મીટરનો થાંભલો સ્થિત છે. જમીન પરના બિંદુ A થી થાંભલાની ટોચનો ઉત્સેધકોણ 60° છે, થાંભલાના તળિયાથી બિંદુ A નો અવસેધકોણ 45° છે, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો. ($\sqrt{3} = 1.73$ લો.)

29. એક મકાનનો અંદરનો ભાગ 4 મીટર વ્યાસ અને 3.5 મીટર ઊંચાઈ ધરાવતો નળાકાર છે. આ નળાકાર પર નળાકારને સમાન આધાર હોય તથા જેનો શિરઃકોણ કાટકોણ હોય તેવો શંકુ ગોઠવેલો છે. આ આકૃતિનું વક્ર પૃષ્ઠફળ અને મકાનના અંદરના ભાગનું ઘનફળ શોધો.

અથવા

એક વાસણ ઊંધા શંકુ આકારનું છે. તેની ઊંચાઈ 8 સેમી અને ઉપરના ખુલ્લા ભાગની ત્રિજ્યા 5 સેમી છે. તેની ઉપરની ધાર સુધી પાણીથી ભરેલું છે. જ્યારે વાસણમાં 0.5 સેમી ત્રિજ્યાવાળી ધાતુની ગોળીઓ નાખવામાં આવે છે ત્યારે એક ચતુર્થાંશ જેટલું પાણી બહાર નીકળે છે, તો વાસણમાં નાખેલી ધાતુની ગોળીઓની સંખ્યા શોધો.

30. નીચે આપેલા આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટક પરથી મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો :

વર્ગ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
આવૃત્તિ	4	5	7	10	12	8	4

અથવા

નીચેનું વિતરણ એક કારખાનાના 50 કર્મચારીઓનું દૈનિક વેતન દર્શાવેલ છે :

દૈનિક વેતન (₹ માં)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
કામદારોની સંખ્યા	12	14	8	6	10

ઉપરના વિતરણને 'થી ઓછા પ્રકાર'નાં સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવો અને તેનો 'ઓજીવ' દોરો. ઓજીવ પરથી મધ્યસ્થ શોધો.

મૂલ્યાંકન-પદ્ધતિ
વિભાગ A

ગુણ

1. D 2. A 3. B 4. C 5. A
6. D 7. B 8. A 9. C 10. C

(1 × 10 = 10)

વિભાગ B

11. n મું પદ $3n + 1$,

કારણ કે સમાંતર શ્રેણીનું n મું પદ માત્ર n ના સંદર્ભમાં સુરેખ હોઈ શકે.

12. હા

રેખા $x = -3$ પર ત્રણેય બિંદુઓ આવેલાં છે.

13. 4 : 1

$$\frac{\text{ar} (ABC)}{\text{ar} (BDE)} = \frac{BC^2}{BD^2} = \frac{BC^2}{\left[\frac{1}{2}(BC)\right]^2} = \frac{4}{1}$$

14. $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 15^\circ$

$A + B = 60^\circ$ અને $A - B = 30^\circ$ ઉકેલતાં, આપણને $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 15^\circ$ મળે.

15. ના

છાપ આવે પણ ખરી અને છાપ ન પણ આવે. ઉછાળતી વખતે બે શક્યતા સમાન રીતે રહેલી છે.

$(1\frac{1}{2})$

$(1\frac{1}{2})$

અથવા

ના

$(1\frac{1}{2})$

$$P (\text{અવિભાજ્ય સંખ્યા}) = P (2, 3, 5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

વિભાગ C

16. અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંકનું સ્વરૂપ $4n + 1$ અથવા $4n + 3$ (1)

$$\therefore (4n + 1)^2 = 16n^2 + 8n + 1 = 8(2n^2 + n) + 1 = 8q + 1 \quad (1)$$

$$(4n + 3)^2 = 16n^2 + 24n + 9 = 8(2n^2 + 3n + 1) + 1 = 8q + 1 \quad (1)$$

અથવા

$$\frac{357}{5000} = \frac{357}{2^3 \times 5^4} \quad (1)$$

$$= \frac{357 \times 2}{2^4 \times 5^4} = \frac{714}{(10)^4} = 0.0714 \quad (1)$$

17. $x^3 + ax^2 + bx + 16$ નો એક અવયવ $(x-2)$ છે.

$$\therefore (2)^3 + a(2)^2 + b(2) + 16 = 0 \quad (1)$$

$$4a + 2b + 24 = 0 \text{ અથવા } 2a + b + 12 = 0 \quad (1)$$

$$b = 4a \text{ આપેલ છે, તેથી } a = -2 \quad (1)$$

$$\text{અને } b = -8$$

18. ધારો કે બાળકની હાલની ઉંમર x વર્ષ છે. (1)

$$\therefore \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{3}$$

$$\text{અથવા } 3 [(x + 5) + (x - 3)] = (x - 3)(x + 5)$$

$$\text{અથવા } 6x + 6 = x^2 + 2x - 15$$

$$\text{અથવા } x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$\text{અથવા } (x - 7)(x + 3) = 0 \quad (1)$$

એટલે કે $x = 7$, કારણ કે $x = -3$ (શક્ય નથી.)

તેથી બાળકની હાલની ઉંમર = 7 વર્ષ છે. (1)

અથવા

$$6a^2x^2 - 7abx - 3b^2 = 0$$

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= [(-7ab)^2 - 4(6a^2)(-3b^2)] \\ &= 49a^2b^2 + 72a^2b^2 = 121a^2b^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{તેથી, } x = \frac{-(-7ab) \pm 11ab}{12a^2} \quad (1)$$

$$= \frac{18ab}{12a^2} \text{ અથવા } \frac{-4ab}{12a^2}$$

$$= \frac{3b}{2a} \text{ અથવા } -\frac{b}{3a} \quad (1)$$

19. સંખ્યાઓ

$$14, 21, \dots, 98 \quad (1)$$

$$98 = 14 + (n - 1) 7, \text{ તેથી, } n = 13 \quad (1)$$

$$S_{13} = \frac{13}{2} [14 + 98] = 728 \quad (1)$$

20. ધારો કે રેખા $x + 3y - 14 = 0$ એ $k : 1$ ગુણોત્તરમાં રેખાખંડનું C (x, y) બિંદુએ વિભાજન કરે છે.

$$\therefore x = \frac{3k - 2}{k + 1}, y = \frac{7k + 4}{k + 1} \quad (1)$$

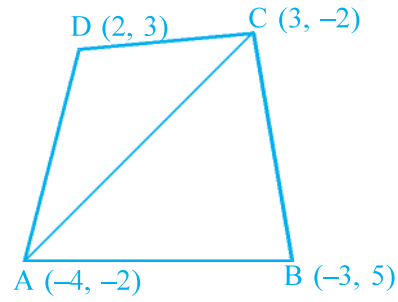
$$\text{અને } \frac{3k - 2}{k + 1} + 3 \cdot \frac{7k + 4}{k + 1} - 14 = 0 \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{એટલે કે, } 3k - 2 + 21k + 12 - 14k - 14 = 0$$

$$\text{એટલે કે, } 10k - 4 = 0$$

$$\text{એટલે કે, } k = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

તેથી ગુણોત્તર 2 : 5 છે.



21. ΔABC નું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2} [-4(-5 + 2) - 3(-2 + 2) + 3(-2 + 5)]$$

$$= \frac{1}{2} [12 + 9] = \frac{21}{2} \text{ ચોરસ એકમ} \quad (1)$$

$$\Delta ACD \text{નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} [-4(-2 - 3) + 3(3 + 2) + 2(-2 + 2)]$$

$$= \frac{1}{2} [20 + 15] = \frac{35}{2} \text{ ચોરસ એકમ} \quad (1)$$

$$\therefore \text{ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{21 + 35}{2} = \frac{56}{2} = 28 \text{ ચોરસ એકમ} \quad (1)$$

22. $AP = PB$. તેથી, $\angle PAB = \angle PBA = \frac{1}{2} [180^\circ - \angle APB]$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \angle APB \quad (1)$$

$$\angle OAB = 90^\circ - \angle PAB \quad (1)$$

$$= 90^\circ - [90^\circ - \frac{1}{2} \angle APB] = \frac{1}{2} \angle APB$$

$$\text{એટલે કે, } 2 \angle OAB = \angle APB \quad (1)$$

23. ત્રિકોણની રચના સાચી છે. બાજુઓ 3, 5 અને 7 સેમી (1)

સમરૂપ ત્રિકોણની રચના સાચી છે. (2)

$$24. ડા.બા. = \left(1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right) (\sin \theta - \cos \theta) \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) (\sin \theta - \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad \left(1\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{\sec \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta} - \frac{\operatorname{cosec} \theta}{\sec^2 \theta} \quad (1)$$

અથવા

$$\cos^2 58^\circ = \sin^2 32^\circ, \quad \tan 53^\circ = \cot 37^\circ$$

$$\sec^2 50^\circ = \operatorname{cosec}^2 40^\circ, \quad \tan 77^\circ = \cot 13^\circ \quad (2)$$

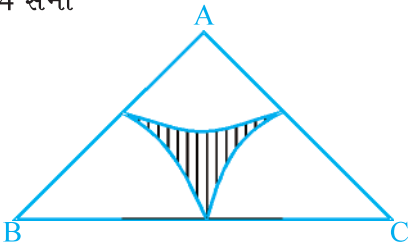
આપેલ સ્વરૂપ

$$= \frac{\cos^2 32^\circ + \sin^2 32^\circ}{\operatorname{cosec}^2 40^\circ - \cot^2 40^\circ} - 4 \tan 13^\circ \tan 37^\circ \cot 37^\circ \cot 13^\circ \quad (1)$$

$$= 1 - 4 = -3$$

$$25. \Delta ABC \text{નું ક્ષેત્રફળ} = 49\sqrt{3} \text{ સેમી}^2 = \sqrt{3} \frac{a^2}{4}$$

તેથી, $a = 14$ સેમી (1)



$$\text{વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ} = \pi \times 7^2 \times \frac{60}{360} = \frac{49\pi}{6} \quad (1)$$

$$\text{માંગેલ ક્ષેત્રફળ} = 49\sqrt{3} - \frac{3 \times 49}{6} \times \left(\frac{22}{7}\right)$$

$$= 49\sqrt{3} - 77$$

$$= 84.77 - 77 = 7.77 \text{ સેમી}^2 \quad (1)$$

વિભાગ D

26. ધારો કે, સફેદ દડાની સંખ્યા x અને લાલ દડાની સંખ્યા y છે.

તેથી, $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y$ એટલે કે, $3x - 2y = 0$ (I) $(\frac{1}{2})$

અને $2(x + y) = 3y + 8$

એટલે કે, $2x - y = 8$ (II) $(\frac{1}{2})$

(I) અને (II)ને ઉકેલતાં, $x = 16, y = 24$ મળે. (2)

તેથી સફેદ દડાઓની સંખ્યા = 16 (1)

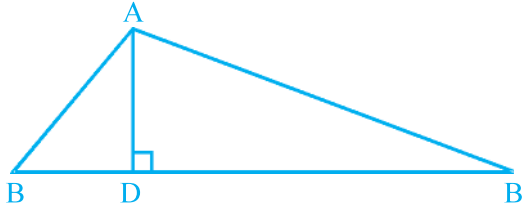
લાલ દડાઓની સંખ્યા = 24

27. સાચા પક્ષ, સાધ્ય, રચના અને સાબિતી માટે $(\frac{1}{2} \times 4 = 2)$

સાચી સાબિતી માટે (2)

$AD^2 = AB^2 - BD^2$ $(\frac{1}{2})$

અને $AD^2 = AC^2 - CD^2$



$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ $(\frac{1}{2})$

અથવા $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ $(\frac{1}{2})$

28. સાચી આકૃતિ માટે (1)

ધારો કે ટાવરની ઊંચાઈ h મીટર અને $AB = x$ મીટર. $(\frac{1}{2})$

$\therefore \frac{x}{h} = \cot 45^\circ = 1$ (1)

$\therefore x = h$ $(\frac{1}{2})$

પણ $\frac{h + 5}{x} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ (1)

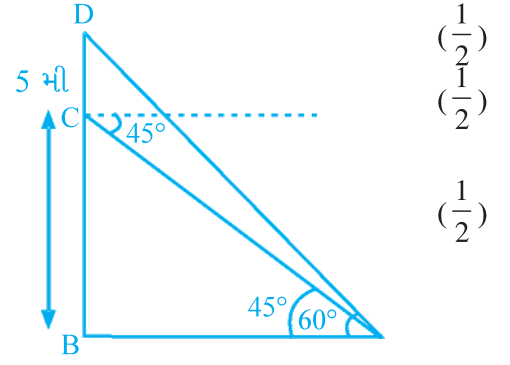
$$\text{એટલે કે, } h + 5 = \sqrt{3}x = \sqrt{3}h$$

$$\text{એટલે કે, } (\sqrt{3}-1)h = 5$$

$$h = \frac{5}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{5(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{5(2.73)}{2}$$

$$= \frac{13.65}{2} = 6.825 \text{ મી}$$



(1/2)

(1/2)

(1/2)

(1)

29. સાચી આકૃતિ માટે

(1/2)

અહીં, $\angle Q = 45^\circ$, શંકુની ઊંચાઈ = ત્રિજ્યા = 2 મી

(1)

$$\therefore \text{વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = \pi r l + 2\pi r h$$

$$= \pi r (l + 2h)$$

(1)

$$= \pi \times 2 \times (2\sqrt{2} + 7)$$

(1/2)

$$= (14 + 4\sqrt{2}) \pi \text{ મી}^2$$

(1)

$$\text{ઘનફળ} = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h$$

(1/2)

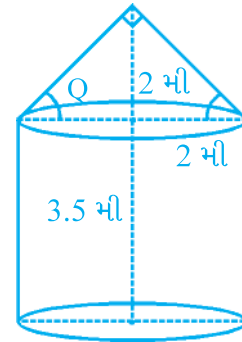
$$= \pi r^2 \left[\frac{h_1}{3} + h \right]$$

$$= \pi \times 4 \times \left[\frac{2}{3} + 3.5 \right] = 4\pi \left[\frac{2+10.5}{3} \right]$$

(1/2)

$$= \frac{50\pi}{3} \text{ મી}^3$$

(1)



અથવા

$$\text{પાણીનું ઘનફળ} = \frac{1}{3}\pi \times (5)^2 \times 8$$

(1/2)

$$= \frac{200\pi}{3} \text{ સેમી}^3$$

(1)

$$\therefore \frac{1}{4} \text{ ઘનફળ} = \frac{50\pi}{3} \text{ સેમી}^3$$

(1)

$$\text{ઘાતુની એક ગોળીનું ઘનફળ} = \frac{4}{3}\pi(0.5)^3 = \frac{0.5\pi}{3} \text{ સેમી}^3 \quad (1\frac{1}{2})$$

ધારો કે ગોળીની સંખ્યા n છે.

$$\therefore \frac{0.5\pi}{3} \times n = \frac{50\pi}{3} \quad (1)$$

$$\therefore n = 100 \quad (1)$$

વર્ગ અંતરાલ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	કુલ
f_i	4	5	7	10	12	8	4	50
x_i	5	15	25	35	45	55	65	
u_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	
$f_i u_i$	-12	-10	-7	0	12	16	12	11
cf	4	9	16	26	38	46	50	

(1 $\frac{1}{2}$)

$$\sum f_i = 50$$

$$\sum f_i u_i = 11$$

$$\text{મધ્યક} = 35 + \frac{11}{50} \times 10 = 35 + 2.2 = 37.2 \quad (1)$$

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h \quad (1\frac{1}{2})$$

$$= 30 + \frac{25-16}{10} \times 10 = 30 + 9 = 39 \quad (1)$$

$$\text{બહુલક} = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h \quad (1\frac{1}{2})$$

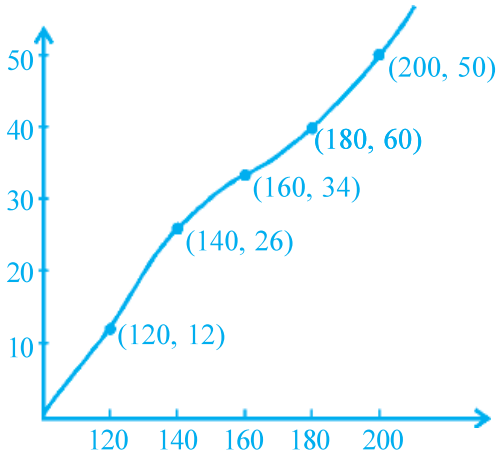
$$= 40 + \frac{12-10}{24-10-8} \times 10 \quad (1\frac{1}{2})$$

$$= 40 + \frac{20}{6} = 43.33 \quad (1)$$

અથવા

આ પ્રમાણે લખી શકાય.

દૈનિક આવક (₹ માં)	cf
120 થી ઓછી	12
140 થી ઓછી	26
160 થી ઓછી	34
180 થી ઓછી	40
200 થી ઓછી	50



(5)

આવકની ઊર્ધ્વસીમા (₹ માં)
મધ્યસ્થ = (આશરે) 138 ₹

નોંધ : વૈકલ્પિક સાચા ઉકેલ માટે પ્રોત્સાહન આપવું.



પ્રશ્નપત્રનું પરિરૂપ (GSEB)
ગણિત, ધોરણ X

સમય : 3 કલાક

કુલ ગુણ : 80

નોંધ : આ પરિરૂપ વિદ્યાર્થીઓ, શિક્ષકો, પ્રાચીકો, મોડરેટર્સ વગેરેના માર્ગદર્શન માટે છે. જે-તે વિષયોના પ્રાચીક તેમજ મોડરેટર્સને માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણના બૃહદ્ હાર્દ/ઉદ્દેશને સુસંગત રહી પ્રશ્નપત્રની સંરચના બાબતે ફેરફાર કરવાની છૂટ રહેશે.

હેતુઓ પ્રમાણે ગુણભાર :

હેતુઓ	જ્ઞાન (K)	સમજ (U)	ઉપયોજન (A)	ઉચ્ચ વૈચારિક કૌશલ્ય		કુલ
				સંયોજન/વિશ્લેષણ	અનુમાન/મૂલ્યાંકન	
ગુણ	27	25	20	04	04	80
ટકા	34	31	25	5	5	100

પ્રશ્નના પ્રકાર પ્રમાણે ગુણભાર :

ક્રમાંક	પ્રશ્નનો પ્રકાર	પ્રશ્નોની સંખ્યા	કુલ ગુણ
1.	હેતુલક્ષી પ્રશ્નો (O)	16	16
2.	ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (SA-I)	10	20
3.	ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો (SA-II)	08	24
4.	લાંબા પ્રશ્નો (LA)	05	20
	કુલ	39	80

પ્રકરણ પ્રમાણે ગુણભાર :

ક્રમ	પાઠ/પ્રકરણનું નામ	ગુણભાર
1.	વાસ્તવિક સંખ્યાઓ	04
2.	બહુપદીઓ	06
3.	દ્વિયલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ	08
4.	દ્વિઘાત સમીકરણ	06
5.	સમાંતર શ્રેણી	04
6.	ત્રિકોણ	06
7.	યામ ભૂમિતિ	04
8.	ત્રિકોણમિતિનો પરિચય	06
9.	ત્રિકોણમિતિના ઉપયોગ	04
10.	વર્તુળ	06
11.	રચના	04
12.	વર્તુળ સંબંધિત ક્ષેત્રફળ	04
13.	પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ	08
14.	આંકડાશાસ્ત્ર	06
15.	સંભાવના	04
	કુલ	80

પ્રશ્નપત્રનું પરિરૂપ (GSEB)

ગણિત ધોરણ X

વાર્ષિક પરીક્ષા

સમય : 3 કલાક

કુલ ગુણ : 80

વિભાગ A (હેતુલક્ષી પ્રશ્નો)

- પ્રશ્નક્રમ 1 થી 16 (16 પ્રશ્નો) (દરેક સાચા ઉત્તરનો 1 ગુણ રહેશે.) [16]
 - બધા પ્રશ્નો ફરજિયાત રહેશે.
 - આ વિભાગમાં હેતુલક્ષી પ્રશ્નો જેવા કે MCQ (બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો), MRQ (એક કરતાં વધારે ઉત્તરવાળા MCQ, ખરાં-ખોટાં વિધાનો, ખાલી જગ્યા, વ્યાખ્યા, સૂત્ર, એકમો, અતિ ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો, એક શબ્દ કે એક વાક્યમાં જવાબ આપો, પૂરું નામ આપો, આપેલા શબ્દો પૈકી અસંગત ઓળખો, ક્રમમાં ગોઠવો, આલેખ આધારિત પ્રશ્ન, જોડકાં વગેરે પ્રકારના પ્રશ્નો પૂછી શકાય.
- કોઈ પણ પ્રકારના પ્રશ્નો 2 કે 3 થી વધી ન જાય તેની કાળજી લેવી.

વિભાગ B (ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો)

- પ્રશ્નક્રમાંક-17 થી 26 (10 પ્રશ્નો) (દરેક સાચા ઉત્તરના 2 ગુણ રહેશે.) [20]
- કોઈ પણ 4 પ્રશ્નોમાં આંતરિક વિકલ્પ આપવો.

વિભાગ C (ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો)

- પ્રશ્નક્રમ 27 થી 34 (8 પ્રશ્નો) (દરેક સાચા ઉત્તરના 3 ગુણ રહેશે.) [24]
- કોઈ પણ 3 પ્રશ્નોમાં આંતરિક વિકલ્પ આપવો.

વિભાગ D (વિસ્તૃત પ્રશ્નો)

- પ્રશ્નક્રમ 35 થી 39 (5 પ્રશ્નો) (દરેક સાચા ઉત્તરના 4 ગુણ રહેશે.) [20]
- કોઈ પણ 2 પ્રશ્નોમાં આંતરિક વિકલ્પ આપવો.

- નોંધ :** (1) પ્રથમ પરીક્ષા માટે પ્રથમ પરીક્ષા સુધીનો અભ્યાસક્રમ લેવાનો રહેશે. જેનું પરિરૂપ વાર્ષિક પરીક્ષાના પરિરૂપ પ્રમાણે 80 ગુણનું રહેશે.
- (2) ત્રિવિમિનરી પરીક્ષામાં સંપૂર્ણ અભ્યાસક્રમ આવરી લેવાનો રહેશે અને તેનું પરિરૂપ વાર્ષિક પરીક્ષાના પરિરૂપ પ્રમાણેનું 80 ગુણનું રહેશે.

વિધાન સાચું બને તે પ્રમાણે ખાલી જગ્યા પૂરો :

9. જો સમીકરણ $10x + 11y = 3k$ નો એક ઉકેલ $(1, 1)$ હોય, તો $k = \dots\dots\dots$.

10. બિંદુઓ A $(4, 0)$ અને B $(0, -3)$ વચ્ચેનું અંતર $AB = \dots\dots\dots$.

11. જો $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ હોય, તો $\tan^2 \theta + 1 = \dots\dots\dots$.

12. વર્તુળ અને સ્પર્શકના સામાન્ય બિંદુને $\dots\dots\dots$ કહે છે.

એક વાક્ય, શબ્દ કે આંકડામાં ઉત્તર આપો :

13. બે ત્રિજ્યાઓ વર્તુળમાં પરસ્પર લંબ હોય, તો તેનાથી બનતા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

14. 14 સેમી વ્યાસવાળા અર્ધગોળાનું ઘનફળ શોધો.

15. જો $P(E) = 0.281$ તો $P(\bar{E})$ શોધો.

16. 52 પત્તાંને સરખી રીતે ચીપી તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક રાજા પસંદ કરવાની સંભાવના શોધો.

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોની ગણતરી કરી ઉત્તર આપો : (17 થી 26) (પ્રત્યેક પ્રશ્નના 2 ગુણ)

[20]

17. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે તેમ સાબિત કરો.

18. યુક્લિડની ભાગપ્રવિધિનો ઉપયોગ કરી 847 અને 2160 નો ગુ.સા.અ. શોધો.

19. જે દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યોનો સરવાળો $-2\sqrt{3}$ અને શૂન્યોનો ગુણાકાર -9 હોય તેવી દ્વિઘાત બહુપદીનાં શૂન્યો મેળવો.

20. જો $2x + y = 23$ અને $4x - y = 19$ હોય, તો $5y - 2x$ ની કિંમત શોધો :

અથવા

20. $x - 2y = 300$ અને $6x - y - 95 = 0$ નો ઉકેલ લોપની રીતથી શોધો.

21. જો $\sin \theta = \frac{12}{13}$ હોય, તો $\tan^2 \theta - 1$ શોધો :

22. કિંમત શોધો : $2 \sin^2 60^\circ + 3 \cos^2 30^\circ - \tan^2 30^\circ$

અથવા

22. સાબિત કરો : $(\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + 1) \operatorname{cosec}^2 \theta = 2$

23. જો કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ a , b અને c છે. c એ કર્ણનું માપ છે, r ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ તેની

અંદરની બાજુએ સ્પર્શે, તો સાબિત કરો કે $r = \frac{a+b-c}{2}$ થાય.

અથવા

24. નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણનો બહુલક શોધો :

વર્ગ	200-201	201-202	202-203	203-204	204-205	205-206
આવૃત્તિ	12	26	20	9	2	1

25. બે ક્રમિક યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 224 હોય, તો સંખ્યાઓ શોધો.

26. એક કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણો બનાવતી બે બાજુઓની લંબાઈનો ધન તફાવત 3 સેમી છે. જો ત્રિકોણની પરિમિતિ 36 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

અથવા

26. $6x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 0$ નાં બીજ મેળવો.

વિભાગ C

માગ્યા પ્રમાણે ગણતરી કરી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો : (27 થી 34) (પ્રત્યેક પ્રશ્નના 3 ગુણ) [24]

27. જો $x - \sqrt{5}$ એ ત્રિઘાત બહુપદી $x^3 - 3\sqrt{5}x^2 + 13x - 3\sqrt{5}$ નો એક અવયવ છે, તો તેનાં શૂન્યો શોધો.

28. $\frac{1}{2x-3} + \frac{1}{x-5} = 1$, $x \neq \frac{3}{2}$, $x \neq 5$ નાં બીજ શોધો :

29. સમાંતર શ્રેણી : 31, 28, 25,... નું કોઈ પદ 0 છે ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

અથવા

30. જો ત્રિકોણ PQRનાં શિરોબિંદુઓ $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $Q(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ અને $R(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ હોય, તો ત્રિકોણ PQRનો પ્રકાર જણાવો.

31. નીચે આપેલા આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યક શોધો :

વર્ગ	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
આવૃત્તિ	3	10	11	8	3

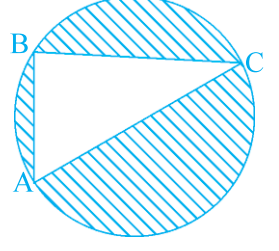
અથવા

31. નીચે આપેલા આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યસ્થ શોધો :

વર્ગ	20	25	28	29	33	38	42	43
આવૃત્તિ	6	20	24	28	15	4	2	1

32. સાબિત કરો કે વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.

33. AB વ્યાસવાળા એક વર્તુળમાં AC = 6 સેમી અને BC = 8 સેમી છે. આકૃતિમાં દર્શાવેલા રેખાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)



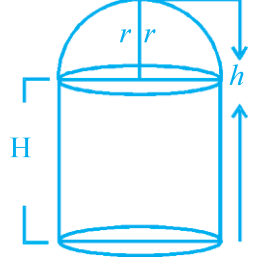
34. 6 સેમી, 8 સેમી અને 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ધાતુના ગોળાઓને ઓગાળીને એક મોટો નક્કર ગોળો બનાવવામાં આવે છે, તો આ રીતે બનતા ગોળાની ત્રિજ્યા શોધો.

અથવા

34. એક નળાકાર મકાનની છત અર્ધગોલક ડોમથી બંધ કરવામાં આવી છે.

(આકૃતિમાં જુઓ.) અર્ધગોલક ડોમનો વ્યાસ નળાકાર મકાનની ઊંચાઈ કરતાં $\frac{2}{3}$

ગણો છે. જો તેમાં $67 \frac{1}{21}$ મી³ હવા સમાતી હોય, તો મકાનની ઊંચાઈ શોધો.



વિભાગ D

માગ્યા પ્રમાણે ગણતરી કરી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો : (35 થી 39) (પ્રત્યેક પ્રશ્નના 4 ગુણ)

[20]

35. 7 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ દોરી તેનું 3:5 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતું બિંદુ P શોધો અને રચનાના મુદ્દા લખો.

અથવા

35. 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના એવા સ્પર્શકોની રચના કરો કે જેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ 60° થાય. રચનાના મુદ્દા લખો.
36. એક ગાડીના સામાન્ય વેગમાં 5 કિમી/કલાકનો વધારો થાય તો 360 કિમીનું અંતર કાપતાં તેને 48 મિનિટ ઓછો સમય લાગે, તો ગાડીના સામાન્ય વેગનું મૂલ્ય શોધો.
37. જમીન પર આવેલ એક બિંદુથી 20 મીટર ઊંચી ઈમારતની ટોચ પર રહેલ એક સંચાર ટાવરના તળિયા અને ટોચના ઉત્સેધકોણનાં માપ અનુક્રમે 45° અને 60° હોય, તો ટાવરની ઊંચાઈ શોધો.
38. ધાતુના લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ 20 સેમી તથા શિર:કોણ 60° છે. પાયાને સમાંતર સમતલથી તેના ઊંચાઈના બે સમાન ભાગ થાય તે રીતે શંકુને કાપવામાં આવ્યો છે. જો આડછેદનું $\frac{1}{16}$ સેમી વ્યાસવાળા તાર-સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરવામાં આવે, તો તારની લંબાઈ શોધો.
39. સાબિત કરો કે, કાટકોણ ત્રિકોણમાં, કર્ણનો વર્ગ બાકીની બે બાજુઓના વર્ગના સરવાળા જેટલો હોય છે.

ઉત્તરો

- | | | | | | |
|----------------------------------|------------------------------|------------|--------------------|-------------------------|------------------------|
| 1. અસત્ય | 2. સત્ય | 3. સત્ય | 4. અસત્ય | 5. (C) $\rightarrow 15$ | 6. (C) $\rightarrow 0$ |
| 7. (B) $\rightarrow \frac{1}{6}$ | 8. (A) $\rightarrow 20$ | 9. $k = 7$ | 10. AB = 5 | 11. $\frac{4}{3}$ | 12. સ્પર્શબિંદુ |
| 13. $\frac{\pi r^2}{4}$ | 14. 718.67 સેમી ³ | 15. 0.719 | 16. $\frac{1}{13}$ | | |

18. ગુ.સા.અ. = 1 19. $-3\sqrt{3}, \sqrt{3}$

20. 31 અથવા 20. $(-10, -155)$

21. $\frac{94}{25}$

23. $\frac{41}{12}$

24. 201.7 કિગ્રા

25. 13, 17

26. 60 સેમી અથવા 26. $\frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ 27. $\sqrt{5} - \sqrt{2}, \sqrt{5} + \sqrt{2}$ 28. $4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$

29. ના

30. સમબાજુ ત્રિકોણ 31. 69.43 % અથવા 31. 28.5 33. 26.24 સેમી²

34. 12 સેમી અથવા 34. 6 મીટર 36. 45 કિમી/કલાક 37. $20(\sqrt{3}-1)$ મીટર 38. 796444.44 સેમી અથવા

38. 7964.4 મીટર



જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. C
2. D
3. C
4. B
5. A
6. B
7. C
8. A
9. D
10. D

સ્વાધ્યાય 1.2

1. ના, કારણ કે, કોઈ પણ પૂર્ણાંકને $4q, 4q+1, 4q+2, 4q+3$ સ્વરૂપે લખી શકાય.
2. સત્ય, કારણ કે $n(n+1)$ હંમેશાં યુગ્મ છે, તેમાંથી n અથવા $(n+1)$ એક યુગ્મ હોવો જોઈએ.
3. સત્ય, કારણ કે $n(n+1)(n+2)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે. ઓછામાં ઓછો એક અવયવ 2 વડે વિભાજ્ય છે અને ઓછામાં ઓછો એક અવયવ 3 વડે વિભાજ્ય છે.
4. ના, કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક $3q, 3q+1, 3q+2$ તરીકે લખી શકાય.
તેથી તેના વર્ગ $9q^2 = 3m, 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1 = 3m + 1, 9q^2 + 12q + 3 + 1 = 3m + 1$.
5. ના, $(3q + 1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1 = 3m + 1$.
6. ગુ.સા.અ. = 75, જ્યાં ગુ.સા.અ. એટલે ગુરુતમ સામાન્ય અવયવ.
7. $3 \times 5 \times 7 + 7 = 7(3 \times 5 + 1) = 7(16)$, જ્યાં બેથી વધુ અવયવો છે.
8. ના, કારણ કે ગુ.સા.અ. 18 વડે લ.સા.અ. 380 ને ભાગી ન શકીએ.
9. દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત, કારણ કે $\frac{987}{10500} = \frac{47}{500}$ અને $500 = 5^3 \times 2^2$

$$\left[\frac{987}{10500} = \frac{329}{3500} = \frac{329}{2^2 \cdot 5^3 \cdot 7} = \frac{47}{2^2 \cdot 5^3} = 0.094. \right]$$

10. જ્યાં 327, 7081 નું દશાંશ નિરૂપણ સાત્ત. તેથી q નું સ્વરૂપ $2^m \cdot 5^n$ હોવું જોઈએ. જ્યાં m, n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

8. 63 9. 625 12. 2520 સેમી 13. $2^3 \cdot 5^4, 0.0514$

સ્વાધ્યાય 2.1

1. A 2. C 3. D 4. D 5. B
6. A 7. B 8. A 9. C 10. A 11. D

સ્વાધ્યાય 2.2

1. (i) ના (ii) $0, ax^2 + bx + c$ (iii) $p(x)$ ની ઘાત $< g(x)$ ની ઘાત
(iv) $g(x)$ ની ઘાત $\leq p(x)$ ની ઘાત (v) ના
2. (i) અસત્ય (ii) અસત્ય (iii) સત્ય (iv) સત્ય (v) સત્ય (vi) અસત્ય (vii) અસત્ય

સ્વાધ્યાય 2.3

1. $1, -\frac{1}{4}$ 2. $\frac{2}{3}, -2$ 3. $-1, \frac{-7}{5}$ 4. $0, -3, 5$ 5. $\frac{-3}{2}, \frac{-1}{4}$
6. $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}$ 7. $\frac{1}{2}, \sqrt{2}$ 8. $\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$ 9. $-2\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{2}$ 10. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{7}$

સ્વાધ્યાય 2.4

1. (i) $-2, \frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{2}, \frac{1}{8}$ (iii) $-3\sqrt{3}, \sqrt{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{2}$

2. $a = -1$ અને $b = 3$ અથવા $a = 5, b = -3$. શૂન્યો $-1, 2, 5$ છે.

3. $\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ 4. $k = -3$

$2x^4 + x^3 - 14x^2 + 5x + 6$ નાં શૂન્યો $1, -3, 2, -\frac{1}{2}$ છે.

$x^2 + 2x - 3$ નાં શૂન્યો $1, -3$ છે.

5. $\sqrt{5}, \sqrt{5} + \sqrt{2}, \sqrt{5} - \sqrt{2}$ 6. $a = -1, b = -2$

1 અને 2 $q(x)$ નાં શૂન્યો છે જ્યારે $p(x)$ નાં શૂન્યો નથી.

સ્વાધ્યાય 3.1

1. D 2. D 3. C 4. D 5. D 6. C 7. C 8. A 9. D
10. D 11. C 12. D 13. C

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (i) હા (ii) ના (iii) ના
2. (i) ના (ii) હા (iii) ના
3. (i) ના (ii) હા (iii) હા (iv) ના
4. સત્ય છે. 5. અસત્ય 6. અસત્ય

સ્વાધ્યાય 3.3

1. (i) $\lambda = -1$ (ii) $\lambda = 1$ (iii) ± 1 સિવાય λ ની બધી વાસ્તવિક કિંમત
2. $k = -6$ 3. $a = 3, b = 1$
4. (i) 10 સિવાયની p ની બધી વાસ્તવિક સંખ્યા (ii) $p = 1$
 (iii) $\frac{9}{10}$ સિવાયની $p(x)$ ની બધી વાસ્તવિક કિંમતો (iv) (-4) સિવાયની p ની વાસ્તવિક કિંમતો
 (v) $p = 4, q = 8$
5. એકબીજાને છેદતી નથી.
6. $x - y = -4$
 $2x + 3y = 7$; અનંત કમયુક્ત જોડ
7. $31, \frac{-5}{7}$ 8. $x = 1, y = 4$
9. (i) $x = 1.2, y = 2.1$ (ii) $x = 6, y = 8$ (iii) $x = 3, y = 2$
 (iv) $x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{4}$ (v) $x = 1, y = -1$ (vi) $x = a^2, y = b^2$
 (vii) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{-3}{2}$
10. $x = 340, y = -165; \lambda = -\frac{1}{2}$
11. (i) સુસંગત; $x = -1, y = -1$ (ii) સુસંગત નથી.
 (iii) સુસંગત, $y = 3 - x$, ઉકેલ આપે છે. જ્યાં x ની કોઈ પણ કિંમત લો,
 એટલે કે તેને અનંત ઉકેલો છે.
12. $(2,0), (0,4), (0,-4)$; 8 ચોરસ એકમ 13. $x = y$; અનંત રેખાઓ
14. $a = 5, b = 2$ 15. $55^\circ, 85^\circ$
16. સલીમની ઉંમર = 38 વર્ષ, પુત્રીની ઉંમર = 14 વર્ષ
17. 40 વર્ષ 18. 40, 48 19. હોલ A માં 100 વિદ્યાર્થીઓ, હોલ Bમાં 80 વિદ્યાર્થીઓ.

20. ₹ 10, ₹ 3

21. 100

22. $x = 20, y = 30, \angle A = 130^\circ, \angle B = 100^\circ, \angle C = 50^\circ, \angle D = 80^\circ$

સ્વાધ્યાય 3.4

1. $x = 1, y = 4; 4:1$ 2. $(0, 0), (4, 4), (6, 2)$

3. 8 ચોરસ એકમ

4. $4x + 4y = 100, 3x = y + 15$, જ્યાં પેન અને પેન્સિલ-બોક્સની કિંમતો અનુક્રમે ₹ x અને ₹ y છે. ₹ 10, ₹ 155. $(1, 0), (2, 3), (4, 2)$

6. 10 કિમી/કલાક, 40 કિમી/કલાક

7. 2.5 કિમી/કલાક

8. 10 કિમી/કલાક, 4 કિમી/કલાક

9. 83

10. ₹ 2500, ₹ 30

11. ₹ 600, ₹ 400

12. મૂડીરોકાણ પદ્ધતિ A માં ₹ 12,000, મૂડીરોકાણ પદ્ધતિ B માં ₹ 10000

13. 500

સ્વાધ્યાય 4.1

1. D

2. C

3. C

4. A

5. B

6. D

7. B

8. C

9. B

10. A

11. C

સ્વાધ્યાય 4.2

1. (i) ના, કારણ કે વિવેચક $= -7 < 0$.(ii) હા, કારણ કે વિવેચક $= 9 > 0$.(iii) ના, કારણ કે વિવેચક $= 0$.(iv) હા, કારણ કે વિવેચક $= 4 > 0$.(v) ના, કારણ કે વિવેચક $= -64 < 0$.(vi) હા, કારણ કે વિવેચક $= (2 + 2\sqrt{2})^2 > 0$.(vii) હા, કારણ કે વિવેચક $= 1 > 0$.(viii) ના, કારણ કે વિવેચક $= -7 < 0$.(ix) હા, કારણ કે વિવેચક $= 1 > 0$.(x) હા, કારણ કે વિવેચક $= 8 > 0$.2. (i) અસત્ય, ઉદાહરણ માટે : $x^2 = 1$ દ્વિઘાત સમીકરણને બે બીજ છે.(ii) અસત્ય, ઉદાહરણ માટે : $x^2 + 1 = 0$ ને વાસ્તવિક બીજ નથી.(iii) અસત્ય, ઉદાહરણ માટે : $x^2 + 1 = 0$ દ્વિઘાત સમીકરણને વાસ્તવિક બીજ નથી.

(iv) સત્ય, કારણ કે દરેક દ્વિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ બે શૂન્યો જ હોય.

(v) સત્ય, કારણ કે જો $ax^2 + bx + c = 0$, a અને c ને વિરુદ્ધ ચિહ્ન છે, જ્યાં $ac < 0$ અને તેથી $b^2 - 4ac > 0$.(vi) સત્ય, કારણ કે જો $ax^2 + bx + c = 0$ માં, a અને c ને વિરુદ્ધ ચિહ્ન છે, જ્યાં $b = 0$ અને તેથી $b^2 - 4ac = -4ac < 0$.3. સમીકરણ $x^2 - 3x + 1 = 0$ ના સહગુણકો પૂર્ણાંક છે પણ તેનાં શૂન્યો પૂર્ણાંક નથી.

4. $x^2 - 6x + 7 = 0$, જ્યાં $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$ બીજ છે.

5. ડા. $\sqrt{3}x^2 - 7\sqrt{3}x + 12\sqrt{3} = 0$, જ્યાં 3, 4 બીજ છે.

6. ના. 7. ડા

સ્વાધ્યાય 4.3

1. (i) $\frac{5}{2}, -1$ (ii) $-1, -\frac{8}{5}$ (iii) $-\frac{4}{3}, 3$ (iv) 5, 2

(v) $-3\sqrt{2}, \sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ (vii) $\sqrt{11} + 3, \sqrt{11} - 3$

2. (i) $-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ (ii) $-\frac{1}{2}, 3$ (iii) $\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{6}$

(iv) $\frac{\sqrt{5}}{3}, -2\sqrt{5}$ (v) $\frac{1}{21}, \frac{1}{21}$

સ્વાધ્યાય 4.4

1. (i) વાસ્તવિક બીજ શક્ય છે, બીજ; $\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}$

(ii) વાસ્તવિક બીજ શક્ય છે, બીજ 2, $-\frac{1}{2}$

(iii) વાસ્તવિક બીજ શક્ય છે, બીજ $\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{51}}{5}, \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{51}}{5}$ છે.

(iv) વાસ્તવિક બીજ શક્ય છે, બીજ $4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ છે.

(v) વાસ્તવિક બીજ શક્ય છે, બીજ $-7\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ છે.

2. પ્રાકૃતિક સંખ્યા 12 છે.

3. પ્રાકૃતિક સંખ્યા 8 છે.

4. ગાડીની શરૂઆતની ઝડપ 45 કિમી/કલાક

5. ઝેબાની હાલની ઉંમર 14 વર્ષ

6. નિશાની ઉંમર 5 વર્ષ અને આશાની ઉંમર 27 વર્ષ

7. તળાવની લંબાઈ 34 મીટર અને પહોળાઈ 24 મીટર છે.

8. 14

સ્વાધ્યાય 5.1

1. D

2. B

3. B

4. B

5. C

6. B

7. B

8. B

9. C

10. A

11. C

12. D

13. B

14. C

15. A

16. A

17. C

18. A

સ્વાધ્યાય 5.2

1. k ની જુદી-જુદી કિંમતો માટે $a_{k+1} - a_k$ સમાંતર શ્રેણી માટે (i), (iv) અને (vii) સમાન છે.
2. અસત્ય, જ્યાં $a_4 - a_3 \neq a_3 - a_2$
3. હા, $a_{30} - a_{20} = (30 - 20)d = 10d = -40$
4. સમાંતર શ્રેણીની બે અનુરૂપ બાજુઓનો તફાવત તેનાં પ્રથમ પદોના તફાવત બરાબર હોય છે.
5. ના
6. ના, કુલ ભાડું (₹ માં) દરેક કિલોમીટરે 15, 23, 31, 39, ---
7. સમાંતર શ્રેણી (i), (ii) અને (iii) માં દરેક ક્રમિક પદોમાં કોઈ ચોક્કસ સંખ્યા ઉમેરતાં મેળવી શકાય છે.
8. (i) હા (ii) ના (iii) ના

સ્વાધ્યાય 5.3

1. $(A_1) \rightarrow (B_4)$
 $(A_2) \rightarrow (B_5)$
 $(A_3) \rightarrow (B_1)$
 $(A_4) \rightarrow (B_2)$
2. (i) $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ (ii) $\frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3$ (iii) $4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 6\sqrt{3}$
(iv) $(a+2) + (b+1), (a+2) + (b+2), (a+3) + (b+2)$
(v) $5a+4, 6a+5, 7a+6$
3. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ (ii) $-5, -8, -11$ (iii) $\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}$
4. $a=-1, b=15, c=31$ 5. 3, 7, 11, 15, --- 6. $d=-\frac{1}{5}, n=27$
7. 1, 6, 11, 16, --- 8. 126 10. હા, 17મું પદ 11. $k=0$
12. 67, 69, 71 13. $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$
14. 16મું પદ; -21 15. -1 16. -78 17. 12મું પદ
18. 73 19. 3 20. $n=6, d=10$
21. (i) -9400 (ii) $\frac{7n-1}{2}$ (iii) $\frac{11(11a-6b)}{a+b}$ 22. 16મું પદ; -632
23. -780 24. 5, 13, 21, --- 25. $k=27$ 27. -510
28. 100 29. 330 30. 1170 31. 504
32. $n=5, 11$ 33. 11 34. ₹ 800 35. 25 મહિના

સ્વાધ્યાય 5.4

1. 970
2. (i) 12250 (ii) 12750 (iii) 75,250
3. 3
4. 3, 7, 11, 15, ---
5. (i) 1683 (ii) 13,167
6. 1:3; 5:49
8. 50
9. ₹ 3900; ₹ 44500
10. 728 મીટર; 26 મીટર

સ્વાધ્યાય 6.1

1. C
2. B
3. C
4. A
5. D
6. B
7. B
8. A
9. B
10. C
11. A
12. C

સ્વાધ્યાય 6.2

1. ના, $25^2 \neq 5^2 + 24^2$
2. ના, $\angle D = \angle R$ પરંતુ $\angle F \neq \angle P$
3. હા, કારણ કે $\frac{PA}{QA} = \frac{PB}{BR}$
4. હા, બાબૂબા શરત
5. ના, $\Delta QPR \sim \Delta STM$
6. ના, અનુરૂપ બાજુઓ સમપ્રમાણમાં હોવી જોઈએ.
7. હા, બે અનુરૂપ બાજુઓ અને પરિમિતિ સરખી હોવાથી તેની ત્રીજી બાજુ પણ સરખી થાય.
8. હા, ખૂબૂખૂ શરત
9. ના, ગુણોત્તર $\frac{9}{25}$ થશે.
10. ના, $\angle P = 90^\circ$
11. હા, ખૂબૂ શરત
12. ના, ખૂણાઓ સમપ્રમાણ બાજુઓની બે જોડની વચ્ચેના અંતર્ગત ખૂણાઓ હોવા જોઈએ.

સ્વાધ્યાય 6.3

2. $x = 2$
4. 9:1
6. $4\sqrt{3}$ સેમી
7. 18 સેમી
8. 1:3
9. 60 સેમી
10. 108 સેમી²
12. 12 સેમી
13. $\frac{55}{3}$ સેમી
14. 10 મી
15. 8 મી

સ્વાધ્યાય 6.4

1. 5 સેમી, 2 સેમી
2. $BC = 6.25$ સેમી, $EF = 16.8$ સેમી
5. 0.8 મી
6. 8 કિમી
7. 20.4 મી
8. 9 મી
9. $2\sqrt{5}$ સેમી, 6 સેમી
10. $2\sqrt{5}$ સેમી, 5 સેમી, $3\sqrt{5}$ સેમી
14. 8 સેમી, 12 સેમી, 16 સેમી

સ્વાધ્યાય 7.1

1. B
2. B
3. C
4. B
5. C
6. B
7. C
8. B
9. D
10. A
11. B
12. D
13. B
14. A
15. A
16. D
17. D
18. B
19. B
20. C

સ્વાધ્યાય 7.2

1. સત્ય, કારણ કે બંને ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ સમપ્રમાણમાં છે.
2. સત્ય, રેખા $x = -4$ પર ત્રણ બિંદુઓ આવેલાં છે.
3. અસત્ય, જ્યાં બે બિંદુઓ y -અક્ષ પર છે અને એક બિંદુ પ્રથમ ચરણમાં છે.
4. અસત્ય, $PA = \sqrt{2}$ અને $PB = \sqrt{10}$, એટલે કે $PA \neq PB$.
5. સત્ય, જ્યાં $ar(\Delta ABC) = 0$.
6. અસત્ય, જ્યાં વિકર્ણો એકબીજાને છેદતા નથી.
7. સત્ય, વર્તુળની ત્રિજ્યા = 5 અને $OP > 5$
8. અસત્ય, જ્યાં $AP \neq AQ$.
9. સત્ય, જ્યાં P એ AB નું 1 : 2 માં વિભાજન કરે છે.
10. સત્ય, જ્યાં B એ AC ને 2 : 7 માં વિભાજન કરે છે.
11. અસત્ય, જ્યાં $PC = \sqrt{26} < 6$, બિંદુ P વર્તુળમાં આવેલું છે.
12. સત્ય, બંને વિકર્ણોનાં મધ્યબિંદુ સમાન છે અને વિકર્ણોની લંબાઈ સમાન છે.

સ્વાધ્યાય 7.3

1. વિષમબાજુ ત્રિકોણ
2. (9, 0), (5, 0), 2 બિંદુઓ
3. લંબચોરસ
4. $a = -3$
5. (-3, 5) એ AB નું મધ્યબિંદુ છે. અનંત બિંદુઓ, જ્યાં બધાં જ બિંદુઓ $2x + y + 1 = 0$ ના ઉકેલો છે.
6. $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ
7. $\frac{19}{14}$
8. $y = -3, -5$, $PQ = \sqrt{290}$, $13\sqrt{2}$
9. 0
10. 6:7, $\left(\frac{-34}{13}, 0\right)$
11. 1:5
12. $a = 1$, $b = -3$
13. $k = 22$, $AB = 2\sqrt{61}$
14. $a = 5, 3$
15. 19
16. 11
17. $a = 2$, ક્ષેત્રફળ = 6 ચો એકમ
18. $\left(\frac{4}{5}, \frac{21}{5}\right)$
19. $2, \frac{1}{2}$
20. 8:1, $\left(\frac{8}{3}, \frac{-1}{9}\right)$

સ્વાધ્યાય 7.4

1. $(0, 3 - 4\sqrt{3})$
2. $\frac{3}{4}$ ચોરસ એકમ

$$3. (i) \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right) \quad (ii) \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

(iii) (ii) પ્રમાણે

(iv) (ii) પ્રમાણે

$$4. a = -3, h = \frac{12\sqrt{26}}{13}$$

5. હા, જસપાલ બિંદુ (7, 5) પર હોવો જોઈએ.

6. ઘરથી બેન્ક = 5 કિમી.

બેન્કથી શાળા = 10 કિમી

શાળાથી ઓફિસ = 12 કિમી

કુલ કાપેલું અંતર = 27 કિમી

ઘરથી ઓફિસ સુધીનું અંતર = 24.6 કિમી

વધારાનું અંતર = 2.4 કિમી

સ્વાધ્યાય 8.1

1. B 2. A 3. B 4. C 5. B 6. B 7. C
8. A 9. A 10. D 11. B 12. C 13. C 14. B 15. A

સ્વાધ્યાય 8.2

1. સત્ય 2. અસત્ય 3. અસત્ય [$\sin 80^\circ - \sin 10^\circ = \text{ધન}$: જેમ θ વધે છે, $\sin \theta$ ની કિંમત વધે છે.]
4. સત્ય 5. સત્ય 6. અસત્ય 7. અસત્ય 8. અસત્ય 9. અસત્ય 10. અસત્ય
11. અસત્ય 12. સત્ય

સ્વાધ્યાય 8.3

8. 30° 9. $\frac{-1}{2}$ 10. $\frac{15}{2}$ મી 11. 1 12. 90° 14. 45°

સ્વાધ્યાય 8.4

3. $10(\sqrt{3}+1)$ મી 7. $25\sqrt{3}$ મી 13. $10\sqrt{3}$ મી; 10 મી 14. $h(\cot \alpha - \cot \beta)$
16. $5(\sqrt{3}+3)$ મી 18. 8 મી

સ્વાધ્યાય 9.1

1. B 2. D 3. C 4. A 5. D 6. C 7. A
8. A 9. D 10. B

સ્વાધ્યાય 9.2

1. અસત્ય 2. અસત્ય 3. સત્ય 4. સત્ય 5. સત્ય 6. અસત્ય 7. સત્ય
8. અસત્ય 9. સત્ય 10. સત્ય

સ્વાધ્યાય 9.3

1. 3 સેમી

સ્વાધ્યાય 9.4

3. 20 સેમી 5. 4.8 સેમી 7. 30° 11. $\frac{20}{3}$ સેમી12. 70° 13. $8\sqrt{2}$ સેમી² 14. 24 સેમી

સ્વાધ્યાય 10.1

1. D 2. B 3. A 4. C 5. B 6. D

સ્વાધ્યાય 10.2

1. સત્ય 2. અસત્ય 3. અસત્ય 4. સત્ય

સ્વાધ્યાય 10.3

2. હા

સ્વાધ્યાય 10.4

1. 3.25 સેમી 2. હા 3. 4 સેમી 6. 8 સેમી 7. ના

સ્વાધ્યાય 11.1

1. B 2. A 3. B 4. A 5. B 6. A 7. D
8. B 9. C 10. D

સ્વાધ્યાય 11.2

1. ના, વર્તુળની ત્રિજ્યા $\frac{a}{2}$ છે.
2. હા, ચોરસની બાજુની લંબાઈ $2a$ સેમી છે.
3. ના, બહારની બાજુઓ = ચોરસમાં આવેલા વિકર્ણો
4. ના, તે માત્ર લઘુવૃત્તખંડ માટે સાચું છે.
5. ના, તે πd છે.
6. હા, એક ચક્રર પૂર્ણ થતાં કપાતું અંતર = $2\pi r$
7. ના, તે ત્રિજ્યાની કિંમત ઉપર આધાર રાખશે.
8. હા, તે સમાન વર્તુળના ચાપ માટે સત્ય થશે.
9. ના, તે સમાન વર્તુળના ચાપ માટે સત્ય થશે.
10. ના, તે સમાન વર્તુળના ચાપ માટે સત્ય થશે.
11. હા, લંબચોરસની પહોળાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.
12. હા, તેમની ત્રિજ્યાઓ સમાન છે.

13. હા, તેમની ત્રિજ્યાઓ સમાન છે.

14. ના, ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ p સેમી છે.

સ્વાધ્યાય 11.3

1. 33 સેમી
2. $(16\pi - 32)$ સેમી²
3. 308 સેમી²
4. 500
5. 154 મી²
6. $(380 + 25\pi)$ સેમી²
7. 54.5 સેમી²
8. $(32 + 2\pi)$ મી²
9. $(248 - 4\pi)$ મી²
10. $\left(\frac{308}{3} - 49\sqrt{3}\right)$ સેમી²
11. 30.96 સેમી²
12. 39.25 સેમી²
13. 308 સેમી²
14. 15246 મી²
15. 1386 સેમી²
16. $\frac{60}{\pi}$ સેમી

સ્વાધ્યાય 11.4

1. ₹ 26,400
2. 560
3. $(24\sqrt{21} - 77)$ મી²
4. $(75.36 - 36\sqrt{3})$ સેમી²
5. ₹ 3061.50
6. 196 સેમી²
7. 1.967 સેમી² (આશરે)
8. 8.7 સેમી²
9. 42 સેમી²
10. 168 સેમી²
11. 4.3 મી²
12. 800 સેમી²
13. 1 : 3 : 5
14. $45\frac{5}{6}$ સેમી²
15. $73\frac{1}{3}$ સેમી
16. ક્ષેત્રફળ : $\frac{154}{3}$ સેમી², 154 સેમી²; ચાપની લંબાઈ : $\frac{44}{3}$ સેમી; બે

બિન્ન વર્તુળના વૃત્તાંશના ચાપની લંબાઈ સમાન હોઈ શકે પણ તેમનાં ક્ષેત્રફળ સમાન ન પણ હોઈ શકે.

17. $(180 - 8\pi)$ સેમી²
18. 40
19. $\left(\frac{25\pi}{4} + \frac{25}{2}\right)$ સેમી²
20. 462 સેમી²

સ્વાધ્યાય 12.1

1. A
2. A
3. B
4. B
5. C
6. D
7. A
8. A
9. B
10. A
11. B
12. C
13. A
14. A
15. A
16. B
17. C
18. A
19. A
20. D

સ્વાધ્યાય 12.2

1. અસત્ય
2. અસત્ય
3. અસત્ય
4. અસત્ય
5. અસત્ય
6. સત્ય
7. અસત્ય
8. સત્ય

સ્વાધ્યાય 12.3

1. 6 સેમી
2. 84
3. 15 સેમી
4. 7:1
5. 160 સેમી²
6. 277 સેમી³
7. 855 સેમી² (આશરે)
8. 14 સેમી, 7 સેમી; 132 સેમી³, 66 સેમી³; 396 સેમી³
9. 327.4 સેમી³
10. 150
11. 1500
12. 2541
13. 12,960
14. 450

સ્વાધ્યાય 12.4

1. 28.44 સેમી
2. 8.6 મી
3. 3960 સેમી³, 29.7 કિગ્રા
4. 480000 શબ્દો
5. 51 મિનિટ, 12 સેકન્ડ
6. 74.25મી³, 80.61 મી²
7. ₹ 2250
8. 2 કલાક
9. 112 મી
10. 0.5 સેમી
11. 487.6 સેમી³
12. ₹ 230.12
13. 36 સેમી, 43.27 સેમી
14. 301.44 સેમી², 377.1 સેમી³
15. 4 મી
16. 54
17. 1.584 મી³
18. 90 સેમી
19. 2.5 સેમી
20. 170.8 સેમી³

સ્વાધ્યાય 13.1

1. C
2. B
3. A
4. C
5. B
6. B
7. B
8. C
9. C
10. C
11. A
12. D
13. D
14. A
15. C
16. B
17. C
18. A
19. A
20. A
21. D
22. B
23. C
24. A
25. C
26. B

સ્વાધ્યાય 13.2

1. કાયમ નથી, કારણ કે વર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યસ્થની ગણતરી માટે સૂત્રનો ઉપયોગ એ ધારણા પર આધારિત છે કે વર્ગોનાં અવલોકનો સમાન રીતે વિસ્તરેલ છે. (અથવા સમાન અંતરાલ)
2. જરૂરી નથી કે માહિતીનો મધ્યક a ની પસંદગીનો નથી. (ધારેલો મધ્યક)
3. ના, આવો કિસ્સો કાયમ નથી. ત્રણે માપોની કિંમતો સમાન શક્ય છે.
4. કાયમ નથી, તે માહિતી ઉપર આધાર રાખે છે.
5. ના, શક્ય પરિણામો સમસંભાવી નથી, ઉદાહરણ માટે 'એક છોકરી'નો અર્થ gbb , bgb , bbg ત્રણ છોકરીઓનો અર્થ ggg અને તે જ પ્રમાણે.
6. ના, શક્ય પરિણામો સમસંભાવી નથી. '3' એ બીજા કરતાં વધુ ગમતું છે.
7. પીહુ ; અપૂર્વની 36 મેળવવાની સંભાવના = $\frac{1}{36}$ જ્યારે પીહુની 36 મેળવવાની સંભાવના = $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$.
8. હા, દરેકની શક્ય સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે, જ્યાં બે શક્ય પરિણામો સમસંભાવી છે.
9. ના, પરિણામ '1' અને '1 નથી' બંને સમસંભાવી નથી. $P(1) = \frac{1}{6}$; $P(1 નથી) = \frac{5}{6}$
10. પરિણામ સમસંભાવી નથી. પરિણામ 'છાપ નથી'નો અર્થ 'TTT'; પરિણામ 'એક છાપ'નો અર્થ THT, HTT, TTH અને વગેરે. $P(TTT) = \frac{1}{8}$, $P(એક છાપ) = \frac{3}{8}$ અને વગેરે.
11. ના, છાપ અને કાંટોનાં પરિણામો સમસંભાવી આવે છે.
12. ના, દરેક વખતે સિક્કો ઉછાળતાં છાપ અથવા કાંટો આવી શકે છે, કારણ કે બંને પરિણામો સમસંભાવી છે.

13. ના, છાપ અને કાંટો સમસંભાવી છે. તેથી, ચોથી વખત ઉછાળતાં કાંટો આવવાની શક્યતાનો પ્રશ્ન જ રહેતો નથી.

14. હા, આપેલી પરિસ્થિતિમાં 'અયુગ્મ અંક' અને 'યુગ્મ અંક' સમસંભાવી છે.

સ્વાધ્યાય 13.3

1. 5.5 2. 35 3. 12.93 4. 26 5. ₹. 356.5

6. 109.92 7. 123.4 કિગ્રા 8. 14.48 કિમી/લિ; ના, ઉત્પાદકનો દાવો સરેરાશ માર્ઈલેજ કરતાં 1.52 કિમી/કલાક વધુ છે.

9.

વજન (કિગ્રા)	વ્યક્તિઓની સંખ્યા
45 થી ઓછા	4
50 થી ઓછા	8
55 થી ઓછા	21
60 થી ઓછા	26
65 થી ઓછા	32
70 થી ઓછા	37
75 થી ઓછા	39
80 થી ઓછા	40

10.

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0-10	10
10-20	40
20-30	80
30-40	140
40-50	170
50-60	130
60-70	100
70-80	70
80-90	40
90-100	20

11.

ગુણ	ઉમેદવારની સંખ્યા
0-10	2
10-20	2
20-30	3
30-40	4
40-50	6
50-60	6
60-70	5
70-80	2
80-90	4

12. $a = 12, b = 13, c = 35, d = 8, e = 5, f = 50$

(i) થી ઓછા પ્રકારે		(ii) થી વધારે પ્રકારે	
ઉંમર (વર્ષમાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	ઉંમર (વર્ષમાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
10 થી ઓછા	0	≥ 10	300
20 થી ઓછા	60	≥ 20	240
30 થી ઓછા	102	≥ 30	198
40 થી ઓછા	157	≥ 40	143
50 થી ઓછા	227	≥ 50	73
60 થી ઓછા	280	≥ 60	20
70 થી ઓછા	300		

14.

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0-20	17
20-40	5
40-60	7
60-80	8
80-100	13

15. ₹ 1263.15

16. 109.17 કિમી/કલાક

17. ₹ 11,875

18. 201.7 કિગ્રા

19. (i) $\frac{1}{6}$

(ii) $\frac{5}{6}$

20. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{5}{12}$ (iii) 0

21. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) 0

22. $\frac{4}{9}$

23. $P(2) = \frac{1}{18}, P(3) = \frac{1}{9}, P(4) = \frac{1}{6}, P(5) = \frac{1}{6}, P(6) = \frac{1}{6}, P(7) = \frac{1}{6}, P(8) = \frac{1}{9}, P(9) = \frac{1}{18}$

24. $\frac{3}{4}$

25. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$

26. $\frac{2}{9}$

27. (i) $\frac{5}{11}$

(ii) $\frac{7}{22}$

(iii) $\frac{17}{22}$

28. (i) $\frac{13}{49}$

(ii) $\frac{3}{49}$

29. (i) $\frac{10}{49}$

(ii) $\frac{1}{49}$

30. (i) $\frac{1}{10}$

(ii) $\frac{3}{10}$

(iii) $\frac{3}{5}$

31. (i) $\frac{14}{99}$

(ii) $\frac{85}{99}$

32. (i) $\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{9}{100}$

33. $\frac{21}{26}$

34. 0.69

35. $\frac{11}{75}$

36. P (ખામીયુક્ત ન હોય) = $\frac{3}{4}$, P (બીજો બલ્બ ખામીયુક્ત હોય) = $\frac{5}{23}$

37. (i) $\frac{4}{9}$

(ii) $\frac{5}{9}$

(iii) $\frac{1}{3}$

(iv) $\frac{5}{18}$

38. (i) $\frac{1}{8}$

(ii) $\frac{1}{8}$

(iii) $\frac{3}{4}$

39. (i) 6 સ્કોર (0, 1, 2, 6, 7, 12)

(ii) $\frac{1}{3}$

40. (i) $\frac{7}{8}$

(ii) $\frac{15}{16}$

41. (i) $\frac{5}{6}$

(ii) $\frac{1}{3}$

42. (i) 0.009

(ii) $\frac{8}{999}$

[સૂચન : (ii) પ્રથમ ખેલાડી ઈનામ જીતશે ત્યારે 500 થી વધુ સંખ્યાના પૂર્ણવર્ગ 1 ઘટશે.]

સ્વાધ્યાય 13.4

1. 51.75

2. 48.41

3. 31 વર્ષ

4. 201.96 ગ્રામ

5. 201.8 ગ્રામ

6. 201.8 ગ્રામ

7. મધ્યસ્થ પગાર = ₹ 13,420, બહુલકીય પગાર = ₹ 12,730

8. $f_1 = 28, f_2 = 24$

9. $p = 5, q = 7$

10. 139 સેમી

11. મધ્યસ્થ = 17.81 હેક્ટર, બહુલક = 17.78 હેક્ટર

12. વરસાદના માપનો મધ્યસ્થ = 21.25 સેમી

13. સરેરાશ = 170.3 સેકન્ડ

14.	અંતર (મીટરમાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	સંયોજી આવૃત્તિ
(ii)	0-20	6	6
	20-40	11	17
	40-60	17	34
	60-80	12	46
	80-100	4	50

(iii) 49.41 મીટર

