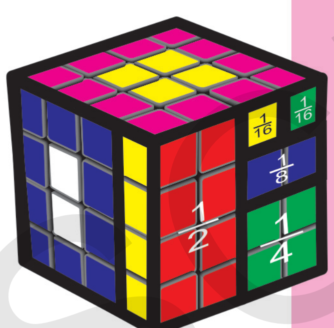
a(b+c)=ab+ac



राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद
तेलंगाणा, हैदराबाद

तेलंगाणा सरकार द्वारा निशुल्क वितरण

गणित

कक्षा - VII

गणित

FREE

Mathematics
Class - VII
(Hindi Medium)

कक्षा - VII

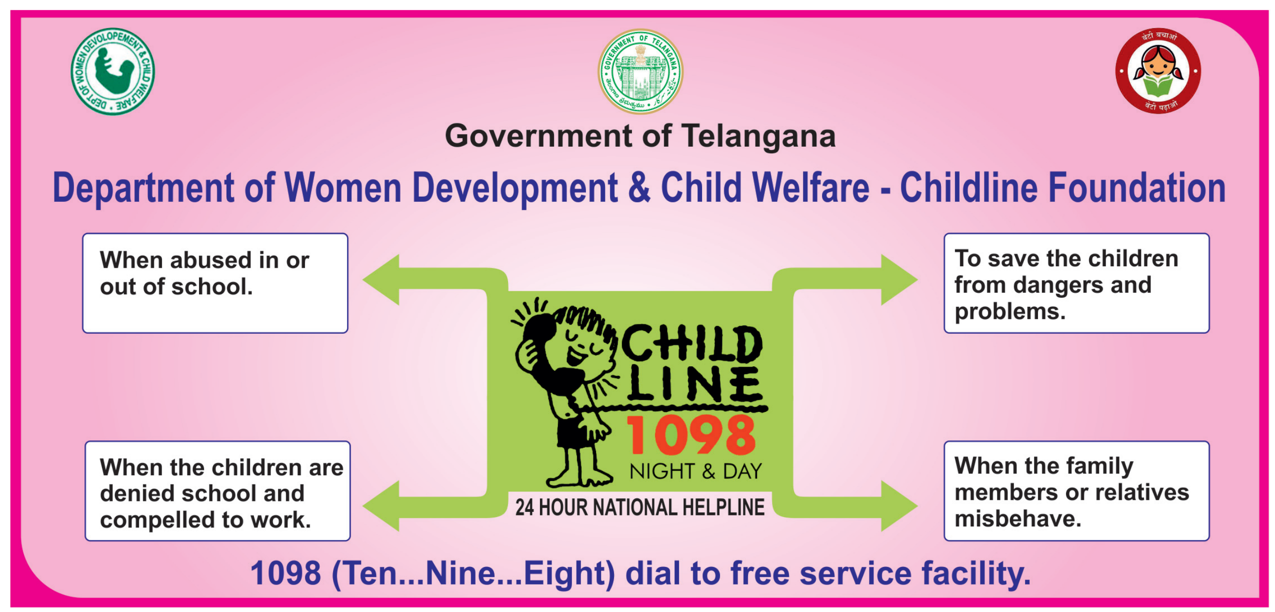
तेलंगाणा सरकार द्वारा प्रकाशित
हैदराबाद

तेलंगाणा सरकार द्वारा निशुल्क वितरण

Graph

बच्चों ! आपके लिए कुछ सूचनाएँ

- इस पुस्तक में प्रत्येक अवधारणा को समझने के लिए दैनिक जीवन से संबंधित उदाहरण दिए गए है। दिए गए उदाहरणों को ध्यान में रखते हुए सूक्ष्म अध्ययन द्वारा अवधारणा को समझने का प्रयत्न कीजिए।
- क्रियाकलाप द्वारा अवधारणा को समझते समय कुछ शंकाएँ उत्पन्न हो सकती हैं उन शंकाओं का निवारण अपने साथीयों से या टिचर से चर्चा कर गणितीय धारणा को निःशंक भाव से समझीए ।
- ''यह कीजिए'' जैसे अभ्यास अपने आप को जाँचने के लिए दिए गए है, इन अभ्यासों को करते समय यदि आपको कोई कठिनाई महसूस हो तो उसे टिचर की सहायता से दूर कर लिजीए ।
- प्रयत्न कीजिए/प्रयास कीजिए में दिए गए प्रश्नों को तार्किक, वैचारिक, कुशलता एवं व्यापक रूप से हल कीजिए । जब इन प्रश्नों को हल करने में कोई कठिनाई होतो अपने मित्रों एवं अध्यापक की सहायता लिजिए ।
- ''विचार-विमर्श'' में कुछ क्रियाकलापों एवं चर्चा योग्य बिन्दुओं को दिया गया है जिन्हें आलोचनात्मक व्यापक रूप से समझने की आवश्यकता है! इन क्रियाओं को अपने मित्रों एवं अध्यापक के साथ चर्चा द्वारा हल कीया जा सकता है!
- अध्याय के अन्त में दिए गए अभ्यास में विभिन्न प्रकार के प्रश्नों को भिन्न धारणाओं को दृष्टिकोण में रखकर दिए गए है। इन प्रश्नों को आपने आप घर पर या पाठशाला में अवकाश अवधि में हल करने का प्रयत्न कीजिए ।
- यह कीजिए/प्रयास कीजिए में दिए गए अभ्यासों का उद्देस्य उन्हें कक्षा में अध्यापक की उपस्थिति में हल करना है।
- पुस्तक में जहाँ कहीं भी ''परियोजना कार्य'' दिया गया हैं उसे समूह में पूरा कीजिए लेकिन उसकी रिपोर्ट प्रत्येक विद्यार्थी को अलग-अलग तैयार करना होगा ।
- गृहकार्य में दिए गए प्रश्नों को उसी दिन पूरा कर उनमें उत्पन्न शंकाओं का निवारण भी अपने अध्यापक से उसी दिन करवा लिजिए ।
- दिए गए अवधारणा पर नए प्रश्नों को तैयार करना या एकत्रित कर उसे मित्रों को तथा अध्यापक को दिखाइए ।
- गणित से संबंधित रुचिपूर्ण पहेलियों तथा खेलों को एकत्रित कर अपने मित्रों से साझा कीजिए ।
- गणितीय अवधारणा को कक्षा तक सीमित मत रखीए, लेकिन उसे अपने आस-पास वाली घटनाओं से जोडिए ।
- प्रश्नों को हल करना, तर्क देना तथा सिद्ध करना जैसे गणितीय क्रियाओं को विद्यार्थी समझकर प्रदर्शित करें।
- जब भी आप उपरोक्त सामर्थ्यों को प्राप्त करने में कठिनाई का अनुभव करें वहाँ आप अपने अध्यापक की सहायता लीजिए।



गणित
सातवीं कक्षा
MATHEMATICS

Class-VII

Hindi Medium

पाठ्य पुस्तक विकास एवं प्रकाशन समिति

प्रधान कार्यकारी अधिकारी : **श्रीमती बी. शेषु कुमारी**
निदेशक, एस. सी. ई. आर. टी., हैदराबाद

कार्यकारी प्रधान आयोजक : **श्री बी. सुधाकर**
निदेशक, सरकारी पाठ्य पुस्तक प्रेस

आयोजन प्रभारी : **डॉ. एन. उपेंदर रेड्डी**
प्रोफेसर, पाठ्यक्रम व पाठ्यपुस्तक विभाग,
एस. सी. ई. आर. टी., हैदराबाद

सहायक आयोजन प्रभारी : **श्री के. यादगिरी**
प्राध्यापक, एस. सी. ई. आर. टी., हैदराबाद

तेलंगाणा सरकार का प्रकाशन, हैदराबाद

कानून का आदर करो।
अधिकार प्राप्त करो।

विद्या से आगे बढ़ो।
विनय से रहो।

First Published 2012
New Impressions 2013, 2014, 2015, 2017, 2018

This Book has been printed on 80 G.S.M. SS Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

तेलंगाणा सरकार द्वारा निशुल्क वितरण 2018-19

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

— o —

पाठ्य पुस्तक विकास समिति के सदस्य

लेखकगण

श्री रामांजनेयुलु, प्राध्यापक, डाइट, विकाराबाद, रंगारेड्डी जिला
श्री टी. साई रामकृष्णा, प्र. अ., बी. एफ. एम. एच. एस. सामर्लाकोटा, पूर्वी गोदावरी जिला
श्री एस. धरमेंदर सिंह, एस. ए., प्रा. उ. पा. पोन्ना, इच्चोडा मंडल आदिलाबाद जिला
श्री के. लक्ष्मा रेड्डी, एस. ए., जि. प. उ. पा. चिंताकुंटा, करीमनगर जिला
श्री बी. हनुमंतराव, एस. ए., जि. प. उ. पा. कावुगल्लु, नलगोंडा जिला
श्री एस. राजशेखर रेड्डी, एस. ए., जि. प. उ. पा. मद्दीरेड्डीपल्ली, अनंतपुर जिला
श्री सी. एच. केशव रेड्डी, एस. जी. टी., प्रा. पा. मोट्लापल्ली, श्रीरामपुर मंडल, करीमनगर जिला
श्री टी. महेश, एस. जी. टी., प्रा. उ. पा. बोप्पापुर, वर्नी मंडल, निजामाबाद जिला
श्री वी. मधु, एस. जी. टी., प्रा. पा. तोंडमनाडु, श्रीकालहस्ती मंडल, चित्तूर जिला

लेखक तथा समन्वयक

श्री के. रायुलु, समन्वयक, गणित पाठ्य पुस्तक, एस. सी. ई. आर. टी.
श्री के. राजेंदर रेड्डी, समन्वयक, गणित पाठ्य पुस्तक, एस. सी. ई. आर. टी.

संपादक

श्री के. ब्रह्मय्या, प्रोफेसर, राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, हैदराबाद
श्री बी. हरि सर्वोत्तम राव, अवकाशप्राप्त प्राध्यापक,रा. शै. अ. एवं प्र. परिषद
श्री बी. सत्यनारायण, अवकाशप्राप्त प्राध्यापक, डाइट विकाराबाद, रंगारेड्डी जिला

अध्यक्ष, गणित आधार पत्र, गणित पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक विकास समिति

प्रोफेसर वी. कन्नन, गणित-सांख्यिकी विभाग, हैदराबाद विश्वविद्यालय

मुख्य सलाहकार

डॉ. हेच. के. दीवान, शिक्षा सलाहकार, विद्या भवन सोसायटी संदर्भ केंद्र, उदयपुर, राजस्थान

शिक्षा विषयक सहायकगण

श्रीमती धर्मप्रियशिराली, कम्युनिटी मैथेमेटिक्स सेंटर, ऋषिवैली स्कूल, मदनपल्ली, चित्तूर जिला
श्री. शोभा शंकर, विद्या भवन सोसायटी संदर्भ केंद्र, उदयपुर, राजस्थान
कुमारी शालिनी देवी, विद्या भवन सोसायटी संदर्भ केंद्र, उदयपुर, राजस्थान
श्री शरन गोपाल, गणित-सांख्यिकी विभाग, हैदराबाद विश्वविद्यालय

हिंदी अनुवाद समन्वयक

डॉ. पी. शारदा, राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, हैदराबाद

हिंदी अनुवादक

श्रीमती अफ़रोज जबीन, प्रधानाध्यापिका, प्राथमिक स्तर, नवजीवन बालिका विद्यालय, रामकोटी, हैदराबाद।
श्री अजय सिंह, ज्ञान प्रकाश बालिका विद्यालय, गोशामहल, हैदराबाद
श्रीमती उमा निकम, एल.एम.जी.हाई स्कूल, बेगम बाज़ार, हैदराबाद।
श्री रफीक़, निशुल्क प्रभात उच्च पाठशाला, हैदराबाद
श्रीमती संगीता शर्मा, बंसीलाल बालिका विद्यालय, हैदराबाद
डॉ. राजीव कुमार सिंह, राज्य संसाधक, हैदराबाद
श्री सुरेश कुमार मिश्रा 'उरतृप्त', राज्य संसाधक, हैदराबाद
कुमारी ऋतु भसीन, राज्य संसाधक, आंध्र प्रदेश, हैदराबाद

चित्रकार

श्री प्रशांत सोनी, विद्या भवन सोसायटी संदर्भ केंद्र, उदयपुर, राजस्थान
श्री भवानी शंकर, विद्या भवन सोसायटी संदर्भ केंद्र, उदयपुर, राजस्थान

आमुख

गणित अध्ययन एक मनोरंजक कार्य है। बालक अपने अनुभवों, अनुभूतियों को प्रतिबिंबित करने वाले व्यक्तिगत, सामूहिक कार्यों में उत्साह के साथ भाग लेते हैं। किसी भी चुनौती का सामना करने के लिए तैयार रहते हैं। सीखने में अपना कौशल व्यक्त करते हैं। इस तरह अपने ढंग से सीखे हुए कुछ मौलिक गणित की दक्षताओं का ज्ञान वे घर के पास ही प्राप्त कर लेते हैं। इन दक्षताओं का प्राथमिक स्तर पर विकास करने पर बालक गणित आनंद के साथ सीखते हैं। इसी के आधार पर गणित की पाठ्य पुस्तक का विकास किया गया है। बालकों के सीखने की शैली के साथ-साथ निचली कक्षाओं में सीखे गये गणित ज्ञान की पुनरावृत्ति करते हुए गणित की नयी धारणाओं को सिखाने के लिए दैनिक जीवन के अनेक अर्थपूर्ण उदाहरणों का समावेश किया गया है। इसमें दिये गये कृत्य, अभ्यास बालकों में गणित की धारणाओं को समझने के साथ-साथ दैनिक जीवन के साथ समन्वय करने के लिए भी उपयोगी हैं।

शिक्षा का अधिकार अधिनियम-2009, राज्य पाठ्यक्रम परिधि पत्र-2011 की सूचनाओं के अनुरूप तैयार किया गया गणित विधान पत्र द्वारा सूचित पाठ्यक्रम और शैक्षिक मापदंडों को ध्यान में रखकर इस पाठ्य पुस्तक का निर्माण किया गया है। विधान पत्र की सूचनाओं के कारण ही पाठ्यक्रम और, शिक्षणाभ्यसन की प्रक्रिया में परिवर्तन आये हैं। इन परिवर्तनों की अनिवार्यता के कारण ही तीसरी कक्षा की नवीन पाठ्य पुस्तक का विकास करना पड़ा है। पाठ्य पुस्तक में दिये गये संदर्भ, अभ्यास, कृत्य बालकों में समस्या समाधान, तर्कपूर्ण सोच, गणित की भाषा में अभिव्यक्ति करना, अन्य संदर्भों में उपयोग करना, आंकड़ों का अनेक पद्धतियों से प्रदर्शन करना जैसे दक्षताओं की वृद्धि करने की आवश्यकता पर बल देते हैं। अतः निर्देशित शैक्षिक मापदंडों की प्राप्ति हेतु शिक्षणाभ्यसन प्रक्रियाओं में बालकों का भाग लेना, विभिन्न कोणों में आलोचनात्मक व सृजनात्मक ढंग से सोचना आवश्यक है।

इस पुस्तक में सभी अध्यायों का व्यवस्थापन इस ढंग से किया गया है जिससे न केवल बालक की समझ बढ़ती है बल्कि अभ्यास करने में भी सहायता मिलती है। ऐसा करने से बालकों में गणित के प्रति रूचि का विकास होता है। यह पुस्तक अध्यापकों को अध्यापन के साथ-साथ बालकों को गणित सिखाने; सतत् समग्र मूल्यांकन करने में एक अच्छे साधन के रूप में उपयोगी है।

पाठ्य पुस्तक निर्माण में सहयोग देने वाले राष्ट्रीय स्तर के विषय विशेषज्ञ, विश्वविद्यालय आचार्य, शोधकर्ता, मुक्त संस्थाएँ (एन. जी. ओ.), शिक्षाविद्, लेखकगण, चित्रकार तथा प्रकाशन विभाग तथा सभी प्रशंसा के पात्र हैं। मैं आशा करती हूँ कि सभी अध्यापक बालकों के शैक्षिक मापदंड के विकास हेतु इस पाठ्य पुस्तक का अर्थपूर्ण ढंग से कक्षा में क्रियान्वयन करेंगे।

निदेशक

राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद
तेलंगाणा, हैदराबाद

गणित

सातवीं कक्षा

राष्ट्रगान

- रवींद्रनाथ टैगोर

जन–गण–मन अधिनायक जय हे!
भारत भाग्य विधाता!
पंजाब, सिंध, गुजरात, मराठा,
द्राविड़, उत्कल बंग!
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा!
उच्छल जलधि–तरंग!
तव शुभ नामे जागे!
तव शुभ आशिष माँगे,
गाहे तव जय गाथा!
जन–गण–मंगलदायक जय हे!
भारत भाग्य विधाता!
जय हे! जय हे! जय हे!
जय, जय, जय, जय हे!!

प्रतिज्ञा

- पैडिमर्रि वेंकट सुब्बाराव

भारत मेरा देश है और समस्त भारतीय मेरे भाई–बहन हैं। मैं अपने देश से प्रेम करता हूँ और इससे प्राप्त विशाल एवं विविध ज्ञान–भंडार पर मुझे गर्व है। मैं सर्वदा इस देश एवं इसके ज्ञान–भंडार के अनुरूप बनने का प्रयास करूँगा। मैं अपने माता–पिता और अध्यापकों तथा समस्त गुरुजनों का आदर करूँगा और प्रत्येक व्यक्ति के प्रति नम्रतापूर्वक व्यवहार करूँगा। मैं जीव–जंतुओं से भी प्रेमपूर्वक व्यवहार करूँगा। मैं अपने देश और उसकी जनता के प्रति अपनी भक्ति की शपथ लेता हूँ। उनके मंगल एवं समृद्धि में ही मेरा सुख निहित है।

पूर्णांक (INTEGERS) 1

1.0 प्रस्तावना:

हमारे चारों ओर की वस्तुओं की गिनती के लिए हम 1,2,3,4.... की तरह सीखने के लिए संख्या शुरू करते हैं। इन संख्याओं को हम गिनती, संख्या या प्राकृतिक संख्या कहते हैं। आइए इन पर विचार करें।

(i) सब से छोटी प्राकृतिक संख्या कौन सी है?

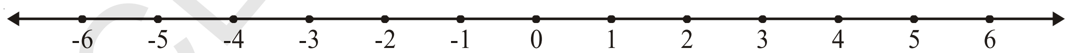
(ii) 100 और 10000 के बीच आने वाली कोई 5 प्राकृतिक संख्याएँ लिखिए।

(iii) क्या प्राकृतिक संख्याओं का क्रम कहीं समाप्त होता है ?

(iv) किसी भी दो क्रमागत प्राकृतिक संख्यायाओं के बीच का अंतर क्या होता है?

प्राकृतिक संख्याओं के समूह में शून्य '0' को मिलाने पर हमें नई प्राकृतिक संख्याओं का समूह प्राप्त होता है जिसे पूर्ण अंक कहते हैं। अर्थात 0,1,2,3,4, _ _ _ _ _ .

छठवीं कक्षा में हमने ऋणात्मक संख्याओं के बारे में सीखा है। यदि हम पूर्ण संख्याओं एवं ऋणात्मक संख्याओं को एक साथ लिखें तो उसे हम 'पूर्णांक' कहते हैं।



(i) उपयुर्क्त संख्या रेखा में सबसे बड़ा पूर्णांक कौन सा है?

(ii) सबसे छोटा पूर्णांक कौन सा है?

(iii) क्या −3 से 1 बड़ी संख्या है, क्यों?

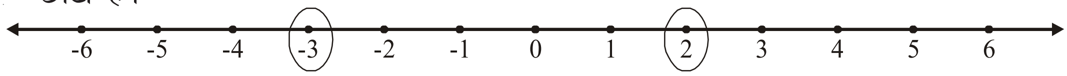
(iv) क्या −3 से −6 बड़ी संख्या है, क्यों?

(v) 4, 6, -2, 0 और −5 को आरोहण क्रम में लिखो।

(vi) संख्या रेखा पर (0 और 1) तथा (0 और -1) के अंतर की तुलना कीजिए।

अभ्यास - 1

1. कुछ पूर्णांको को संख्या रेखा पर अंकित किया गया है। इनमें से कौन सी बड़ी एवं कौन सी छोटी है।



2. निम्न दी गई युग्म संख्याओं के बीच के पूर्णांक लिखिए और इसमें से सबसे बड़ी तथा छोटी संख्या चुनिए।

   (i) –5, –10 (ii) 3, –2 (iii) –8, 5

3. निम्न पूर्णांक को आरोहण क्रम (छोटे से बड़े) में लिखिए।

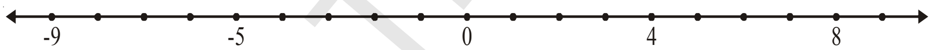
   (i) –5, 2, 1, –8 (ii) –4, –3, –5, 2 (iii) –10, –15, –7

4. निम्न पूर्णांको को अवरोहण क्रम (बड़े से छोटे) में लिखिए।

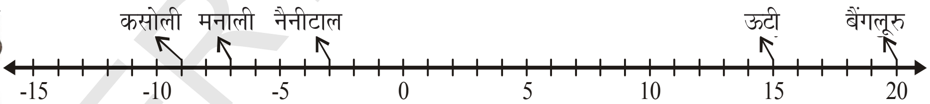
   (i) –2, –3, –5 (ii) –8, –2, –1 (iii) 5, 8, –2

5. 6, -4, 0 और 4 को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

6. संख्या रेखा पर रिक्त पूर्णांकों की पूर्ति कीजिए।



7. भारत के पाँच शहरों के तापमान संख्या रेखा पर दर्शाये गये हैं।



   (i) शहरों के अंकित तापमान लिखिए। (ii) किस शहर का तापमान सबसे अधिक है? (iii) किस शहर का तापमान सबसे कम है? (iv) किस शहर का तापमान 0^oC है? (v) उन शहरों के नाम बताइए जहाँ का तापमान 0^oC से अधिक है।

1.1 पूर्णांक की क्रियाये

1.1 छठवीं कक्षा में हमने पूर्णांकों को जोड़ना व घटाना सीखा है। पहले हम उनका पुनरावलोकन करेंगे। बाद में पूर्णांकों का गुणनफल एवं भाजन सीखेंगे।

1.1.1 पूर्णांकों का संकलन (Addition of Integers)

निम्न विषयों का परीक्षण कीजिए।

$4 + 3 = 7$

$4 + 2 = 6$

$4 + 1 = 5$

$4 + 0 = 4$

$4 + (-1) = 3$

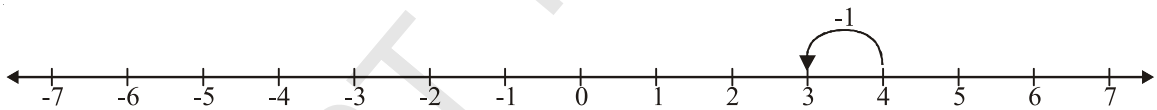
$4 + (-2) = 2$

$4 + (-3) = 1$

क्या आपने इस उत्तर के नमूने को देखा? आपको ज्ञात होगा कि यदि एक संख्या को कम करके जोड़ा जाए तो (3,2,1,0,-1,-2,-3) उसका योग भी 1 घट जाता है।

जब 3 और 4 को संख्या रेखा पर जोड़ा जाता है तो आप संख्या रेखा की दाहिनी ओर बढ़ेंगे।

इसी प्रकार क्या आप 1 से 4 तक 2 का जोड़ संख्या रेखा पर दर्शा सकते हो? आप देखोगे कि हर स्थिति में आप संख्या रेखा की दाहिनी ओर बढ़ेंगे। अब हम देखेंगे कि -1 का संख्या रेखा पर संकलन क्या होगा? हमारा उत्तर 3 होगा, इसलिए हम संख्या रेखा के बायीं ओर 1 इकाई बढ़ेंगे।



इसी प्रकार आप -2 और -3 से 4 का संकलन संख्या रेखा पर दर्शा सकेंगे। हमें ज्ञात होगा कि हर क्रम में हम 1 इकाई संख्या रेखा के बायीं ओर बढ़ेंगे ।

इसलिए **धनात्मक पूर्णांकों का संकलन करते समय संख्या रेखा पर दाहिनी ओर जाना चाहिए** तथा ऋणात्मक पूर्णांकों का संकलन करते समय संख्या रेखा पर बांयी ओर जाना चाहिए।

प्रयत्न करो

1. $9 + 7 = 16$ | $9 + 1 =$
   $9 + 6 = 15$ | $9 + 0 =$
   $9 + 5 =$ | $9 + (-1) =$
   $9 + 4 =$ | $9 + (-2) =$
   $9 + 3 =$ | $9 + (-3) =$
   $9 + 2 =$

(i) 9+2, 9+(-1) और 9+(-3) को संख्या रेखा पर दर्शाओ

(ii) जब आप धनात्मक पूर्णांक का संकलन करते हो तो आपको संख्या रेखा की किस दिशा की ओर जाना चाहिए?

(iii) जब आप ऋणात्मक पूर्णांक का संकलन करते हो तो अपको संख्या रेखा की किस दिशा की ओर जाना चाहिए?

2. संगीता के अनुसार यदि दो पूर्णांको का संकलन किया जाये तो उनका योग संख्याओं से अधिक होगा। क्या संगीता का कथन सही है? आपके उत्तर को स्पष्ट कीजिए।

अभ्यास - 2

1. निम्न अंकों का संकलन संख्या रेख पर दर्शाइए

(i) 5 + 7 (ii) 5 + 2 (iii) 5 + (–2) (iv) 5 + (–7)

2. संकलन करो

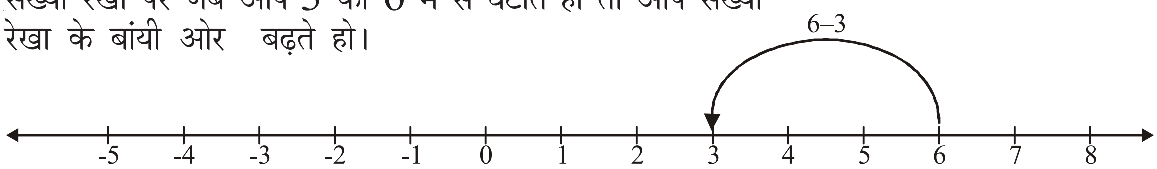
(i) 7 + 4	(ii) 8 + (–3)	(iii) 11 + 3
(iv) 14 + (–6)	(v) 9 + (–7)	(vi) 14 + (–10)
(vii) 13 + (–15)	(viii) 4 + (–4)	(ix) 10 + (–2)
(x) 100 + (–80)	(xi) 225 + (–145)	

1.1.2 पूर्णांकों का व्यवकलन (Subtraction of Integers)

नीचे किये गये व्यवकलन का परीक्षण करेंगे।

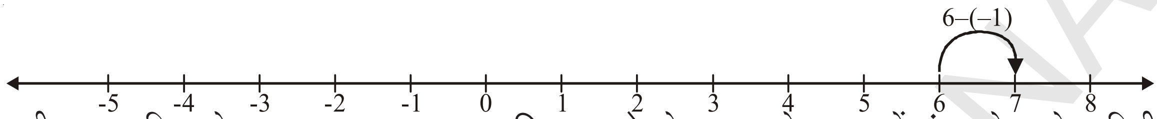
6 – 3 = 3
6 – 2 = 4
6 – 1 = 5
6 – 0 = 6
6 – (–1) = 7
6 – (–2) = 8
6 – (–3) = 9
6 – (–4) = 10

क्या आप इस उत्तर के नमूने को देख सकते हो? आपको ज्ञात होगा कि जब किसी संख्या (3,2,1,0,-1,-2,-3,-4) को घटाया जाए तो मान में 1 का अंतर बढ़ जाता है।
संख्या रेखा पर जब आप 3 को 6 में से घटाते हो तो आप संख्या रेखा के बांयी ओर बढ़ते हो।



इसी प्रकार आप यह दर्शा सकते हैं कि 1 से 6 तक की संख्याओं में से 2 का व्यवकलन करने पर आप संख्या रेखा के बायीं दिशा में बढ़ते हैं।

6 से 1 का व्यवकलन करने पर हमें 6- (-1) 7 प्राप्त होगा। इसलिए हम संख्या रेखा पर एक इकाई दाहिनी ओर बढ़ते हैं।



इसी प्रकर यदि 6 से -2,-3,-4 का व्यवकलन किया जाये तो आप प्रत्येक क्रम में संख्या रेखा के दाहिनी ओर बढ़ेंगे। इसलिए **धनात्मक पूर्णांक का व्यवकलन होने पर आप संख्या रेखा के बायीं ओर बढ़ेंगे और ऋणात्मक पूर्णांक का व्यवकलन होने पर आप संख्या रेखा के दाहिनी ओर बढ़ेंगे।**

प्रयत्न करो

क्रम की पूर्ति कीजिए

1. $8 - 6 \; = \; 2$ $\qquad$ $8 - 5 \; = \; 3$

$8 - 4 =$ $\qquad$ $8 - 3 =$

$8 - 2 =$ $\qquad$ $8 - 1 =$

$8 - 0 =$ $\qquad$ $8 - (-1) =$

$8 - (-2) =$ $\qquad$ $8 - (-3) =$

$8 - (-4) =$

(i) अब 8-6,8-1,8-0,8-(-2),8-(-4) को संख्या रेखा पर दर्शाओ।

(ii)यदि आप धनात्मक पूर्णांक घटाते हैं तो कौन सी दिशा में सख्या रेखा पर बढ़ेंगे?

(iii) यदि आप ऋणात्मक पूर्णांक घटाते हैं तो संख्या रेखा पर किस दिशा में बढ़ेंगे?

2. ऋचा ने जाना कि जब कभी भी एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक से घटाते हैं तो दोनों संख्याओं का अंतर संख्या से कम होता है, क्या ऋचा सही है? अपने उत्तर का कारण बताओ।

अभ्यास - 3

1. निम्न संख्याओं का व्यवकलन संख्या रेखा पर दर्शाओ।

(i)	7 – 2	(ii)	8 – (– 7)	(iii)	3 – 7
(iv)	15 – 14	(v)	5 – (– 8)	(vi)	(–2) - (–1)

2. निम्न को हल कीजिए

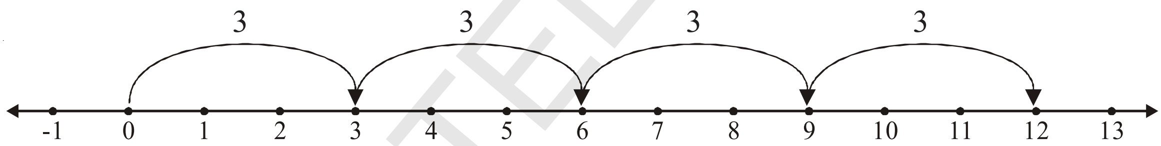
(i)	17 – (–14)	(ii)	13 – (– 8)	(iii)	19 – (– 5)
(iv)	15 – 28	(v)	25 – 33	(vi)	80 – (– 50)
(vii)	150 – 75	(viii)	32 – (– 18)		

3. -6 को 'ऋणात्मक पूर्णांक' तथा पूर्णांक के संकलन के रूप में व्यक्त कीजिए।

1.1.3 पूर्णांकों का गुणा (Multiplication of Integers)

हम जानते हैं कि $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$ (चार बार 3)

संख्या रेखा पर यह इस प्रकार प्रदर्शित होगा।



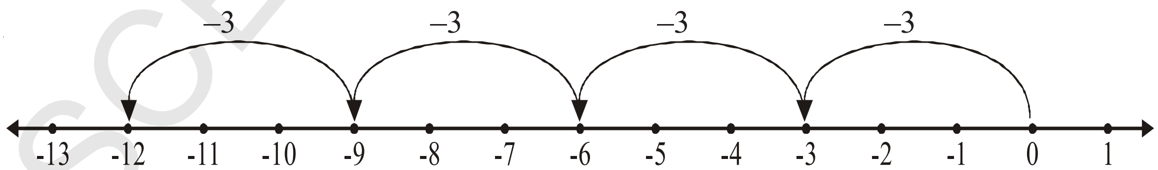
4x3 का अर्थ है 4 बार 3 संख्या रेखा पर शून्य से दाहिनी ओर बढ़ता है। यानि

4x3=12

आइए विचार करें 4x(-3) अर्थात 4 बार (-3)

$4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$

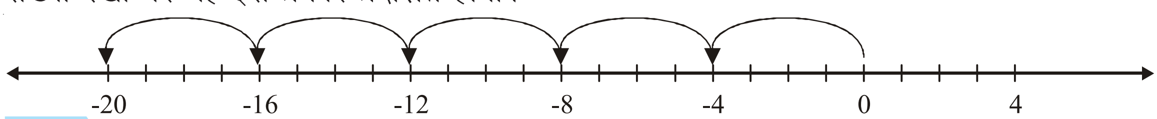
संख्या रेखा पर इस प्रकार प्रदर्शित होगा।



4x(-3) का अर्थ है 4 तीन बार तीन संख्या रेखा के शून्य से बायीं ओर बढ़ता है। इसलिए 4x(-3)=-12

इसी प्रकार $5\times(-4)=(-4)+(-4)+(-4) +(-4) + (-4) = -20$

संख्या रेखा पर यह इस प्रकार प्रदर्शित होगा।



इसी प्रकार 5x-4 का अर्थ है 5 बार 4 संख्या रेखा के शून्य से बायीं ओर बढ़ता है।

इसलिए 5x-4=-20

उदाहरण: $2 \times -5 = (-5) + (-5) = -10$

$3 \times -6 = (-6) + (-6) + (-6) = -18$

$4 \times -8 = (-8) + (-8) + (-8) + (-8) = -32$

प्रयत्न करो

1. हल करो

(i) 2×-6 (ii) 5×-4 (iii) 9×-4

अब, हम -4 x 3 को गुणा करेंगे।

निम्न नमूने का अध्ययन करो

$4 \times 3 = 12$

$3 \times 3 = 9$

$2 \times 3 = 6$

$1 \times 3 = 3$

$0 \times 3 = 0$

$-1 \times 3 = -3$

$-2 \times 3 = -6$

$-3 \times 3 = -9$

$-4 \times 3 = -12$

दूसरा गुणनखण्ड हमेशा 1 घटित होने पर हर बार गुणनफल 3 घटित होता है
इस क्रम में $-4 \times 3 = -12$.
हमें ज्ञात है कि $4 \times -3 = -12$
इसलिए, $-3 \times 4 = 3 \times -4 = -12$

ऋणात्मक चिह्न गुणनफल पर प्रभाव डालता है।

उपरोक्त नमूने से यह ज्ञात होता है कि **एक धनपूर्णांक और ऋण पूर्णांक का गुणनफल हमेशा ऋण होता है।**
इस क्रम का उपयोग करते हुए हम कह सकते हैं कि

$4 \times -5 = -4 \times 5 = -20$

$2 \times -5 = -2 \times 5 = -10$

$3 \times -2 =$

$8 \times -4 =$

$6 \times -5 =$

उपरोक्त उदाहरणों से हमें ज्ञात होता है कि एक धनात्मक पूर्णांक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल, एक ऋणात्मक गुणनफल होता है।

1.1.3 (a) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल

अब, क्या होगा जब हम -3 और - 4 को गुणा करेंगे।

इस क्रम का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9$

$-3 \times 2 = -6$

$-3 \times 1 = -3$

$-3 \times 0 = 0$

$-3 \times -1 = 3$

$-3 \times -2 = 6$

$-3 \times -3 = 9$

$-3 \times -4 = 12$

उपरोक्त निरीक्षण से यह ज्ञात होता है कि **जब हम** -3 **को** 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4 **से गुणा करते हैं तो गुणनफल** 3 **के हिसाब से बढ़ता है?**

अब हम -4 x -3 को गुणा करेंगे।

इस क्रम का निरीक्षण कीजिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$-4 \times 4 = -16$

$-4 \times 3 = -12$

$-4 \times 2 = -8$

$-4 \times 1 = -4$

$-4 \times 0 = 0$

$-4 \times -1 =$ ______

$-4 \times -2 =$ ______

$-4 \times -3 =$ ______

उपरोक्त निरीक्षण से यह ज्ञात होता है कि दुसरा गुणनखण्ड हमेशा 1 **घटने** पर गुणनफल 4 से बढ़ता है। दोनों क्रमों के आधार पर , $-3 \times -4 = -4 \times -3 = 12$

उदाहरण

$-3 \times -1 = 3$ $\quad$ $-4 \times -1 = 4$

$-3 \times -2 = 6$ $\quad$ $-4 \times -2 = 8$

$-3 \times -3 = 9$ $\quad$ $-4 \times -3 = 12$

उपरोक्त उदाहरण से ज्ञात होता है कि **दो ऋणात्मक पूर्णांको का गुणनफल** हमेशा **धनात्मक पूर्णांक होता है।** निम्न गुणन तालिका की पूर्ति कीजिए

×	3	2	1	0	–1	–2	–3
3	9	6	3	0	–3	–6	–9
2	6	4	2	0			
1							
0							
–1	–3	–2	–1	0	1	2	3
–2							
–3							

(i) क्या दो धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल हमेशा धनात्मक पूर्णांक होगा?

(ii) क्या दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल हमेशा धनात्मक पूर्णांक होगा?

(iii) क्या ऋणात्मक पूर्णांक एवं धनात्मक पूर्णांक का गुणनफल हमेशा ऋणात्मक पूर्णांक होगा?

1.1.3(b) दो से अधिक ऋणात्मक पूर्णांको का गुणनफल

हमें ज्ञात है कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल हमेशा धनात्मक पूर्णांक होता है। इसी प्रकार तीन, चार . . . ., ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा?

निम्न गुणनफल का निरीक्षण करो-

(i) $(-2) \times (-3) = 6$

(ii) $(-2) \times (-3) \times (-4) = [(-2) \times (-3)] \times (-4) = 6 \times (-4) = -24$

(iii) $(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) = [(-2) \times (-3) \times (-4)] \times (-5) = (-24) \times (-5) = 120$

(iv) $[(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6)] = 120 \times (-6) = -720$

उपरोक्त उदाहरणों द्वारा हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

(i) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है।

(ii) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

(iii) चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है।

(iv) पाँच ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

क्या छ: ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक या ऋणात्मक होगा बताइए

प्रयत्न करो

(a) $(-1) \times (-1) =$ ——

(b) $(-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

(c) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

(d) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

उपरोक्त तालिका से हमें ज्ञात होता है कि सम संख्याओं (दो,चार) के ऋणात्मक पूर्णांकों (i, iii) का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है जबकि विषम संख्याओं के ऋणात्मक पूर्णांकों (ii,iv) का गुणनफल पूर्णांक होता है। हमें यह भी ज्ञात होता है कि ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम होती है उनका गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है जबकि यदि ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या विषम हो तो उनका गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

अभ्यास - 4

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(i) $(-100) \times (-6) =$ ....

(ii) $(-3) \times$ .... $= 3$

(iii) $100 \times (-6) =$ ....

(iv) $(-20) \times (-10) =$ ....

(v) $15 \times (-3) =$ ....

2. निम्न क गुणन करो

(i) $3 \times (-1)$ (ii) $(-1) \times 225$

(iii) $(-21) \times (-30)$ (iv) $(-316) \times (-1)$

(v) $(-15) \times 0 \times (-18)$ (vi) $(-12) \times (-11) \times (10)$

(vii) $9 \times (-3) \times (-6)$ (viii) $(-18) \times (-5) \times (-4)$

(ix) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$ (x) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$

3. किसी ठंडा करने की प्रक्रिया में कमरे का तापमान 40^0C से प्रति घंटा 5^0Cघटाया जाता है। 10 घंटे के बाद कमरे का तापमान क्या होगा?

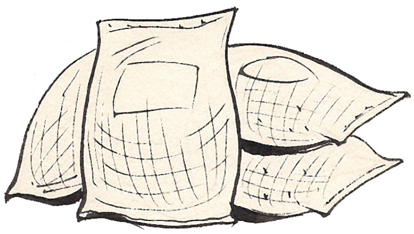
4. एक परीक्षा में 10 प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक सही उत्तर के लिए 3 तीन अंक प्रत्येक गलत उत्तर के लिए -1 अंक और उत्तर नहीं देने पर '0' अंक दिये जायेंगे।

i) यदि गोपी 5 सही उत्तर एवं 5 गलत उत्तर दे तो उसे कुल कितने अंक मिलेंगे?

ii) यदि रमेश 7 सही उत्तर एवं 3 गलत उत्तर दे तो उसे कुल कितते अंक मिलेंगे?

iii) यदि रश्मि 3 सही और 4 गलत उत्तर दे तो उसे कुल कितने अंक मिलेंगे?

5. एक व्यापारी को बासमती चावल बेचने पर रू. 10 प्रति बोरे पर लाभ मिलता है। 3 साधारण बोरे चावल बेचने पर उसे रू. 5 प्रति बोरे हानि होती है।



(i) यदि वह एक महीने में 3000 बोरे बासमती चावल और 5000 बोरे साधारण चावल बेचे तो उसका लाभ या हानि ज्ञात करो।

(ii) यदि वह महीने में साधारण चावल के 6400 बौरे बेचे तो उसे बासमती के कितने बोरे बेचने चाहिए जिससे कि उसे न तो लाभ हो और न ही हानि हो?

6. सही उत्तर के लिए पूर्णांकों द्वारा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

(i) $(-3) \times$ ________ $= 27$ (ii) $5 \times$ ________ $= -35$

(iii) ________ $\times (-8) = -56$ (iv) ________ $\times (-12) = 132$

1.1.4 पूर्णांकों का भागफल

हम जानते हैं कि विभाजन, गुणा की विपरीत संक्रिया है। आइए हम प्राकृतिक संख्याओं के कुछ उदाहरण देखें।

हम जानते हैं कि 3 × 5 = 15

तो 15 ÷ 5 = 3 या 15 ÷ 3 = 5

इसी प्रकार, 4 × 3 = 12

तो, 12 ÷ 4 = 3 या 12 ÷ 3 = 4

इस प्रकार हम कह सकते हैं, प्राकृतिक संख्याओं के गुणनफल कथन के दो भाजन कथन होते हैं। क्या हम पूर्णांक कथन के गुणनफल कथन के दो भाजन कथन लिख सकते हैं?

निरीक्षण करो।

गुणनफल कथन	*भाजन फलन*	
2 × (–6) = (–12)	(–12) ÷ (–6) = 2 ,	(–12) ÷ 2 = (–6)
(–4) × 5 = (–20)	(–20) ÷ (5) = (–4) ,	(–20) ÷ (–4) = 5
(–8) × (–9) = 72	72 ÷ (–8) = (–9) ,	72 ÷ (–9) = (–8)
(–3) × (–7) = ________	______ ÷ (–3) = _____ ,	________________
(–8) × 4 = __________	________________ ,	________________
5 × (–9) = __________	________________ ,	________________
(–10) × (–5) =	________________ ,	________________

उपरोक्त तालिका से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि जब हम ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाजन करें या धनात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से भाजन करें तो हम उन्हें पूर्ण अंक की तरह से भाग देते हैं और ऋणात्मक पूर्णांक भागफल प्राप्त होता है।

1. हल करो

(i) (–100) ÷ 5   (ii) (–81) ÷ 9   (iii) (–75) ÷ 5   (iv) (–32) ÷ 2

(v) 125 ÷ (–25)   (vi) 80 ÷ (–5)   (vii) 64 ÷ (–16)

प्रयत्न करो

क्या (–48) ÷ 8 = 48 ÷ (–8) सही है? आओ जाँच करें।

(i)90 ÷ (–45) and (–90) ÷ 45   (ii) (–136) ÷ 4 और 136 ÷ (–4)

हमें ज्ञात है कि

(–12) ÷ (–6) = 2; (–20) ÷ (–4) = 5; (–32) ÷ (–8) = 4; (–45) ÷ (–9) = 5

इसलिए जब हम **ऋणात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दें तो हमें भागफल के रूप में धनात्मक संख्या प्राप्त होती है।**

यह कीजिए

1. हल करो

(i) $-36 \div (-4)$ (ii) $(-201) \div (-3)$ (iii) $(-325) \div (-13)$

1.2 पूर्णांकों के गुण

छठवीं कक्षा में हमने पूर्ण संख्याओं की विशेषताओं को जाना है। यहाँ हम पूर्णांकों की विशेषताओं का अध्ययन करेंगे।

1.2.1 योग के अंतर्गत पूर्णांकों के गुण

(i) संवृत गुण

कथन	निष्कर्ष
$5+8=13$	संख्याओं का योग पूर्ण संख्या है।
$6+3=$	
$13+0=$	
$10+2=$	
$0+6=$	संख्याओं का योग पूर्ण संख्या है।

क्या दो पूर्ण संख्याओं का योगफल पूर्ण संख्या होती हैं? आप कहेंगे हाँ, इसलिए हम कह सकते हैं कि पूर्णांक योग के अंतर्गत संवृत होते हैं।

क्या पूर्णांक योग के अंतर्गत संवृत होते हैं? निम्नलिखित योगों को देखिए तथा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

कथन	निष्कर्ष
$6+3 = 9$	संख्याओं का योग पूर्णांक है।
$-10+2 =$	
$-3+0=$	
$-6+6=0$	
$-2+(-3)=-5$	
$7+(-6)=$	संख्याओं का योग पूर्णांक है।

क्या आप दो ऐसे पूर्णांक युग्म बता सकते हैं जिनका योग एक पूर्णांक न हो? आप का उत्तर होगा नहीं, इसलिए योग के अंतर्गत पूर्णांक संवृत होते है।

> पूर्णांकों a और b के लिए a+b भी एक पूर्णांक होगा।

ii) क्रमविनिमेय गुण (Commutative Property)

पढ़िए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

कथन 1	कथन 2	निष्कर्ष
$4 + 3 = 7$	$3 + 4 = 7$	$4 + 3 = 3 + 4 = 7$
$3 + 5 =$	$5 + 3 =$	
$3 + 0 =$	$0 + 3 =$	

इसी प्रकार किसी भी पूर्ण संख्या के युग्मों को जोड़ा जा सकता है। क्या आप किन्हीं ऐसे पूर्णांकों के युग्म बता सकते हैं, जिनका योग युग्मों के क्रम को बदलने से भिन्न हो? आप का उत्तर होगा नहीं, इसलिए हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं के युग्म में क्रमविनिमेय गुण होता है।

क्या पूर्णांकों के युग्म क्रमविनिमेय होते हैं।

नीचे दी गयी तालिका पढ़ो और रिक्त स्थान भरिए।

कथन1	कथन 2	निष्कर्ष
$5 + (-6) = -1$	$(-6) + 5 = -1$	$5 + (-6) = (-6) + 5 = -1$
$-9 + 2 =$	$2 + (-9) =$	
$-4 + (-5) =$	$(-5) + (-4) =$	

क्या दो पूर्णांकों के क्रम को बदलने से योगफल में भिन्नता आती है? नहीं, इसलिए पूर्णांकों का योग क्रमविनिमेय होता है।

कोई दो पूर्णांक a और b के लिए $a+b = b+a$

(iii) सहचर्य नियम (Assosiative Property)

निम्न उदाहरणों को पढ़िए।

(i) $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$
$5 + 4 = 2 + 7$
$9 = 9$

(ii) $(-2 + 3) + 5 = -2 + (3 + 5)$
$1 + 5 = -2 + 8$
$6 = 6$

(iii) $(-2 + 3) + (-5) = (-2) + [3 + (-5)]$
$1 + (-5) = (-2) + (-2)$
$-4 = -4$

(iv) $[(-2) + (-3)] + (-5) = -2 + [(-3) + (-5)]$
$-5 + (-5) = -2 + (-8)$
$-10 = -10$

क्या प्रत्येक स्थिति में योग समान होगा? हाँ।

इसलिए, पूर्णांक सहचर्य नियम का पालन करते हैं।

प्रयत्न करो

1. (i) $(2+5)+4 = 2+(5+4)$

   (ii) $(2+0)+4 = 2+(0+4)$

क्या यह साहचर्य नियम पूर्ण संख्याओं के लिए होता है। दो और उदाहरण देकर उत्तर लिखिए।

कोई तीन पूर्णांक a,b,c, के लिए $(a+b)+c = a+(b+c)$

(iv) **योग तत्समक (Additive Identity)**

निम्न का परीक्षण करो।

$-2 + 0 = -2$

$5 + 0 = 5$

$8 + 0 =$

$-10 + 0 =$

शून्य को पूर्णांक में जोड़ने पर क्या आपको वही पूर्णांक प्राप्त होगा? हाँ,

इसलिए **शून्य "0" पूर्णांकों का योग तत्समक है।**

कोई पूर्णांक a के लिए $a+0 = 0+a = a$

प्रयत्न करो

1. निम्न को जोड़िये

   (i) $2 + 0 =$

   (ii) $0 + 3 =$

   (iii) $5 + 0 =$

2. इसी प्रकार शून्य को अन्य पूर्ण संख्याओं से जोड़ो। क्या शून्य सभी पूर्ण संख्याओं के लिए योग तत्समक है?

(v) जोड़ का व्युत्क्रम (Additive Inverse)

योग तत्समक 0 को प्राप्त करने के लिए 3 में क्या जोड़ा जाना चाहिए।

निम्न का परीक्षण करो

$3 + (-3) = 0$

$7 + (-7) = 0$

$(-10) + 10 = 0$

इसी प्रकार अन्य पूर्णांकों के युग्मों की जाँच कीजिए।

ऊपर दिये गये प्रत्येक युग्म में एक पूर्णांक दूसरे पूर्णांक का योग व्युत्क्रम है।

> किसी पूर्णांक a के लिए दूसरा पूर्णांक - a जोड़ने पर यदि $a+(-a) = 0$ सत्यापित होता है, तो दोनों पूर्णांक एक दूसरे के योग व्युत्क्रम होंगे।

1.2.2 गुणनफल में पूर्णांकों के गुण

(i) संवृत गुण

निम्न तालिका पढ़ो और रिक्त स्थानों की पूर्ति करो।

कथन	निष्कर्ष
$9 \times 8 = 72$	गुणनफल एक पूर्णांक है।
$10 \times 0 =$	
$-15 \times 2 =$	
$-15 \times 3 = -45$	
$-11 \times -8 =$	
$10 \times 10 =$	
$5 \times -3 =$	

क्या यह संभव है कि पूर्णांकों के युग्मों का गुणनफल पूर्णांक न हो? नहीं।

सूचना : क्या आपको याद है कि भिन्न और दशमलव पूर्णांक नहीं है।

इसलिए पूर्णांक गुणा के संवृत नियम पालन करते हैं।

> यदि a,b दो पूर्णांक हों तो axb भी एक पूर्णांक होगा।

प्रयत्न करो

1. निम्न को गुणा करो

   (i) 2×3 = ________

   (ii) 5×4 = ________

   (iii) 3×6 = ________

2. इसी प्रकार अपनी पसंद के कोई दो पूर्ण संख्याओं को गुणा करो।
   क्या दोनों पूर्ण संख्याओं का गुणनफल सदैव पूर्ण संख्या होगी?

(ii) क्रमविनिमेय नियम **(Commutative Property)**

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याएँ गुणा में क्रमविनिमेय गुण का पालन करती हैं। क्या यह पूर्णांकों के लिए भी संभव है?

कथन 1	कथन 2	निष्कर्ष
$5 \times (-2) = -10$	$(-2) \times 5 = -10$	$5 \times (-2) = (-2) \times 5 = -10$
$(-3) \times 6$ =	$6 \times (-3)$ =	
-20×10 =	$10 \times (-20)$ =	

इस प्रकार पूर्णांक गुणा के गुणा के क्रमविनिमेय नियम का पालन करते हैं।

यदि a और b दो पूर्णांक हों तो $a \times b = b \times a$

(iii) साहचर्य नियम

2, –3, –4 समूह को निम्नलिखित प्रकार से गुणा करने पर

$[2 \times (-3)] \times (-4)$ और $2 \times [(-3) \times (-4)]$

$[2 \times (-3)] \times (-4)$ और $2 \times [(-3) \times (-4)]$

$= (-6) \times (-4)$ $= 2 \times 12$

$= 24$ $= 24$

पहले चरण में 2, –3 को एक समूह में लिखा गया है तथा दूसरे चरण में –3, –4 को एक समूह में। दोनों ही परिस्थितियों में गुणनफल समान हैं।

इसलिए, $2 \times (-3)] \times [(-4)] = 2 \times [(-3) \times (-4)]$

क्या समूहों का प्रभाव पूर्णांको के गुणनफल पर पड़ता है? नहीं। अतः तीन पूर्णांकों का गुणनफल समूहीकरण पर आधारित नहीं होता। इस प्रकार कहा जा सकता है कि पूर्णांकों का गुणनफल साहचर्य नियम का पालन करता है।

यदि a, b c तीन पूर्णांक हों तो $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

यह कीजिए

1 क्या $[(-5) \times 2)] \times 3 = (-5) \times [(2 \times 3)]$?

2 क्या $[(-2) \times 6] \times 4 = (-2) \times [(6 \times 4)]$?

प्रयत्न करो

$(5 \times 2) \times 3 = 5 \times (2 \times 3)$

क्या पूर्ण संख्याएँ साहचर्य नियम का पालन करती हैं? कुछ उदाहरण लेकर जांच कीजिए।

(iv) वितरण नियम (Distributive Property)

हम जानते हैं कि $9 \times (10 + 2) = (9 \times 10) + (9 \times 2)$

इसलिए पूर्ण संख्याओं के लिए वितरण नियम सत्य है।

क्या यह नियम पूर्णांकों के लिए भी सत्य है?

(i) $-2 \times (1 + 3) = [(-2) \text{ x } 1] + [(-2) \times 3]$

$-2 \times 4 = -2 + (-6)$

$-8 = -8$

(ii) $-1 \times [3 + (-5)] = [(-1) \times 3] + [(-1) \times (-5)]$

$-1 \times (-2) = -3 + (+5)$

$2 = 2$

जांच कीजिए $-3 \times (-4+2) = [(-3) \times (-4)] + [-3 \times (2)]$

आप देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में बायें हाथ का हल, दायें हाथ के हल के समान होगा। इसलिए पूर्णांक वितरण नियम का पालन करते हैं।

तीन पूर्णांकों a, b, c के लिए $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

(v) **गुणन तत्समक (Multiplicative Identity)**

0 पूर्णांकों का योग तत्समक है।

$2 \times 1 = 2$

$-5 \times 1 = -5$

$-3 \times 1 =$ ______

$-8 \times 1 =$ ______

$1 \times -5 =$ ______

आप पाते हैं कि किसी भी पूर्णांक को 1 से गुणा करने पर समान पूर्णांक प्राप्त होते है इसलिए 1 को किसी पूर्णांक का गुणा तत्समक कहा जाता है।

किसी पूर्णांक a के लिए $a \times 1 = 1 \times a = a$

(vi) **शून्य से गुणा**

हम जानते हैं कि किसी पूर्ण संख्या को शून्य से गुणा करने पर शून्य प्राप्त होता है।

पुर्णाकों को शून्य से गुणा करने पर क्या होता है?

निरीक्षण करो।

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-8) =$ ______

$9 \times 0 =$ ______

उपर्युक्त गुणन दर्शाता है कि '**पूर्णांक एवं शून्य का गुणनफल शून्य के बराबर होता है।**'

कोई पूर्णांक a के लिए $a \times 0 = 0 \times a = 0$

अभ्यास - 5

1. निम्न की जाँच कीजिए
   (i) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$
   (ii) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$
2. (i) किसी पूर्णांक a के लिए $(-1) \times a$ का मान क्या होता है?
   (ii) उस पूर्णांक को ज्ञात कीजिए जिसे (-1) से गुणा करने पर 5 प्राप्त होता है।
3. निम्न का गुणन उपर्युक्त नियमों द्वारा ज्ञात करो।
   (i) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ (ii) $8 \times 53 \times (-125)$
   (iii) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$ (iv) $(-41) \times 102$
   (v) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$ (vi) $7 \times (50 - 2)$
   (vii) $(-17) \times (-29)$ (viii) $(-57) \times (-19) + 57$

1.2.3 पूर्णांकों का व्यवकलन गुण

(i) व्यवकलन में संवृत नियम

क्या एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक से घटाने पर एक पूर्णांक प्राप्त होता है?

परीक्षण करो

$9 - 7 = \_\_\_\_$

$7 - 10 = \_\_\_\_$

$2 - 3 = \_\_\_\_$

$-2 - 3 = \_\_\_\_$

$-2 - (-5) = \_\_\_\_$

$0 - 4 = \_\_\_\_$

उपरोक्त तालिका द्वारा हम कह सकते हैं कि

किसी पूर्णांक a,b के लिए a-b भी पूर्णांक है।

(ii) पूर्णांक व्यवकलन में क्रमविनिमेय नियम

उदाहरण के लिए मान लो पूर्णांक

$6 - (-4) = 6 + 4 = 10$ और

$-4 - (6) = -4 - 6 = -10$

इसलिए , $6 - (-4) \neq -4 - (6)$

अर्थात, पूर्णांक व्यवकलन में क्रमविनिमेय नियम का पालन नहीं करता। $(a - b \neq b - a)$

प्रयत्न करो

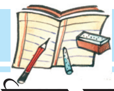
किन्हीं पाँच पूर्णांकों को लेकर पूर्णांक व्यवकलन के क्रमविनिमेय नियम की जांच करें

1.2.4 पूर्णांकों का भागफल गुण

(i) संवृत गुण

निम्न तालिका में अंकों को पढ़िए। खाली स्थानों की पूर्ति कीजिए।

कथन	निष्कर्ष	कथन	निष्कर्ष
$(-8) \div (-4) = 2$	पूर्णांक	$(-8) \div 4 = \frac{-8}{4} = -2$	
$(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$	पूर्णांक नहीं है	$4 \div (-8) = \frac{4}{-8} = \frac{-1}{2}$	



आपने क्या निष्कर्ष निकाला? आपके निष्कर्ष के अनुसार पूर्णांक भाजन में संवृत नियम का पालन नहीं करते।

प्रयत्न करो

किन्हीं 5 पूर्णांक युग्मों को लेकर जांच करो कि क्या वे **भागफल में** संवृत नियम का पालन करते हैं।

(ii) क्रमविनिमय नियमः-

हम जानते हैं कि पूर्ण अंकों का भाजन में क्रमविनिमय नियम नहीं होता। जांच करें कि यह नियम पूर्णांकों के लिए भी लागू नहीं होता। $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$.

क्या $(-9) \div 3$ बराबर है $3 \div (-9)$?

क्या $(-30) \div (6)$ बराबर है $(-6) \div (-30)$?

इसलिए पूर्णांकों का भाजन क्रमविनिमय नियम का पालन नहीं करता।

प्रयत्न करो

किन्ही पांच पूर्णांक युग्मों को लेकर जांच करो कि क्या वे **भाजन में** क्रमविनिमय नियम का पालन करते हैं।

(iii) शून्य से भाजन

पूर्ण संख्याओं की तरह पूर्णांकों को शून्य से भाजन नहीं किया जा सकता और किसी पूर्णांक को शून्य से भाजन करने पर शून्य प्राप्त होता है।

किसी पूर्णांक a के लिए $a \div 0$ सभव नहीं परंतु $0 \div a = 0$ for $a \neq 0$.

(iv) भाजन में तत्समक

किसी पूर्ण सख्या को 1 से विभाजित करने पर वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

आइए, जांच करें कि क्या यह नियम ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए भी सत्य है।

जांच करो

$(-8) \div 1 = (-8)$ $\quad$ $(11) \div 1 = +11$ $\quad$ $(-13) \div 1 =$ ______ $\quad$ $(-25) \div 1 =$ ________

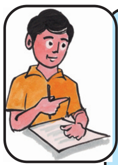
इसलिए ऋणात्मक पूर्णांक को 1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है। **अर्थात** 1 पूर्णांकों का भाजन का तत्समक है।

किसी पूर्णांक a के लिए $a \div 1 = a$.

किसी पूर्णांक को (-1) से भाजन करने पर क्या होता है? तालिका की पूर्ति करो

$(-8) \div (-1) = 8$ $\quad$ $11 \div (-1) = -11$ $\quad$ $13 \div (-1) =$ ______ $\quad$ $(-25) \div (-1) =$ ______

उपरोक्त तालिका द्वारा हम कह सकते हैं कि किसी पूर्णांक को -1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता बल्कि हमें योग विलोम प्राप्त होता है।



प्रयत्न करो

1. किसी पूर्णांक 'a' के लिए
   (i) $a \div 1 = 1$?
   (ii) $a \div (-1) = -a$?

   'a' के लिए अलग मान लेकर जाँच करें।

(iii) साहचर्य नियम

क्या $[(-16) \div 4] \div (-2) = (-16) \div [4 \div (-2)]$?

$[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

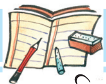
$(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

इसलिए, $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

इसलिए पूर्णांकों का भाजन साहचर्य नियम का पालन नहीं करता।

प्रयत्न करो

कोई पाँच उदाहरण लिखकर जांच करो कि क्या पूर्णांकों के **लिए** भाजन साहचर्य हैं।



अभ्यास - 6

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

   (i) $-25 \div$ .... = 25
   (ii) .... $\div 1 = -49$
   (iii) $50 \div 0$ = ...
   (iv) $0 \div 1$ = ...

1.3 ऋणात्मक संख्याओं की कुछ प्रायोगिक समस्याएँ

उदा 1 : परीक्षा में प्रत्येक सही उत्तर के चुनाव के लिए +5 अंक तथा -2 अंक प्रत्येक गलत उत्तर के चुनाव के लिए दिये गये हैं। (i) राधिका ने सभी प्रश्नों के उत्तर दिये और 10 सही उत्तरों के साथ 30 अंक प्राप्त किये। ii) जया ने 4 सही उत्तर के साथ परीक्षा में (-12) अंक प्राप्त किये। राधिका एवं जया ने कितने गलत उत्तरों के चुनाव किये ?

हल : (i) सही उत्तर के लिये अंक = 5

10 सही उत्तरों के लिए अंक $= 5 \times 10 = 50$

राधिका के कुल अंक = 30

गलत उत्तरों के अंक $= 30 - 50 = -20$

प्रत्येक गलत उत्तर के लिए अंक = (–2)

इसलिए गलत उत्तरों की संख्या $= (-20) \div (-2) = 10$

(ii) 4 सही उत्तरों के लिये दिये गये अंक $= 5 \times 4 = 20$

जया को प्राप्त अंक $= -12$

गलत उत्तरों के लिए $= -12 - 20 = -32$

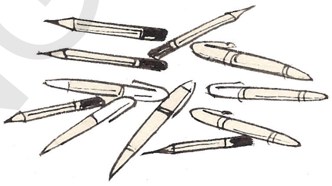
1 गलत उत्तर के लिए $= (-2)$

अर्थात गलत उत्तरों की संख्या $= (-32) \div (-2) = 16$

उदाहरण 2 :एक दुकनदार को 1 पेन बेचने पर ₹ 1 लाभ तथा 1 पेंसिल बेचने पर 40 पैसे हानि होती है।

(i) एक माह में उसे ₹ 5 की हानि होती है। यदि उसने 45 पेन बेचे हों तो उस माह उसके द्वारा बेची जानी वाली पेंसिलों की संख्या ज्ञात करो?

(ii) दूसरे माह उसे कोई नुकसान या लाभ नहीं हुआ। यदि उसने 70 पेन बेचे तो बेची जाने वाली पेंसिलों की संख्या ज्ञात करो?



हल: एक पेन बेचने पर प्राप्त लाभ = ₹ 1

45 पैन बेचने पर प्राप्त है = ₹ 45 (45 से दर्शाया गया है)

कुल हानि = ₹ 5 (-5 से दर्शाया गया है)

प्राप्त लाभ + प्राप्त हानि = कुल हानि

प्राप्त हानि = कुल हानि - कुल लाभ

= -5 -(45) = -50 = -₹50 = -5000 पैसे

एक पेंसिल बेचने पर प्राप्त हानि = 40 पैसे (- 40 से दर्शाया गया है)

बेची गई पेंसिलों की संख्या = - 5000/(-40) = 125 पेंसिलें

ii) दूसरे माह कोई लाभ या हानि नहीं हुई।

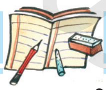
प्राप्त लाभ + प्राप्त हानि = 0

प्राप्त लाभ = - प्राप्त हानि

70 पेन बेचने पर प्राप्त लाभ = ₹ 70

पेंसिलें बेचने पर प्राप्त हानि = -70 या -7000 पैसे

बेची गई पेंसिलों की संख्या = (-7000)/(-40) = 175 पेंसिलें



अभ्यास – 7

1. एक परीक्षा में 15 प्रश्न दिये गये हैं। प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 अंक तथा प्रत्येक गलत प्रश्न के लिए -2 अंक निर्धारित किये गये। भारती ने सभी प्रश्नों को चुना और **उसके केवल** 9 प्रश्नों के उत्तर सही पाये गये। बताइए उसने कितने अंक प्राप्त किये। (ii) हेमा ने 5 प्रश्नों का प्रयास किया और सभी उत्तर सही किया। हेमा ने कुल कितने अंक प्राप्त किये?

2. एक सिमेंट कम्पनी ने एक सफेद थैला सिमेंट बेचने पर रु. 9 लाभ कमाता है। धूसर रंग के सिमेंट पर प्रति थैली उसे रु. 5 की हानि होती है।

(i) एक महीने में कम्पनी यदि 7000 थैले सफेद सीमेंट तथा 6000 थैले धूसर रंग के सिमेंट के थैले बेचे तो उस कम्पनी का लाभ या हानि ज्ञात करो।

(ii) यदि वह 54000 धूसर रंग के थैले बेचे तो उसे कितने सफेद सिमेंट के थैले बेचने होंगे ताकि उसे न लाभ हो और न ही हानि?

3. दोपहर 12 बजे का तापमान शून्य से 10^0 c अधिक है। यदि तापमान 2^0c प्रति घंटे के हिसाब से मध्य रात्रि तक घटता तो कितने बजे तापमान 8^0c शून्य से नीचे होगा? रात को 12 बजे कितना तापमान होगा?

4. एक परीक्षा में प्रत्येक सही उत्तर के लिए 3 अंक तथा -2 अंक प्रत्येक गलत उत्तर के लिए निर्धारित है। प्रश्न की प्रयास न करने पर कोई अंक नहीं दिया जायेगा। (i) राधिका ने 12 सही उत्तर दिये और 20 अंक प्राप्त किये। तो राधिका ने कितने प्रश्नों के उत्तर गलत दिये? (ii) मोहिनी ने 7 सही उत्तर देकर -5 अंक प्राप्त किये तो बताइए कि उसने कितने गलत उत्तर चुने?

5. एक खुदाई करने वाला यंत्र 6 मीटर प्रति मिनट की दर से खुदाई करता है। यदि जमीन तल से 10 मीटर ऊँचाई से खुदाई शुरू की जाये तो यंत्र कितने समय में -350 मीटर खुदाई करेगा?

मुख्यांश

1. N (प्राकृतिक संख्याएँ) = 1, 2, 3, 4, 5 . . .

   W (पूर्ण संख्याएँ) = 0, 1, 2, 3, 4, 5 . . .

   Z (पूर्णांक) = . –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 . . .

   या 0, ±1, ±2, ±3 (पूर्णांकों के समूह को I द्वारा दर्शाया जाता है)

2. (i) धनात्मक पूर्णांकों का योगफल संख्या रेखा की दाहिनी ओर बढ़ता है।

   (ii) ऋणात्मक पूर्णांकों का योगफल संख्या रेखा की बांई ओर बढ़ता है।

3. (i) धनात्मक पूर्णांकों को घटाने पर आप सख्या रेखा की बांई ओर बढ़ते हैं।

   (ii) ऋणात्मक पूर्णांकों को घटाने पर आप सख्या की दाहिनी ओर बढ़ते हैं।

4. (i) ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक या धनात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

   (ii) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है।

   (iii) ऋणात्मक संख्याओं का घातांक यदि सम संख्या हो तो गुणनफल धनात्मक होगा, ऋणात्मक संख्या का घातांक यदि विषम संख्या हो तो गुणनफल ऋणात्मक होगा।

5. (i) जब कभी ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक या धनात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से भाजन किया जाये तो भाजनफल ऋणात्मक पुर्णांक होता है।

(ii) जब ऋणात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से भाजन किया जाये तो भाजनफल धनात्मक पूर्णांक होता है।

(iii) जब हम दो समान चिह्नों वाले पूर्णांकों को गुणनफल या भाजन करें तो धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होगा। यदि वे विपरीत चिन्हों के हों तो ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होगा।

6. पूर्णांकों का संकलन एवं व्यवकलन निम्न गुणों का पालन करते हैं।

(i) पूर्णांकों का संकलन एंव व्यवकलन संवृत नियम का पालन करते हैं। अर्थात, a+b, a-b भी पूर्णांक है, a, b पूर्णांक के लिए।

(ii) पूर्णांक का संकलन क्रमविनिमय नियम का पालन करता है। अर्थात, a+b=b+a,

(iii)) पूर्णांकों का संकलन सहचर्य नियम का पालन करता है। a,b,c, पूर्णांकों के लिए (a+b)+c=a+(b+c)

(iv) पूर्णांकों का संकलन इकाई घटक नियम का पालन करते हैं। किसी पूर्णांक a के लिए

$a + 0 = 0 + a = a$

7. पूर्णांकों के गुणन निम्न गुणों का पालन करते हैं।

(i) पूर्णांक गुणा का संवृत नियम पालन करते हैं। पूर्णांक a,b के लिए a x b भी एक पूर्णांक होगा।

(ii) पूर्णांक गुणा का क्रमविनिमय नियम का पालन करते हैं।

a, b पूर्णांकों के लि $a \times b = b \times a$

(iii) पूर्णांक गुणा का इकाई घटक का पालन करते हैं। किसी पूर्णांक a के लिए

$1 \times a = a \times 1 = a$ गुणन का इकाई घटक है।

(iv) पूर्णांकों के गुणनफल सहचर्य नियम का पालन करते हैं। a,b,c के पूर्णांकों के लिए

$a \times (b \times c) = a \times b + a \times c$

8. पूर्णांकों के गुणनफल वितरण नियम का पालन करते है। a,b,c, गुणा के लिए $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$. इसे वितरण नियम कहते हैं।

9. क्रमविनिमय नियम तथा साहचर्य़ नियम से हमें प्रश्न का हल निकालने में सुविधा होती है।

10. किसी पूर्णांक ‘a’ के लिए

(i) $a \div 0$ परिभाषित नहीं किया जा सकता है।

(ii) $0 \div a = 0$ (जब $a \neq 0$)

(iii) $a \div 1 = a$

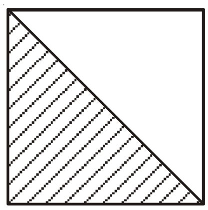
सामान्य भिन्न, दशमलव एवं परिमेय संख्याएँ (FRACTIONS, DECIMALS AND RATIONAL NUMBERS) 2

2.0 परिचय

हमारे दैनिक जीवन में हम कई ऐसे उदाहरण देखते हैं जहाँ हम भिन्नों का उपयोग करते हैं। उन्हें जानने का प्रयत्न कीजिए।

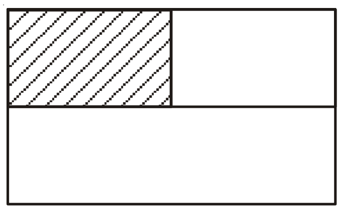
पूर्व कक्षा में हमनें भिन्नों के बारे में जानकारी प्राप्त की है। इस कक्षा में हम भिन्नों तथा दशमलव भिन्नों के गुणनफल तथा भाजन को समझेंगे। अंत में हमें एक बडे समूह का परिचय होगा जिसे परिमेय संख्याएँ कहते हैं।

निम्न आकृतियों को भिन्नों द्वारा दर्शाया गया है। जांच कीजिए।



चित्र1
1/2
हाँ/नहीं

चित्र 2
1/2
हाँ/नहीं

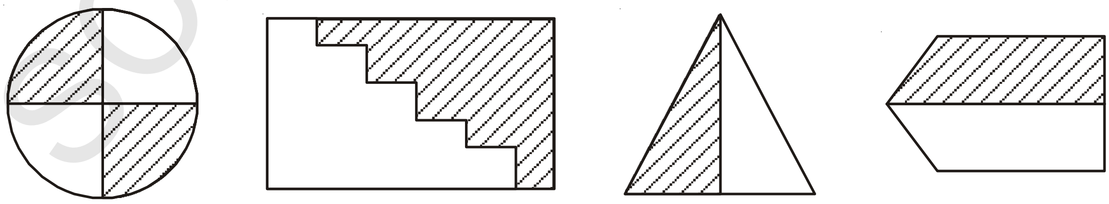


चित्र 3
1/3
हाँ/नहीं

कारण .... कारण .... कारण ....

क्या उपरोक्त आकृतियाँ दो बराबर भागों में विभाजित है? आप 5 और उदाहरण लिखकर अपने मित्र से जांच करने के लिए कहें।

यहाँ नेहा ने विभिन्न आकृतियों को 1/2 भाग में विभाजित किया है।



क्या ये सभी आकृतियाँ दो समान भाग (1/2) में विभाजित हैं? आकृतियों में खाली स्थान को कितने भागों में बाँटा गया है?

प्रयत्न करो

$\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ को अलग-अलग आकृतियों द्वारा दर्शाओ। अपने निर्णय की समीक्षा करो। अपने मित्रों से चर्चा कर इनका निरीक्षण करो।

सजातीय और विजातीय भिन्न (Proper and Improper Fractions)

पिछली कक्षा में आपने सजातीय (Proper) तथा विजातीय (Improper) भिन्नों के बारे में पढ़ा है। सजातीय भिन्न को पूर्ण रूप से दर्शाया जाता है। सजातीय भिन्नों के कुछ उदाहरण दीजिए।

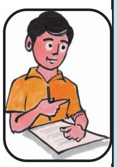
क्या $\frac{3}{2}$ सजातीय भिन्न है? इसकी जांच किस प्रकार करोगे?

विजातीय भिन्नों के गुण क्या हैं? विजातीय भिन्न में अंश, हर से बड़ा या हर के बराबर होता है।

विजातीय भिन्नों को मिश्रित भिन्नों के रूप में लिखा जा सकता है। उदाहरण के लिए $\frac{3}{2}$ को $1\frac{1}{2}$ के रूप में लिख सकते हैं। यह मिश्रित भिन्न है। **इसमें एक पूर्ण संख्या और सजातीय भिन्न है।**

इसे करो।

1. सजातीय, विजातीय तथा मिश्रित भिन्नों के पाँच उदाहरण लिखिए।



प्रयत्न करो

$2\frac{1}{4}$ को आकृति द्वारा दर्शाओ और इसके लिए कितनी इकाइयों की आवश्यकता होगी?

परिमेय संख्याओं की तुलना (Comparison of Fractions)

क्या आपको पता है कि समान हर वाले भिन्नों की तुलना किस प्रकार की जाती है? उदाहरण के लिए $\frac{1}{5}$ और $\frac{3}{5}$? $\frac{3}{5}$ बड़ी है $\frac{1}{5}$ से, कैसे?

क्या आप विभिन्न हर वाले भिन्नों की तुलना कर सकते हैं? उदाहरण $\frac{5}{7}$ और $\frac{3}{4}$?

हम दोनों भिन्नों को समान हर वाले भिन्नों में बदल कर उनकी तुलना करेंगे।

$$\frac{5}{7} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{28} \quad \text{और} \quad \frac{3}{4} \times \frac{7}{7} = \frac{21}{28}$$

क्योंकि $\frac{5}{7}=\frac{20}{28}$ और $\frac{3}{4}=\frac{21}{28}$

इसलिए, $\frac{5}{7}<\frac{3}{4}$

प्रयास कीजिए

1. बराबर अंश वाले 5 भिन्न लिखो (i) 3 (ii) 4
2. कौन सा बड़ा है? $\frac{5}{8}$ या $\frac{3}{5}$
3. क्या दिये गये युग्मों को सरल रूप में लिखने पर वे समान होंगे ?

   (i) $\frac{3}{8}$ और $\frac{375}{1000}$ (ii) $\frac{18}{54}$ और $\frac{23}{69}$

   (iii) $\frac{6}{10}$ और $\frac{600}{1000}$ (iv) $\frac{17}{27}$ और $\frac{25}{45}$

पिछली कक्षा में आपने भिन्नों का जोड़ना और घटाना सीखा है, आओ कुछ और उदाहरणों को हल करें।

उदाहरण1 : रजिया ने उसके गृहकार्य का $\frac{3}{7}$ हिस्सा किया जबकि रेखा ने $\frac{4}{9}$ हिस्सा **किया**। दोनों में से किसने कम गृहकार्य का हिस्सा किया?

हल : $\frac{3}{7}$ और $\frac{4}{9}$. का समान हर में बदल कर उसकी तुलना करने पर हमें प्राप्त होगा।

$\frac{3}{7}=\frac{27}{63}$; $\frac{4}{9}=\frac{28}{63}$

इसलिए $\frac{27}{63}<\frac{28}{63}$ अर्थात $\frac{3}{7}<\frac{4}{9}$

यानि रजिया ने गृहकार्य का कम हिस्सा पूरा किया।

उदाहरण2 : शंकर का परिवार $3\frac{1}{2}$ किलो ग्राम शक्कर का उपयोग महीने के प्रथम 15 दिनों में करता है। अगले 15 दिन में वे $3\frac{3}{4}$ किलो ग्राम शक्कर क उपयोग करते हैं। बताइए एक माह में वे कितने किलो शक्कर का उपयोग करेंगे?

हल : एक माह में उपयोग की गई शक्कर क भार

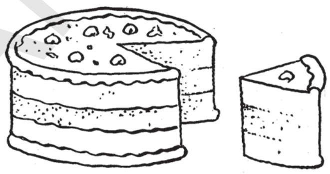
$$= \left(3\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}\right) \text{ कि.ग्रा.}$$

$$= \left(\frac{7}{2}+\frac{15}{4}\right) \text{ कि.ग्रा.} = \left(\frac{14}{4}+\frac{15}{4}\right)$$

$$=\frac{29}{4} \text{ कि.ग्रा.} = 7\frac{1}{4} \text{ कि.ग्रा.}$$

उदाहरण 3 : अहमद की जन्मदिवस पार्टी में केक का $\frac{5}{7}$ हिस्सा बांटा गया। कितना केक शेष रहा। ज्ञात कीजिए?

हल : मान लो कुल केक $= 1$ या $\frac{1}{1}$



केक का बांटा गया हिसाब $= \frac{5}{7}$

शेष बचा केक $= 1-\frac{5}{7}$

$$=\frac{7}{7}-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$$

इसलिए शेष बचे केक का हिस्सा $\frac{2}{7}$.

अभ्यास - 1

1. निम्न को हल करो

(i) $2+\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{9}+\frac{1}{3}$ (iii) $1-\frac{4}{7}$

(iv) $2\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ (v) $\frac{5}{8}-\frac{1}{6}$ (vi) $2\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}$

2. निम्न को आरोह क्रम में व्यवस्थित करो

(i) $\frac{5}{8}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}$

3. निम्न तालिका में दिये गये भिन्नों का योग पंक्तियों, स्तंभों और कर्णों में समान है। जांच करो।

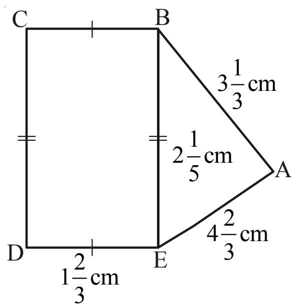
$\frac{6}{13}$	$\frac{13}{13}$	$\frac{2}{13}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{11}{13}$
$\frac{12}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{8}{13}$

4. एक आयताकार पेपर की लम्बाई $5\frac{2}{3}$ से.मी. तथा चौड़ाई $3\frac{1}{5}$ से.मी. है। पेपर की परिमिति ज्ञात करो।

5. एक नुस्खें के लिए $3\frac{1}{4}$ कप आटे की आवश्यकता होती है। राधा के पास $1\frac{3}{8}$ कप आटा है। अब राधा को कितने कप आटे की आवश्यकता है?

6. अब्दुल परीक्षा की तैयारी कर रहा है। उसने अपनी तैयारी का $\frac{5}{12}$ हिस्सा पूरा कर लिया। उसकी शेष बची पढ़ाई का हिस्सा ज्ञात कीजिए।

7. सामने दी गई आकृति में (i) ΔABE (ii) आयत BCDE की परिमिति ज्ञात कीजिए। किस चित्र की आकृति बड़ी है और कितनी?



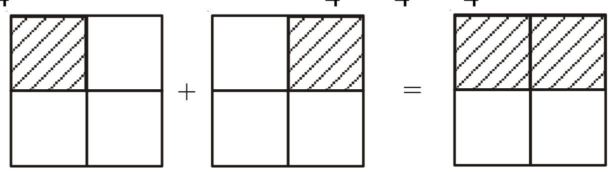
2.1 भिन्नों का गुणा

2.1.1 भिन्नों का पूर्ण संख्या से गुणा

हम जानते हैं कि पूर्व संख्याओं का गुणन का अर्थ है बार-बार उतनी संख्याओं को जोड़ना

उदाहरण :- 5 x 4 मतलब है, 5 बार 4 को जोड़ना

इसलिए $2\times\frac{1}{4}$ का अर्थ है, 2 बार $\frac{1}{4}$। इसे आकृति द्वारा दर्शायें। चित्र में वर्ग के $\frac{1}{4}$ हिस्से को छायांकित किया गया है। 2 बार $\frac{1}{4}$ हिस्से को जोड़ने पर $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$



चित्र 1 चित्र 2

आइए, अब $3\times\frac{1}{2}$ की जांच करें।

इसका अर्थ है 3 बार $\frac{1}{2}$ या तीन आधे

$$3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

यह कीजिए

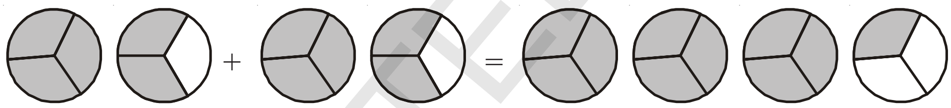
1. ज्ञात करो (i) $4\times\frac{2}{7}$ (ii) $4\times\frac{3}{5}$ (iii) $7\times\frac{1}{3}$

हम जानते हैं कि $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}$ और $\frac{3}{5}$ सजातीय भिन्न हैं।

अब हम विषम भिन्न $\frac{5}{3}$ को लें इसे 2 से गुणा करने पर $2\times\frac{5}{3}$

$$2\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$$

आकृति द्वारा देखने पर

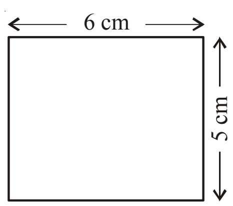


$$\frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$

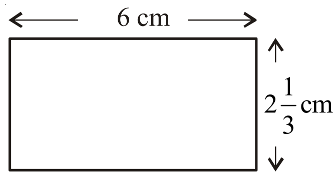
यह कीजिए

1. ज्ञात करो (i) $5\times\frac{3}{2}$ (ii) $4\times\frac{7}{5}$ (iii) $7\times\frac{8}{3}$

हम जानते हैं कि आयत का क्षेत्रफल लंबाई x चौड़ाई के बराबर होता है। यदि लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 6 से.मी.और 5 से.मी. हो तो आयत का क्षेत्र फल 6x5=30 वर्ग से.मी. होगा। यदि लंबाई और चौड़ाई 6 से.मी. और $2\frac{1}{3}$ से.मी. हो तो आयत का क्षेत्रफल क्या होगा? हमें ज्ञात है कि आयत का क्षेत्रफल लबाई और चौड़ाई के गुणनफल के बराबर होता है। मिश्रित भिन्न को पूर्ण अंक से गुणा करने के लिए हम सर्वप्रथम मिश्रित भिन्न को विजातीय भिन्न में लिखेंगे और फिर उसे पूर्ण अंक से गुणा करेंगे।



इसलिए आयत का क्षेत्रफल $= 6 \times 2\frac{1}{3}$



$= 6 \times \frac{7}{3} = \frac{42}{3}$ वर्ग से.मी.

$= 14$ वर्ग से. मी.

उपरोक्त उदाहरण से आप यह जान चुके होंगे कि पूर्ण अंक को सजातीय या विजातीय भिन्न से गुणा करते समय हम पूर्ण अंक को भिन्न के अंश भाग से गुणा करते हैं जबकि हर में कोई बदलाव नहीं होता है।

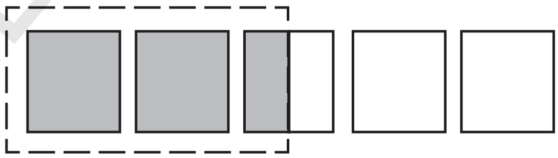
यह कीजिए

1. निम्न को ज्ञात करो।

(i) $3 \times 2\frac{2}{7}$ (ii) $5 \times 2\frac{1}{3}$ (iii) $8 \times 4\frac{1}{7}$ (iv) $4 \times 1\frac{2}{9}$ (v) $5 \times 1\frac{1}{3}$

2. आकृति द्वारा दर्शाओ, $2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

मान लो, $\frac{1}{2} \times 5$ आप इसे किस प्रकार दर्शाओगे?



$\frac{1}{2} \times 5$ का अर्थ 5 का आधा जो $\frac{5}{2}$ **या** $2\frac{1}{2}$

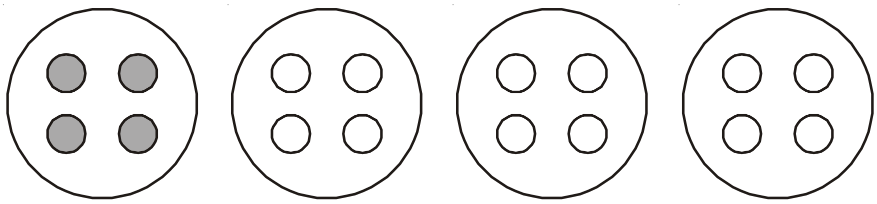
इसलिए 5 **का** $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$

इसी प्रकार $= 3$ का $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$ या $1\frac{1}{2}$

यहाँ 'का' अर्थ होता है गुणनफल

तो 16 का $\frac{1}{4}$ का क्या कर्थ है? इसका अर्थ है 16 को चार समान भागों में बांटना और उसके एक हिस्से को लेना। जब हम 16 चार बराबर भागों में बांटते हैं तो प्रत्येक हिस्सा 4 के बराबर होता है इसलिए 16 का $\frac{1}{4}$ बराबर है 4 के।

पत्थरों पर इसकी आकृति इस प्रकार होगी



16 का $\frac{1}{4}$ या $\frac{1}{4} \times 16 = \frac{16}{4} = 4$

उसी प्रकार, 16 का $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 16 = \frac{16}{2} = 8$.

उदाहरण 4 : नाजिया के पास 20 गोलियां हैं । रेशमा के पास नाजिया के पास की गोलियों का $\frac{1}{5}$ हिस्सा है तो रेशमा के पास कितनी गोलियां हैं?

उत्तर : रेशमा के पास 20 का $\frac{1}{5}$ हिस्सा $= 1/5 \ x \ 20 = 4$ गोलियां हैं।

उदाहरण 5 : चार व्यक्तियों वाले परिवार में 15 रोटियाँ बनती हैं। रोटियों को $\frac{1}{5}$ हिस्सा माँ द्वारा $\frac{3}{5}$ हिस्सा बच्चों द्वारा और शेष हिस्सा पिता द्वारा खाया गया।

(i) माँ ने कितनी रोटियाँ खायीं?

(ii) बच्चों ने कितनी रोटियाँ खायीं?

(iii) रोटियों का कितना हिस्सा पिता ने खाया?

हल : (i) कुल रोटियों की संख्या = 15

(ii) माँ द्वारा खायी गई रोटियों की संख्या $\frac{1}{5} \times 15 = 3$ रोटियाँ

(iii) कुल रोटियों का $\frac{3}{5}$ हिस्सा बच्चों ने खाया $= \frac{3}{5} \times 15 = 9$ रोटियाँ

(iv) शेष रोटियों की संख्या $= 15 - 3 - 9 = 3$ रोटियायाँ

(v) पिता द्वारा खाई गई रोटियों का हिस्सा $= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

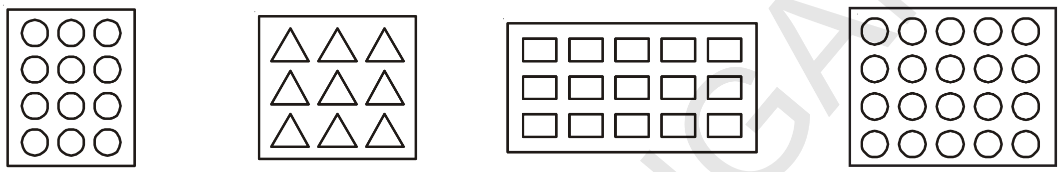
अभ्यास - 2

1. निम्न को गुणा करो तथा उसे मिश्रित भिन्नों में लिखो

(i) $\frac{3}{6}\times 10$ (ii) $\frac{1}{3}\times 4$ (iii) $\frac{6}{7}\times 2$ (iv) $\frac{2}{9}\times 5$ (v) $15\times\frac{2}{5}$

2. छायांकित करो (i) (a)वर्ग में वृत्त का $\frac{1}{2}$ भाग (ii) (b) वर्ग में त्रिभुज का $\frac{2}{3}$ भाग

(iii) (c) वर्ग में आयतों का $\frac{3}{5}$ भाग (iv) (d) वर्ग में वृत्तों का $\frac{3}{4}$ भाग



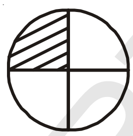
(a) (b) (c) (d)

3. ज्ञात करो (i) 12 का $\frac{1}{3}$ (ii) 15 का $\frac{2}{5}$

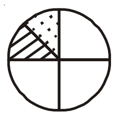
2.1.2 भिन्नों का भिन्न से गुणनफल

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$ का क्या अर्थ है? हमें ज्ञात हुआ कि $\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{2}$

मान लो $\frac{1}{4}$ -

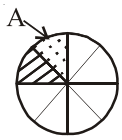


आप इस छायांकित भाग को $\frac{1}{2}$ हिस्सा किस प्रकार ज्ञात करोगे?



चित्र 1

हम इसके $\left(\frac{1}{4}\right)$ भागों को छायांकित कर सकते हैं, 2 समान भागों में। जैसे कि चित्र (i) में दिखाया गया है। इसका प्रत्येक हिस्सा $\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{2}$ हिस्से को दर्शाता है।



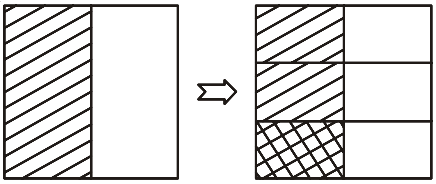
चित्र 2

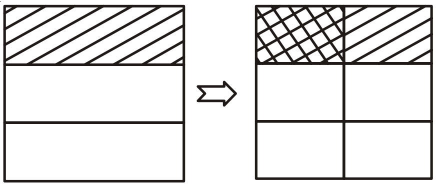
मान लो इसका एक हिस्सा (A) से दर्शाया गया है। चित्र (2) में देखिए

अब हम शेष हिस्सों को दो समान भागों में बांटेगे। इस प्रकार हमें आठ हिस्से प्राप्त होंगे अर्थात पूरा वृत्त 8 समान भागों में बाँटा गया। एक हिस्सा A है।

इसलिए A संपूर्ण का 1/8 है अर्थात $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{4}$ $= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ को ज्ञात करो।

$\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{2}$ is $\frac{1}{3}$ of  $= \frac{1}{6}$ अर्थात $\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{3}$ is $\frac{1}{2}$ of  $= \frac{1}{6}$ अर्थात $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

इसलिए हम कह सकते हैं कि $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

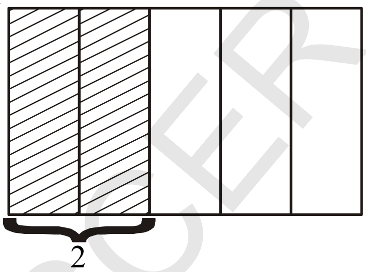
यह कीजिए

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

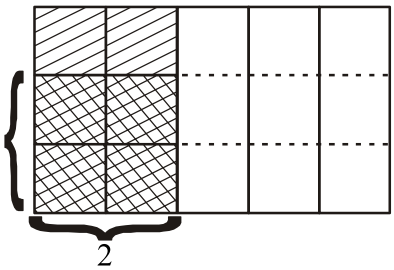
   (i) $\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{1\times1}{5\times7}=\square$ (ii) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\square=\square$

2. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$ को ज्ञात करो और छायांकित चित्र द्वारा जांच करो कि क्या $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$

आइए एक और उदाहरण लें। $\frac{2}{5}$ का $\frac{2}{3}$ जिन्हें चित्रों में छायांकित किया गया है।



$\frac{2}{5}$ चित्र1



$\frac{2}{3}$

$\frac{2}{5}$ चित्र2

चित्र 2 का छायांकित भाग $\frac{2}{5}$ का $\frac{2}{3}$ भाग को दर्शाता है।

अर्थात $\frac{2}{5}$ का $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

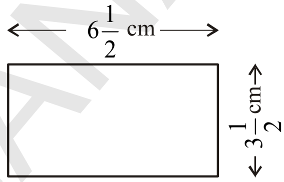
$\frac{2}{3}$ का $\frac{2}{5}$ ज्ञात करने के लिये हम $\frac{2}{5}$ को 3 समान भागों में बांटते हैं।

अब 3 में से 2 भागों का चुनाव करते हैं। यह कुल 15 के चार भागों को दर्शाता है।

इसलिए $\frac{2}{5}$ का $\frac{2}{3}$ of $\frac{2}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

उपरोक्त उदाहरणों द्वारा यह सिद्ध हुआ कि

$$\textbf{दो भिन्नों का गुणनफल} = \frac{\textit{अंशों का गुणनफल}}{\textit{हरों का गुणनफल}}$$



अब यदि एक आयत को लम्बाई $6\frac{1}{2}$ से.मी. तथा चैड़ाई $3\frac{1}{2}$ वर्ग से.मी. हो, तो

आयत क क्षेत्रफल $= 6\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = \frac{13}{2} \times \frac{7}{2}$ वर्ग से.मी. $= \frac{91}{4} = 22\frac{3}{4} cm^2$ वर्ग से.मी.

उदाहरण 6 : नरेंद्र एक पुस्तक का $\frac{1}{4}$ भाग एक घंटे में पढ़ता है। $2\frac{1}{2}$ घंटे में वह पुस्तक का कितना भाग पढ़ेगा ?

हल : नरेन्द्र द्वारा। घंटे में पढ़ा गया भाग $= \frac{1}{4}$

इसलिए $2\frac{1}{2}$ घंटे में नरेन्द्र द्वारा पढ़ा गया भाग $= 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

अर्थात नरेन्द्र $2\frac{1}{2}$ घंटे में पुस्तक का $\frac{5}{8}$ भाग पढ़ेगा।

उदाहरण 7 : एक तैरने के तालाब का $\frac{3}{10}$ भाग आधे घंटे में भरा जाता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे में तालाब में कितना पानी भरेगा ?

हल : एक घंटे में तालाब का भरा हिस्सा $= \frac{3}{10}$.

इसलिए $1\frac{1}{2}$ घंटे में तालाब में 3 गुना पानी भरा जायेगा।

अर्थात $= 3 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$ तालाब का हिस्सा $1\frac{1}{2}$ घंटे में भरा जायेगा।

प्रयत्न करो

आप जानते हो कि दो प्राकृतिक संख्यायों का गुणनफल प्रत्येक संख्या से अधिक होता है। उदाहरण के लिए, $3 \times 4 = 12$, $12 > 4$ और $12 > 3$. दो भिन्नों को गुणा करने से क्या होता है?

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए और निष्कर्ष निकालिए

उदा : $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{15} < \frac{2}{3}, \frac{8}{15} < \frac{4}{5}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से कम है।
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} = ------$		
$\frac{3}{5} \times \frac{\square}{2} = \frac{21}{10}$		
$\frac{5}{\square} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{6}$		

अभ्यास - 3

1. निम्न का गुणन फल ज्ञात करो।

   (i) $\frac{5}{6} \times \frac{7}{11}$ (ii) $6 \times \frac{1}{5}$ (iii) $2\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{5}$

2. गुणा करो और सरल रूप में लिखो

   (i) $\frac{2}{3} \times 5\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{2}{7} \times \frac{1}{3}$ (iii) $\frac{9}{3} \times \frac{5}{5}$

3. कौन सा बड़ा है?

   (i) $\frac{4}{7}$ का $\frac{2}{5}$ या $\frac{1}{2}$ का $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{4}{7}$ का $\frac{1}{2}$ या $\frac{3}{7}$ का $\frac{2}{3}$

4. रेहाना प्रतिदिन $2\frac{1}{2}$ घंटे सिलाई का काम करती है। वह अपना पूरा काम 7 दिन में पूरा करती है। उसे काम पूरा करने के लिए कुल कितने घंटे काम करना पड़ेगा?

5. एक ट्रक 1 लीटर पेट्रोल में 8 कि.मी. दूरी तक जाता है तो $10\frac{2}{3}$ लीटर पेट्रोल में वह कितनी दूरी तय करेगा?

6. राजा 1 सेकेंड में $1\frac{1}{2}$ मीटर चलता है। 15 मिनट में वह कितनी दूर चलेगा?

7. कथन को सही करने के लिए खाली व$\square$ में उचित संख्या लिखो

(i) $\frac{2}{3} \times \square = \frac{20}{21}$. (ii) $\frac{5}{7} \times \frac{\square}{5} = \frac{3}{\square}$

2.2 भिन्नों का भाजन

मान लो आपके पास 15 मीटर लंबा कपड़ा है। आप इसमें से $1\frac{1}{2}$ मीटर लंबाई के टुकड़े काटने चाहते हैं। आप को कुल $1\frac{1}{2}$ मीटर लम्बाई के कितने टुकड़े मिलेंगे? यहाँ आप 15 मीटर में $1\frac{1}{2}$ मीटर बार-बार तब तक घटायें जब तक आपके पास कपड़ा समाप्त न हो जाये। दूसरे उदाहरण में $\frac{21}{2}$ से.मी. लंबे पेपर को $\frac{3}{2}$ से.मी. टुकड़ों में काटना है तो आप कुल कितने टुकड़े काट सकेंगे? निश्चित रूप से $\frac{21}{2}$ को $\frac{3}{2}$ से भाग देने पर

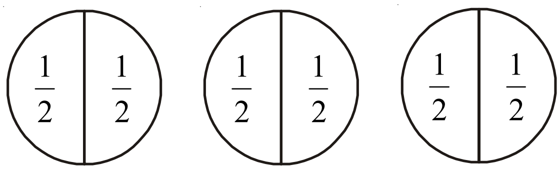
अर्थात $\frac{21}{2}\ \frac{3}{2}$

पूर्ण संख्याओं की पुनरावृति करें। $15 \div 3$ में 3 कितनी बार आता है? आपका उत्तर होगा 5, इसी प्रकार 2 कितनी बार 18 में आयेगा। हम 18 को 2 से भाग देते हैं। $18 \div 2$. और उत्तर होगा 9. इसी प्रकार पूर्ण संख्याओं को भिन्न से भाग देने की प्रक्रिया को जोड़कर देखिए।

2.2.1 पूर्ण संख्याओं का भिन्नों द्वारा भाजन

मान लो $3 \div \frac{1}{2}$.

किरण के अनुसार 3 में कितने $\left(\frac{1}{2}\right)$ होंगे। आइए, चित्र द्वारा ज्ञात करें।



उपरोक्त चित्र में 3 में कुल 6 आधे हैं

इसलिए $3 \div \frac{1}{2} = 6$

विचार करो $2 \div \frac{1}{3}$

इसका अर्थ है 2 में कितने एक तिहाई $\left(\frac{1}{3}\right)$ भाग होंगे? ज्ञात कीजिए

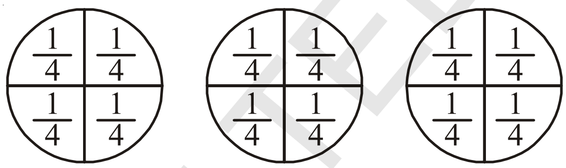
हम देखेंगे कि $2 \div \frac{1}{3}$ में 6 एक तिहाई भाग होंगे। या $2 \div \frac{1}{3} = 6$

यह कीजिए

(i) $2 \div \frac{1}{4}$ (ii) $7 \div \frac{1}{2}$ (iii) $3 \div \frac{1}{5}$

2.2.1a) भिन्नों के विलोम (Reciprocal of fraction)

मान लो $3 \div \frac{1}{4}$ अर्थात प्राप्त $\frac{1}{4}$ भाग जो 3 वृत्तों को 4 बराबर भागों में बांटने पर प्राप्त होते हैं।



वृत्त में एक चौथाइयों की संख्या 12 है, अर्थात $3 \div \frac{1}{4} = 12$

हमें ज्ञात हुआ कि , $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 12$.

यह दर्शाता है $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 12$

निरिक्षण करो $2 \div \frac{1}{3}$

हमें पता है कि $2 \div \frac{1}{3} = 6$

उपर्युक्त उदाहरण में $2 \div \frac{1}{3} = 2 \times \frac{3}{1} = 6$

इसी प्रकार $4 \div \frac{1}{4} = 16$ और $4 \times \frac{4}{1} = 16$.

$\frac{1}{3}$ के अंश और हर को बदलने पर $\frac{3}{1}$ प्राप्त होती है

इसी प्रकार, $\frac{4}{1}$ **को उल्टा करने पर** $\frac{1}{4}$ प्राप्त कर सकते हैं।

इन गुणन फलों को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$7 \times \frac{1}{7} = 1$

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$

$\frac{1}{9} \times 9 =$ ....

$\frac{2}{7} \times$ .... $= 1$

$\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} =$ ....

.... $\times \frac{5}{9} = 1$

कुछ और उदाहरण लेकर अभ्यास करें।

दो विलोम संख्याओं को गुणा करने पर 1 प्राप्त होता है।

इसलिए $\frac{7}{4}$ का विलोम $\frac{4}{7}$ तथा $\frac{4}{7}$ का विलोम $\frac{7}{4}$ है।

$\frac{5}{9}$ तथा $\frac{2}{5}$ विलोम क्या है?

प्रयत्न करो

1. क्या सजातीय भिन्न का विलोम सजातीय होगा?
2. क्या विजातीय भिन्न का विलोम विजातीय होगा?

इसप्रकार हम कह सकते हैं कि

$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 1 \times \frac{1}{2}$ का विलोम

$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 3 \times \frac{1}{4}$ का विलोम

राजू ने इस विधि से मिश्रित भिन्न द्वारा सिद्ध किया और बताया कि $1\frac{1}{2}$ का विलोम $1\frac{2}{1}$ है क्या यह सही है? जांच करो

$3 \div \frac{1}{2} =$ .... = ...

इसलिए $2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{3}{4}$ का विलोम $= 2 \times \frac{4}{3}$ का विलोम

$5 \div \frac{2}{4} = 5 \times$ .... $= 5 \times$......................

इससे ज्ञात होता है कि **भिन्न के भाजन का अर्थ है- भिन्न के विलोम से गुणा करना**

यह कीजिए

(i) $9 \div \frac{2}{5}$ (ii) $3 \div \frac{4}{7}$ (iii) $2 \div \frac{8}{9}$

किसी पूर्ण संख्या को मिश्रित भिन्न से **भाजन करने के लिए हम सर्वप्रथम मिश्रित भिन्न को विजातीय भिन्न में बदलते हैं और फिर उसे हल करते हैं।**

उदाहरण : $4 \div 3\frac{2}{5} = 4 \div \frac{17}{5} = 4 \times \frac{5}{17} = \frac{20}{17}$ ज्ञात करो $11 \div 3\frac{1}{3} = 11 \div \frac{10}{3} = ?$

यह कीजिए

ज्ञात करो (i) $7 \div 5\frac{1}{3}$ (ii) $5 \div 2\frac{4}{7}$

2.2.2 भिन्नों का पूर्ण संख्याओं द्वारा भाजन

$\frac{3}{4} \div 3$ का मान क्या होगा?

पूर्व **निरीक्षण** के आधार पर

$\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

इसी प्रकार, $\frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = ?$ $\quad \frac{5}{7} \div 6$ और $\frac{2}{7} \div 8?$

मिश्रित भिन्नों को पूर्ण अंको से भाग करने के लिए सर्वप्रथम हम मिश्रित भिन्न को विजातीय भिन्न बदलेंगे और फिर हल करेंगे।

$2\frac{1}{3} \div 5 = \frac{7}{3} \div 5 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$ ज्ञात करो $\quad 4\frac{2}{5} \div 3 = ... = ...;\ 2\frac{3}{5} \div 2 = ... = ...$

2.2.3 एक भिन्न का दूसरे भिन्न से भाजन

हम $\frac{1}{4} \div \frac{5}{6}$ को हल करते हैं।

$\frac{1}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{6}$ का विलोम $= \frac{1}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

इसी प्रकार $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{5} \times \frac{2}{3}$ का विलोम $= .... = ...$ और $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = ... = ...$

प्रयत्न करो

ज्ञात करो (i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{1}{6} \div \frac{9}{2}$

उदा 8 : एक खाली **तालाब की** क्षमता का $\frac{9}{10}$ हिस्से तक पानी भरना है। एक पम्प आधे घण्टे में **तालाब** का $\frac{3}{10}$ हिस्सा पानी भरता है। पम्प **तालाब** का $\frac{9}{10}$ भाग में कितने समय में भरेगा?

हल:- हमें ज्ञात करना होगा कि $\frac{9}{10}$ भाग में कितने $\frac{3}{10}$ के कितने **हिस्से** होंगे।

अर्थात $\frac{9}{10} \div \frac{3}{10}$

$\frac{9}{10} \times \frac{10}{3} = 3$ इसलिए 3 आधे घण्टे ($1\frac{1}{2}$ घण्टे) में **तालाब** का $\frac{9}{10}$ हिस्सा भरेगा।

अभ्यास - 4

1. निम्न भिन्नों के विलोम लिखिए

(i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{8}{7}$ (iii) $\frac{13}{7}$ (iv) $\frac{3}{4}$

2. हल करो

(i) $18 \div \frac{3}{4}$ (ii) $8 \div \frac{7}{3}$ (iii) $3 \div 2\frac{1}{3}$ (iv) $5 \div 3\frac{4}{7}$

3. हल करो

(i) $\frac{2}{5} \div 3$ (ii) $\frac{7}{8} \div 5$ (iii) $\frac{4}{9} \div \frac{4}{5}$

4. दीपक अपने घर का $\frac{2}{5}$ भाग एक दिन में रंग सकता है। अगर इसी तरह वह कार्य करता रहे तो पूरे घर की रंगाई वह कितने दिनों में करेगा?

2.3 दशमलव संख्यायें या दशमलव भिन्न (Decimal Numbers)

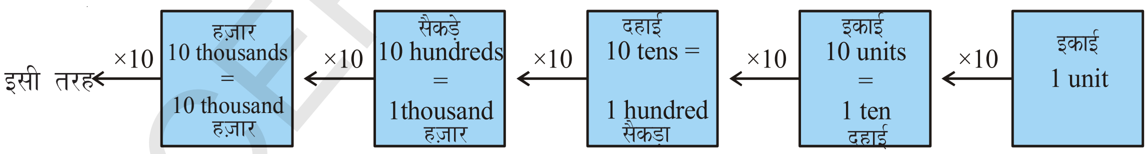
छठवीं कक्षा में हमने दशमलव **संख्याओं** के जोड़ तथा घटाना सीखा है। आइए, अब हम उनके गुणनफल एवं भाजन के बारे में जानकारी प्राप्त करें।

आइए 12714 का विस्तार रूप देखें।

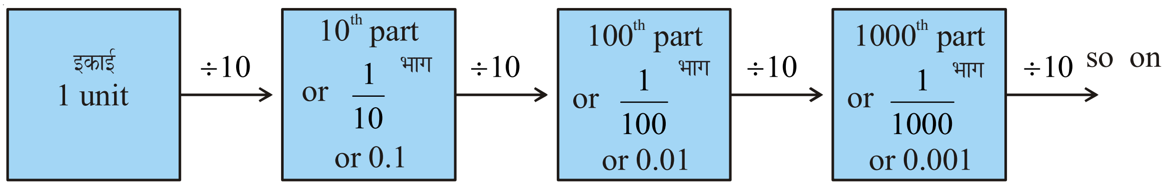
$$12714 = 1\times 10000 + 2 \times 1000 + 7 \times \ldots\ldots + 1 \times \ldots\ldots + 4 \times 1$$

इसी प्रकार 12714.2 का विस्तार रूप क्या होगा?

आपको यह ज्ञात होगा कि संख्या के दाहिने से बांई ओर जाने पर संख्या का मान 10 के गुणन में बढ़ता है।



यदि हम बायें से दाहिने ओर बढ़ें तो क्या होगा? आप देखेंगे कि संख्या का मान 10 विभाजित होगा। यदि इकाई को 10 से भाग दें तो क्या होगा? हम जानते हैं कि $1 \div 10 = \frac{1}{10} = 0.1$



इस प्रकार 12714.2 का विस्तार **रूप** होगा

$$12714.2 = 1\times 10000 + 2\times 1000 + 7\times ......+ 1\times ...... + 4\times 1 + 2\times \frac{1}{10}$$

अब उदाहरण के लिए 3.42 में सभी **संख्याओं** का स्थानीय मान ज्ञात करें। यहाँ पर बिन्दु (.) या दशमलव पूर्व अंक **एवं** आंशिक भाग से अलग करता है। दशमलव के दाहिने भाग को दशमलव भाग कहते हैं। दशमलव के **बायें** वाले भाग को पूर्णांक भाग कहते हैं।

	3 इकाई स्थान पर है।	4 *दशमलव के पहले स्थान पर हैं।*	2 *दशमलव के दूसरे स्थान पर है।*
स्थानीय मूल्य	$3\times 1 = 3$	$4\times\frac{1}{10}=\frac{4}{10}$ या 0.4	$2\times\frac{1}{100}=\frac{2}{100}$ या 0.02

प्रयत्न करो

1. निम्न तालिका की पूर्ति करो

सैंकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दसवाँ भाग $\left(\frac{1}{10}\right)$	सौवाँ भाग $\left(\frac{1}{100}\right)$	हजार्वा भाग $\left(\frac{1}{1000}\right)$	संख्या
5	4	7	8	2	9	547.829
0	7	2	1	7	7	_______
3	2	__	__	5	4	327.154
6	__	4	__	2	__	614.326
2	__	6	5	__	2	236.512

2. निम्न संख्याओं का विस्तार रूप लिखिए।

(i) 30.807 (ii) 968.038 (iii) 8370.705

इसी प्रकार लम्बाई भार तथा पैसों को एक इकाई से दूसरी इकाई में बदलने के लिए हम दशमलव का उपयोग करते हैं। उदाहरण : $\frac{5}{100}$ = `0.05; $220\text{ g} = \frac{220}{1000}\text{kg} = 0.220\text{ kg}$; $5\text{ cm} = \frac{5}{100}\text{ m} = 0.05\text{ m}$

यह कीजिए

(i) 50 पैसे= ₹ _____ (ii) 22 g = _____ kg (iii) 80 cm = m

2.3.1 दशमलव संख्यायों की तुलना करना

अभिषेक एंव नेहा के पास क्रमशः रू. 375.50 तथा रू. 375.75 हैं। दोनों में से किसके पास अधिक पैसे हैं। इसे मालूम करने के लिए हम सर्वप्रथम दशमलव के बांयी ओर की स्ख्याओं की तुलना करेंगे। चूंकि दोनों बच्चों के पास रू. 375 हैं, इसलिए हम दशमलव के दाहिनी ओर की संख्याओं की तुलना करेंगे। हम देखेंगे कि नेहा के पास दसवें स्थान पर 7 और अभिषेक के पास दसवें स्थान पर 5 है। इसलिए 7>5 अर्थात नेहा के पास अधिक पैसे हैं। यानि 375.75>375.50

उपरोक्त उदाहरण को ध्यान में रखकर निम्न संख्याओं की तुलना कीजिए। कौनसी बड़ी संख्या है?

(i) 37.65 और 37.60 (ii) 1.775 और 19.780 (iii) 364.10 और 363.10

आइए देखें कि किस प्रकार दशमलव संख्याओं को जोड़ा और घटाया जाता है।

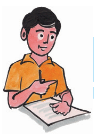
(i) 221.85 + 37.10

$$\begin{array}{r} 221.85 \\ +37.10 \\ \hline 258.95 \\ \hline \end{array}$$

(ii) 39.70 - 6.85

$$\begin{array}{r} 39.70 \\ -06.85 \\ \hline 32.85 \\ \hline \end{array}$$

दो दशमलव संख्याओं को जोड़ने या घटाने के लिए दोनों संख्याओं के दशमलव एक दूसरे के ठीक नीचे होने चाहिए। इसके ***बाद*** *ही जोड़ या घटाव करना चाहिए।*



यह कीजिए

(i) 0.25 + 5.30 (ii) 29.75 - 25.97.

उदाहरण 9 : एक समद्विबाहु त्रिभुज की दो बराबर भुजाओं की लंबाई 3.5 से.मी. तथा अन्य भुजा की लम्बाई 2.5 से.मी. हो तो त्रिभुज की परिमिति ज्ञात करो।

हलः समद्विबाहु त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई 3.5 से.मी., 3.5 से.मी तथा 2.5 से.मी है।

इसलिए त्रिभुज की परिमिति = त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग

= 3.5से.मी + 3.5 से.मी + 2.5 से.मी = 9.5 से.मी

अभ्यास - 5

1. कौन सी संख्या बड़ी है?

   (i) 0.7 या 0.07 (ii) 7 या 8.5

   (iii) 1.47 या 1.51 (iv) 6 या 0.66

2. निम्न को पैसों में व्यक्त करो

   (i) 9 पैसे (ii) 77 रू 7पैसे (iii) 235 पैसे

3 (i) 10 से.मी को मीटर तथा किलो मीटर में व्यक्त करो

   (ii) 45 मिली मीटर को से.मी., मीटर तथा किलोमीटर में व्यक्त करो।

1 सेमी = 10 मिमी
1 मी = 100 सेमी
1 किमी = 1000 मी
1 किग्रा = 1000 ग्राम

4. निम्न को किलोग्राम में व्यक्त करो

(i) 190 ग्राम (ii) 247 ग्राम (iii) 44 किलो 80 ग्राम

5. निम्न दशमलव संख्याओं का विस्तार रूप लिखिए।

(i) 55.5 (ii) 5.55 (iii) 303.03

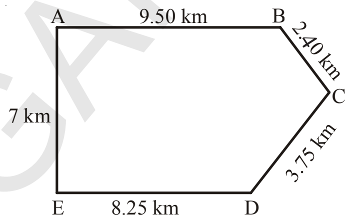
(iv) 30.303 (v) 1234.56

6. निम्न दशमलव संख्याओं में 3 का स्थानीय मूल्य लिखो।

(i) 3.46 (ii) 32.46 (iii)7.43

(iv) 90.30 (v) 794.037

7. चित्र में अरुणा और राधा ने दो अलग-अलग स्थानों से यात्रा शुरू की। अरुणा A से चलकर B से होते हुए C बिन्दु पर जबकि राधा E से चलकर D से होते हुए C बिन्दु पर यात्रा पूरी करती है। बताइए किसने अधिक यात्रा की और कितनी?

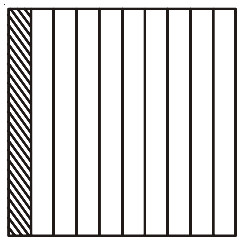


8. उपेन्द्र सब्जियाँ खरीदने के लिए बाजार गया। उसने 2.5 कि. 250 ग्राम टमाटर, 2 कि. 500 ग्राम आलु, 750 ग्राम भिंडी और 125 ग्राम हरी मिर्ची खरीदी। उसने कुल कितनी सब्जी खरीदी?

2.4 दशमलव संख्याओं का गुणनफल

रादेन्द्र अपनी माँ के साथ सब्जी लेने बाजार गया। उन्होनें आलू रू. 8.50 प्रति किलो दर से 2.5 कि.ग्रा. आलू खरीदे। बताइए उन्हें सब्जीवाले को कितने पैसे देने होंगे?

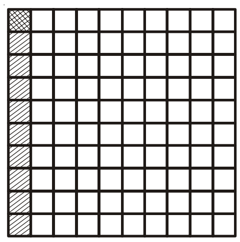
हम अपने दैनिक जीवन में कई बार दशमलव के गुणन करते हैं। चलिए सीखें कि दो संख्याओं का गुणन कैसे किया जाता है।



चित्र1

मान लो 0.1 x 0.1 का गुणा करना है। 0.1 का अर्थ है 10 हिस्सों का एक हिस्सा, इसे $\frac{1}{10}$ द्वारा दर्शाया जाता है। (चित्र 1 में)

इसलिए $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ का अर्थ है $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$ इसलिए हम यहाँ $\frac{1}{10}$ का दसवाँ हिस्सा ज्ञात करके $\frac{1}{10}$ को 10 भागों में बाँटेंगे।



चित्र 2

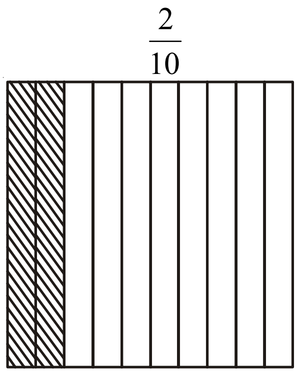
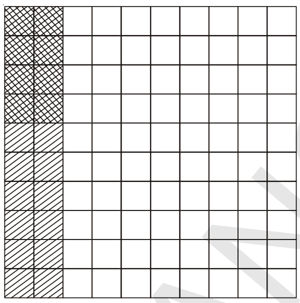
इसे चित्र(2) में दर्शाया गया है। चित्र 2 में कितने वर्ग हैं? 100 वर्ग हैं। इसलिए 100 वर्ग या 0.01 को दर्शाता है। अतः निष्कर्ष निकलता है कि

$$0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0.01$$

आइए 0.4 x 0.2 का गुणनफल देखें

$$0.4 \times 0.2 = \frac{4}{10} \times \frac{2}{10} \text{ या } \frac{4}{10} \text{ of } \frac{2}{10}$$

चित्र द्वारा दर्शाने पर

$\frac{4}{10}$ का  =  $= \frac{8}{100}$

उपरोक्त चित्र में 100 वर्गों में से 8 वर्ग दोहरे छायांकित खाने हैं। जिसे 0.08 से दर्शाया गया है। 0.1 x 0.1 और 0.4 x 0.2 का गुणा करते समय हमें यह ज्ञात हुआ कि दशमलव संख्याओं को गुणा करते समय हम पहले उन्हें पूर्ण अंकों की तरह गुणा करते हैं। जैसे कि 0.1 x 0.1 का गुणा, 1 x 1 है, इसी प्रकार 0.4 x 0.2 में हम 4 x 2 लेते हैं। उनका गुणनफल 8 है। इसके पश्चात हम संख्या के दशमलव के दाहिने ओर की संख्याएँ गिनते हैं। दोनों उदाहरणों 0.1 x 0.1और 0.4 x 0.2 में दाहिने ओर 2 संख्याएँ हैं। इसलिए दशमलव को गुणा के बाद, 2 संख्याओं के बाद लगायेंगे।

इसलिए 0.1 x 0.1 = 0.01 या 0.01

और 0.4 x 0.2 = 0.08 या 0.08

किसी दशमलव संख्या में पूर्णांक स्थान न होने पर हम गुणा करने के पश्चात दशमलव को गुणक संख्या के बायीं ओर लगाते हैं।

यदि हम 0.5 x 0.05 को गुणा करें तो हम दशमलव बिन्दु गुणनफल संख्या के दाहिने से बांयी ओर गिनकर लगायेंगे। अर्थात 0.5 x 0.05 = 0.025

1.2 x 2.5 का गुणा करने पर, हम पहले 12 और 25 का गुणा करेंगे। यदि 12 x 25 = 300, 1.2 तथा 2.5 दोनों में दशमलव एक-एक संख्या के बाद है। इसलिए 1 + 1 = 2, इसलिए 300 में अंतिम संख्या से 2 स्थान पहले हम दाहिनी से बायीं ओर बढ़ेंगे और फिर दशमलव बिन्दु लगायेंगे यानि 1.2 x 2.5 = 3

उसी प्रकार 2.5 और 1.25 का गुणा करते समय, हम 25 और 125 को गुणा करेंगे और दशमलव बिन्दु गुणनफल को 3 स्थानों के बाद लगायेंगे। अर्थात 2.5x1.25 = 3.225

यह कीजिए

1. ज्ञात करो (i) 1.7×3 (ii) 2.0×1.5 (iii) 2.3×4.35
2. प्रथम प्रश्न के उत्तरों को अवरोही क्रम में लिखिए।

उदाहरण 10 : आयत की लम्बाई 7.1 से.मी. और चौड़ाई 2.5 से.मी है तो उसका क्षेत्रफल क्या होगा?

हलः आयत की लम्बाई $= 7.1$ cm

आयत की चौड़ाई $= 2.5$ cm

अर्थात, आयत का क्षेत्रफल $= 7.1 \times 2.5 = 17.75$ वर्ग से.मी.

2.4.1 दशमलव संख्या को 10, 100, 1000 से गुणन फल

रेशमा ने देखा कि $3.2 = \frac{32}{10}$ जबकि $2.35 = \frac{235}{100}$. अर्थात दशमलव के स्थान पर भिन्न निर्भर करता है। दशमलव संख्या को भिन्न में परिवर्तित कर सकते हैं। हर के स्थान पर 10 या 100, लिखकर उसने पहचाना कि दशमलव संख्या को 10, 100 या 1000,

चलिए देखते हैं क्या हम कोई पद्धति प्राप्त कर सकते हैं? क्या 10,100,1000. से गुणा करने पर नीचे दी गयी तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति करो।

$1.76 \times 10 = \frac{176}{100} \times 10 = 17.6$	$2.35 \times 10 =$	$12.356 \times 10 =$ ....
$1.76 \times 100 = \frac{176}{100} \times 100 = 176$ or 176.0	$2.35 \times 100 =$	$12.356 \times 100 =$ ....
$1.76 \times 1000 = \frac{176}{100} \times 1000 = 1760$ or 1760.0	$2.35 \times 1000 =$	$12.356 \times 1000 =$ ....
$0.5 \times 10 = \frac{5}{10} \times 10 = 5$; $0.5 \times 100 =$ .... ; $0.5 \times 1000 =$		

उत्तरों की जाँच करो। क्या आपने कोई नियम प्राप्त किया है? दशमलव संख्या में सीधे हाथ की तरह आगे बढ़ता है, 10, 100, 1000 आदि।

2.4.2 दशमलव संख्याओं का भाजन

गोपाल को अपनी कक्षा सजाने के लिए कुछ रंगीन पट्टियों की आवश्यकता है। प्रत्येक पट्टी की लंबाई 1.6 से.मी. होनी चाहिए। उसके पास कुल 9.6 से.मी. लम्बाई की पट्टी है। उसे कुल कितनी पट्टियां मिलेंगी? उसके अनुसार $\frac{9.6}{1.6}$ से.मी. क्या यह सही है?

दोनों संख्याओं में दशमलव बिन्दु हैं। इस प्रकार अब हम दसमलव संख्याओं का भाजन सीखेंगे।

2.4.2(a) संख्याओं का 10, 100, 1000 आदि से भाजन

उदा : 31.5 $\div$10.

$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

उसी प्रकार , $31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \div 100 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$

उसी प्रकार

क्या ऐसे कोई स्वरूप हैं जिससे कि हम संख्याओं को 10, 100 या 1000 से भाजन कर सकें।

नीचे दी गई तालिका का स्वरूप देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति करो।

29.5 ÷ 10 = 2.95	132.7 ÷ 10 = ...	1.5 ÷ 10 = ...	17.36 ÷ 10 = ...
29.5 ÷ 100 = 0.295	132.7 ÷ 10 = ...	1.5 ÷ 100 = ...	17.36 ÷ 100 = ...
29.5 ÷ 1000 = 0.0295	132.7 ÷ 1000 = ...	1.5 ÷ 1000 = ...	17.36 ÷ 1000 = ...

2.4.2 (b) दशमलव संख्याओं का पूर्ण संख्याओं द्वारा भाजन

आइये हम $\frac{6.4}{2}$ को ज्ञात करें।

$\frac{6.4}{2}$ को हम $6.4 \div 2.$ लिखते हैं।

इसलिए $6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2 = \frac{64}{10} \times \frac{1}{2}$ (पूर्व ज्ञान के आधार पर)

$$= \frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2} = \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

आइए, भाजन करें। $12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4 = \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4} = \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$

यह कीजिए

1. (i) $35.7 \div 3$ (ii) $25.5 \div 3$

उदारहण 11 : 4.2, 3.8 और 7.6 औसत ज्ञात करो।

हल : 4.2, 3.8 और 7.6 का औसत $\frac{4.2 + 3.8 + 7.6}{3} = \frac{15.6}{3} = 5.2$

2.4.2 (c) एक दशमलव संख्या का दूसरी दशमलव संख्या से भाजन

आइए, एक दशमलव संख्या का दूसरी दशमलव संख्या से भाजन ज्ञात करें उदाहरण $35.5 \div 0.5$.

$35.5 \div 0.5. = \frac{355}{10} \div \frac{5}{10} = \frac{355}{10} \times \frac{10}{5} = 71$

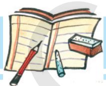
इसलिए $35.5 \div 0.5 = 71$.

उदारहण 12 : एक ट्रक 92.5 किलो मीटर की दूरी 2.5 घंटे में पूरी करता है। यदि यह ट्रक इसी गति से चले तो बताओ कि वह एक घंटे में कितनी दूरी तय करेगा?

हलः- ट्रक द्वारा तय की गई दूरी = 92.5 किलो मीटर

तय की गई दूरी के लिए लगा समय = 2.5 घंटे

प्रति घंटा तय की गई दूरी $= \frac{92.5}{2.5} = \frac{925}{25} = 37$ किलो मीटर



अभ्यास - 6

1. निम्न को हल करो

(i) 0.3×6 (ii) 7×2.7 (iii) 2.71×5

(iv) 19.7×4 (v) 0.05×7 (vi) 210.01×5

(vii) 2×0.86

2. आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी लम्बाई 6.2 से.मी तथा चौड़ाई 4 से.मी. है।

3. निम्न को हल करो

(i) 21.3×10 (ii) 36.8×10 (iii) 53.7×10

(iv) 168.07×10 (v) 131.1×100 (vi) 156.1×100

(vii) 3.62×100 (viii) 43.07×100 (ix) 0.5×10

(x) 0.08×10 (xi) 0.9×100 (xii) 0.03×1000

4. एक स्कूटर चालक 1 लीटर पेट्रोल से 62.5 किलो मीटर दूरी तय करता है। 10 लीटर पेट्रोल में वह कितनी दूरी तय करेगा?

5. निम्न को हल करो

(i) 1.5×0.3 (ii) 0.1×47.5 (iii) 0.2×210.8

(iv) 4.3×3.4 (v) 0.5×0.05 (vi) 11.2×0.10

(vii) 1.07×0.02 (viii) 10.05×1.05 (ix) 101.01×0.01

(x) 70.01×1.1

6. हल करो

(i) $2.3 \div 100$ (ii) $0.45 \div 5$ (iii) $44.3 \div 10$

(iv) $127.1 \div 1000$ (v) $7 \div 3.5$ (vi) $88.5 \div 0.15$

(vii) $0.4 \div 20$

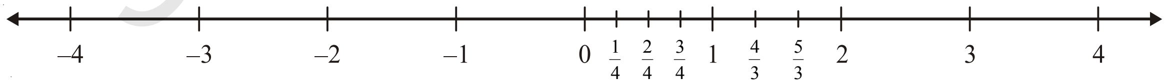
7. एक सम **बहुभुज की भुजा** की लम्बाई 3.5 से.मी. है। यदि इसकी परिमिति 17.5 से.मी. हो तो **समबहुभुज** की **भुजाओं की संख्या** ज्ञात करो?

8. एक स्थान पर 7 घंटे में 0.896 से.मी. वर्षा रिकार्ड की गई। बताइए एक घंटे में औसत वर्षा कितनी हुई?

2.5 परिमेय संख्याओं का परिचय

2.5.1 धनात्मक भिन्न संख्याएँ

हमने पूर्णांकों व भिन्नों के बारे में जानकारी प्राप्त की है। आइए, हम संख्यारेखा के द्वारा इन्हें समझें।।



$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \ldots$ ये संख्याएँ 0 तथा 1 के बीच में हैं और ये सभी 1 से कम हैं। इन्हें सजातीय भिन्न कहते हैं। ये सभी 0 तथा 1 के बीच होते हैं। उसी प्रकार $\frac{4}{3}$ तथा $\frac{5}{3}$ का मान 1 और 2 के बीच आता है। इसलिए इन्हे हम विजातीय भिन्न कहते हैं। इन सबको धनात्मक भिन्न संख्याएँ कहते हैं।

यह कीजिए

1. निम्न संख्याओं के बीच कोई 5 भिन्न लिखो (i) 0 और 1 (ii) 1 और 2.
2. $4\frac{3}{5}$ संख्यारेखा पर कहाँ पर स्थित होगा?

शून्य 0 के बाँई ओर –1, –2, –3 ....पूर्णांक होते हैं।

संख्या रेखा की दांयी ओर बढ़ने पर संख्याओं का मान घटता है या बढ़ता है?

आप जानते हो कि संख्या रेखा की बायीं ओर बढ़ने पर संख्याओं का मान घटता है। शून्य से जो संख्या जितनी दूर होगी, वह संख्या उतनी ही छोटी होगी।

यह कीजिए

1. नीचे दिये गये समूह में सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या लिखिए

   (i) 2, –2, –3, 4, 0, –5

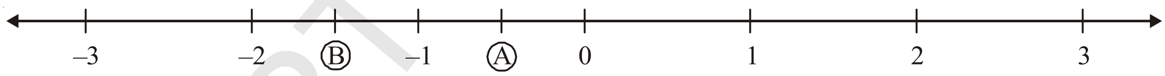
   (ii) –3, –7, –8, 0, –5, –2

2. निम्न संख्याएँ आरोही क्रम में लिखो

   (i) $-5, -75, 3-2, 4, \frac{3}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 0, -1, -2, 5$

2.5.2 ऋणात्मक भिन्न संख्याएँ

मान लो बिन्दु A संख्यारेखा पर है।



बिन्दु A, 0 तथा -1 के बीच में है। क्या यह '0' से बड़ा है या छोटा ? क्या यह $\frac{1}{2}$ के बराबर है? हम नहीं कह सकते कि यह $\frac{1}{2}$ है, क्योंकि यह शून्य से

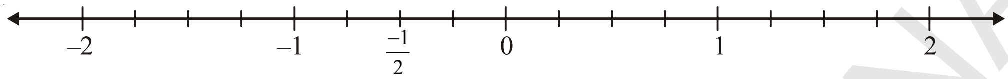
> *नेहा ने -9/4 को दर्शाने का आसान तरीका सोपा है। उसने पहले -9/4 को मिश्रित भिन्न में बदला है $\frac{-9}{4} = -2\frac{1}{4}$ और पोहि इसे -2 तथा -3 के बीच संकित किया है।*

कम है। इसे (A) हम $-\frac{1}{2}$ से दर्शाते हैं। 0 से यह $\frac{1}{2}$ कम है। उसी प्रकार बिन्दु (B) -1 तथा -2 के बीच है और इसका मान $-\frac{3}{2}$ है। उपरोक्त उदाहरण से यह तात्पर्य निकलता है कि ऋणात्मक भिन्न जैसे $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}$ का मान दो ऋणात्मक पूर्णांकों या फिर शून्य और ऋणात्मक पूर्णांकों के बीच होता है।

यह कीजिए

1. निम्न संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाओ

(i) $-\frac{7}{2}$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $\frac{-7}{4}$ (v) $\frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{1}{4}$



2. निम्न संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाओ

$27, -\frac{7}{8}, \frac{11}{943}, \frac{54}{17}, -68, -3, -\frac{9}{6}, \frac{7}{2}$

(i) इनमें से कौनसी संख्या (a) 0 (b) –2 (c) 4 (d) 2 के बांयी ओर है?

(ii) इनमें से कौनसी संख्या (a) 0 (b) –5 (c) $3\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-5}{2}$ के दाहिने ओर है?

2.5.3 परिमेय संख्याएँ

हम जानते हैं कि 0, 1, 2, 3, 4, 5 को पूर्ण संख्याएँ कहते हैं तथा –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 एक बड़ा पूर्णांकों का समूह है। रानी के अनुसार सभी पूर्ण संख्य़ाएँ पूर्णांक हैं, परन्तु सभी पूर्णांक पूर्ण संख्याएँ नहीं होती। क्या आप इससे सहमत हैं? रानी का कहना सही है क्योंकि ऋणात्मक संख्याएँ जैसे –6, –5, –4, –3, –2, –1 सभी पूर्णांक हैं किन्तु पूर्ण संख्याएँ नहीं हैं। इसलिए सभी पूर्ण संख्याएँ पूर्णांक होती हैं। परन्तु सभी पूर्णांक पूर्ण संख्याएँ नहीं हो सकते।

धनात्मक अपरिमेय भिन्नात्मक संख्याएँ जैसे $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{5}, \frac{8}{8}$ ये सभी पूर्ण संख्याओं के अनुपात हैं। सभी अपरिमेय संख्याओं को $\frac{w_1}{w_2}$ के रूप में लिखा जा सकता है जबकि w_1 और w_2 पूर्ण संख्याएँ हों और w_2 शून्य '0' के बराबर न हो।

प्रयत्न करो

कोई पाँच भिन्नात्मक सख्याएँ लिखो और w_1 w_2 को पहचानो

संख्याओं के बड़े समूह को परिमेय संख्याएँ कहते हैं।

इसमें पूर्णांक, धनात्मक भिन्नात्मक संख्याएँ तथा सभी ऋणात्मक संख्याएँ आती हैं।

उदाः $\frac{-7}{3},\frac{-5}{2},\frac{-7}{7},\frac{-2}{7},0,\frac{1}{4},\frac{4}{4},\frac{17}{5},\frac{6}{1}$ आदि सभी परिमेय संख्याएँ है।

इन सभी उदाहरणों में दो पूर्णांकों का अनुपात $\frac{p}{q}$, रूप में लिखा गया है। जहां p और q पूर्णांक हैं। यदि q शून्य के बराबर हो तो इसे हम भिन्नात्मक परिमेय संख्याएँ कहते हैं। **भिन्नात्मक संख्याओं के समूह को Q द्वारा दर्शाया जाता है।**

प्रयत्न कीजिए।

(i) किन्हीं पाँच पूर्णांकों को लेकर सभी वास्तविक संख्या बनाओ

(ii) कोई पाँच परिमेय संख्याएँ लो और ज्ञात करो कि कौनसी पूर्णांकों से बनी हैं।

2.5.4 परिमेय संख्याओं की तुलना :

हम जानते हैं कि $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{9}{12}$ बराबर की अपरिमेय संख्याएँ (स्थापन भिन्न) हैं।

हमें यह भी पता है कि अपरिमेय संख्याओं की तुलना **करते समय** पहले हम दोनों संख्याओं के हर बराबर करते हैं।

उदाहरण के लिए $\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{7}$ की तुलना करें।

$\frac{3}{4}$ के समान भिन्न इस प्रकार होंगे-

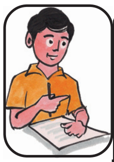
$\frac{3}{4}=\frac{6}{8},\frac{9}{12},\frac{12}{16},\frac{15}{20},\frac{18}{24},\frac{21}{28}$ और

$\frac{5}{7}=\frac{10}{14},\frac{15}{21},\frac{20}{28}$ ....

दोनों भिन्नों के हर समान हैं और $\frac{21}{28}$, $\frac{20}{28}$ की तुलना करने पर

$\frac{21}{28}$ बड़ा है $\frac{20}{28}$ से

इसलिए , $\frac{3}{4}>\frac{5}{7}$



प्रयत्न कीजिए।

1. $\frac{3}{4}$ के बराबर वाले भिन्न (समान भिन्न) लिखो और उसे संख्यारेखा पर अंकित करो। आपने क्या निरीक्षण किया?
2. क्या $\frac{6}{7}$ के समान भिन्न, संख्यारेखा पर समान बिन्दु को दर्शाते हैं?

अब $\frac{-1}{2}$ और $\frac{-2}{3}$ की तुलना करो

$\frac{-1}{2}$ तथा $\frac{-2}{3}$ के समान भिन्न लिखने पर

$\frac{-1}{2} = \frac{-2}{4}, \frac{-3}{6}, \frac{-4}{8}$ ....

$\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6}, \frac{-6}{9}$ ....

$\frac{-3}{6}$ तथा $\frac{-4}{6}$ की तुलना करने पर $\frac{-4}{6} < \frac{-3}{6}$

$\therefore \frac{-2}{3} < \frac{-1}{2}$

प्रयत्न कीजिए।

1. क्या $\frac{-1}{2}$ और $\frac{-3}{6}$ संख्या रेखा पर समान बिन्दु को दर्शाते हैं?
2. क्या $\frac{-2}{3}$ और $\frac{-4}{6}$ समान भिन्न हैं?

उदाहरण: समान भिन्नों को संख्यारेखा पर दर्शाने पर वे संख्यारेखा के एक ही बिन्दु पर होते हैं। इसलिए हम कह सकते हैं कि $\frac{-1}{2}$ और $\frac{-2}{4}$ समान (बराबर) भिन्न हैं।

प्रयत्न कीजिए

1. निम्न भिन्नों के पाँच समान भिन्न लिखिए

   (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-7}{9}$ (iii) $-\frac{3}{7}$

2. नीचे दिये गये भिन्नों में समान भिन्नों को **पहचानिए।**

   (i) $\frac{-1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-4}{8}$

   (ii) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{10}{6}, \frac{2}{4}, \frac{20}{12}$

हम कह सकते हैं कि दिये गये भिन्न के समान भिन्न ज्ञात करने के लिए भिन्न के अंश और हर को एक ही पूर्णांक से गुणा या भाग करते हैं।

उदाहरण के लिए $\frac{1}{5} = \frac{1\times 2}{5\times 2} = \frac{2}{10}$ और $\frac{1\times 3}{5\times 3} = \frac{3}{15}$.

$\frac{-2}{7}$ के लिए $\frac{-2\times 2}{7\times 2} = \frac{-4}{14}$ और $-\frac{2\times 3}{7\times 3} = \frac{-6}{21}$

इस प्रकार $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}\ldots$को गुणा करने से समान भिन्न प्राप्त होते हैं।

अभ्यास - 7

1. निम्न भिन्नों के समान भिन्न लिखो

   (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $-\frac{3}{8}$

2. $\frac{-15}{36}$ के समान भिन्न लिखो। जिसका हर (i) **हर** 12 हो (ii) **अंश** -75 हो?

3. निम्न भिन्नों को संख्यारेखा पर अंकित करो

   (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{3}{2}$ (iv) $\frac{10}{3}$

3. नीचे दिये गये कथन सत्य है या असत्य

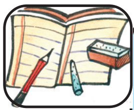
(i) प्रत्येक पूर्णांक एक भिन्न होता है और प्रत्येक भिन्न एक पूर्णांक होता है। (   )

(ii) $\frac{p}{q}$ भिन्न संख्या में q एक अशून्य पूर्णांक होता है।(   )

(iii) प्रत्येक दशमलव संख्या को भिन्न संख्या द्वारा दर्शाया जा सकता है। (   )

(iv) $\frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}$ समान भिन्न हैं। (   )

(v) धनात्मक भिन्नों के समान भिन्न भी धनात्मक होते हैं। (   )



मुख्य बिन्दु

1. हमनें जाना कि भिन्नों का संकलन (जोड़) तथा व्यवकलन (घटाना) तभी संभव है जब वे भिन्न समान होंगे।
2. भिन्नों का गुणन फल $= \dfrac{\textit{अंशों का गुणनफल}}{\textit{हर का गुणनफल}}$
3. 'का' शब्द का उपयोग गुणा के लिए किया जाता है, जैसे 6 का $\frac{1}{3} = \frac{1}{\cancel{3}} \times \overset{2}{\cancel{6}} = 2$.
4. दो **सजातीय** भिन्नों का गुणनफल गुणा किये गये प्रत्येक भिन्न से छोटा होता है। सजातीय तथा विजातीय भिन्नों का गुणनफल गुणा किये गये सजातीय भिन्न से **कम** होता है। दो **विजातीय** भिन्नों का गुणनफल गुणा किये गये प्रत्येक भिन्न से बड़ा होता है।
5. एक भिन्न के अंश और हर को आपस में बदल देने से विलोम भिन्न प्राप्त होता है।
6. हमने सीखा कि दो भिन्नों का भाजन किस प्रकार **ज्ञात** किया जाता है।
   (i) एक वर्ग संख्या को भिन्न से भाजन करने का तात्पर्य है कि पूर्ण संख्या को भिन्न के विलोम से गुणा करना।
   (ii) एक भिन्न को पूर्ण संख्या से भाजन करने का तात्पर्य है कि भिन्न को पूर्ण संख्या के विलोम से गुणा करना।
   (iii) एक भिन्न को दूसरे भिन्न से भाजन करने का तात्पर्य है कि एक भिन्न को दूसरे भिन्न के विलोम से गुणा करना। जैसे $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$.

7. हमने दो दशमलव संख्याओं का गुणनफल सीखा। जब किसी दो दशमलव संख्याओं का गुणनफल किया जाता है तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं की तरह ही गुणा करते हैं। इसके बाद गुणा होने वाली संखयाओं के दशमलव के दाहिने ओर की संख्याओं को गिन लेते हैं। अन्त में प्राप्त गुणनफल संख्या के दाहिने ओर से (जोड़े गये दशमलव के बाद की संख्या) उतनी संख्या के बाद दशमलव लगा देते हैं।

8. दशमलव संख्या से 10, 100, 1000 ... का गुणा करते समय हम जितने शून्य वाली संख्या से गुणा करते हैं। उतने ही आगे दशमलव बिन्दु को बढ़ाया जाता है।

9. हमने दशमलव संख्याओं के भाजन को भी सीखा है।

(i) दो दशमलव संख्याओं के भाजन करने के लिए हम पहले पूर्ण संख्याओं की तरह ही भाग देते हैं। इसके बाद हम भाजक में दशमलव लगाते हैं। जैसे कि दशमलव संख्या में दिया गया हो।

(ii) दशमलव संख्या को 10, 100, 1000 से भाजन के लिए दशमलव बिन्दु से जितने शून्य होते हैं उतनी बार दशमलव से बायीं ओर बढ़ते हैं।

नोटः- यह तभी संभव है जब भाजन में शेष शून्य हो।

(iii) दो दशमलव संख्याओं का भाजन करते समय हम दी गई संख्याओं के दशमलव बराबर करते हैं। फिर उन्हें पूर्ण संख्याओं की तरह भाजन करते हैं।

10. भिन्न संख्याएँ पूर्णांकों, धनात्मक भिन्न, ऋणात्मक भिन्न संख्याओं का समूह होता है जिसे $\frac{p}{q}$ रूप में लिखा जाता है।

यह i) p और q पूर्णांक हैं।

ii) $q \neq 0$

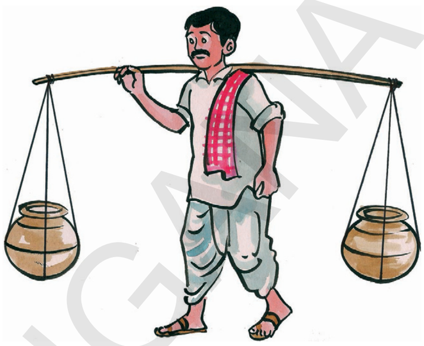
भिन्न संख्याओं को Q से दर्शाया जाता है।

जॉन नेपियर (स्कॉटलैंड) **सन् 1550-1617** ई.
लॉगरिथम की खोज
गुणनफल के लिए नेपियर रॉड की खोज।
दशमलव भिन्नों से परिचय कराया।

सरल या साधारण समीकरण
(SIMPLE EQUATIONS)

3

3.0 प्रस्तावना



आपने सरल समीकरणों की जानकारी पिछली कक्षा में प्राप्त की है। जैसे $4x = 44$, $2m = 10$ इन समीकरणों का आपके दैनिक जीवन में **अधिक** महत्व है। आइए अब नीचे दी गई प्रश्नावली द्वारा समीकरणों को हल करने का प्रयत्न करें।

अभ्यास - 1

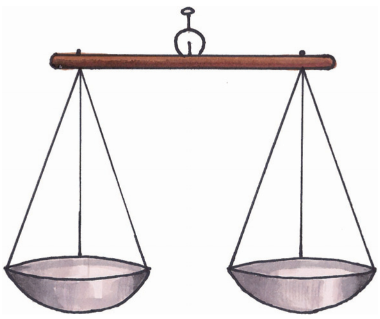
1. निम्न समीकरणों के L.H.S तथा R.H.S लिखो।

(i)	$2x = 10$	(ii)	$2x-3 = 9$
(iii)	$4z + 1 = 8$	(iv)	$5p + 3 = 2p + 9$
(v)	$14 = 27 - y$	(vi)	$2a - 3 = 5$
(vii)	$7m = 14$	(viii)	$8 = q + 5$

2. निम्न समीकरणों को प्रयत्न और भूल पद्धति द्वारा हल करो

(i)	$2 + y = 7$	(ii)	$a - 2 = 6$
(iii)	$5m = 15$	(iv)	$2n = 14$

3.1 समीकरण - तराज़ू



छठवीं कक्षा में आपने समीकरण की तुलना तराज़ू में दोनों पलड़ो में समान बांटों से की है।

एक तराज़ू के बांये पलड़े में 5 कि.ग्राम तथा दायें पलड़े में 2 कि.ग्राम का बाट रखें तो आप क्या देखेंगे?

यदि एक तराज़ू के बायें पलड़े में 3 किग्रा तथा दायें पलड़े में 7 किग्रा का बाट रखें तो आप क्या देखेंगे?

यदि तराज़ू के दोनों पलड़ों में 3 कि.ग्रा. के बाट रखेंगे तो आप क्या देखेंगे?

इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि तराज़ू को साम्य अवस्था में रखने के लिए दोनों पलड़ों में समान भार के बाट रखने चाहिए।

तराजू की साम्य अवस्था का नियम समीकरणों के लिए भी समान रूप से लागू होता है।

मान लो $12-2 = 6 + 4$

यहाँ LHS=RHS है

यदि उपरोक्त समीकरण के दोनों ओर 3 को जोड़ा जाये तो **क्या** होगा? यदि समीकरण के दोनों ओर 10 को जोड़ा जाये तो LHS, RHS के बराबर होगा?
आप किसी दूसरी संख्या लेकर **परीक्षण** करें।
यदि किसी समीकरण के दोनों ओर 5 को घटाया जाये तो समीकरण पर क्या असर होगा? 7 को घटाने पर क्या समीकरण पर कोई **बदलाव** होगा? आप इसे **दूसरी संख्याएँ लेकर परीक्षण करें।** यदि समीकरण के दोनों ओर 6 से गुणा करें तो क्या होगा? क्या समीकरण दोनों ओर समान होगा? किसी समीकरण के दोनों ओर 8 से गुणा करें तो क्या होगा? आप अन्य दूसरी संख्या लेकर जांच करें।
यदि किसी समीकरण के दोनों ओर हम 5 से भाजन करें तो क्या समीकरण दोनों ओर बराबर होगा? यदि समीकरण को 2 से भाग दें तो क्या समीकरण **बराबर** होगा?
उपरोक्त सभी प्रश्नों के उत्तर 'हाँ' में होंगे। उपरोक्त उदाहरणों द्वारा हम **इस** निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि किसी भी समीकरण के दोनों ओर समान संख्या से जोड़, **घटान,** गुणा या भाजन किया जाये तो समीकरण पर इसका कोई प्रभाव नहीं पड़ता। यह "समानता का सिद्धान्त" हमें समीकरणों को हल करने में सहायक होता है।

3.2 समीकरणों को हल करना (Solving Equations)

हम जानते हैं कि समीकरणों का हल प्रयत्न और भूल पद्धति द्वारा किस प्रकार किया जाता है। अब हम यह देखेंगे कि किस प्रकार कम समय में "समानता के सिद्धान्त" द्वारा समीकरणों का हल निकाला जा सकता है।
साधारण समीकरण हल करते समय अज्ञात राशियों के सारे पदों का समीकरण के बायीं ओर लिख लें और स्थिर राशियों को दूसरी **ओर** अर्थात दाहिनी ओर। इसके पश्चात समानता के सिद्धान्त का उपयोग कर समीकरण को हल करें।
उदाहरण:- 1 : हल करो $x + 3 = 7$
हल : $x + 3 = 7$ .... (1)
समीकरण का L.H.S $x + 3$ है। L.H.S. का कुल मान x से 3 अधिक है।

अब 'x' का मान ज्ञात करने के लिए समीकरण के दोनों ओर 3 घटायेंगे।

अर्थात $x + 3 = 7$

$x + 3 - 3 = 7 - 3$

$x = 7 - 3$ ....

$x = 4$

समीकरण (i) और 2 से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि 3 को LHS से घटाने के लिए समीकरण के दोनों ओर 3 को घटायेंगे और इसे हम -3 के **रूप** में लिखेंगे।

जांचः- 'x' का मान 4 समीकरण x+3 में रखने पर हम यह पायेंगे कि LHS=RHS

LHS $= x + 3$

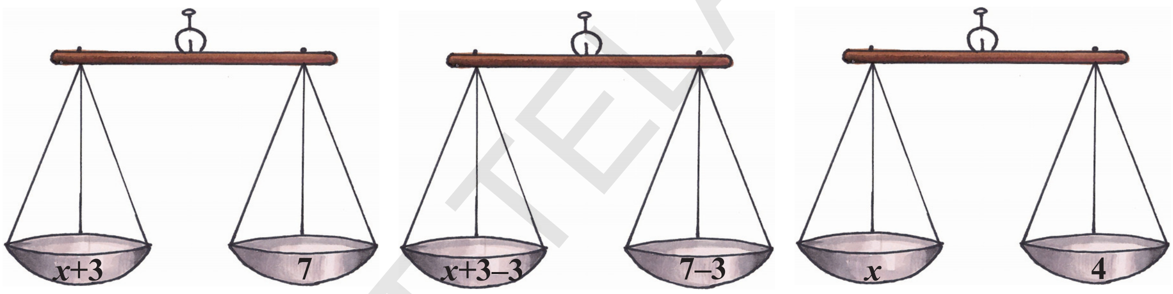
$= 4 + 3$ (डालने पर $x = 4$)

$= 7$

RHS $= 7$

LHS $=$ RHS.

आइए, उपरोक्त समीकरण हम तराजू के द्वारा समझने का प्रयत्न करें।



उदाहरण 2 : हल करो $y - 7 = 9$Z

हल : $y - 7 = 9$ .... (1)

समीकरण का L.H.S = $y - 7$

अर्थात, y का मूल्य ज्ञात करके हमें दोनों ओर 7 जोड़ना चाहिए।

इसलिए $y - 7 + 7 = 9 + 7$

$y = 9 + 7$ .... (2)

$y = 16$

समीकरण (1) और (2) से यह स्पष्ट है कि LHS को -7 का **स्थानांतरण** +7 के **रूप** में समीकरण के RHS की ओर होगा

जांच :- y=16 समीकरण (1) में रखने पर *LHS = RHS.*

उदाहरण 3 :

हल करो। $5x = -30$

हल : $5x = -30$ .... (1)

$$\frac{5x}{5} = \frac{-30}{5}$$ (दोनों ओर 5 से भाग देने पर)

$$x = \frac{-30}{5}$$ .... (2)

$\therefore x = -6$

समीकरण (1) और (2) से यह स्पष्ट है कि 5 के LHS में x से गुणा RHS का भाजक हो जाता है।

जाँचः- समीकरण (1) में रखने पर LHS = RHS.

उदाहरण 4 : हल करो। $\frac{z}{6} = -3$

हल : $\frac{z}{6} = -3$ .... (1)

$$6\left(\frac{z}{6}\right) = 6 \times (-3)$$ (दोनों ओर 6 से भाग देने पर)

$$z = 6 \times (-3)$$ .... (2)

$\therefore \quad z = -18$

समीकरण (1) और (2) से यह स्पष्ट है कि LHS में 6 का मापन RHS 6 का गुणांक बन जाता है।

जाँचः- $z = -18$ का मान समीकरण (1) में रखने पर LHS = RHS.

उदाहरण 5 : हल करो। $3x + 5 = 5x - 11$

हल : $3x + 5 = 5x - 11$

$3x + 5 - 5x = 5x - 11 - 5x$ (दोनों ओर 5x घटाने पर)

$-2x + 5 = -11$

$-2x + 5 - 5 = -11 - 5$ (दोनों ओर 5 घटाने पर)

$-2x = -16$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-16}{-2}$$ (दोनों ओर -2 घटाने पर)

$\therefore x = 8$

जाँचः- x=8 का मान समीकरण (1) में रखने पर

LHS = $3x + 5 = 3(8) + 5 = 24 + 5 = 29$

RHS = $5x - 11 = 5(8) - 11 = 40 - 11 = 29$

$\therefore$ LHS = RHS

इसलिए जब L.H.S. से R.H.S. **में बदलते हैं तो** पदों का

स्थानांतरण होता है

'+ संख्या बनती है – संख्या

'– संख्या बनती है '+ संख्या

'× संख्या बनती है ÷ संख्या

'÷ संख्या बनती है ' × संख्या

उदाहरण 6 : हल करो। $12 = x + 3$

यहाँ यदि 12 को LHS से RHS स्थानांतरित किया जाये तो वह -12 **बन जाता** है तथा x+3 को दाहिने ओर से बांयी ओर स्थानांतरित करने से –x - 3 हो जायेगा।

अर्थात $-x - 3 = -12$

समीकरण दोनों ओर -1 से गुणा करने पर

$-1(-x -3) = -1(-12)$

$x + 3 = 12$

$x = 12 - 3$

$\therefore x = 9$

इसलिए किसी समीकरण के LHS तथा RHS स्थानन्तरित किये जायें तो पदों का मान समान रहता है।

अभ्यास - 2

1. निम्न समीकरणों **को** स्थानांतरण **किये बिना हल** कीजिए तथा जांच कीजिए।

(i) $x + 5 = 9$ (ii) $y - 12 = -5$

(iii) $3x + 4 = 19$ (iv) $9z = 81$

(v) $3x + 8 = 5x + 2$ (vi) $5y + 10 = 4y - 10$

2. नीचे दिये गये समीकरणों का हल स्थानांतरित विधि द्वारा कीजिए।

(i) $2 + y = 7$ (ii) $2a - 3 = 5$

(iii) $10 - q = 6$ (iv) $2t - 5 = 3$

(v) $14 = 27 - x$ (vi) $5(x+4) = 35$

(vii) $-3x = 15$ (viii) $5x - 3 = 3x - 5$

(ix) $3y + 4 = 5y - 4$ (x) $3(x - 3) = 5(2x + 1)$

3.3 बीजीय समीकरणों का उपयोग व दैनिक समस्याएँ हल करने में इनके प्रयोग निम्न उदाहरणों को पढ़िए

(i) एक कक्षा में छात्र और छात्राओं की संख्या 52 है। यदि छत्राओं की संख्या छात्रों की संख्या से 10 अधिक हो तो छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(ii) रामू के पिता की आयु रामू की आयू की तिगुनी है। 5 वर्ष बाद रामू और उसके पिता की आयु का योग 70 हो जायेगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

iii) एक पर्स में ₹10 और ₹ 50 नोट हैं। पर्स में कुल ₹ 250 हैं। यदि ₹10 के नोटों की संख्या ₹ 50 के नोटों की संख्या से एक अधिक हो तो पर्स में ₹10 और ₹50 के कितने नोट हैं?

iv) एक आयत की लम्बाई उसकी दुगनी चौड़ाई से 8 मीटर कम है। यदि आयत की परिमिति 56मी. हो तो आयत की लंबाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उपरोक्त प्रश्नों को हम समीकरणों का उपयोग करके हल कर सकते हैं। इन्हें हल करते समय निम्न चरण ध्यान में रखने होंगे–

चरण 1) समस्या या प्रश्न ध्यानपूर्वक पढ़ो।

चरण 2) पूछी गई अज्ञात राशि सूचित करने के लिए एक अक्षर चुन लो जैसे x, y, z, u, v, w, p, t

चरण 3) अज्ञात राशियों की सहायता से प्रश्न समीकरण रूप में लिखो।

चरण 4) समीकरण हल करो।

चरण 5) उत्तर की जांच करो।

उदाहरण 7: एक कक्षा में छात्र और छात्राओं की संख्या 52 है। यदि छात्राओं की संख्या छात्रों की संख्या से 10 अधिक हो तो छात्रों की संख्या ज्ञात करो।

हलः मान लो छात्रों की संख्या $= x$

छात्राओं की संख्या $x + 10$.

कुल छात्र और छात्राओं की संख्या $= x + (x + 10)$

$= x + x + 10$

$= 2x + 10$

प्रश्न के अनुसार छात्र और छात्राओं की संख्या = 52.

$2x + 10 = 52$

$2x = 52 - 10$ (10 को LHS से RHS स्थानांतरित करने पर)

$2x = 42$

$x = \dfrac{42}{2}$ (2 को LHS से RHS स्थानांतरित करने पर)

$\therefore\ x = 21$

इसलिए छात्रों की संख्या $= 21$

छात्राओं की संख्या $= 21 + 10 = 31$

जांच : $21 + 31 = 52$ अर्थात छात्र और छात्रओं की कुल संख्या 52 है।

और $31 - 21=10$ यानि छात्राओं की संख्या छात्रों की संख्या से 10 अधिक है।

उदाहरण8:- रामू के पिता की आयु रामू की आयु के तीन गुणा है। 5 वर्ष के पश्चात पिता और पुत्र की आयु का योग 70 वर्ष है। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात करो।

हल: मान लो रामू की आयु $= x$ वर्ष

रामू के पिता की आयु $= 3x$ वर्ष

5 वर्षों बाद रामू की आयु $= x+5$ वर्ष

रामू के पिता की आयु $=3x+5$ वर्ष

5 वर्ष पश्चात दोनों की आयु का योग $= (x+5) + (3x+5) = 4x+10$ वर्ष

प्रश्न के अनुसार

दोनों की आयु का योग $4x + 10 = 70$

$$4x = 70 - 10$$

$$4x = 60$$

$$x = \frac{60}{4} = 15$$

इसलिए वर्तमान में रामू की आयु $= 15$ वर्ष

और पिता की आयु $= 3x = 3 \times 15$ वर्ष $= 45$ वर्ष

जांच : 45 वर्ष 15 वर्ष के 3 गुणा है, यदि पिता की आयु रामू की आयु के 3 गुणा है। 5 वर्ष पश्चात रामू की आयु $15+5=20$ वर्ष तथा पिता की आयु $45+5=50$ वर्ष और

दोनों की आयु का योग $= 20+50 = 70$ वर्ष

उदाहरण 9:- एक पर्स में ₹ 10 और ₹50 के नोट हैं, पर्स में कुल ₹ 250 हैं। यदि ₹10 के नोटों की संख्या ₹ 50 के नोटों की संख्या से 1 अधिक हो तो पर्स में ₹10 तथा ₹ 50 के कितने नोट हैं।

हल:- मान लो रू.50 के नोटों की संख्या $= x$

नोटों की कुल मान $= 50\,x$

रू.10 नोटों की संख्या $= x+1$

इसलिए ₹10 नोटों का मान $= 10\ (x+1)$

$\therefore$ पर्स में कुल ₹ $= 50\ x + 10\ (x+1)$

$= 50x + 10x + 10$

$= 60x + 10$

प्रश्न के अनुसार पर्स में कुल रुपये = ₹ 250

इसलिए $60\ x + 10 = 250$

$60\ x = 250 - 10$

$60\ x = 240$

$$x = \frac{240}{60}$$

$\therefore x = 4$

₹ 50 नोटों की संख्या $= 4$

₹ 10 नोटों की संख्या $= 4 + 1 = 5$

जांच : ₹10 के नोटों की संख्या (5) ₹50 के नोटों की संख्या (4) से एक अधिक है।

$= (50\times4) + (10\times5)$

$= 200 + 50$

= ₹ 250

उदाहरण 10: एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई के दुगने से 8 मी. कम है। यदि आयत की परिमिति 56 मी. है तो आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करो।

हल: मान लो आयत की चौड़ाई $= x$ मी.

चौड़ाई का दुगना $= 2x$

लंबाई $= (2x - 8)$ m. (by problem)

आयत की परिमिति = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

$= 2\ (2x - 8 + x)$ मी.

$= 2\ (3x - 8)$मी.

$= (6x - 16)$ मी.

प्रश्न के अनुसार आयत की परिमिति $= 56$

इसलिए $6x - 16 = 56$

$$6x = 56 + 16$$

$$6x = 72$$

$$x = \frac{72}{6}$$

$$\therefore\ x = 12$$

अर्थात आयत की चौड़ाई $= 12$ मी.

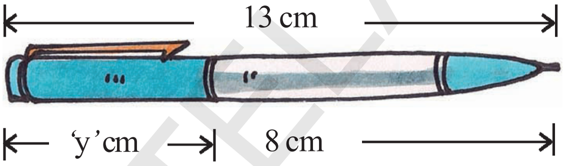
आयत की लम्बाई $= (2 \times 12 - 8) = 16$मी

जांचः परिमिति $= 2\,(16 + 12) = 2 \times 28 = 56$मी.

अभ्यास - 3

1. दिये गये चित्रों की जानकारी समीकरण के रूप में लिखिए तथा उसका मान ज्ञात कीजिए।

2. दिये गये चित्र की जानकारी समीकरण के रूप में लिखिए तथा उसका मान ज्ञात कीजिए



3. यदि एक संख्या दुगनी की जाये और उसमें 7 जोड़ दिया जाये तो 49 प्राप्त होता है। तो वह संख्या को ज्ञात करो।

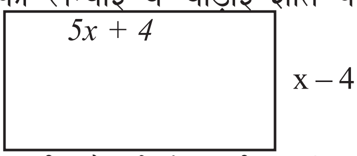
4. एक संख्या तीन गुणा करके उसमें से 22 घटा दिया जाये तो 68 प्राप्त होता है। तो वह संख्या ज्ञात करो।

5. एक संख्या को 7 से गुणा करके उसमें से 3 घटाने पर 53 प्राप्त होता है, **तो** उस संख्या को ज्ञात करो।

6. दो **संख्याओं** का योग 95 है। एक संख्या दूसरी संख्या से 3 अधिक है। **संख्याएँ** ज्ञात करो?

7. तीन क्रमगत पूर्णांकों का योग 24 है तो पूर्णांकों को ज्ञात करो।

8. नीचे दिये गये आयत की **परिमिति** 72 मी है। आयत की लम्बाई व चौड़ाई चित्र में दिखाये गये अनुसार है। आयत की लम्बाई व चौड़ाई ज्ञात करो।



9. एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 4 मी. अधिक है यदि आयत की परिमिति 84 मी. हो तो आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करो।

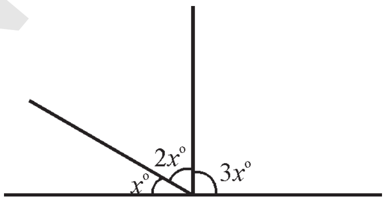
10) 15 वर्ष के पश्चात हेमा की आयु उसकी वर्तमान आयु की 4 गुना हो जायेगी। हेमा की वर्तमान आयु ज्ञात करो।

11) एक समारोह में कुल ₹ 3000 से 63 पुरस्कारों के रूप में देने का प्रस्ताव है। पुरस्कार राशि ₹100 या ₹ 25 के रूप में देनी हैं। अलग-अलग पुरस्कारों की संख्या ज्ञात करो।

12) एक संख्या दो भागों में इस प्रकार विभजित की गयी कि एक हिस्सा दूसरे हिस्से से 10 अधिक है। यदि दो भागों के अनुपात 5:3 हो तो कुल संख्या एवं दोनों हिस्सों का मान ज्ञात करो।

13) सुहाना ने कहा कि उसके द्वारा सोची गई संख्या को 5 से गुणा करो और यदि उसमें 8 को जोड़ दिया जाये तो वह संख्या 20 में से उसके द्वारा सोची संख्या को घटाने के समान होती है। संख्या ज्ञात करो।

14) एक परीक्षा में अधिकतम अंक पाने वाले विद्यार्थी का योग सबसे कम अंक पानेवाले विद्यार्थी को दुगना करके उसमें 7 जोड़ने के बराबर होता है। अधिकतम अंक 87 हों तो सबसे कम अंक का मान क्या होगा?



15) निम्न चित्र में बनाये गये कोणों का मान ज्ञात करो (सरल रेखा पर बनने वाला कोण 180^0 होता है)

16) निम्न पहेली बूझो।

मैं एक संख्या हूँ। मेरी पहचान बताओ।
मुझे दोगुना करो, नयी संख्या पाओ।
उसमें छत्तीस जोड़ो, सौ से चार कम पाओ।
मैं एक संख्या हूँ। मेरी पहचान बताओ।

पृष्ठावलोकन :

- दैनिक जीवन की समस्याओं के समाधान, समीकरणों द्वारा किया जा सकता है।
- किसी समीकरण को हल करने के लिए

(i) समीकरण के दोनों ओर समान संख्या को जोड़ो या
(ii) समीकरण के दोनों ओर समान संख्या को घटाओ या
(iii) समीकरण के दोनों ओर समान संख्या से गुणा या
(iv) समीकरण के दोनों ओर समान संख्या से भाग देने पर समीकरण के अस्तित्व पर कोई असर नहीं होता

- समीकरण के LHS तथा RHS समान होते हैं।

रेखाएं एव कोण
(LINES AND ANGLES)

4

4.0 **परिचय:** पिछली कक्षाओं में आपने ज्यामिति के बारे में अध्ययन किया था। आइए इसे और 3 उदाहरणों द्वारा समझने का प्रयास करें।

अभ्यास - 1

1. नीचे दी गई आकृतियों के नाम लिखिए

(i) (ii) (iii) (iv)

2. निम्न की आकृतियाँ बनाइए।

(i) $\overrightarrow{OP}$ (ii) बिन्दु X (iii) $\overleftrightarrow{RS}$ (iv) $\overline{CD}$

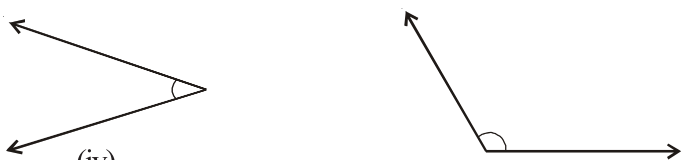
3. निम्न चित्र में संभावित रेखा खंडों के नाम बताइए।

4. दैनिक जीवन से संबंधी कोई पाँच कोण लिखिए।

उदा- कैंची खोलने से कोण बनता है।

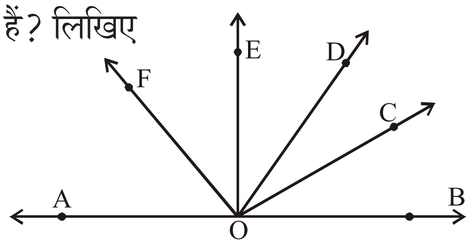
5. निम्न कोणों में न्यून कोण, समकोण और अधिक कोण को पहचानो।

(i) (ii) (iii)

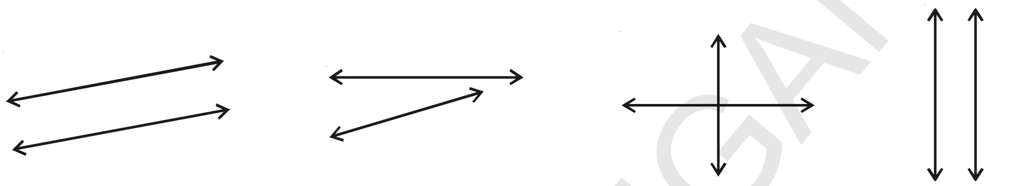


(iv) (v)

6. निम्न चित्र के सभी संभव कोण लिखिए। इन कोणों में न्यून कोण, सरल कोण, समकोण और अधिक कोण कौन से हैं? लिखिए

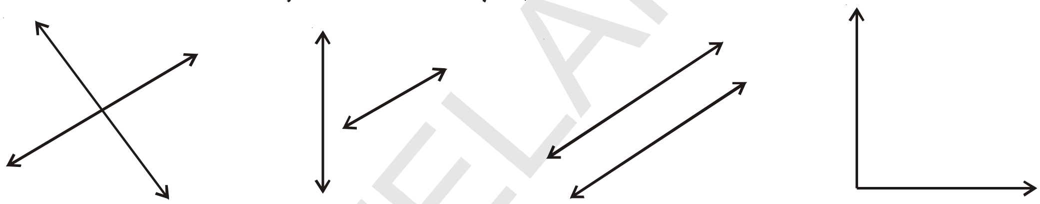


7. निम्न चित्रों में कौन सी रेखाएँ समान्तर हैं। क्यों?



(i) (ii) (iii) (iv)

8. निम्न में कौन सी रेखाएँ प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं?



(i) (ii) (iii) (iv)

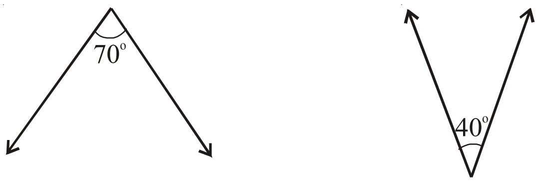
4.1 कोणों के बारे में विस्तृत जानकारी

पिछले अध्याय में हमनें कोणों के बारे में जानकारी प्राप्त की है। अब हम कुछ और कोणों का अध्ययन करेंगे।

4.1.1 **पूरक कोण (Complementary Angles)**

जब दो कोणों के योग 90^0 हों तो उन कोणों को पूरक कोण कहते हैं।

चित्र में दिये गये कोण पूरक कोण हैं, चूंकि उनका योग $30^0 + 60^0 = 90^0$ है। उपरोक्त उदाहरण द्वारा हम कह सकते हैं कि 30^0 का पूरक कोण 60^0 है तथा 60^0 का पूरक कोण 30^0 है।



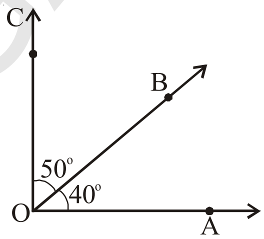
इस चित्र में कोणों के योग $70^0 + 40^0 \neq 90^0$. इसलिए 70^0 और 40^0 एक दूसरे के पूरक कोण नहीं हैं।

प्रयत्न करो

किन्हीं 5 पूरक कोणों को दर्शाओ

क्रिया :

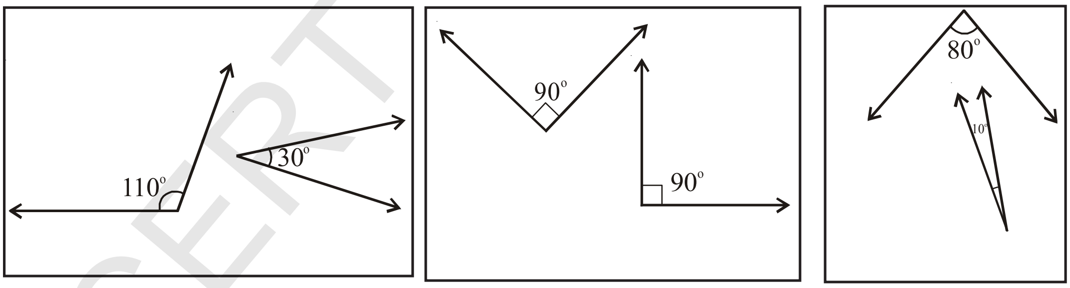
$\angle AOB = 40^0$ बनाओ। इसके शीर्ष 'O' से, $\overline{OB}$ को प्रारंभिक किरण लेकर $\angle BOC = 50^0$, बनाओ (जैसे कि चित्र में दिखाया गया है)



चूंकि दिये गये कोणों का योग 90^0 है, इसलिए ये कोण समकोण बनाते हैं। अब 60^0 और 50^0 कोणों को लेकर यह जांच करो कि ये कोण एक दूसरे के पूरक हैं या नहीं। कारण बताइए।

अभ्यास – 2

1. निम्न में कौन से कोण एक दूसरे के पूरक हैं?



(i) (ii) (iii)

2. निम्न के पूरक कोण लिखिए

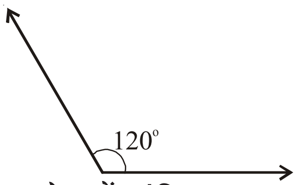
(i) 25^0 (ii) 40^0 (iii) 89^0 (iv) 55^0

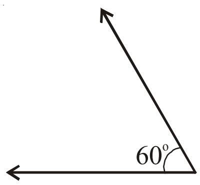
3. दो कोण आपस में एक दूसरे के समान है **और** पूरक कोण हैं। कोणों को ज्ञात कीजिए।

4. मानसा के अनुसार पूरक कोणों का प्रत्येक कोण न्यून कोण होता है। क्या आप इससे सहमत हैं। कारण बताइए।

4.1.2 संपूरक कोण (Suplementary Angles)

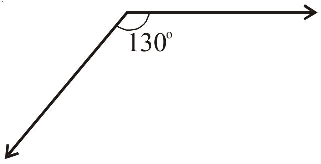
जब कोणों का योग 180^0 हो तो कोणों को संपूरक कोण कहते हैं।

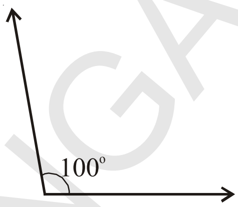




उपरोक्त कोण संपूरक कोण हैं चूंकि $120^0 + 60^0$

इसलिए हम कह सकते हैं कि 120^0 का संपूरक कोण 60^0 है।

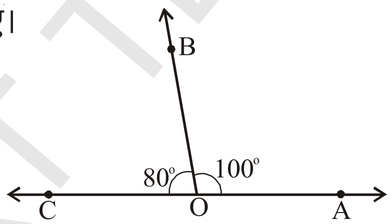




130^0 और100^0 संपूरक कोण नहीं है। समझाइए।

प्रयत्न कीजिए

नीचे दिये गये चित्र में$\angle AOB = 100^0$ **बनाइए और** समान शीर्ष O पर, कोण $\angle BOC=80^0$ बनाइए।



इस चित्र से आप यह निष्कर्ष निकालेंगे कि दिये गये कोण एक सरल रेखा का कोण बनाते हैं। या **सरल** कोण 180^0 बनाते हैं।

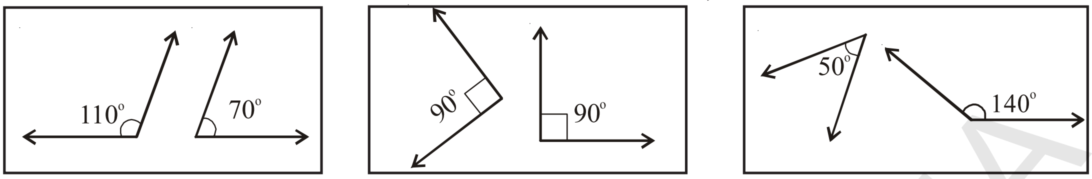
इसलिए 100^0 और 80^0 एक दूसरे के संपूरक कोण हैं।

क्या 130^0 तथा 70^0 एक दूसरे के संपूरक कोण हैं। समझाइए।

प्रयत्न कीजिए

किन्हीं पाँच संपूरक कोणों के युग्म लिखिए।

1. निम्न में कौन से चित्र में दिये गये कोण एक दूसरे के संपूरक कोण हैं।



(i) (ii) (iii)

2. निम्न कोणों के संपूरक कोण लिखिए

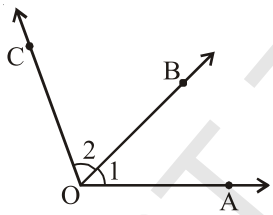
   (i) 105^0 (ii) 95^0 (iii) 150^0 (iv) 20^0

3. दो न्यून कोण एक दूसरे के संपूरक नहीं हो सकते? समझाइए।

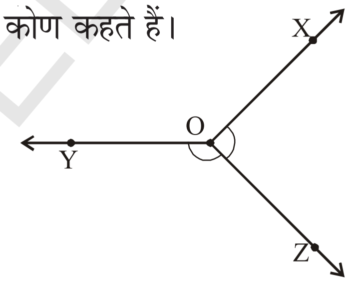
4. यदि दो समान कोण एक दूसरे के संपूरक कोण हों तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

4.1.3 संलग्न कोण (Adjacent Angles)

संलग्न कोण : समान शीर्ष वाले कोणों को संलग्न कोण कहते हैं।



(i)



(ii)

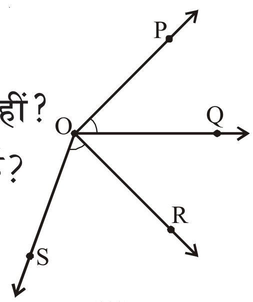
इस चित्र में (i) $\angle AOB$ तथा $\angle BOC$ संलग्न कोण हैं **क्योंकि** उनका शीर्ष 0 तथा $\overrightarrow{OB}$. समान भुजा है।

चित्र (ii) में क्या दिये गये कोण संलग्न कोण हैं? उनके समान शीर्ष तथा समान भुजा कौन सी है?

अब चित्र (iii) देखिये।

चित्र (iii) में क्या $\angle POQ$ *तथा* $\angle ROS$ संलग्न कोण है? क्यों? **और क्यों नहीं?**

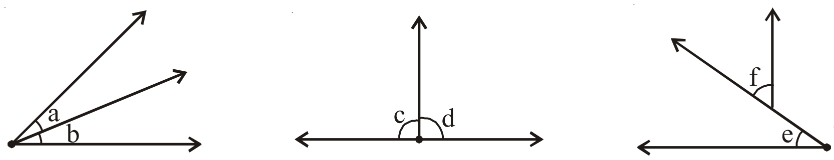
इस चित्र में कौन से कोण संलग्न कोण है? क्या ये सभी कोण संलग्न कोण हैं?



(iii).

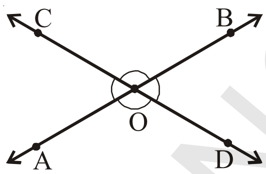
अभ्यास – 4

1. निम्न में कौन से कोण संलग्न कोण है?



(i) (ii) (iii)

2. निम्न चित्र में संलग्न कोणों के समूह को लिखिए। आसन्न कोणों के कितने समूह हैं? इन कोणों को आसन्न कोण क्यों कहते हैं?



3. क्या दो संलग्न कोण संपूरक हो सकते हैं? चित्र द्वारा समझाइए

4. क्या दो आसन्न कोण पूरक हो सकते हैं? चित्र द्वारा समझाइए

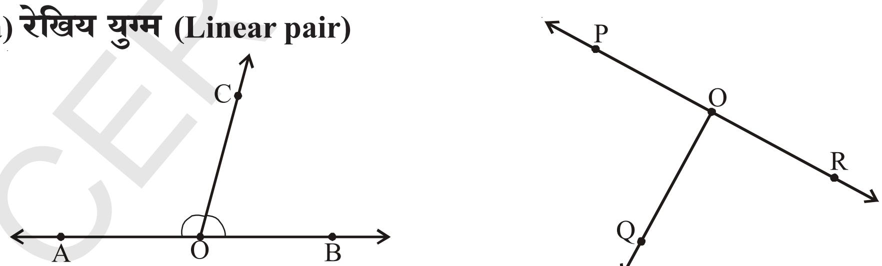
5. दैनिक जीवन में किन्हीं चार संलग्न कोणों को उदाहरण सहित बताइए।

   उदाहरण : साइकिल के पहिए की तीलियों का पहिए के केन्द्र पर बनने वाला कोण।

   (i) ____________________ (ii) ____________________

   (iii) ____________________ (iv) ____________________

4.1.3 (a) रेखिय युग्म (Linear pair)



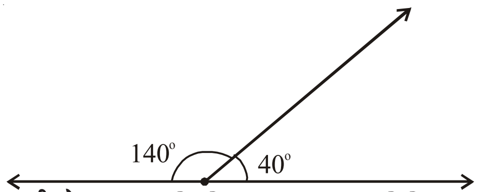
(i) (ii)

चित्र (i) में $\angle AOC$ तथा $\angle BOC$ संलग्न कोण हैं? इन कोणों का योग क्या है? ये दोनों कोण एक सरल कोण बनाते हैं। इसी प्रकार चित्र ii) में क्या $\angle BOC$ तथा $\angle ROQ$ मिलकर सरल कोण बनाते हैं? इस प्रकार संलग्न कोण का युग्म एक सरल कोण (180) बनाता है।

यह कीजिए

दो संलग्न कोण 40^0 और 140^0 हैं। क्या वे रेखीय युग्म हैं?

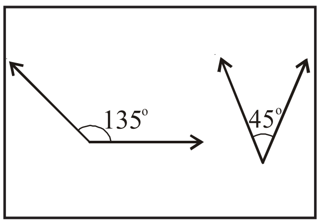
चित्र उतार कर रेणु इसका परीक्षण करेगी।



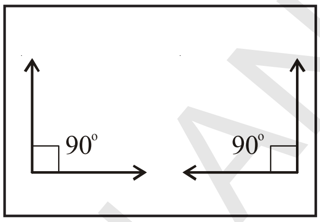
क्या रेणु द्वारा बनाया गया चित्र सही है? **क्या ये रेखीय युग्म बनेंगे?**

अभ्यास - 5

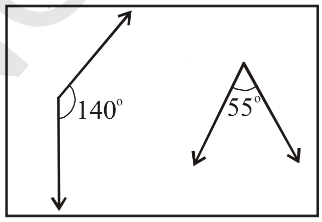
1. नीचे दिये गये आसन्न कोण के युग्म उतारो और जांच करो कि क्या वे रेखीय युग्म हैं?



(i)

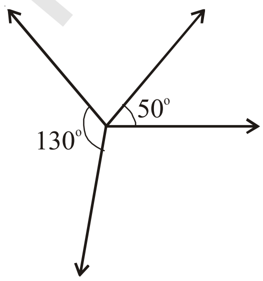


(ii)



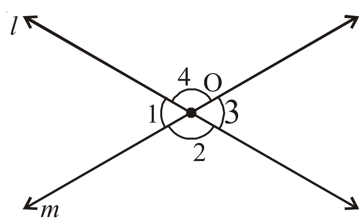
(iii)

2. निहारिका ने दो कोण 130^0 और 50^0 लेकर नीचे दिये गये चित्र की सहायता से जांच की कि क्या ये कोण रेखीय युग्म हैं?



उपरोक्त चित्र में दिये गये रेखीय युग्म नहीं हैं? यदि नहीं है तो निहारिका ने **क्या** गलत **किया**?

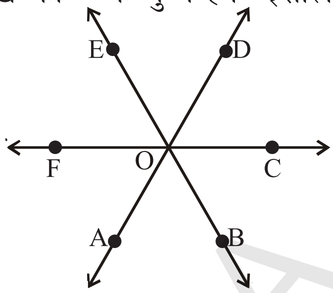
4.1.4 शीर्ष के सम्मुख कोण (Vertically Opposite Angles) : जब दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करती हैं तो दोनों रेखाओं के शीर्ष पर सम्मुख कोण बनते हैं जिन्हें हम शीर्ष के सम्मुख कोण कहते हैं।



उपरोक्त चित्र में रेखाएँ 'l'और 'm' एक दूसरे को 'O'. पर

प्रतिच्छेदित करती हैं। <1 तथा <3 और <2 तथा <4 सम्मुख कोणें के युग्म हैं। इसलिए <1, <3 और <2, <4 दो शीर्ष सम्मुख के कोण हैं

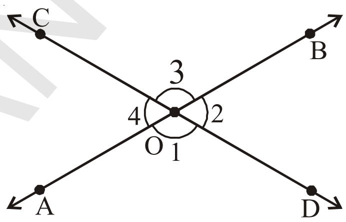
नीचे दिये गये चित्र में शीर्ष के सम्मुख कोण कौन से हैं?



यह कीजिए

दो सरल रेखाएँ $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ बनाओ जो '0' पर एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करती है। इस चित्र पर ट्रेस पेपर लेकर ट्रेस करो इस पेपर को चित्र में बताये अनुसार इस प्रकार व्यवस्थित करो कि $\angle BOD$ और $\angle AOC$ आपस में मिलें

$\angle AOD$ और $\angle BOC$ का निरीक्षण करो। इसी तरह $\angle AOC$ और $\angle BOD$ का भी निरीक्षण करो। आप देखते हैं कि $\angle AOD = \angle BOC$ और $\angle AOC = \angle BOD$

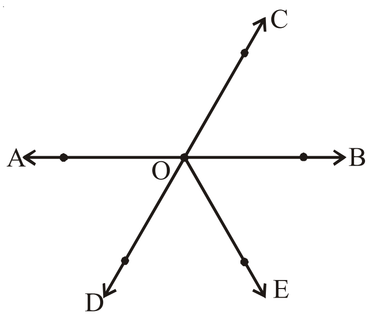


उपरोक्त चित्र द्वारा हमने यह निष्कर्ष निकाला कि शीर्ष के सम्मुख कोण समान होते हैं।

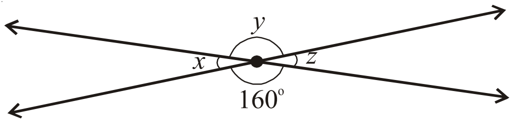
नोटः- कोका कोला पीने वाली दो पाइपों को बिन्दु '0' पर व्यवस्थित करो और अब पाइपों को घुमाने से हम देखेंगे कि दो पाइपों के बीच बनने वाले कोण शीर्ष के सम्मुख कोण होंगे।

अभ्यास - 6

1. नीचे दिये गये चित्र में शीर्ष के सम्मुख कोणों के युग्मों के नाम लिखिए



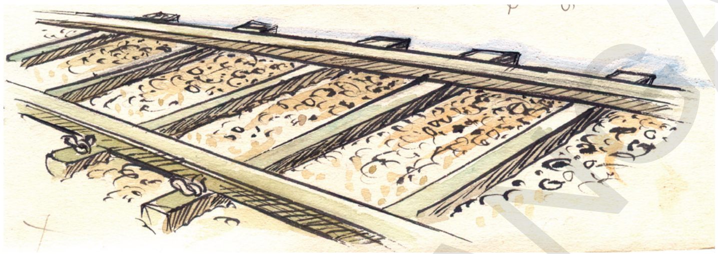
2. निम्न चित्र में बिना मापन के x, y और z का मान ज्ञात कीजिए।



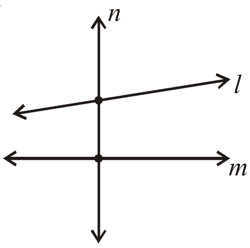
3. दैनिक जीवन से संबधी कुछ शीर्ष के सम्मुख कोणों के उदाहरण दीजिए।

4.2 तिर्यक रेखा (Transversal Angles)

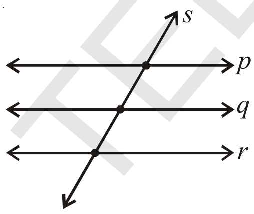
आपने रेल की पटरियों को देखा होगा। ये पटरियां तिर्यक रेखाओं को समझने के लिए एक अच्छा उदाहरण हैं।



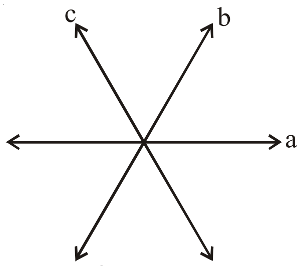
एक रेखा जो दी गई रेखाओं को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हो तिर्यक रेखा कहलाती है।



चित्र (i)



चित्र (ii)



चित्र (iii)

चित्र (i) में रेखाएँ l और m तिर्यक रेखा n द्वारा प्रतिच्छेदित होती हैं। इसलिए n एक तिर्यक रेखा है।

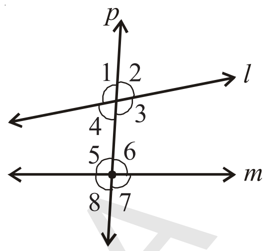
चित्र (ii) में रेखाएं p, q और तिर्यक रेखा s द्वारा प्रतिच्छेदित होती हैं।

चित्र (iii) में रेखाएं a और b तिर्यक रेखा c द्वारा प्रतिच्छेदित होती हैं पर ये तिर्यक रेखा नहीं है।

प्रयत्न करो

दो भिन्न रेखाओं के लिए कितने तिर्यक हो सकते हैं।

4.2.1 तिर्यक रेखा द्वारा बनाये गये कोण :

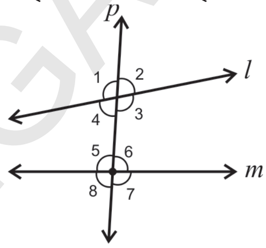


जब कोई तिर्यक रेखा दो रेखाओं को प्रतिच्छेदित करती है तो 8 कोण बनते हैं। चित्र को देखने पर यह ज्ञात होता है कि प्रत्येक प्रतिच्छेदित रेखा पर 4 कोण बनते हैं।

इस चित्र में रेखाएं 'l' और 'm' तिर्यक रेखा 'p'. द्वारा प्रतिच्छेदित होती हैं।

इस प्रकार क्रमश: 8 कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7$ $\angle 8$ *बनते हैं।*

$\angle 3, \angle 4, \angle 5$ और $\angle 6$, ये सभी कोण 'l' और 'm'.रेखाओं के अंदर की ओर हैं। इसलिए इन कोणों को अन्तः कोण कहते हैं। उसी प्रकार $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$ 'l' और 'm' **के बाहर की ओर हैं। उन्हें बाह्य कोण कहते है।**



$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ और $\angle 8$ बाह्य कोण हैं।

$\angle 3, \angle 4, \angle 5$ और $\angle 6$ अन्तः कोण हैं।

इस प्रकार हमने शीर्ष के सम्मुख कोणों की जानकारी प्राप्त की और यह निष्कर्ष निकाला कि शीर्ष के सम्मुख कोण समान होते हैं।

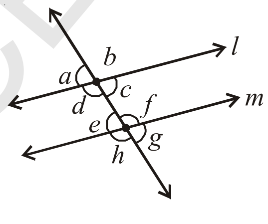
चित्र देखकर रेणू ने कहा कि $\angle 1 = \angle 3$ **और** $\angle 2 = \angle 4$. **'शीर्ष के सम्मुख कोण' के अन्य दो जोडी कौन-से हैं?**

रेणु ने कहा कि प्रत्येक बाह्य कोण प्रत्येक सम्मुख कोणों से युग्म बनाते हैं। ये युग्म कोण आपस में समान होते हैं। क्या आप रेणु से सहमत हैं?

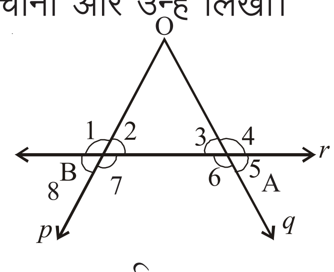
यह कीजिए

चित्र एक और दो में तिर्यक रेखा को पहचानिए।

नीचे दिये गये चित्र में अन्तः कोण एंव बाह्य कोण पहचानो और उन्हें लिखो।



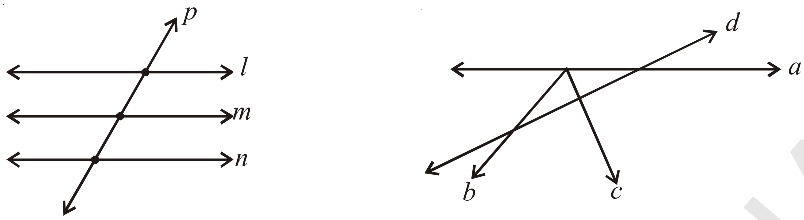
चित्र (i)



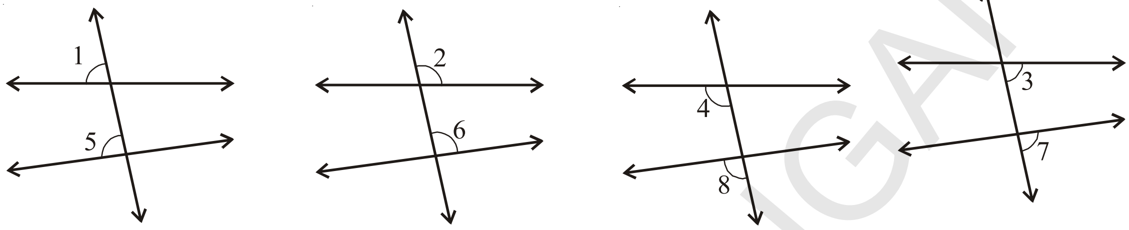
चित्र (ii)

चित्र	तिर्यक रेखा	बाह्य कोण	अन्तः कोण
(i)			
(ii)			

2.**निम्न रेखाओं पर ध्यान दीजिए।** रेखाओं में तिर्यक रेखा पहचानो। इन रेखाओं द्वारा बनने वाले अंतःकोण व बाह्य **कोणों की सूचि बनाइये। अंतः कोण अर बाह्य कोण कौन-से हैं?**

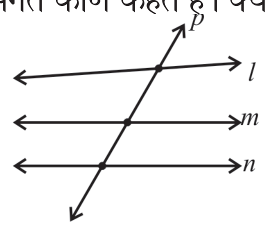


4.2.1 (a) संगत कोण (Corresponding Angles) : नीचे दिये हुए चित्रों को ध्यानपूर्वक देखिए।

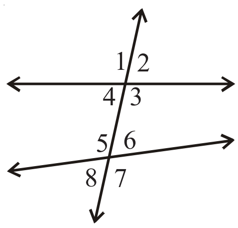


(i) (ii) (iii) (iv)

निम्न कोणों के युग्मों पर विचार करो $(\angle 1, \angle 5), (\angle 2, \angle 6), (\angle 4, \angle 8), (\angle 3, \angle 7)$. क्या इन युग्म कोणों में कुछ समानता है? ये कोण अलग अलग शीर्षों पर स्थित हैं। ये कोण तिर्यक रेखा के एक ओर हैं इसमें से एक अन्तः कोण और दूसरा बाह्य कोण है। उपरोक्त युग्म कोणों को संगत कोण कहते हैं। क्या **होता है जब एक तिर्यक रेखा तीन रेखाओं को प्रतिच्छेदित करती हैं। इस स्थिति में संगत कोण कौन-से हैं?** अन्तःकोणों और बाह्य कोणों की संख्या कितनी है?



यदि 4 या 5 सरल रेखाओं एक तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित हों तो आप इन रेखाओं पर बने अन्तःकोणों और बाह्य कोणों पर क्या **अनुमान लगाओ?**



4.2.1 **(b) अन्तः और बाह्य एकान्तर कोण**

(Interior and exterior Alternate Angles)

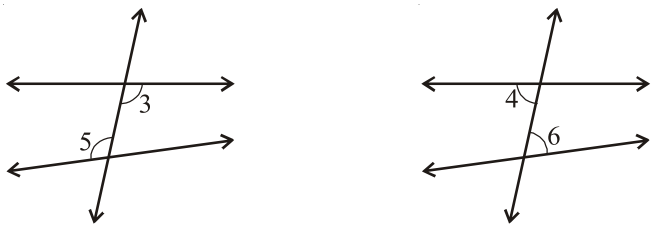
चित्र देखिए। दिये गये चित्र में उन कोणों को बताओ जो निम्न **तीन** गुणों को दर्शाते हैं।

(i) उनके शीर्ष अलग -अलग हों

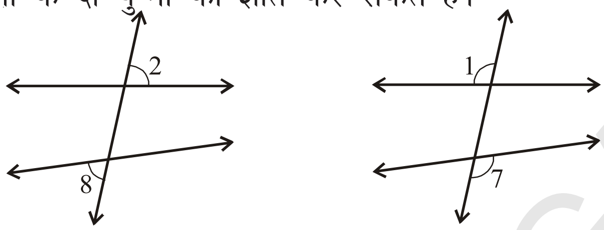
ii) जो तिर्यक रेखा के दोनों ओर हों

iii) जो दो रेखाओं के बीच हों (अन्तःकोण)

इन युग्म कोणों को एकान्तर अन्तःकोण कहते हैं।



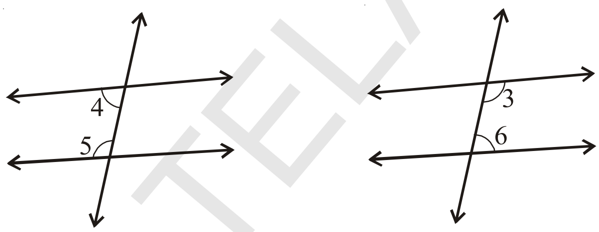
निम्न चित्र में $(\angle 3, \angle 5)$ और $(\angle 4, \angle 6)$ एकान्तर अन्तः कोणों के दो युग्म हैं। उसी प्रकार हम एकान्तर बाह्य कोणों के दो युग्मों को ज्ञात कर सकते हैं।



ऊपर चित्र में $(\angle 2, \angle 8)$ और $(\angle 1, \angle 7)$ *को एकान्तर बाह्य कोण कहते हैं।*

4.2.1 (c) तिर्यक रेखा के एक ओर के अन्तः कोण

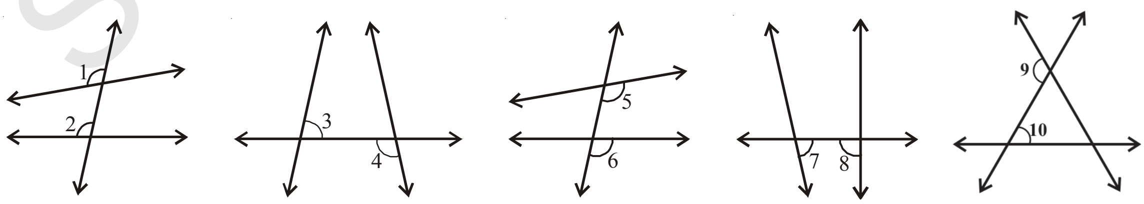
अतः कोण तिर्यक रेखा के एक ओर हो सकते हैं।



$(\angle 4, \angle 5)$ और $(\angle 3, \angle 6)$ तिर्यक रेखा के एक ओर के बनने वाले अन्तःकोणों के युग्म हैं।

इसे कीजिए

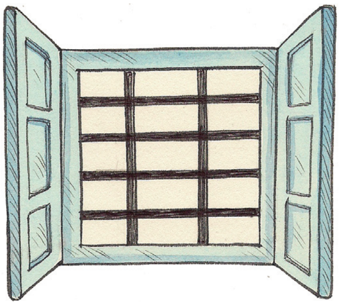
1. नीचे दिये गये चित्रों में युग्म कोणों के नाम लिखिए

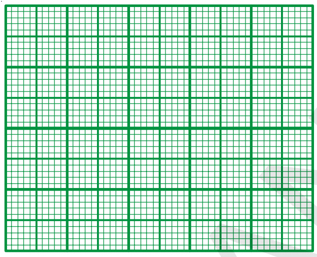


(i) (ii) (iii) (iv) (v)

4.2.2 समानान्तर रेखाओं पर तिर्यक रेखाएँ

आप जानते हैं कि दो समतलीय (coplanar lines) रेखाएँ जो प्रतिच्छेदित नहीं होती उन्हें समानांतर रेखाएँ कहते हैं। आइए, **हम समांतर रेखाओं पर तिर्यक रेखायें होने पर बननेवाले कोणों के गुण धर्म देखेंगे। एक खिडकी और ग्राफ पेपर के चित्र देखिये।**



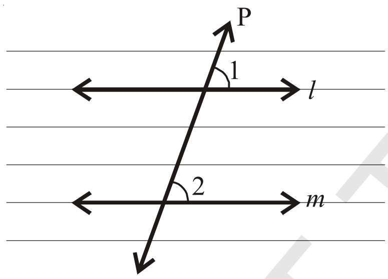


उपरोक्त चित्र समानांतर रेखाओं पर तिर्यक रेखाओं के उदाहरण हैं।

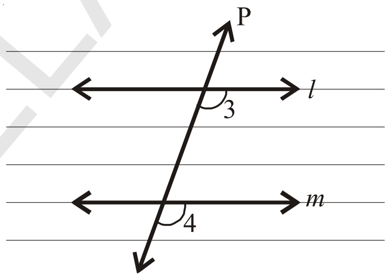
यह कीजिये

एक सफेद पेपर लो और उस पर दो समानांतर रेखाएं l और m खींचो इन रेखाओं पर तिर्यक रेखा p खींचो।

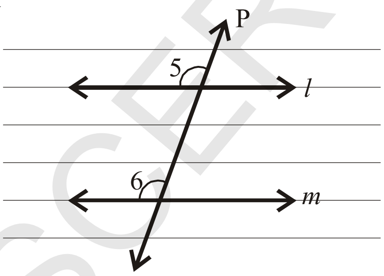
निम्न चित्रों में संगत कोणों की जोड़ियाँ बताइए।



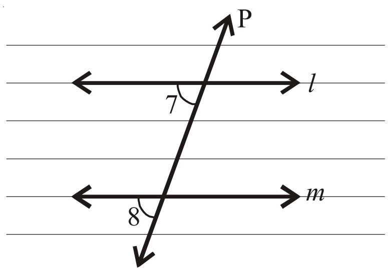
चित्र (i)



चित्र(ii)



चित्र (iii)



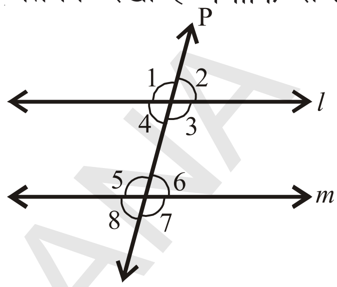
चित्र (iv)

चित्र (i) में l, m और p को ट्रेस करो और ट्रेस पेपर को इस प्रकार व्यवस्थित करो कि l और m ठीक एक दूसरे से मिलें। अर्थात $\angle 1$ और $\angle 2$ एक दूसरे से मिल जाएँ।

अर्थात $\angle 1 = \angle 2$

क्या शेष बचे संगत कोणों के युग्म समान होंगे? चित्र पर ट्रेस पेपर घूमाकर देखो, क्या संगत कोणों के युग्म समान हैं?

इस प्रकार इस अध्ययन से हम निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि **समानांतर रेखाओं के युग्म को तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित किया जाये तो समानांतर भुजाओं पर बनने वाले संगत कोण समान होते हैं।** इस प्रकार संगत कोणों के गुण का उपयोग दूसरे प्रश्नों को हल करने में किया जा सकता है। संलग्न चित्र में 'l' और 'm' समानांतर रेखाओं के युग्म हैं और 'p' तिर्यक रेखा है क्योंकि सभी संगत कोणों के युग्म समान होंगे।

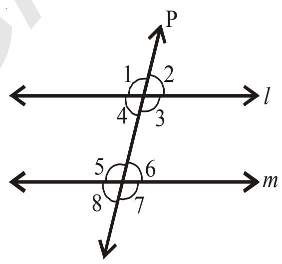


इसलिए $\angle 1 = \angle 5$

लेकिन $\angle 1 = \angle 3$ (शीर्ष के सम्मुख कोण)

इसलिए $\angle 3 = \angle 5$

इस प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\angle 4 = \angle 6$.



अर्थात **समान्तर रेखाओं पर तिर्यक रेखा द्वारा बनाये गये एकान्तर अन्त:कोण आपस में समान होते हैं।** क्या आप एकान्तर बाह्य कोण भी समान पाओगे?

आइए अब तिर्यक रेखा के एक ओर बनने वाले अन्त:कोणों के बारे में और जानकारी प्राप्त करें।

उपरोक्त चित्र में सरल रेखाएँ l और m तिर्यक रेखा p द्वारा प्रतिच्छेदित होती हैं।

$\angle 3 = \angle 5$ (एकान्तर अन्त:कोण)

लेकिन $\angle 3 + \angle 4 = 180^0$ (क्यों?)

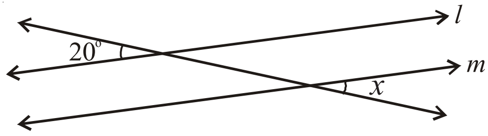
इसलिए $\angle 4 + \angle 5 = 180^0$

इसी प्रकार $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$ (कारण बताइए)

इसलिए सरल रेखाओं का युग्म यदि तिर्यक द्वारा प्रतिच्छेदित होता हैं, तो तिर्यक पर रेखा का एक ओर अन्त: कोणों के युग्मों का योग 180^0 होता है अर्थात वे संपूरक होते हैं।

उदाहरण1: दिये गये चित्र में 'l' और 'm' समानांतर रेखाएँ हैं।

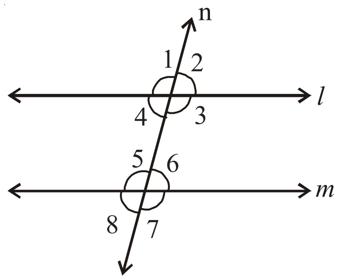
'p' एक तिर्यक रेखा है तो ज्ञात कीजिए।



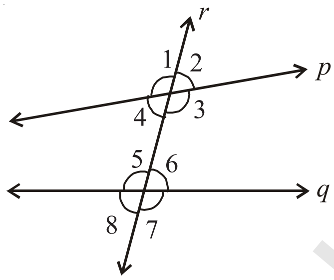
हल : दिया गया है $l \parallel m$, और p एक तिर्यक रेखा है।

क्योंकि $\angle x$ और 20^0. एकान्तर बाह्य कोणों के युग्म हैं और वे हमेशा समान होते हैं। इसलिए $\angle x = 20^0$.

यह कीजिए।



चित्र (i)



चित्र (ii)

उपरोक्त चित्र (i) और (ii) को अपनी उत्तर पुस्तिका में ट्रेस करो।कम्पास द्वारा मापो तथा तालिका भरो।

सारिणी: ऊपर दिये गये चित्रों एवं संगत कोणों का मापन कीजिए और तालिका के रिक्त स्थानों को भरिए।

चित्र	संगत कोणों के युग्म			
	पहला युग्म	दूसरा युग्म	तीसरा युग्म	चौथा युग्म
(i)	$\angle 1$=	$\angle 2$ = ...	$\angle 3$ = ...	$\angle 4$ = ...
	$\angle 5$ = ...	$\angle 6$ = ...	$\angle 7$ = ...	$\angle 8$ = ...
(ii)	$\angle 1$ = ...	$\angle 2$ = ...	$\angle 3$ = ...	$\angle 4$ = ...
	$\angle 5$ = ...	$\angle 6$ = ...	$\angle 7$ = ...	$\angle 8$ = ...

उपरोक्त तालिका देखकर यह बताइए कि कौन से संगत कोणों के युग्म समान हैं?

रेखाएं l और m के बारे में आप क्या कहेंगे?

रेखाएं p और q के बारे में आप क्या कहेंगे?

कौन सी रेखाओं का युग्म समानांतर है?

इसलिए तिर्यक रेखा द्वारा दो रेखाओं पर बनने वाले संगत कोण समान हों तो वे रेखाएँ समानांतर होती हैं।

तालिका 2 : निम्न तालिका में एकान्तर अन्तः कोणों को लिखिए

चित्र	एकान्तर अन्तःकोणों के युग्म	
	पहला युग्म	दूसरा युग्म
(i)	$\angle 3$ = ... $\angle 5$ = ...	$\angle 4$ = ... $\angle 6$ = ...
(ii)	$\angle 3$ = ... $\angle 5$ = ...	$\angle 4$ = ... $\angle 6$ = ...

कौन से चित्र में एकान्तर अन्तःकोण समान है?

रेखाएं l और m पर आप क्या कहेंगे?

रेखाएं p और q पर आप क्या कहेंगे?

इसलिए कोई तिर्यक रेखा दो सरल रेखाओं को प्रतिच्छेदित करती है और उन पर बनने वाले एकान्तर अन्तःकोण समान हों तो वे सरल रेखाएँ समानांतर होती हैं।

तालिका 3: निम्न तालिका में तिर्यक रेखा के एक ओर बनने वाले अन्तः कोणों को लिखिए

चित्र	तिर्यक रेखा के एक ओर बनने वाले अन्तः कोण			
	पहला युग्म		दूसरा युग्म	
(i)	$\angle 3$= .... $\angle 6$=	$\angle 3+\angle 6$ = ...	$\angle 4$= .... $\angle 5$=	$\angle 4+\angle 5$= ....
(ii)	$\angle 3$= .... $\angle 6$=	$\angle 3+\angle 6$ = ...	$\angle 4$= .... $\angle 5$=	$\angle 4+\angle 5$= ....

कौन से चित्र में तिर्यक रेखा के एक ओर वाले अन्तःकोणों के युग्म संपूरक (180^0) है?

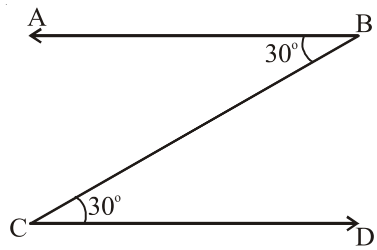
रेखाओं l और m पर आप क्या कहेंगे?

रेखाओं p और q पर आप क्या कहेंगे?

इसलिए यदि कोई तिर्यक रेखा दो सरल रेखाओं को प्रतिच्छेदित करती हो और तिर्यक रेखा के एक ओर बनने वाले अन्तःकोण संपूरक हों तो वे सरल रेखाएँ समानांतर होती हैं।

उदा : नीचे दिये गये चित्र में दो समान 30^0 के कोणों को दर्शाया गया है।

क्या AB || CD? कैसे ?



हलः

हम जानते हैं कि BC एक तिर्यक रेखा है और $\angle B$ और $\angle C$ एकान्तर अन्तःकोण हैं इसलिए $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

अभ्यास - 7

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) एक रेखा जो दी गई रेखाओं को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हो ____________ कहलाती है।

(ii) यदि एकान्तर अन्तःकोणों के युग्म समान हों तो रेखाएँ ____________ होती हैं।

(iii) यदि तिर्यक रेखा की एक ओर के अन्तःकोण संपूरक हों तो वे रेखाएँ ______ होती हैं।

(iv) यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को कई सामान्य बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती हों तो वे ____________.कहलाती हैं।

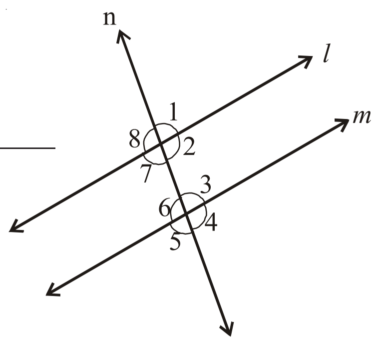
2. नीचे दिये चित्र में l और m समानांतर रेखाएँ हैं तथा 'n' एक तिर्यक रेखा है तो रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) यदि $\angle 1 = 80^0$ तो $\angle 2 =$ ____________

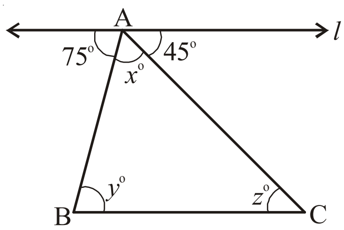
(ii) यदि $\angle 3 = 45^0$ तो $\angle 7 =$ ____________

(iii) यदि $\angle 2 = 90^0$ तो $\angle 8 =$ ____________

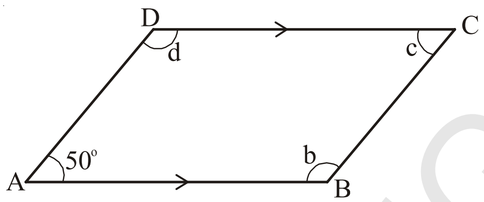
(iv) यदि $\angle 4 = 100^0$ तो $\angle 8 =$ ____________



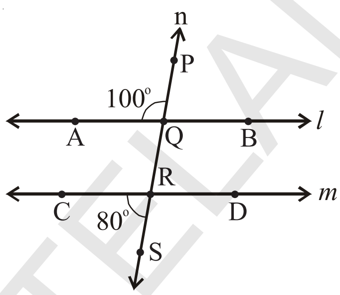
3. यदि l ll BC तो x,y,z का मान ज्ञात कीजिए



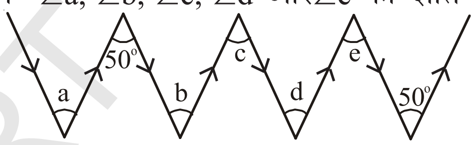
4. ABCD एक समचतुर्भुज है जहाँ AB ll DC और AD ll BC. तो ∠b, ∠c और∠d. ज्ञात करो



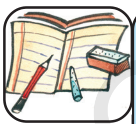
5. नीचे दिये चित्र में रेखाएँ l और m तिर्यक रेखा n द्वारा प्रतिच्छेदित होती हैं। तो बताइए कि क्या $l \parallel m$?



6. नीचे दिये चित्र में ∠a, ∠b, ∠c, ∠d और∠e को ज्ञात कीजिए। कारण बताइए



.सूचना : रेखाओं पर तीर का निशान दर्शाता है कि वे रेखाएँ आपस में समानांतर हैं।



मुख्यांश

1.(i) यदि दो कोणों का योग 90^0 हो तो उन्हें पूरक कोण कहते हैं।

(ii) पूरक कोण का प्रत्येक कोण न्यून कोण होता हैं।

2.(i) यदि दो कोणों का योग 180^0 हो तो उन्हें संपूरक कोण कहते हैं।

(ii)संपूरक कोणों के युग्म में प्रत्येक कोण न्यून कोण, समकोण या अधिक कोण होता है।

(iii) दो समकोण सदैव एक दूसरे के संपूरक होते हैं।

3. सामान्य भुजा एवं सामान्य शीर्ष के दोनों ओर निर्मित कोणों को आसन्न कोण कहते हैं।

4. पूरक कोण या संपूरक कोण के यग्मों का आसन्न कोण होना जरूरी नहीं है।

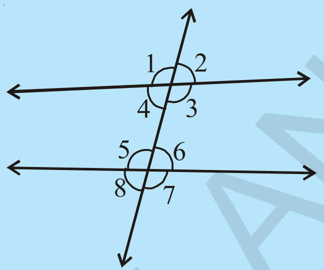
5. आसन्न कोण एंव संपूरक कोणों के युग्म रेखीय युग्म बनाते हैं।

6.(i) जब दो रेखाएँ एक बिन्दु (शीर्ष बिन्दु) पर प्रतिच्छेदित होती है तो दोनों रेखाओं के आमने-सामने बनने वाले कोण को सम्मुख कोण कहते हैं।

(ii) सम्मुख कोणों के युग्म हमेशा समान होते हैं।

7.(i) एक रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हों तो वह तिर्यक रेखा कहलाती है।

(ii) इस स्थिति में दो रेखाओं पर काटने वाली रेखा आठ कोण बनाती है। जो इस चित्र में है–



क्रम संख्या	कोणों के प्रकार	युग्मों की संख्या	कोण
1.	अन्तःकोण	—	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
2.	बाह्य कोण	—	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
3.	सम्मुख कोण	4 युग्मा	$(\angle 1, \angle 3)$; $(\angle 4, \angle 2)$; $(\angle 5, \angle 7)$; $(\angle 8, \angle 6)$
4.	संगत कोण	4 युग्मा	$(\angle 1, \angle 5)$; $(\angle 2, \angle 6)$; $(\angle 4, \angle 8)$; $(\angle 5, \angle 7)$
5.	एकान्तर अन्तःकोण	2युग्मा	$(\angle 3, \angle 5)$; $(\angle 4, \angle 6)$
6.	एकान्तर बाह्य कोण	2 युग्मा	$(\angle 1, \angle 7)$; $(\angle 2, \angle 8)$
7.	तिर्यक के एक ओर के कोण	2युग्मा	$(\angle 3, \angle 6)$; $(\angle 4, \angle 5)$

8 जब तिर्यक रेखा दो समानांतर रेखाओं को प्रतिच्छेदित करे तो

(i) संगत कोण की प्रत्येक जोडी समान **होती** हैं।

(ii) एकान्तर अन्तःकोण समान होते हैं।

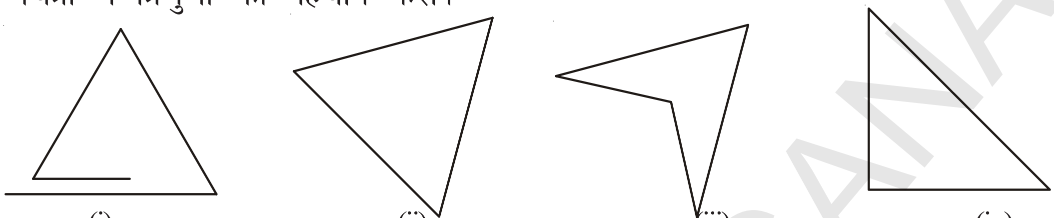
(iii) एकान्तर बाह्य कोण समान होते हैं।

(iv) तिर्यक रेखा के एक ओर बनने वाले अन्तःकोण संपूरक होते हैं।

त्रिभुज और उसके गुण

(TRAINGLES AND ITS PROPERTIES) 5

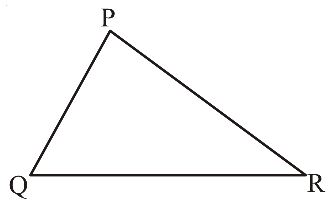
5.0 **परिचय :** पिछली कक्षा में आपने त्रिभुजों के बारे में जानकारी प्राप्त की है। नीचे दिये गये चित्रों में त्रिभुजों की पहचान करो।



(i) (ii) (iii) (iv)

आपके द्वारा चुने हुए त्रिभुजों की जानकारी अपने मित्र को दीजिए और उत्तर का स्पष्टीकरण दीजिए।

तीन रेखा खंडों से निर्मित बंद (संवृत) आकृति को 'त्रिभुज' कहते हैं।



ΔPQR, में

(i) तीन भुजाएँ $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RP}$

(ii) तीन कोण $\angle PQR$, $\angle QRP$, $\angle RPQ$

(iii) शीर्ष P, Q, R

शीर्ष P भुजा $\overline{QR}$ के सम्मुख है। इसी प्रकार शीर्ष Q और R के सम्मुख भुजाओं के नाम लिखिए। इसी प्रकार भुजा $\overline{QR}$ के सम्मुख $\angle QPR$ है। क्या आप उस भुजा को बता सकते हैं जो $\angle PQR$के सम्मुख है।

प्रयास कीजिए:-

उमा के अनुसार त्रिभुज का निर्माण तीन **संरेखीय** बिन्दु के द्वारा होता है। क्या आप मानते हो? अपने स्पष्टीकरण को आप चित्र द्वारा दर्शाइए।

(जब तीन बिन्दु एक ही रेखा पर स्थित हों तो उन्हें **संरेखीय** बिन्दु कहते हैं।

नोट:- LM = रेखाखण्ड LM की लम्बाई; $\overline{LM}$ = रेखाखण्ड LM

$\overrightarrow{LM}$ = किरण LM; $\overleftrightarrow{LM}$ = रेखा LM

5.1 त्रिभुजों का वर्गीकरण

त्रिभुजों को उनकी भुजाओं के और कोणों के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है।

भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों को 3 प्रकार में वर्गीकृत किया जा सकता है।

. वह त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाओं की लम्बाई समान है, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।

. वह त्रिभुज जिसकी किन्हीं दो भुजाओं के माप समान होते हैं, उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।

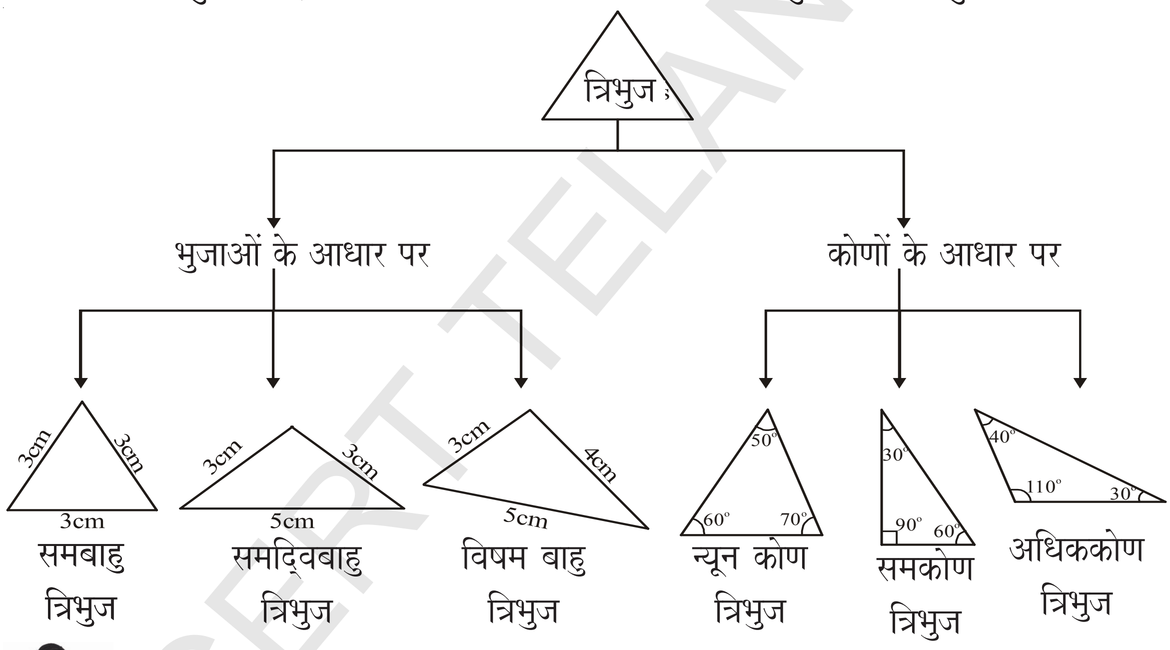
. वह त्रिभुज जिसके किन्हीं दो भुजाओं के माप समान नहीं हैं, विषम बाहु त्रिभुज कहते हैं।

- कोणों के आधार पर भी त्रिभुजों को तीन प्रकारों में वर्गीकृत किया जा सकता है।

. यदि एक त्रिभुज का प्रत्येक कोण न्यून कोण हो, तो वह न्यूनकोण त्रिभुज कहलाता है।

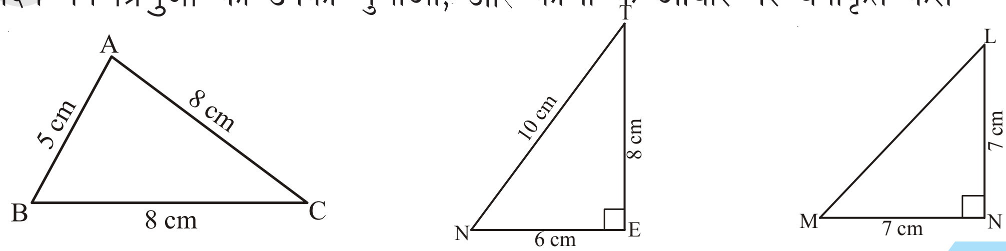
. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अधिक कोण है तो वह अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।

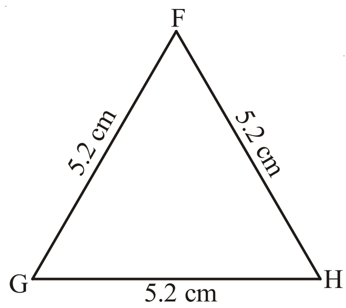
. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण समकोण हो तो उसे समकोण त्रिभुज या समत्रिभुज कहते हैं।

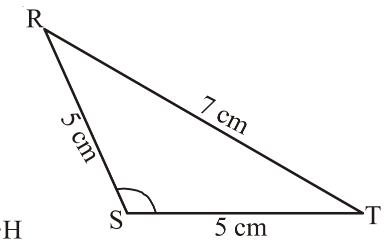


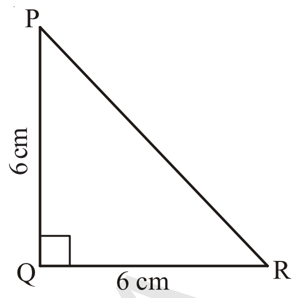
प्रयत्न कीजिए

1. नीचे दिये गये त्रिभुजों को उनकी भुजाओं, और कोणों के आधार पर वर्गीकृत करो









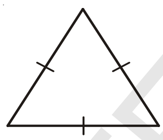
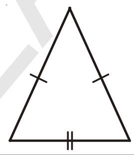
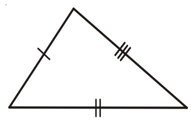
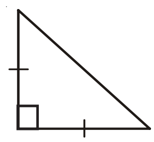
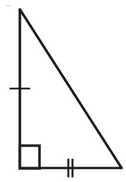
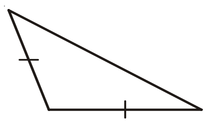
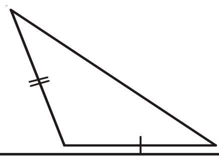
(2) ΔABC की तीनों भुजाओं एंव तीनों कोणों के नाम लिखिए।

(3) ΔPQR. में शीर्ष Q के सम्मुख भुजा लिखिए।

(4) Δ LMN में भुजा $\overline{LM}$ के सम्मुख कोण लिखिए।

(5) ΔRST में भुजा $\overline{RT}$ के सम्मुख का शीर्ष लिखिए।

यदि हम त्रिभुजों को उनकी भुजाओं एंव कोणों के संदर्भ में देखे तो हम निम्न प्रकार के त्रिभुज दर्शा सकते हैं।

त्रिभुज का प्रकार	सम बाहु	समद्विबाहु	विषम बाहु
न्यून कोण का			
समकोण का			
अधिक कोण का			

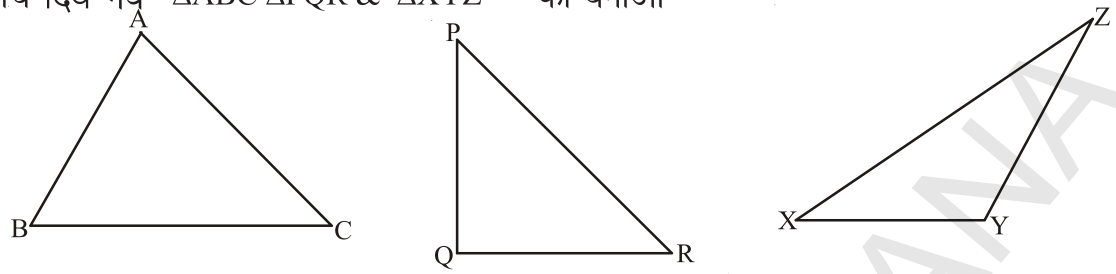
यह कीजिए

1. कार्डबोर्ड को काट कर विभिन्न प्रकार की त्रिभुजाकार आकृतियाँ बना लो। अपने कोई मित्र के साथ इन आकृतियों पर विचार करो।
2. रश्मि के अनुसार किसी भी त्रिभुज में दो समकोण नहीं हो सकते। क्या आप इस पर सहमत हैं? क्यों?
3. कमल के अनुसार किसी भी त्रिभुज में दो से अधिक न्यून कोण नहीं हो सकते। क्या आप सहमत हैं? क्यों?

5. त्रिभुज की भुजाओं में सम्बन्ध

5.2.1 त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाई का योग

नीचे दिये गये ΔABC ΔPQR & ΔXYZ को बनाओ



पटरी की सहायता से ऊपर दिये त्रिभुजों की लम्बाई मापो और नीचे दी गई तालिका भरो।

त्रिभुज	Δ की भुजा	दो भुजाओं का योग	क्या यह सही है।	हाँ या नहीं
ΔABC	$AB =$	$AB + BC =$	$AB + BC > CA$	
	$BC =$	$BC + CA =$	$BC + CA > AB$	
	$CA =$	$CA + AB =$	$CA + AB > BC$	
ΔPQR	$PQ =$	$PQ + QR =$	$PQ + QR > RP$	
	$QR =$	$QR + RP =$	$QR + RP > PQ$	
	$RP =$	$RP + PQ =$	$RP + PQ > QR$	
ΔXYZ	$XY =$	$XY + YZ =$	$XY + YZ > ZX$	
	$YZ =$	$YZ + ZX =$	$YZ + ZX > XY$	
	ZX	$ZX + XY =$	$ZX + XY > YZ$	

उपरोक्त तालिका देखकर हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि किसी भी त्रिभुज में दो भुजाओं की लंबाई का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होती है।

उदा- के लिए - Δ ABC में $AB + BC > CA$

$BC + CA > AB$

$CA + AB > BC$

5.2.2 त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं की लम्बाई में अंतर

पिछली तालिका के आधार पर **समान त्रिभुज लेते हुए अपने उत्तर को बताओ।**

त्रिभुज	भुजा की लम्बाई	दो भुजाओं का अंतर	क्या यह सही है?	हाँ या नहीं
ΔABC	AB =	BC–CA =	$BC - AB < AC$	
	BC =	CA–AB =	$CA - AB < BC$	
	CA=	AB–BC =	$AB - BC < CA$	
ΔPQR	PQ =	QR–RP =	$QR - RP < PQ$	
	QR =	RP–PQ =	$RP - PQ < QR$	
	RP =	PQ–QR =	$PQ - QR < RP$	
ΔXYZ	XY=	YZ–ZX =	$YZ - ZX < XY$	
	YZ =	ZX–XY =	$ZX - XY < YZ$	
	ZX =	XY–YZ =	$XY - YZ < ZX$	

उपरोक्त तालिका से यह निष्कर्ष निकलता है कि त्रिभुज की कोई दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से कम होता है।

उदाहरण ΔABC, में $AB - BC < CA$; $BC - AB < CA$

$BC - CA < AB$; $CA - BC < AB$

$CA - AB < BC$; $AB - CA < BC$

प्रयत्न करोः-

एक त्रिभुज की भुजाएँ 6 से.मी. व 9 से.मी. है तो तीसरी भुजा की संभावित लंबाई ज्ञात कीजिए।

उदा 1: क्या 6 सें.मी. 5 से.मी. और 8 से.मी. लंबाई वाली भुजाओं से त्रिभुज बनाना संभव है?

हलः- मानलो त्रिभुज की भुजाएँ

AB = 6 cm

BC = 5 cm

CA = 8 cm

त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लम्बाई

$AB + BC = 6 + 5 = 11 > 8$

$BC + CA = 5 + 8 = 13 > 6$

$CA + AB = 8 + 6 = 14 > 5$

क्योंकि त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई तीसरी भुजा की लम्बाई से अधिक है। इसलिए दी गई भुजाएँ त्रिभुज की भुजाएँ हैं अर्थात त्रिभुज संभव है।

अभ्यास - 1

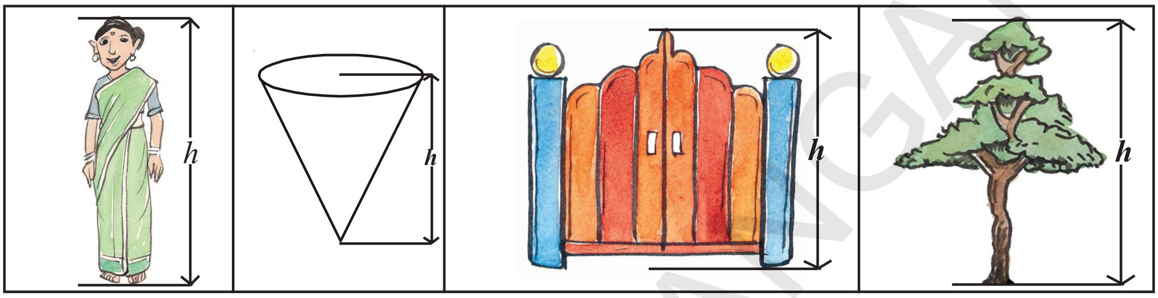
1.क्या नीचे दिये गये मापों के आधार पर त्रिभुज संभव है?

(i) 3 से.मी., 4 से.मी और 5 से.मी. (ii) 6 से.मी., 6 से.मी. और 6 से.मी.

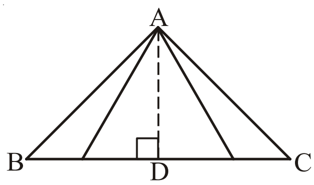
(iii) 4 से.मी., 4 से.मी. और 8 से.मी. (iv) 3 से.मी., 5 से.मी. और 7 से.मी.

5.3 त्रिभुज की ऊँचाई (Altitudes of Triangles)

दैनिक जीवन में विभिन्न स्थितियों में आपने "ऊँचाई" का नाम सुना होगा। चित्रों में आप ऊँचाई किस प्रकार ज्ञात करोगे?



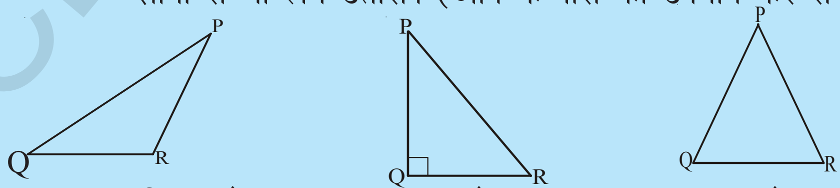
इन चित्रों में आप ऊँचाई ज्ञात करने के लिए वस्तुओं के शिखर से उसके आधार तक की लम्बाई को मापेंगे। आइए देखें कि त्रिभुज में ऊँचाई को किस प्रकार मापा जाता है।



सामने दिये हुये चित्र में ΔABC में शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक की दूरी को ऊचाई कहते हैं। परन्तु $\overline{A}$ से BC.पर कई रेखाखण्ड़ बना सकते हैं। इसमें से कौनसी रेखाखण्ड ऊँचाई दर्शायेगी। **त्रिभुज की ऊँचाई वह रेखा AD है जो BC पर लम्ब है।** इसलिए त्रिभुज के शीर्षों से उसके सामने की भुजाओं पर डाला गया लम्ब त्रिभुज का 'लंब' या 'ऊँचाई' कहलाता है।

प्रयत्न करो

(i) **निम्न** त्रिभुजों **पर** शीर्ष P से रेखा QR पर लंब बनाओ। इसी प्रकार अन्य दो शीर्षों से भी लंब उतारो। (आप कम्पास का उपयोग कर सकते हो)

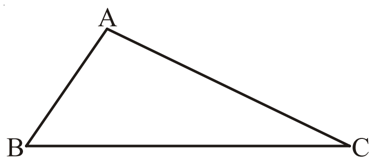


अधिक कोण समकोण न्यून कोण

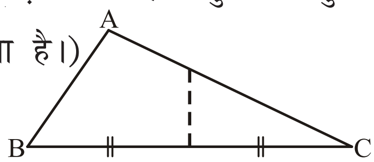
(ii) क्या लंब हमेशा त्रिभुज के अंदर ही स्थित रहता है?

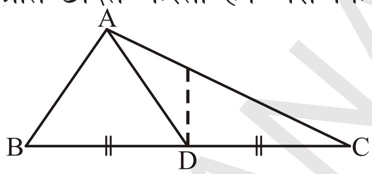
(iii) क्या आप उस त्रिभुज के बारे में सोच सकते **हो** जिसमें दो लंब उस त्रिभुज की दो भुजाएँ हों।

5.4 त्रिभुज की मध्यिकाएँ (Medians)

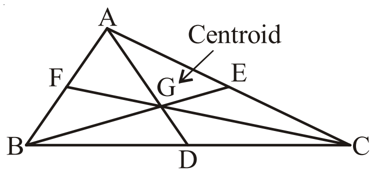


ΔABC को पेपर पर बनाकर उसे काट लो। अब त्रिभुज को इस प्रकार मोड़ों की शीर्ष B और C आपस में मिलें। जिस रेखा पर त्रिभुज को मोड़ा गया वह त्रिभुज की भुजा $\overline{BC}$ को प्रतिच्छेदित करती हैं। जैसे कि चित्र (i) में दिखाया गया है।)





$\overline{BC}$ के मध्य बिन्दु को D से दर्शाया गया है। (चित्र ii) इसी प्रकार शीर्ष A और C को मिलाओ। जिस रेखा पर त्रिभुज को मोड़ा गया वह त्रिभुज की भुजा $\overline{AC}$ को प्रतिच्छेदित करती हैं। $\overline{AC}$ का प्रतिच्छेदित बिन्दु इस रेखा का मध्य बिन्दु होगा। शीर्ष B से इस बिन्दु को मिलाओ और उसे E से दर्शाओ। अन्त में त्रिभुज को इस प्रकार मोड़ो कि A शीर्ष B शीर्ष से मिले। जिस रेखा पर त्रिभुज को मोड़ा गया वह उसे $\overline{AB}$ पर प्रतिच्छेदित करती है। इसका कटान बिन्दु $\overline{AB}$ का मध्य बिन्दु होगा। मान लो इसे F द्वारा दर्शाया गया। रेखाखण्ड $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ $\overline{CF}$ त्रिभुज के शीर्षों के सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़ते हैं और इन्हें हम त्रिभुज की मध्यिकाएँ कहते हैं।

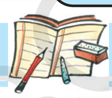


चित्र से हम निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि तीन माध्यिकाएं त्रिभुज के अन्तःभाग पर प्रतिच्छेदित होती हैं और इस प्रतिच्छेदित बिन्दु को त्रिभुज का 'गुरुत्वकेन्द्र' (Centroid) कहते हैं।

इस प्रकार त्रिभुज के किसी शीर्ष से उसके सामने की भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाले रेखाखंड को माध्यिका कहते हैं। माध्यिकाओं के कटान बिन्दु को गुरुत्वकेन्द्र कहते हैं।

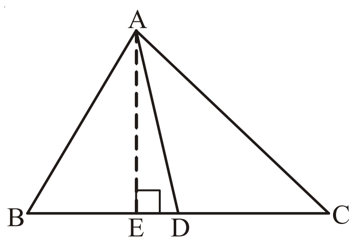
प्रयत्न करो:-

एक पेपर को समकोण त्रिभुज और अधिक कोणीय त्रिभुज को काट कर उनके गुरुत्वकेन्द्र ज्ञात करो



अभ्यास - 2

1. ΔABC, में $\overline{BC}$ का मध्य बिन्दु D है



(i) $\overline{AD}$ को ______________________ कहते हैं।

(ii) $\overline{AE}$ को ______________________ कहते हैं।

2. एक ऐसे त्रिभुज **का नाम** बताइए जिसके दो लंब उसकी दो भुजाएं हों।

3. क्या माध्यिका हमेशा त्रिभुज के अन्तःभाग में होती है?

4. क्या लंब हमेशा त्रिभुज के अन्तःभाग में होता है।

5. (i) ΔXYZ में शीर्ष Y की सम्मुख भुजा लिखिए

(ii) ΔPQR में भुजा $\overline{PQ}$ के सम्मुख कोण को लिखिए

(iii) ΔABC. में भुजा $\overline{AC}$ के सम्मुख शीर्ष को लिखिए

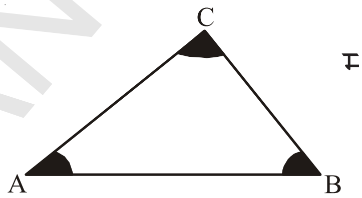
5.5 त्रिभुज के गुण

5.5.1 त्रिभुज के कोण-योग का गुण

आइये हम इस गुण को निम्न चार कार्यकलापों द्वारा समझेंगे।

कार्यकलाप 1

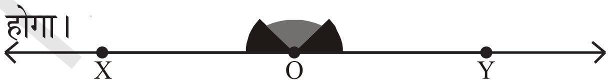
1. एक सफेद पेपर शीट पर त्रिभुज ABC उतारिए। रंगीन पेंसिल से त्रिभुज के कोण अंकित कीजिए। (जैसे चित्र दिखाया गया है।)



2. एक कैंची द्वारा तीनों कोणीय क्षेत्रों को काटिए।

3. रेखा XY खींचो और बिन्दु '0' को अंकित करो

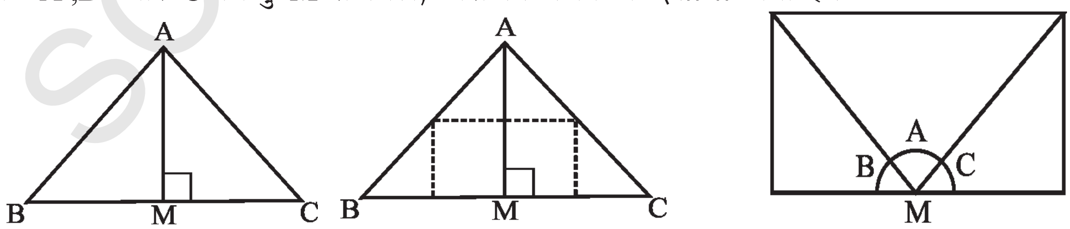
4. इन टुकड़ों को (कोणीय) को '0' पर इस प्रकार व्यवस्थित करो कि वे 0 पर कोण बनायें। इन तीन कोणों का योग 180^0 होगा।



कार्यकलाप 2

एक पेपर के टुकड़े को त्रिभुज आकार में काटो और इसके सिरों पर ABC अंकित करो।

अब ΔABC. को मोड़कर लंब $\overline{AM}$ बनाओ। ΔABC के 3 सिरों को इस प्रकार मोड़ों के तीनों शीर्ष A ,B और C बिन्दु M से मिलें, जैसे कि चित्र में दर्शाया गया है।

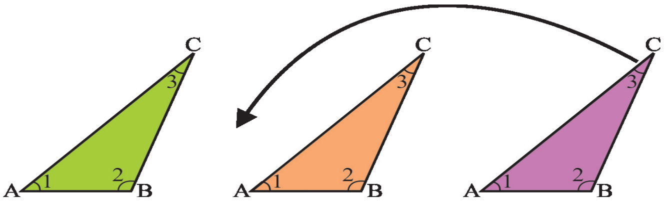


(i) (ii) (iii)

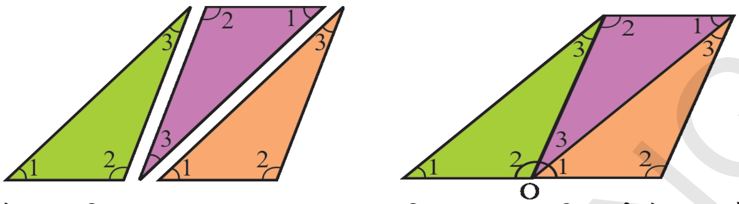
आप देखेंगे कि ΔABC. के तीनों कोण एक सरल रेखा बनाते हैं। अतः $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$.

कार्यकलाप 3

त्रिभुज ABC के कोई तीन आकार चित्र में दिखाए अनुसार लीजिए। **नीचे दिखाये गये अनुसार कोणों को** 1, 2 **और** 3 **से संकित कीजिए।**



अब त्रिकोणीय त्रिभुजों को चित्र में दिखाये अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



आपको '0' बिन्दु पर $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ किस प्रकार दिखाई दे रहा है?

आप देखेंगे कि तीन कोण एक सरल रेखा बनायेंगे और इन कोणों का योग 180^0 होगा।

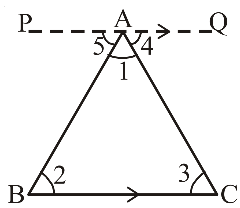
कार्यकलाप 4

एक कागज पर ΔABC, ΔPQR तथा ΔXYZ को उतारो और **चाँदे की सहायता से** प्रत्येक कोण मापों-

त्रिभुज का नाम	कोणों का मापन	कोणों के मापन का योग
ΔABC	$\angle A$ =....., $\angle B$ =....., $\angle C$ =.....,	$\angle A + \angle B + \angle C =$
ΔPQR	$\angle P$ =....., $\angle Q$ =....., $\angle R$ =.....,	$\angle P + \angle Q + \angle R =$
ΔXYZ	$\angle X$ =....., $\angle Y$ =....., $\angle Z$ =.....,	$\angle X + \angle Y + \angle Z =$

कोण मापन में यदि छोटी त्रुटियों को छोड़ दिया जाये तो आप पायेंगे कि त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^0 होगा। इस प्रकार औपचारिक तौर पर आप कह सकते हैं कि त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^0 है। **तर्क-वितर्क द्वारा अब आप औपचारिक रूप से यह कने के लिए तैयार है कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग** 180^0**है।**

त्रिभुज के कोण-योग गुण की उपपत्ति



कथन : त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^0 होता है।

दिया गया है : त्रिभुज ABC

सिद्ध करने के लिए : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$.

रचना : ΔABC के शीर्ष A से $\overline{PQ}$ एक रेखा खंड $\overline{BC}$ के समानांतर खींचो।

सिद्ध करो :

चित्र में दर्शाये अनुसार

$\angle 2 = \angle 5$ (एकान्तर के कोण) - 1

$\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर के कोण) -2

$\angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4$ (1 और 2 को जोड़ने पर)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 + \angle 4$ दोनों ओर $\angle 1$ को जोड़ने पर)

लेकिन $\angle 1 + \angle 5 + \angle 4 = 180^\circ$ (रेखीय कोणों का योग)

इसलिए, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

अर्थात त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180° होता है।

उदाहरण 1: यदि ΔABC, में $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, तो $\angle C$. ज्ञात कीजिए

हलः- ΔABC, में $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (Δ के तीन कोणों का योग 180° होता है)

$30^\circ + 45^\circ + \angle C = 180^\circ$ ($\angle A$ तथा $\angle B$ का मान रखने पर)

$75^\circ + \angle C = 180^\circ$

$\angle C = 180^\circ - 75^\circ$

इसलिए $\angle C = 105^\circ$

उदाहरण 2 : ΔABC, में यदि $\angle A = 3\angle B$ और $\angle C = 2\angle B$. तो तीनों कोणों को ज्ञात करो

हलः- $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (Δके तीन कोणों का योग)

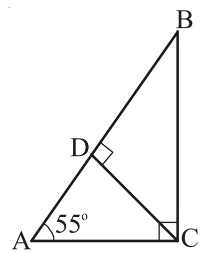
$3\angle B + \angle B + 2\angle B = 180^\circ$ $[\angle A = 3\angle B, \angle c = 2\angle B]$

$6\angle B = 180^\circ$

इसलिए $\angle B = 30^\circ$

इसलिए $\angle A = 3\angle B = 3 \times 30^\circ = 90^\circ$

अतः $\angle C = 2\angle B = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$



उदाहरण 3 : ΔABC समकोण हैं और $CD \perp AB$, $\angle A = 55^\circ$ तो

(i) $\angle ACD$ (ii) $\angle BCD$ (iii) $\angle ABC$ ज्ञात करो .

हलः- In ΔACD में

$\angle CAD + \angle ADC + \angle ACD = 180^\circ$ (Δ के तीन कोणों का योग 180° होता है)

$55^o + 90^o + \angle ACD = 180^o$ ($\angle A$ तथा $\angle D$ का मान रखने पर)

$145^o + \angle ACD = 180^o$

$\angle ACD = 180^o - 145^o = 35^o$

इसलिए $\angle ACD = 35^o$

(ii) ΔABC में

$\angle ACB = 90^o$

इसलिए $\angle ACD + \angle BCD = 90^o$ (**चित्र से** $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD$)

$35^o + \angle BCD = 90^o$ ($\angle ACD = 35^o$ --1 से)

$\angle BCD = 90^o - 35^o = 55^o$

(iii) ΔABC में

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^o$ (त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^o होता है)

$\angle ABC + 90^o + 55^o = 180^o$ (दिया गया है)

$\angle ABC + 145^o = 180^o$

$\angle ABC = 180^o - 145^o$

इसलिए $\angle ABC = 35^o$

उदाहरण 4 : एक त्रिभुज के कोणों का अनुपात 2:3:4 है तो कोणों को ज्ञात कीजिए

हल:- कोणों क अनुपात = 2:3:4

अनुपातों का योग 2+3+4=9

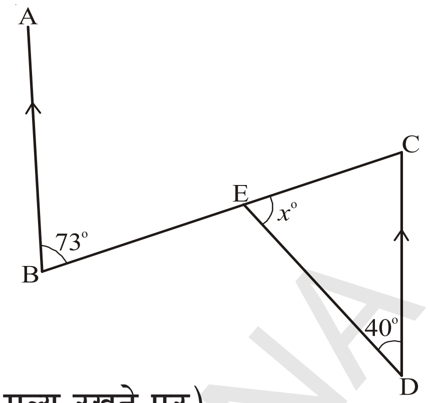
इसलिए पहला कोण $= \frac{2}{9} \times 180^o = 40^o$

दूसरा कोण $= \frac{3}{9} \times 180^o = 60^o$

तीसरा कोण $= \frac{4}{9} \times 180^o = 80^o$

इसलिए 40^o, 60^o and 80^o. त्रिभुज के कोण हैं।

उदाहरण 5 : दिये हुए चित्र में 'x' ज्ञात कीजिए।



हलः- : $\angle ECD = \angle ABC = 73^o$

(**क्योंकि** AB || CD **ये दोनों कोण** एकान्तर कोण हैं)

ΔECD में

$\angle CED + \angle EDC + \angle DCE = 180^o$

(त्रिभुज के तीन कोणों का योग)

$x^o + 40^o + 73^o = 180^o$ **(दिये गये मूल्य रखने पर)**

$x^o + 113^o = 180^o$

$x^o = 180^o - 113^o$

$x^o = 67^o$

उदाहरण 6 : ΔABC में एक कोण 40^o है और अन्य दो कोण समान हैं तो प्रत्येक **समान** कोण **का मूल्य** ज्ञात कीजिए

हलः- मान लो $\angle C = 40^o$ और $\angle A = \angle B = x^o$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ (त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^o होता है)

$x^o + x^o + 40^o = 180^o$ ($\angle A$ तथा $\angle B$ का मान रखने पर)

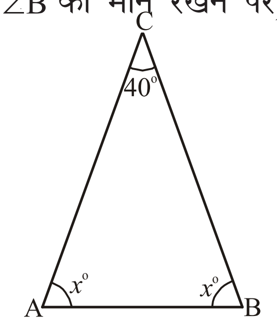
$2x^o + 40^o = 180^o$

$2x = 180^o - 40^o$

$2x = 140^o$

$x^o = 70^o$

इसलिए प्रत्येक समान कोण $=70^o$



उदाहरण 7 : नीचे दिये चित्र में ΔABC की AB तथा AC भुजाओं पर D और E बिन्दु हैं।

DE || BC. यदि $\angle B = 30^o$ and $\angle A = 40^o$, तो (i) x (ii) y (iii) z ज्ञात कीजिए

हलः- (i) $\angle ADE = \angle ABC$ (चूंकि DE || BC और $\angle D$ एंव $\angle B$ संगत कोण है)

इसलिए $x^o = 30^o$

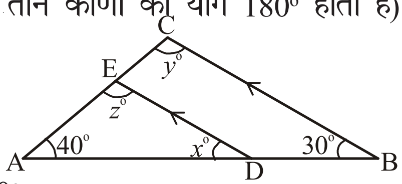
(ii) ΔABC में

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ (त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180^o होता है)

$40^o + 30^o + y^o = 180^o$

$70^o + y^o = 180^o$

इसलिए $y^o = 180^o - 70^o = 110^o$



(iii) Δ ADE में

$\angle D + \angle A + \angle E = 180^\circ$ (त्रिभुज के तीन कोणों का योग 180° होता है)

$30^\circ + 40^\circ + z^\circ = 180^\circ$

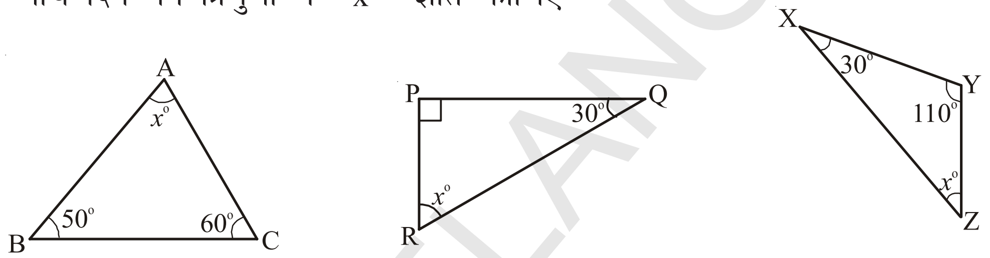
$70^\circ + z^\circ = 180^\circ$

$z^\circ = 180^\circ - 70^\circ$

$z^\circ = 110^\circ$

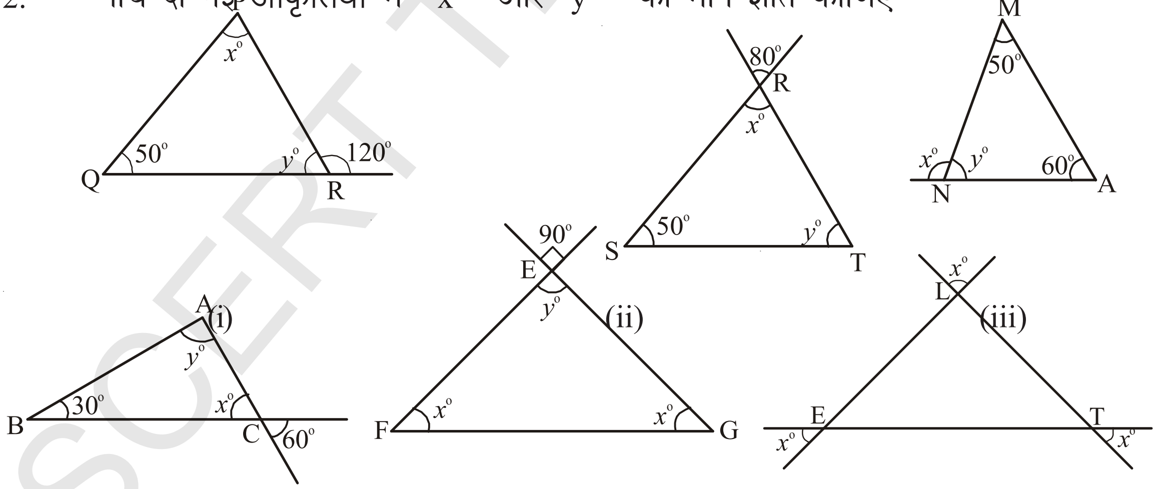
अभ्यास - 3

1. नीचे दिये गये त्रिभुजों में 'x' ज्ञात कीजिए



(i) (ii) (iii)

2. नीचे दी गई आकृतियों में 'x' और 'y' का मान ज्ञात कीजिए



(iv) (v) (vi)

3. नीचे त्रिभुज के दो कोण दिये गये हैं। तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।

(i) $38^\circ, 102^\circ$ (ii) $116^\circ, 30^\circ$ (iii) $40^\circ, 80^\circ$

4. एक समकोणीय त्रिभुज का एक कोण 30^0 हो तो अन्य न्यून कोण ज्ञात कीजिए।

5. नीचे दिये हुए कथनों का सत्य या असत्य लिखिए।

   (i) एक त्रिभुज में दो सम कोण होते हैं। (   )

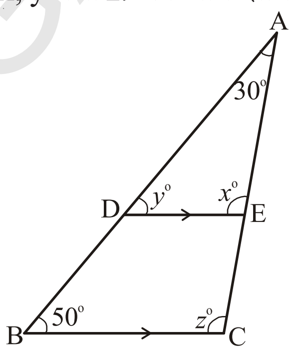
   (ii) एक त्रिभुज में दो न्यून कोण होते हैं। (   )

   (iii) एक त्रिभुज में दो अधिक कोण होते हैं। (   )

   (iv) त्रिभुज का प्रत्येक कोण से कम होता है। (   )

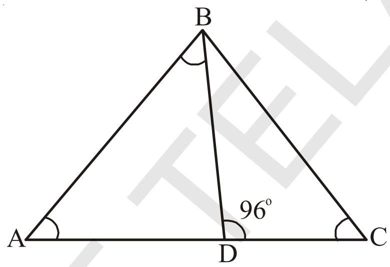
6. एक त्रिभुज के कोणों का अनुपात 1:2:3 हो तो कोण ज्ञात कीजिए।

7. सामने दिये हुए चित्र में $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\angle A = 30^o$ और $\angle B = 50^o$ तो x, y तथा z. का मान ज्ञात कीजिए।



8. नीचे दिये हुए चित्र में $\angle ABD = 3\ \angle DAB$

   और $\angle BDC = 96^o$. तो $\angle ABC$ को ज्ञात कीजिए।

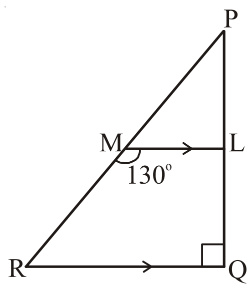


9. ΔPQR में $\angle P = 2\ \angle Q$ और $2\ \angle R = 3\ \angle Q$ तो ΔPQR के कोण ज्ञात कीजिए।

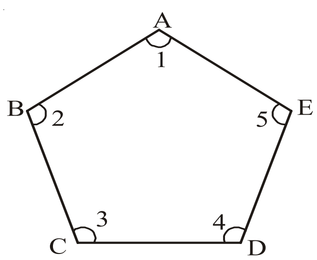
10. एक त्रिभुज के कोण 1 : 4 : 5 के अनुपात में हैं तो कोणों को ज्ञात करो।

11. एक समकोणीय त्रिभुज के न्यून कोण 2:3 के अनुपात में हों तो कोणों ज्ञात करो।

12. ΔPQR में Q समकोण है, $\overline{ML} \parallel \overline{RQ}$ और $\angle LMR = 130^o$. तो $\angle LPM$, $\angle PML$ और $\angle PRQ$ ज्ञात कीजिए



13. चित्र ABCDE, में $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ को ज्ञात कीजिए।



5.5.2 त्रिभुज का बाह्य कोण (Exterior Angle of Triangle)

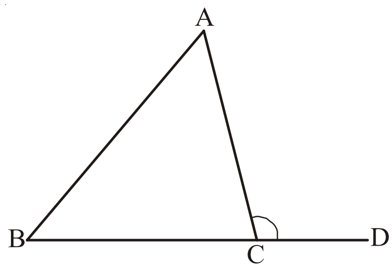


Figure 1

5.5.2 त्रिभुज का बाह्य कोण

ΔABC का चित्र उतारो और चित्र में दिखाये अनुसार $\overline{BC}$ को D तक बढ़ाओ शीर्ष C पर $\angle ACD$ बनाया गया जो कि ΔABC के बाह्य ओर स्थित है। इस कोण को हम ΔABC का बाह्य कोण कहते हैं।

$\angle ACD$ का संगत कोण $\angle BCA$ है और $\angle A$ तथा $\angle B$ त्रिभुज के अन्तःकोण हैं। जो कि बाह्य कोण के सम्मुख कोण हैं। अब $\angle A$ तथा कोण B को नीचे दिखाये गये चित्र के अनुसार व्यवस्थित करो।

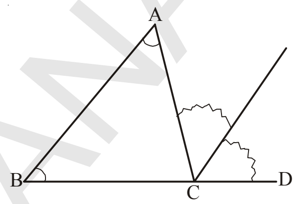


Figure 2

क्या ये चिपकाये गये कोण $\angle ACD$ को पूरी तरह ढक लेंगे?

क्या $\angle ACD = \angle A + \angle B$?

उपरोक्त क्रिया से यह सिद्ध होता है कि त्रिभुज का बाह्य कोण त्रिभुज के सम्मुख एकान्तर कोणों के योग के बराबर होता है।

इसे कीजिए -

ΔABC बनाओ और बाह्य कोण $\angle ACD$ की रचना करो। अब कंपास के चांदे द्वारा $\angle ACD$, $\angle AC$ तथा $\angle B$ को मापो। $\angle A + \angle B$ को ज्ञात करो और इसकी तुलना $\angle ACD$ से करो

क्या आपने पाया कि $\angle ACD = \angle A + \angle B$?

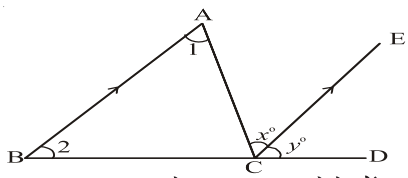
इस प्रकार चरणबद्ध यह सिद्ध हुआ कि त्रिभुज के बाह्य कोण त्रिभुज के सम्मुख अंतःकोणों के योग के बराबर होता है।

कथन : त्रिभुज के बाह्य कोण उसके सम्मुख के दो अन्तःकोणों के योग के बराबर होता है।

दिया गया है : ΔABC का बाह्य कोण $\angle ACD$ है।

सिद्ध करना है : $\angle ACD = \angle A + \angle B$

रचना : शीर्ष C से $\overline{BA}$ के समानांतर रेखा $\overline{CE}$ को खींचो



तर्क $\angle 1 = \angle x$ ($\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ और $\overline{AC}$ तिर्यक रेखा है।)(इसलिए एकन्तर कोण समान होते हैं।)

$\angle 2 = \angle y$ ($\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ और $\overline{BD}$ तिर्यक रेखा है। इसलिए संगत कोण समान होते हैं।)

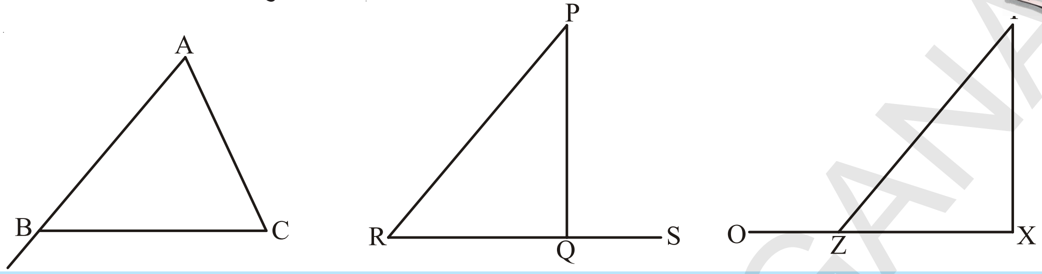
$\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$

इसलिए, $\angle ACD = \angle 1 + \angle 2$ (जैसे चित्र में दिखाया गया है$\angle x + \angle y = \angle ACD$)

इसलिए किसी त्रिभुज का बाह्य कोण उसके सम्मुख अन्तःकोणों के योग के बराबर होता है। इस नियम को बाह्य कोण का नियम कहते हैं।

इसे कीजिए :

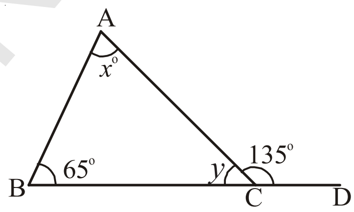
नीचे दिये हुए त्रिभुजों को उतारो। प्रत्येक मामले में जांच करो कि त्रिभुज को बाह्य कोण उसके सम्मुख अन्तःकोणों के योग के बराबर हैं–



उदाहरण 8 : नीचे दिये चित्र में x और y का मान ज्ञात करो

हलः- $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

(बाह्य कोण के नियम)



$135^o = 65^o + x^o$

$135^o - 65^o = x^o$

इसलिए $x^o = 70^o$

$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180^o$ (त्रिभुज के कोणों का नियम))

$65^o + 70^o + y^o = 180^o$

$135^o + y^o = 180^o$

$y^o = 180^o - 135^o$

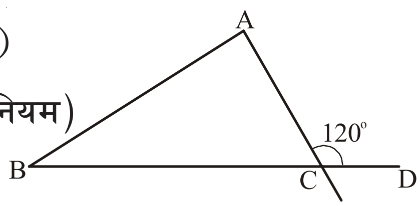
इसलिए $y^o = 45^o$

उदाहरण 9 : :- एक त्रिभुज का बाह्य कोण 120^o है और त्रिभुज के सम्मुख अन्तःकोण 1:5 के अनुपात में हैं तो त्रिभुज के कोण ज्ञात कीजिए

हल : $\angle ACD = 120^o$ (चित्र के अनुसार)

$\angle ACD = \angle A + \angle B$ **(बाह्यकोण नियम)**

$\angle A + \angle B = 120^o$



$\angle B : \angle A \quad = \quad 1 : 5$

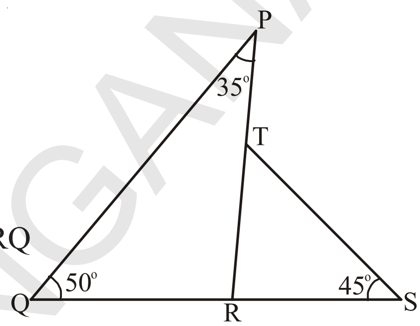
$$\angle B = \frac{1}{6} \times 120^\circ = 20^\circ$$

$$\angle A = \frac{5}{6} \times 120^\circ = 100^\circ$$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (Δ के **कोण-योग-नियम**)

$100^\circ + 20^\circ + \angle C = 180^\circ$

इसलिए $\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$



उदाहरण 10 : नीचे दिये हुए चित्र में

(i) $\angle PRS$ (ii) $\angle PTS$ (iii) $\angle STR$ (iv) $\angle PRQ$

ज्ञात करो

हलः- (i) ΔPQR में $\angle PRS$ बाह्य कोण है और $\angle RQP$ तथा $\angle QPR$ त्रिभुज के सम्मुख अन्तःकोण हैं।

$\therefore \angle PRS = \angle RQP + \angle QPR$ (बाह्य कोण)

$\angle PRS = 50^\circ + 35^\circ = 85^\circ$

(ii) ΔRST में $\angle PTS$ बाह्य कोण है तथा $\angle SRT$ और $\angle RST$ त्रिभुज के सम्मुख अन्तःकोण हैं।

इसलिए $\angle PTS = \angle SRT + \angle RST$

$\angle PTS = 85^\circ + 45^\circ$ (चूंकि $\angle SRT = \angle PRS = 85^\circ$)

$\angle PTS = 130^\circ$

(iii) ΔRST में

$\angle STR + \angle RST + \angle SRT = 180^\circ$ (Δ कोणों का नियम)

$\angle STR + 45^\circ + 85^\circ = 180^\circ$

$\angle STR + 130^\circ = 180^\circ$

इसलिए $\angle STR = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

(iv) $\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$ (समरेखीय नियम)

$\angle PRQ + 85^\circ = 180^\circ$

$\angle PRQ = 180^\circ - 85^\circ$

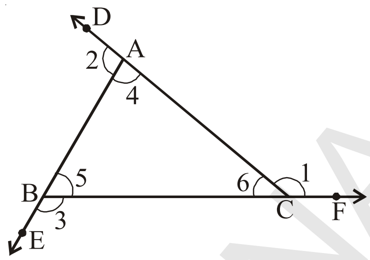
$\angle PRQ = 95^\circ$

उदाहरण 11 : सिद्ध करो कि त्रिभुज के बाह्य कोणों का योग 360^0 होता है।

हलः- $\angle 2 + \angle 4 = 180^o$ (रेखीय युग्म)

$\angle 3 + \angle 5 = 180^o$ (रेखीय युग्म)

$\angle 6 + \angle 1 = 180^o$ (रेखीय युग्म)



(1) (2) तथा (3) को जोड़ने पर

(1) (2) तथा (3) को जोड़ने पर

$\angle 2 + \angle 4 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 1 = 180^o + 180^o + 180^o$

$(\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 540^o$

हम जानते हैं कि $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^o$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 होता है।)

इसलिए $180^o + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^o$

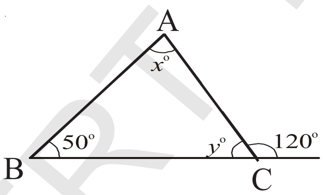
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^o - 180^o$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^o$

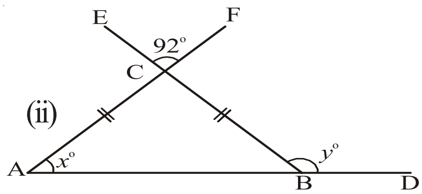
इसलिए त्रिभुज के बाह्य कोणों के योग 360^0 होता है।

उदाहरण 12 : निम्न चित्र में x और y का मान ज्ञात करो

(i)



(ii)



हलः- : (i) $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$ (बाह्य कोण का नियम)

$x^o + 50^o$ D $= 120^o$

$x^o = 120^o - 50^o = 70^o$

$\angle ACB + \angle ACD = 180^o$ (रेखीय युग्म)

$y^o + 120^o = 180^o$

$y^o = 180^o - 120^o = 60^o$

(ii) $\angle ACB = \angle ECF = 92^o$ (एकान्तर के कोण)

$\angle CAB = \angle CBA$ (एक ओर के एकान्तर कोण)

ΔABC, $\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 180^o$ (त्रिभुज के कोणों का नियम)

$x^o + x^o + 92^o = 180^o$

$2x = 180^o - 92^o = 88^o$

इसलिए $x^o = \frac{88}{2} = 44^o$

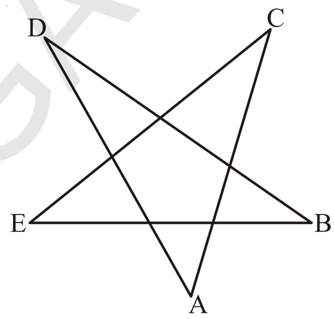
उसी प्रकार $\angle ABC + y^o = 180^o$ (रेखीय युग्म)

$y^o = 180^o - x^o$

इसलिए $y^o = 180^o - 44^o = 136^o$

उदाहरण13 : नीचे दिये गये चित्र में $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ का मान ज्ञात कीजिए

हलः- : इस चित्र को नामांकित करते पर



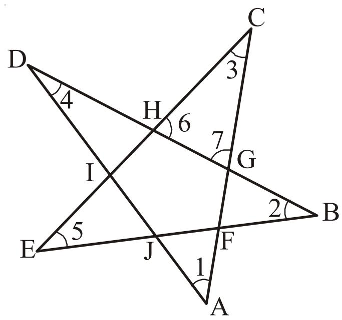
ΔGHC में $\angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 180^o$ ....(1)

(त्रिभुज के कोणों का नियम)

ΔEHB में $\angle 6 = \angle 5 + \angle 2$ ....(2)

ΔAGD में $\angle 7 = \angle 1 + \angle 4$ ....(3)

(बाह्य कोण का नियम)



समीकरण (2)और (3) का मान (1) में रखने पर

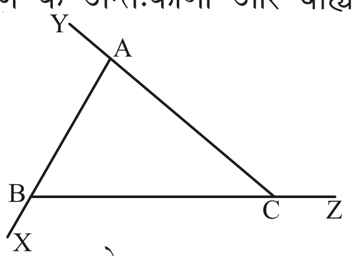
$\Rightarrow \angle 3 + \angle 5 + \angle 1 + \angle 2 + \angle 4 = 180^o$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^o$

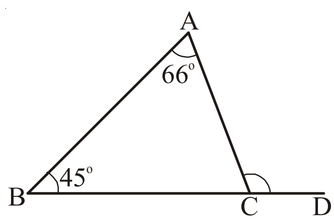
इसलिए , $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^o$

अभ्यास - 4

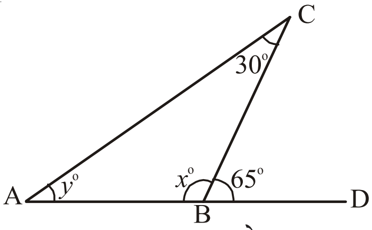
1. नीचे दिये गये त्रिभुज के अन्तःकोणों और बाह्य कोणों के नाम लिखिए।



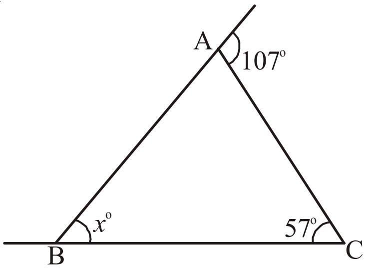
2. ΔABC, में $\angle ACD$ ज्ञात करो

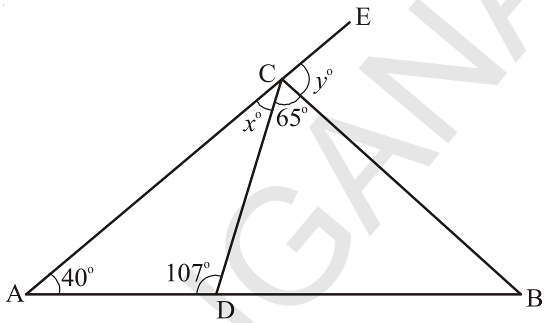


3. निम्न चित्र में x और y का मान ज्ञात करो

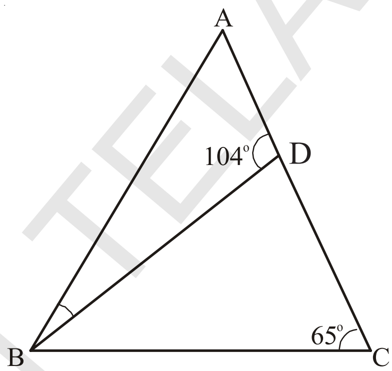


4. निम्न चित्रों में x और y का मान ज्ञात करो

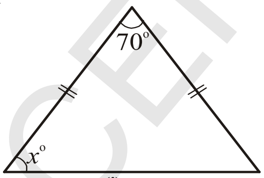




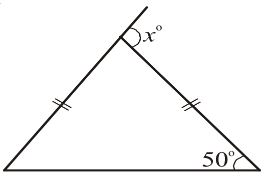
5. चित्र में $\angle BAD = 3\angle DBA$ तो $\angle CDB$, $\angle DBC$ और $\angle ABC$ ज्ञात करो



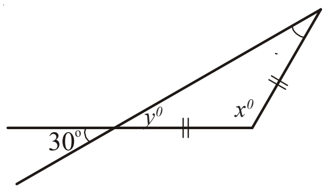
6. नीचे दिए हुये निम्न चित्रों में x और y का मान ज्ञात कीजिए।



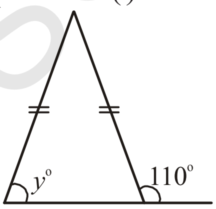
(i)



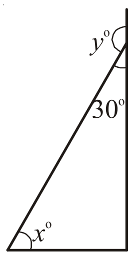
(ii)



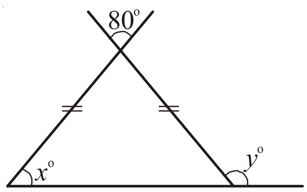
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

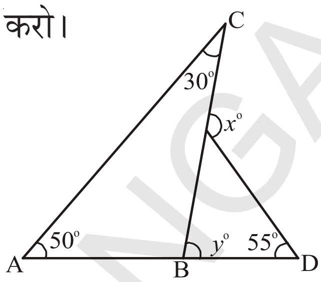
7. एक त्रिभुज का बाह्य कोण 125^0 है तथा अन्तः सम्मुख कोण 2:3 के अनुपात में हैं तो त्रिभुज के कोण ज्ञात कीजिए।

8. एक ΔPQR का बाह्य कोण $\angle PRS$ का मान 105^o है यदि $Q = 70^o$, तो $\angle P$ ज्ञात करो। क्या $\angle PRS > \angle P$ के?

9. एक त्रिभुज के बाह्य कोण का मान 130^0 है। इसके अन्तःसम्मुख कोणों में **से** एक कोण 60^0 हो तो इसका **दूसरा** अन्तःसम्मुख कोण ज्ञात करो।

10. एक त्रिभुज का बाह्य कोण 105^0 हैं। इसके अन्तःसम्मुख कोण 2:5 के अनुपात में हों तो त्रिभुज के कोण ज्ञात कीजिए।

11. निम्न चित्र में x और y का मान ज्ञात करो।



मुख्यांश

1 (i) त्रिभुज तीन रेखाखण्डों का बंद चित्र है।

(ii) भुजाओं के आधार पर त्रिभुज के तीन प्रकार होते हैं।

- त्रिभुज की तीन भुजाओं की लम्बाई समान हो, तो समबाहु त्रिभुज कहलाता है।
- त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई समान हो, उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।
- वह त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ असमान होती हैं, विषमबाहु त्रिभुज कहलाता है।

(iii) कोणों के आधार पर त्रिभुज के तीन प्रकार होते हैं।

- वह त्रिभुज जिसके सभी कोण न्यूनकोण होते हैं उसे न्यून कोण त्रिभुज कहते हैं।
- वह त्रिभुज जिसका कोई एक कोण अधिक कोण हो उसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं।
- वह त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण हो (90^0) उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं।

2. त्रिभुज में तीनकोण और तीन भुजाएँ होती हैं।

3. त्रिभुज की भुजाओं के गुण

(i) किसी भी त्रिभुज की दो भुजाओं का योगफल तीसरी भुजा की लम्बाई से अधिक होता है।

(ii) किसी भी त्रिभुज के दो भुजओं का अन्तर तीसरी भुजा से कम होता है।

4. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से खींची गई रेखा जो शीर्ष के सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करती है, उसे **त्रिभुज की** माध्यिका कहते हैं।

5. किसी भी त्रिभुज के शीर्ष से डाली गयी **लम्ब** रेखा त्रिभुज की लम्बवत रेखा या त्रिभुज की ऊँचाई कहलाती है।

6. त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 इसे त्रिभुज **का कोण-योग**-नियम कहते हैं।

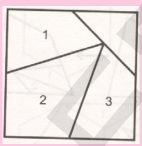
7. त्रिभुज के बाह्य कोण त्रिभुज के अन्तः सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है। इसे त्रिभुज का बाह्य कोण नियम कहते हैं।

8. रेखा, रेखा खण्ड और किरण **को दर्शाना**

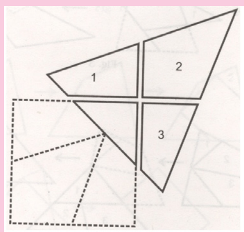
LM = रेखा LM की लम्बाई; $\overline{LM}$ = रेखा खण्ड LM

$\overrightarrow{LM}$ = किरण LM ; $\overleftrightarrow{LM}$ = रेखा LM

कार्ड बोर्ड आकार द्वारा खेल



एक वर्गाकार कार्ड बोर्ड शीट लीजिए
भुजा की मध्य बिन्दु अंकित करो और
दर्शाये अनुसार रेखा बनाओ।
वर्ग को रेखाओं से चार भागों में
काटो और उन्हें **जमाकर त्रिभुज बनाओ।**



अनुपात और उसके अनुप्रयोग 6

(RATIO APPLICATIONS)

6.0 प्रस्तावना

पिछली कक्षा में तुमने अनुपात और समानुपात के उपयोग द्वारा मात्राओं की तुलना करना सीखा। इस कक्षा में उसी जानकारी का पुनरावलोकन करते हुए हम अनुपात को प्रतिशत में व्यक्त करना सीखेंगे।

6.1 अनुपात (Ratio)

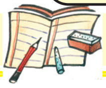
- माधुरी का वजन 50 कि.ग्रा. और उसकी बेटी का वजन 10 कि.ग्रा. है, हम कहेंगे कि माधुरी का वजन उसकी बेटी से 5 गुना है। हम ऐसे भी कह सकते हैं कि बेटी का वजन, माँ के वजन का एक बटा पाँच गुना है। इस तरह माधुरी का वजन और उसके बेटी के वजन का अनुपात 50:10 या 5:1 है। इसका विलोम बेटी और माँ के वजन का अनुपात 1:5 है।

एक कक्षा में 60 बालक तथा 40 बालिकाएँ हैं। बालकों की संख्या बालिकाओं की संख्या के $\frac{3}{2}$ गुना है। हम ऐसे भी कह सकते हैं कि बालिकाओं की संख्या, बालकों की संख्या के दो बटा तीन गुना है। इस तरह बालकों की संख्या तथा बालिकाओं की संख्या का अनुपात 60:40 या 3:2 है।
इसका विलोम बालिकाओं की संख्या और बालकों की संख्या का अनुपात 2:3 है।
आनन्द के पास 100 से.मी. लम्बी तार है और रश्मि के पास 5 मी लम्बी तार है। आनन्द रश्मि से कहता है कि मेरी तार तेरी तार से 20 गुना है। तुम्हें पता है वह असत्य है क्योंकि 5 मी. 100 से.मी. से बहुत लंबा है। रश्मि के तार की लम्बाई को मीटर में तथा आनन्द के तार की लम्बाई को से.मी को एक ही इकाई में व्यक्त करना चाहिए। हमें ज्ञात है कि 1 मी = 100 से.मी। तो रश्मि के तार की लम्बाई 5 मी = 5x100=500 से.मी है। इस तरह रश्मि और आनन्द के तार का अनुपात 500:100 या 5:1 है। हम ऐसे भी कह सकते हैं कि रश्मि के तार की लंबाई आनन्द के तार के 5 गुना है।
ऊपर के सभी उदाहरणों में मात्राओं की तुलना अनुपात के रूप में की गई है। इस तरह अनुपात क्रमबद्ध, मात्राओं की तुलना है जो एक ही प्रणाली में है।

हम इसे (:) संकेत द्वारा दर्शाते हैं, जैसे A:B। पहले पद को प्रथम पद तथा द्वितिय को दूसरा पद कहते हैं।

प्रयास कीजिए

वास्तविक जीवन के अनुभव के बारे में सोचिए जहाँ तुम्हें मात्राओं की तुलना अनुपात के रूप में करनी है।



अभ्यास – 1

1. ₹ 100 तथा ₹ 10 के बीच का अनुपात क्या है? अपने उत्तर को सरल रूप दीजिए।
2. सुधा के पास ₹ 5 हैं। राधा के पास सुधा के 3 गुना पैसे है। राधा के पास कितने पैसे हैं?
   (i) राधा के पैसे तथा सुधा के पैसे का अनुपात क्या है?
   (ii) सुधा के पैसे तथा राधा के पैसों का अनुपात क्या है?
3. राजू और रानी के बीच 96 चाकलेट 5:7 में विभाजित कीजिए।
4. रेखाखंड AB की लम्बाई 38 से.मी. है। एक बिन्दु x पर स्थित उस रेखा को 9:10 मे विभाजित करना है। रेखाखंड AX और XB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

5. ₹ 1,60,000 की राशि 3:5 में विभाजित किया गया है। कम हिस्से का मूल्य ज्ञात कीजिए।
6. हरा रंग तैयार करने के लिए चित्रकार पीले और नीले रंग को 3:2 में मिलाता है। यदि वह बारह लीटर पीले रंग का उपयोग करता है तो कितने लीटर नीले रंग का उपयोग करेगा?
7. एक आयत 40 से.मी और चौड़ाई 20 से.मी है। उसकी लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।
8. एक केंचुए का वेग 50 मीटर प्रति घण्टा और चीते का 120 कि.मी प्रति घण्टा है। इनके वेगों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
9. ज्ञात कीजिए (i) तुम्हारी कक्षा के लड़के और लड़कियों का अनुपात
   (ii) तुम्हारी कक्षा के खिड़कियों तथा दरवाजों की संख्या का अनुपात
   (iii) तुम्हारे पास की किताबों तथा कापियों की संख्या का अनुपात

कक्षा परियोजना

1. तुम्हारे मित्र की सहायता से **मापन टेप** का उपयोग कर तुम्हारे कक्षा की, लम्बाई तथा चौड़ाई नापो। लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।
2. ₹ 10 का नोट लो। उसकी लम्बाई, चौड़ाई ज्ञात करो। अपने अध्यापक की सहायता से उत्तर को **निकट** पूर्ण संख्या के रूप में लिखो। लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात ज्ञात करो। यह क्रिया ₹ 20 तथा ₹ 50 के नोट लेकर रवि उनकी लंबाई और चौड़ाई के संबंध में करो। कापी में नोट करो।

6.2 **समानुपात (Proportion)**

श्रीलेखा की माँ एक कप चाय बनाने 2 चम्मच चाय की पत्ती का उपयोग करती हैं। एक दिन 3 अतिथि इनके घर आते हैं। 3 कप चाय बनाने के लिए कितने चम्मच चाय की पत्ती लगेगी? हाँ तुम सही हो। वह 3 कप चाय बनाने **के नियम** 6 चम्मच चाय की पत्ती का उपयोग करेगी। यहाँ श्रीलेखा की माँ अनुपात के नियम का उपयोग कर प्रश्न को हल करती है।

4 cm

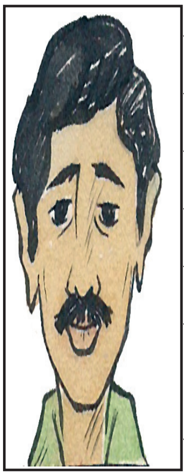
6 cm

एक उदाहरण देखेंगे

रवि ने अपनी फोटो खिंचवाई। उस फोटो को धुलाकर 4 से.मी. X 6 से.मी. **परिमाण** की फोटो बनवाई।

4 cm

12 cm



वह अपनी फोटो बड़ी बनाना चाहता था इसलिए वल फोटोलॅब गया। लॅब के आदमी ने उसे फोटो दी। रवी ने पलट कर कहा इस तस्वीर में कुछ गलत लगता है। क्या तुम्हें लगता है यह रवी है?

क्या तुम बता सकते हो इसमें क्या गलत है?

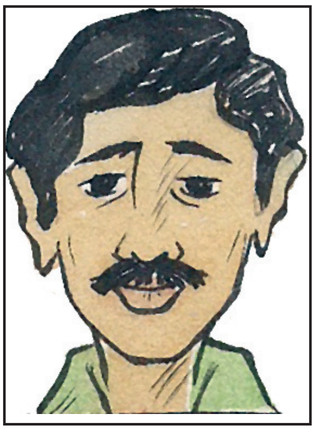
रवी ने इस तस्वीर **की** लम्बाई और चौड़ाइ का मापन करने का निश्चय किया उसे ज्ञात था मूल तस्वीर की लम्बाई और चौड़ाई की **अनुपात** बड़ी तस्वीर के लम्बाई और चौड़ाई के समान होनी चाहिए।

मूल तस्वीर की लम्बाई और चौड़ाई की **अनुपात** =4:6=2:3

बड़े तस्वीर की लम्बाई और चौड़ाई की **अनुपात** = 4:12 = 1:3

क्या यह दोनों **अनुपात** समान हैं? रवी ने महसूस किया की बड़े तस्वीर की लम्बाई और चौड़ाई मूल फोटो के समान नही है। वह समझ गया **कि** दूसरी तस्वीर पहले के अनुपात में नही है।

8 cm



12 cm

उसने लॉब के आदमी को एक और बड़ी तस्वीर बनाने **को** कहा, इस बार तस्वीर अच्छी बनी। उसने फिर **से** लम्बाई और चौड़ाई का मापन किया और **अनुपात** निकाली।

लम्बाई और चौड़ाई की **अनुपात** = 8:12 = 2:3

रवी समझ गया मूल तस्वीर और बड़ी तस्वीर अच्छी लगने का कारण उसकी लम्बाई और चौड़ाई समान थी, क्योंकि वह निष्पत्ति मे थे।

इस तरह दो अनुपात समान होगी यदि वे समानुपात में होंगी। समानुपात के लिए ‘ : :” चिन्ह का उपयोग होता है। दो अनुपात a:b और c:d समान हो तो a:b=c:d या a:b::c:d लिखते हैं। इसे इस तरह पढते हैं। a**अनुपात** b, **समान है** c **अनुपात** d के। $\therefore a : b$ **और** c:d **समानुपात में हैं**। इसे इस तरह भी पढते है a के लिए b है जैसे c के लिए d

a,b,c,d राशियों को क्रमशः प्रथम, द्वितीय, *तृतीय*, चतुर्थ पद कहते हैं।
प्रथम और चतुर्थ पदों को अन्तिम पद या *अंत्य* पद कहते हैं। दूसरे और तीसरे पद को मध्य पद या *औसत* कहते हैं।

समानुपात में a:b = c:d

$$\text{इस प्रकार } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

इस तरह $\quad ad = bc$

मध्य पदों का गुणनफल = अन्त्य पदो क गुणनफल

इसलिए

$$\underbrace{a : \overbrace{b = c}^{\textbf{मध्यपद}} : d}_{\text{अन्त्य पद}}$$

यहाँ d **को** चतुर्थ **पद** कहते हैं। $d = \frac{b.c}{a}$

कुछ उदाहरण समझने की प्रयत्न करेंगे

उदाहरण 1 : समानुपात पूरा करने के लिए $\square$ ज्ञात कीजिए।

(i) $\quad 2 : 5 = 6 : \square$

हलः मध्य पदों का गुणनफल = अन्त्य पदों *का* गुणनफल

$$\underbrace{2 : \overbrace{5 = 6} : \square}$$

अर्थात $\quad 2 \times \square = 5 \times 6$

$$= \frac{30}{2} = 15$$

(ii) $\quad 16 : 20 = \square \times 35$

मध्य पदों *के* गुणनफल समान *हैं* अन्त्य पदों *का* गुणनफल

$$\underbrace{16 : \overbrace{20 = \square} : 35}$$

$$20 \times \square = 16 \times 35$$

$$\square = \frac{560}{20} = 28$$

$$\therefore \quad 6 : 20 = \boxed{28} : 35$$

अभ्यास - 2

1. नीचे दी गई औसत तालिका में लुप्त **पद** ज्ञात कीजिए

क्र.संख्या	अनुपात	अन्त्य पदों का गुणनफल	मध्य पदों क गुणनफल
(i)	1 : 2 : : 4 : 8		
(ii)	5 : 6 : : 75 : 90		
(iii)	3 : 4 : : 24 : 32		
(iv)	2 : 5 : : □ : 15	30	
(v)	3 : 6 : : 12 : □		72

2. सत्य असत्य लिखिए

(i) 15 : 30 : : 30 : 40

(ii) 22 : 11 : : 12 : 6

(iii) 90 : 30 : : 36 : 12

(iv) 32 : 64 : : 6 : 12

(v) 25 : 1 : : 40 : 160

3 मधु मार्केट में 5 किलो आलू खरीदता है। यदि 2 किलो आलू का मूल्य रु. 36 हो तो मधु को कितने पैसे देने होंगे?

4. भौतिक शास्त्र कहता है कि पिण्ड का चन्द्रमा पर भार **समानुपात में** है, उसका पृथ्वी पर भार के। मान लो 90 किलो भार वाले आदमी का चन्द्रमा पर 15 किलो भार है तो 60 किलो भार वाली औरत का भार चन्द्रमा पर कितना होगा?

5. आपातकालीन सहायाता शिविर में अभियंता (**नर्स**) और ड़ाक्टरों का अनुपात 2:5 है।

(i) यदि अभियंता की संख्या 18 है तो डॉक्टरों की संख्या ज्ञात कीजिए।

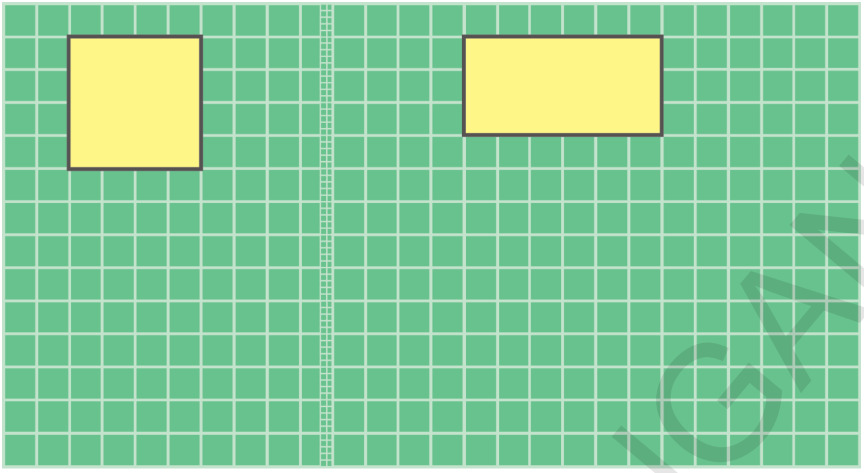
(ii) यदि डॉक्टर 65 है तो अभियंता कितने होंगे?

6. दो कोणों का अनुपात 3:1 है। ज्ञात कीजिए

(i) छोटा कोण 180^0 है तो बड़ा कोण**कितना होगा**? (ii) बड़ा कोण 63^0 हो तो छोटा **कितना होगा** ?

यह कीजिए

वर्ग और आयत को बड़ा कीजिए **जिससे** बड़ा वर्ग और आयत मूल वर्ग और आयत के समानुपाती हो जाये।



6.3 दर (Rate)

कभी-कभी अनुपात दर के रूप में प्रकट होता है। नीचे कुछ उदाहरण दिए गये हैं।

i) मेरे पिताजी गाड़ी 60 कि.मी प्रति घंटे के वेग से चलाते हैं।

ii) मैने सेब ₹ 120 प्रति किलो की दर से खरीदे।

iii) मेरे हृदय के धड़कनों की दर 72 प्रति मिनट है।

iv) अंडों का दर ₹ 60 प्रति दर्जन है।

v) भारत में जन्मदर लगभग 21 है। (जीवित प्रति हजार व्यक्ति)

देखिए:http://www.indexmundi.com/g/g.aspx?c=in&v=25

पहले उदाहरण में गाड़ी द्वारा तय की गई दूरी की तुलना लगे समय के साथ की गई है। दूसरे उदाहरण में सेब के दर की तुलना इसकी मात्रा से की गई है। तीसरे उदाहरण में हृदय के धड़कनों की तुलना लगे समय से की गई है। चौथे उदाहरण में अंडों के दर की तुलना उसकी मात्रा से की गई है। पाँचवे उदाहरण पैदा हुए, जीवितों के संख्या की तुलना 1000 से की गई है।

इस शब्द को '/' चिह्न द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है और ऊपरी उदाहरणों **में** 60 कि.मी./घण्टा, ₹120/कीलो, 72 धड़कने/मिनट, ₹60/दर्जन एवं 21 जन्म प्रति 1000 व्यक्ति लिख सकते हैं।

6.4 एकैक पद्धति (Unitary Method)

एक इकाई का मूल्य ज्ञात करने के बाद आवश्यक इकाइयों की संख्या ज्ञात करने वाले पद्धति को एकैक पद्धति कहते हैं।

उदाहरण 2 : एक दुकानदार 5 लोटे ₹ 30 में बेचता है। तो 10 लोटे का मूल्य क्या होगा?

हलः-   5 लोटे का मूल्य = ₹ 30

इसलिए एक लोटे का मूल्य $= \frac{30}{5} =$ ₹6

10 लोटे का मूल्य $= 6 \times 10 =$ ₹ 60.

उदाहरण 3 : **एक दर्जन केलों का मूल्य ₹ 20 हो तो, 9 केलों का मूल्य क्या होगा?**

हलः-   1 दझन 12 इकाई

12 केलों का मूल्य = ₹ 20

1 केले का मूल्य = ₹ $\frac{20}{12}$

इस तरह 9 केले का मूल्य $= \frac{20}{12} \times 9 =$ ₹ 15

यह कीजिए

1. 160 विद्यार्थियों को बैठने के लिए 40 बेंच लगते हैं। 240 विद्यार्थियों को बैठने के लिए कितने बेंच चाहिए?
2. गाने वाली छोटी चिड़िया उड़ते समय दस सेकण्ड़ में 23 बार पंख फड़फड़ाती है। दो मिनट में वह कितनी बार पंख फड़फड़ाएगी?
3. मानव हृदय की औसत धड़कन 72 बार प्रति मिनट है। 15 मिनट में वह कितनी बार धड़केगा? एक घंटे में कितनी बार? एक दिन में कितनी बार?

6.5 सीधा समानुपात (Direct Proportion)

नित्य जीवन के तरह-तरह अनुभव में हम देखते हैं एक मात्रा के बदलाव के प्रभाव से दूसरी मात्रा भी बदलती है।

उदाहरण

- खरीदी हुई वस्तुओं की संख्या यदि बढ़ेगी तो खर्च भी बढ़ेगा। उसी तरह खरीदी हुई वस्तुओं की संख्या घटेगी तो खर्च भी घटेगा।
- यदि बैंक में जमा राशि बढ़ेगी तो ब्याज भी बढ़ेगी।
  उसी तरह बैंक में जमा राशि घटेगी ब्याज भी घटेगी।
- स्थिर वेग द्वारा यदि तय की गई दूरी बढ़ेगी तो लगा समय भी बढ़ेगा।
  उसी तरह यदि दूरी घटेगी तो तय करने वाला समय भी घटेगा।

ऊपरी उदाहरणों में हम देखते हैं जब एक राशि बढ़ती है तो दूसरी भी बढ़ती है।

और विपरित क्रम।

300 लीटर की टैंक को एक नल एक घंटे में कितने लीटर पानी भरेगा? 2 घण्टे में टैंक में लीटर पानी भरेगा

टैंक में 600 लीटर पानी भरेगा। 4 घण्टे में, 8 में, कितने लीटर पानी भरेगा? इसकी गणना कैसे करोगे?

नीचे की तालिका देखिए

टैंक भरने में लगा समय(घण्टों में)	1	2	4	8
भरने की क्षमता (लीटर में)	300	600	1200	2400

ऊपरी उदाहरण से हमें पता चलता है यदि लगा हुआ समय बढ़ेगा तो भरा हुआ पानी भी बढ़ेगा। अतः लगे समय का अनुपात भरे हुए मात्रा का अनुपात समान होगा। इस तरह लिया समय दुगुना हो तो भरी हुई मात्रा भी दुगुनी होगी, उसी तरह लिया समय चार गुना हो तो भरी हुई मात्रा भी मूल मात्रा के चार गुनी होगी। इसी तरह लिया समय 8 गुना हो तो भरी हुई मात्रा 8 **गुना होगी**। इस तरह टैंक भरने में लगा समय और भरी हुई मात्रा अनुलोमानुपात में है?

उदाहरण 4 : एक दुकानदार 6 अंडे ₹ 30 में बेचता है। 10 अंडों का दाम क्या होगा?

हलः मान लो 10 अंडों का मूल्य ₹ x है। हमें पता है जैसे- अंडों की संख्या बढ़ेगी खर्च भी बढ़ेगा **जिससे** अंडों की संख्या और खर्च का अनुपात समान रहेगा। दूसरे शब्दों में अंडों की संख्या अनुपात अनुलोमानुपात में है।

इस तरह $6 : 10 = 30 : x$

अन्त्य पदों क गुणनफल समान है मध्य पदों के गुणनफल

$6 \times x = 10 \times 30$

$6x = 10 \times 30$

$$x = \frac{10 \times 30}{6} = 50$$

x = ₹ 50

10 अंडों का खर्च ₹ 50 होगा।

इस प्रश्न को एकैक पद्धति से भी हल कर सकते हैं, एक अंडे का दाम पहले ज्ञात करेंगे।

6 अंडों का दाम ₹ 30

1 अंडे का दाम = ₹ $\frac{30}{6}$ = ₹ 5

10 अंडों का दाम = 5 × 10 = ₹ 50

उदाहरण 5: एक परिवार के 4 सदस्यों के लिए 20 किलो चावल लगता है। यदि सदस्यों की संख्या बढ़कर 10 हुई तो कितना चावल लगेगा?

पद्धति 1. गिरिजा ने कहा जैसे सदस्यों की संख्या बढ़ेगी आवश्यक चावल की मात्रा भी बढ़ेगी ताकि सदस्यों की संख्या और चावल की मात्रा का अनुपात समान हो। इस तरह सदस्यों की संख्या तथा चावल की मात्रा अनुलोमानुपात में होंगे।

मान लो 10 सदस्यों के लिए आवश्यक चावल कि मात्रा x है

तो $x : 20 = 10 : 4$

अन्त्य पदों का गुणनफल

$$4x = 20 \times 10$$

$$x = \frac{20 \text{ x } 10}{4} = 50$$

$$x = 50 \text{ किलो}$$

$\therefore$ 10 सदस्यों के लिए आवश्यक चावल की मात्रा = 50 किलो

पद्धति 2 : सरला ने इसे एकैक पद्धति

4 सदस्यों के लिए आवश्यक चावल की मात्रा = 20 किलो

एक सदस्य के लिए आवश्यक चावल की मात्रा = $\frac{20}{4}$ = 5 किलो

$\therefore$ 10 सदस्यों के लिए आवश्यक चावल कि मात्रा = 10 x 5 = 50 किलो

उदाहरण 6 : एक जीप स्थिर वेग से 90 कि.मी. की दूरी 3 घण्टे में तय करती है। तो 150 कि.मी. की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा?

हमें पता है कि तय की गई दूरी बढ़ेगी तो समय भी बढ़ेगा जिससे कि.मी. की संख्या और लगे समय का अनुपात समान होगा।

यह कि.मी. की संख्या तथा लगा समय अनुलोमानुपात में है।

मान लो 150 कि.मी. दूरी तय करने में लगा समय x है।

$x : 3 = 150 : 90$

अन्त्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$$90x = 150 \times 3$$

$$x = \frac{150 \times 3}{90} = 5$$

$$x = 5$$

$\therefore$ 150 कि.मी. की दूरी तय करने में लगा समय = 5 घण्टे।

उदाहरण 8 : एक मानचित्र का स्केच 1:30000 है। मानचित्र में दो शहरों के बीच की दूरी 4 से.मी है, तो उनके बीच की वास्तविक दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः- मान लो वास्तविक दूरी x से.मी है। मानचित्र में शहरों के बीच की दूरी वास्तविक दूरी के अनुलोमानुपात होगी। $1:30000 = 4 : x$

अन्त्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल के

$x = 4 \times 30,000$

$= 1,20,000$ से.मी.

$= 1.2$ कि.मी. (1 कि.मी. = 1,00,000 से.मी.)

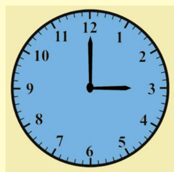
दो शहरों के बीच मानचित्र में दूरी 4 से.मी. है तो उनके बीच वास्तविक दूरी 1.2 कि.मी. है।

यह प्रयास कीजिए

1. 1 लीटर की खाली बोतल नल के नीचे रखिए जिसमें बूँद-बूँद पानी टपक रहा हो। इस बोतल को भरने में कितना समय लगा? एक साल में कितना पानी व्यर्थ हुआ, ज्ञात कीजिए।

2. एक घड़ी लेकर उसके मिनट का काँटा 12 पर स्थिर कीजिए। मिनट के काँटे द्वारा किए गए कोणों की समय-समय पर गणना कीजिए।

बीता समय	(T_1)	(T_2)	(T_3)	(T_4)
मिनटो में	15	30	45	60
घुमा हुआ कोण	(A_1)	(A_2)	(A_3)	(A_4)
डिग्री में	90	....	....	....



क्या मिनट के काँटे द्वारा बनाया गया कोण समय के अनुलोमानुपाती है? हाँ,

ऊपरी तालिका में हम देखते हैं

$T_1 : T_2 = A_1 : A_2$, क्योंकि

$T_1 : T_2 = 15 : 30 = 1 : 2$

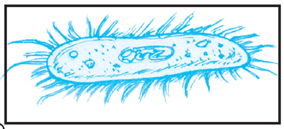
$A_1 : A_2 = 90 : 180 = 1 : 2$

जाँच करो $T_2 : T_3 = A_2 : A_3$ और $T_3 : T_4 = A_3 : A_4$

इस क्रिया को तुम अलग अलग समय का अन्तराल चुनते हुए दोहरा सकते हो।

अभ्यास – 3

1. एक जीवाणु की लम्बाई 50,000 बार बड़ी करने के पश्चात 5 से.मी. है। जीवाणु की वास्तविक लम्बाई क्या है? इसकी लम्बाई को 20,000 गुना बढ़ाने पर इसकी वास्तविक लंबाई क्या होगी?



2. नीचे की तालिका को देखकर बताइये क्या 'x' अनुलोमानुपाती है

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20	25
y	15	24	36	60	72	100	125

3. सुषमा के पास रास्ते का मान चित्र है जो स्केल 1 से.मी. 18 कि.मी. को सूचित करता है। वह रास्ते पर 72 कि.मी. दूरी तय करती है, तो मानचित्र में तय की गई दूरी कितनी होगी?

4. रेखाओं की जालीवाले पेपर पर पाँच अलग-अलग आकार के वर्ग उतारिए। उस जानकारी को नीचे तालिका में लिखिए।

	वर्ग 1	वर्ग 2	वर्ग 3	वर्ग 4	वर्ग 5
भुजा की लम्बाई (L)					
परिमाप (P)					
क्षेत्रफल (A)					

ज्ञात करो

(i) भुजा की लम्बाई का अनुपात

(ii) वर्ग का परिमाप

(iii) वर्ग का क्षेत्रफल

अनुपात प्रतिशत के रूप में प्रकट करते हैं। हम प्रतिशत को हमारे नित्य जीवन में अलग-अलग पद्धति से कैसे उपयोग में लाते हैं, सीखेंगे।

6.6 प्रतिशत (Percentage)

- सौम्या को गणित में 65% और रजिता को 59% अंक मिले।
- एक कपड़े का व्यापारी थोक सेल मार्केट में 25% लाभ से बेचे गये सिल्क साड़ी के विक्रेय में 10% लाभ कमाता है।

- अनीता ने एक बैंक से ₹ 10,000 ऋण एक साल के लिए लिया। उसे 10% ब्याज वर्ष के अन्त में देना होगा।

- त्योहार के समय एक टी.वी. बेचनेवाले ने 10% की छूट दी, दूसरेवाले ने 15 % की छूट दी।

शब्द प्रतिशत का मतलब है, 'प्रति सौ' या 'सौ के लिए'' प्रतिशत के लिए % चिन्ह का उपयोग किया जाता है। इस तरह 1 एक प्रतिशत का अर्थ है 100 में से 1, 27% (27 प्रतिशत) का मतलब है, 100 में से 27, 93% (त्यानवे प्रतिशत) का मतलब है- 100 में से 93%

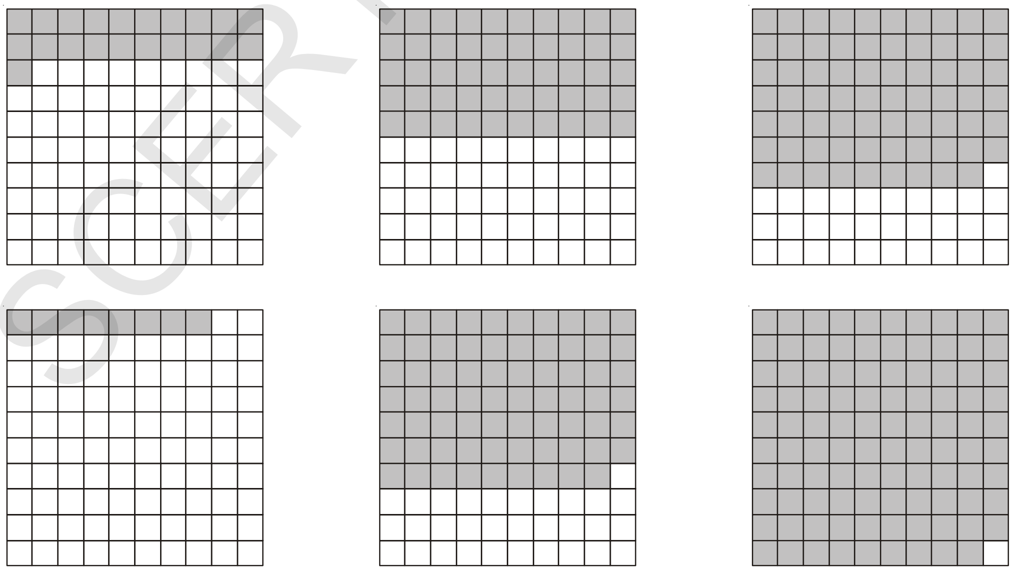
1% को $\frac{1}{100}$ या 0.01 भी लिखा जाता हैं।

27% को $\frac{27}{100}$ या 0.27 भी लिखा जाता हैं।

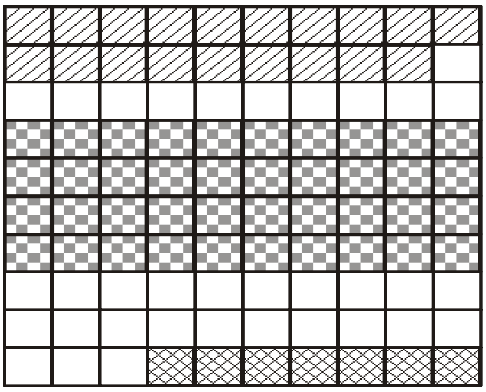
93% को $\frac{93}{100}$ या 0.93 भी लिखा जाता हैं।

यह कीजिए

1. नीचे 100 वर्गोंवाली जाली दी गई है
प्रति चित्र में रंग भेद वर्गों की संख्या अलग-अलग है।
प्रति चित्र में सफेद और रंगीन भाग को प्रकट करो।
1) प्रतिशत में 2) भिन्न में 3) दशमलव में



2. नीचे की जालीवाले पेपर को देखो इनका छायारेखा अलग-अलग डिजाइन में है प्रति डिजाइन का प्रतिशत ज्ञात कीजिए :



कितने प्रतिशत को सूचित करना है?

कितने प्रतिशत को सूचित करता है?

कितने प्रतिशत को सूचित करता है?

कितने प्रतिशत को सूचित करता है?

3. एक पाठशाला के विद्यार्थियों की संख्या दी गई है। प्रत्येक कक्षा के विद्यार्थियों की कुल संख्या को भिन्न, प्रतिशत में गणना कीजिए।

कक्षा	विद्यार्थियों की संख्या	भिन्न में	प्रतिशत में
VI	17		
VII	15		
VIII	20		
IX	30		
X	18		
कुल	100		

ऊपरी उदाहरणों में कुल संख्या 100 है। जब कुल संख्या सौ नहीं हो तो प्रतिशत कैसे ज्ञात करोगे?

उदाहरण 8 :-

एक कक्षा में 35 बालिकाएँ और 15 बालक है। बालकों का और बालिकाओं का प्रतिशत क्या है?

सुधीर ने उसे ऐसे हल किया।

तालिका - 1

हल:

विद्यार्थी	*संख्या*	*भिन्न*	*हर को 100 में बदलना*	*प्रतिशत में*
लड़कियाँ	35	$\frac{35}{50}$	$\frac{35}{50} \times \frac{100}{100} = \frac{70}{100}$	70%
लड़के	15	$\frac{15}{50}$	$\frac{15}{50} \times \frac{100}{100} = \frac{30}{100}$	30%
कुल	50			

दूसरी तालिका	तीसरी तालिका
अनवर ने बालिकाओं और बालकों का प्रतिशत ऐसे ज्ञात किया कुल विद्यार्थियों की संख्या 35 + 15 = 50 50 विद्यार्थियों में से 35 बालिकाएँ हैं 100 में से उनकी संख्या $\frac{35}{50} \times 100 = 70$ बालिकाएँ	रीना ने ऐसे ऐसे हल किया $\frac{35}{50} \times \frac{2}{2} = \frac{70}{100} = 70\%$

हम देखते हैं कि कुल 100 न हो तो प्रतिशत तीन पद्धतियों द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। पहली तालिका में भिन्न को $\frac{100}{100}$ से गुणा किया, ऐसा करने से भिन्न का मूल्य नहीं बदलता। हर में 100 रह जाता है। रीना ने $\frac{2}{2}$ से गुणा किया, जिससे हर में 100 प्राप्त हुआ। अनवर ने एकैक पद्धति का उपयोग किया। आप इनमें से कोई भी पद्धति अपना सकते हैं या स्वयं की पद्धति से कर सकते हैं।

क्या अनवर की पद्धति सभी अनुपातों के लिए लागू होती है? क्या रीना की पद्धति सभी अनुपातों के लिए लागू होती है?

अनवर ने बताया की रीना की पद्धति तभी उपयोगी होगी जब हर को वास्तविक संख्या से गुणा करने पर 100 प्राप्त होता हो, हर 50 या उसे 2 से गुणा करने पर 100 प्राप्त होता है। यदि हर 60 हो तो वह इस पद्धति का उपयोग नहीं कर सकती। क्या तुम इसे मानते हो?

उदाहरण 9: "A" शर्ट में $\frac{3}{5}$ सूत है जबकि "B" शर्ट में $\frac{3}{4}$ सूत है।

1. प्रत्येक शर्ट में सूत का प्रतिशत कितना है?
2. कौन से शर्ट में सूत का प्रतिशत अधिक है?

हल "A" शर्ट में सूत का प्रतिशत = $\frac{3}{5} \times 100 = 60\%$

"B" शर्ट में सूत का प्रतिशत = $\frac{3}{4} \times 100 = 75\%$

"B" शर्ट में सूत प्रतिशत अधिक है।

उदाहरण 10 : गंगा 1 मीटर कपड़ा लेकर टेलर के पास गई। उसने उसे ब्लाउज बनाने के लिए कहा, टेलर ने 0.75 मी. कपड़ा इस्तेमाल कर बचा हुआ कपड़ा गंगा को वापस किया।

i) उसे ब्लाउज बनाने के लिए कितने प्रतिशत कपड़े का उपयोग किया?

ii) उसने कितना प्रतिशत वापस किया?

हलः- टेलर ने 0.75 मी. कपडे का उपयोग किया

उपयोग किया प्रतिशत कपड़ा $= 0.75 \times 100\%$

$$= \frac{75}{100} \times 100\,\%$$

$$= 75\%$$

वापस किया गया $1 - 0.75 = 0.25$ मी. कपड़ा

वापस किये कपड़े का प्रतिशत $= 0.25 \times 100\%$

$$= \frac{25}{100} \times 100\ \%$$

$$= 25\ \%$$

उदाहरण 11 : गत वर्ष एक वस्तु का दाम ₹ 40 था, इस वर्ष वह बढ़कर ₹ 50 हो गया। दाम में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई?

हलः- दाम में प्रतिशत वृद्धि $= \dfrac{\text{बढ़ी राशि}}{\text{मूल राशि}} \times 100$

$$= \frac{50-40}{40} \times 100\,\%$$

$$= \frac{10}{40} \times 100\% = \frac{1000}{40}\% = 25\ \%$$

उदाहरण12 : श्याम की महीने की आय ₹ 10,000 है। वह 60% अपने कुटुंब पर खर्च करना है, 10% औषधों पर, 5% दान देता है और 25% की बचत करता है। वह प्रति विषय पर कितनी राशि खर्च करता है?

हलः- कुटुंब पर खर्च की गई राशि कुल आय का 60% है।

$= ₹\ 10000$ का 60%

$= \frac{60}{100} \times 10000 = ₹\ 6000$

औषधों पर खर्च की गई राशि $= \frac{10}{100} \times 10000 = ₹\ 1000$

दान में खर्च की गई राशि $= \frac{5}{100} \times 10000 = ₹\ 500$

बचत राशि $= \frac{25}{100} \times 10000 = ₹\ 2500$

अभ्यास - 4

1. X पाठशाला में 10 कक्षा के 48 विद्यार्थी परीक्षा में बैठे, उनमें से 36 उत्तीर्ण हुए। दूसरी पाठशाला Y में 30 विद्यार्थी परीक्षा में बैठे उनमें से 24 उत्तीर्ण हुए। यदि प्रदेश के शैक्षिक अधिकारी प्रतिशत के अनुसार पुरस्कार प्रदान करेंगे तो किस पाठशाला को पुरस्कार मिलेगा?
2. गत वर्ष 1000 वस्तुओं का मूल्य ₹ 5000 था। इस वर्ष घटकर ₹ 4000 हो गया। घटे हुए दाम का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
3. श्री ज्योति के पास टोकरी भर केले, संतरे और आम है। यदि 50% केले हैं, 15% संतरे हैं तो आम का प्रतिशत कितना है?
4. 64% + 20% + ...?....... = 100%
5. वर्षा वाले दिन 150 विद्यार्थियों में से 25 अनुपस्थित थे। अनुपस्थित विद्यार्थियों के प्रतिशत ज्ञात कीजिए। उपस्थित विद्यार्थियों का प्रतिशत ज्ञात दीजिए।
6. एक मतदान क्षेत्र में 12000 मतदाताओं में से 60% का मतदान हुआ। मतदाताओं की उस क्षेत्र में संख्या ज्ञात कीजिए।
7. एक क्षेत्रीय क्रिकेट टीम एक मौसम में 20 मैच खेलती है। यदि वह 25% मैच जीतती है और बचे हुए हारती है तो वह कितने मैच हारती है?
8. प्रति एक ग्राम सोने में सुनार 0.25 ग्राम चाँदी और 0.05 ग्राम तांबा मिलाता है। प्रति ग्राम में कितना प्रतिशत सोना, चाँदी और ताँबा होगा?
9. 800 एक संख्या का 40% है। संख्या ज्ञात कीजिए।

यह प्रयास कीजिए

1. 2011 की जनगणना में हमारे देश की जनसंख्या 2x10[8](120,00,00,000) थी। यदि हमारे देश की जनसंख्या प्रति वर्ष 3% से बढ़ती है तो 2012 में जनसंख्या कितनी होगी?

2. (i) क्या तुम 75% डोसा खा सकते हो?
   (ii) किसी वस्तु का मूल्य 90% से बढ़ सकता है?
   (iii) किसी वस्तु का मूल्य 100% बढ़ सकता है?

परियोजना कार्य

निम्न तालिका भरिए। **जिसमें** अलग-अलग क्रियायें दर्शायी गयी हैं

क्रिया	समय घण्टों में	दिन का %
ब्रश करना, स्नान करना, पाठशाला जाना, तैयार होना		
पाठशाला में		
पढ़ना, और गृहकार्य करना,		
खेलना टी.वी.देखना, माँ-बाप को कार्य में मदद करना		
सोने के लिए		

6.7 कुछ स्थितियाँ जहाँ प्रतिशत उपयोगी है।

लाभ या हानि व्यक्त करने, कटौती तथा ब्याज बताने में प्रतिशत का उपयोग होता है। उन्हें प्रतिशत में व्यक्त करना तुलनात्मक दृष्टि से सरल होगा।

6.7.1 लाभ और हानि (Profit & Loss)

- एक कुम्हार चक्र पर पात्र बनाना है, बाद में उन्हें भट्टी में सेकता है, उसे रंग लगाकर सजाता है। उस पदार्थ पर ₹ 3 तथा सेकने ₹ 2 तथा रंग लगाने ₹1 खर्च करता है। उस पात्र को वह ₹ 10 में बेचता है। कुम्हार को लाभ लोगा या हानि?
- एक खिलौने वाला ₹ 50 में खिलौना बनाकर ₹ 75 में बेचता है। उसे लाभ होगा या हानि?
- एक व्यापारी प्रति शर्ट ₹ 540 में खरीदता है। वह शर्ट बेचे नहीं जाने पर वह ₹ 500 प्रति वर्ष के अन्त में बेचता है। उसे लाभ हुआ या हानि?

- अमर सोने का व्यापारी है। उसने गत वर्ष 10 ग्राम सोना ₹ 15000 में खरीदा। अब उसका मूल्य बढ़कर ₹ 20000 हुआ। सोना बेचने पर उसे लाभ होगा या हानि?

ऊपर के **सभी** परिस्थितियों में तुम लाभ या हानि का मूल्य ज्ञात कर सकते हो।

लेनदेन के व्यपार में लाभ या हानि प्रतिशत में व्यक्त **किया जाता है।**

उदाहरण 14 - राम ने ₹ 200 में पेन खरीदकर उन्हें ₹ 24 में बेचा जबकि सौम्या ने ₹ 500 के पेन खरीदकर उन्हें ₹ 575 में बेचा। किसे ज्यादा लाभ हुआ?

हल : राम का लाभ = ₹ 240 – ₹ 200 = ₹ 40

सौम्या का लाभ = ₹ 575 – ₹ 500 = ₹ 75

ऐसे दिखाई देता है कि सौम्या को अधिक लाभ हुआ, उसे ₹ 27 का लाभ हुआ जबकि राम का लाभ ₹ 40 है। क्या यह सही है?

राम द्वारा लगाई पूँजी ₹ 200 और उसका लाभ ₹ 40 है जबकि
सौम्या की लगाई पूँजी ₹ 500 है और उसका लाभ ₹ 75 है।

राम का लाभ प्रतिशत और मूल्य $= \frac{40}{200}$ और

सौम्या का लाभ प्रतिशत और मूल्य $= \frac{75}{500}$

लाभ की तुलना करने के **पश्चात** अनुपातों को प्रतिशत में बदलिए

अतः,

राम का लाभ प्रतिशत

$= \frac{40}{200} \times 100\%$

$= 20\ \%$

सौम्या का लाभ प्रतिशत

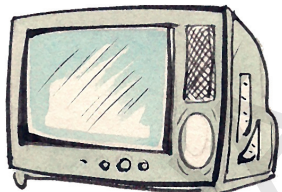
$= \frac{70}{500} \times 100\%$

$= 15\%$

राम का लाभ 20% या ₹ 20 है जब वह ₹ 100 पूँजी लगाता है। सौम्या को 15% या ₹ 15 का लाभ हुआ जब कि उसने ₹100 पूंजी लागत लगाई। इसतरह राम को सौम्या से अधिक लाभ प्रतिशत हुआ।

उदाहरण 15 : एक दुकानदार टीवी को ₹1000 में खरीदता है और उसे ₹10,000 में बेचता है। लाभ या हानि ज्ञात कीजिए। प्रतिशत निकालिए।

हल : गोपाल इसे निम्न पद्धति से हल किया :



टी.वी. का क्रय मूल्य (CP) = ₹ 9000

टी.वी. का विक्रय मूल्य (SP) = ₹ 10,000

विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से अधिक है इसलिए लाभ होता है।

लाभ (P) = ₹ 10000 – ₹ 9000 = ₹ 1000

इसतरह जब क्रय मूल्य ₹1000 है तो दुकानदार को 1000 का लाभ होता है।

लाभ का अनुपात और मूल्य $\frac{1000}{9000}$

लाभ प्रतिशत ज्ञात अनुपात को 100% से गुणा कीजिए।

i.e. $\frac{1000}{9000} \times 100\% = \frac{100}{9}\% = 11\frac{1}{9}\%$

मधु ने इसी को अनुपात पद्धति से किया।

जब क्रय मूल्य ₹ 9000 है तो लाभ ₹ 1000 है।

जब क्रय मूल्य ₹ 100 है तो मान लो लाभ ₹ x है।

हमें ज्ञात है कि क्रय मूल्य और लाभ समानुपात में है। इस तरह लाभ और क्रय मूल्य (CP) का अनुपात दोनों ओर समान होगा।

इस प्रकार, x : 1000 = 100 : 9000

$$\frac{x}{1000} = \frac{100}{9000}$$

$$9000 \times x = 1000 \times 100$$

$$x = \frac{1000 \times 100}{9000} = 11\frac{1}{9}.$$

लाभ % = $11\frac{1}{9}$ %

प्रयास कीजिए

12 आम का क्रय मूल्य 15 आम के विक्रय मूल्य के समान है। हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए

उदाहरण 16 : एक आदमी एक वस्तु को ₹ 650 में खरीदकर उसे बेचकर 6% लाभ प्राप्त करता है। विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: रवि ने ऐसे हल किया

क्रय मूल्य = 650

लाभ % = 6%

क्रय मूल्य ₹100 होने पर लाभ ₹ 6 है तो विक्रय मूल्य 10+6= ₹ 106 होगा।

अब क्रय मूल्य ₹ 650 है, मान लो विक्रय मूल्य ₹ x है।

इस तरह क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य अनुलोमानुपात में हैं-

इसलिए क्रय मूल्य का अनुपात = विक्रय मूल्य का अनुपात

$$100 : 650 = 106 : x$$

$$\frac{100}{650} = \frac{106}{x}$$

इसलिए $100x = 106 \times 650$

इसलिए $x = \frac{106 \times 650}{100} \times 689$

इस तरह विक्रय मूल्य = ₹ 689

अरुण ने उसे ऐसे हल किया

क्रय मूल्य = ₹ 650

लाभ % = 6%

इस तरह लाभ = ₹ 650 का 6%

$$\frac{6}{100} \times 650 = 39$$

हमें पता है विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ

$$= 650 + 39 = 689$$

क्रय मूल्य = ₹ 689

उदाहरण17 : रमेश ने डी.वी.डी. प्लेयर को ₹ 2800 में बेचकर 12% लाभ प्राप्त किया। उसने कितने में खरीदा?

हल: नायक अनुपात का उपयोग करता है।

लाभ % = 12%

विक्रय मूल्य = ₹ 2800

यदि क्रय मूल्य ₹ 100 है तो विक्रय मूल्य ₹ 112 होगा।

जब विक्रय मूल्य = ₹ 2800 तो मान लो क्रय मूल्य ₹ x

क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य अनुलोमानुपात में होंगे।

क्रय मूल्य का अनुपात = विक्रय मूल्य अनुपात

$x : 100 = 2800 : 112$

$$\frac{x}{100} = \frac{2800}{112}$$

इसलिए, $112 \times x = 100 \times 2800$

इसलिए, $x = \frac{100 \times 2800}{112} =$ ₹ 2500

क्रय मूल्य = ₹ 2800

मीना एकैक पद्धति का उपयोग करती है।

क्रय मूल्य = 2800

लाभ = 12%

जब क्रय मूल्य ₹ 100 है तो लाभ ₹ 12 होगा।

क्रय मूल्य= 100+12=112

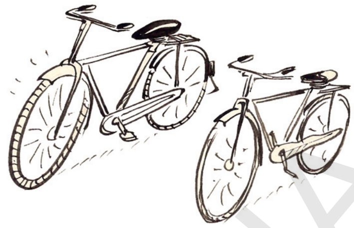
जब विक्रय मूल्य ₹ 112 तो क्रय मूल्य ₹ 100

इसलिए जब विक्रय मूल्य 1 है तो क्रय मूल्य $\frac{100}{112}$ होगा।

जब विक्रय मूल्य ₹ 2800 है तो क्रय मूल्य $\frac{100}{112} \times 2800$ = ₹ 2500

क्रय मूल्य = ₹ 2500

उदाहरण18 : एक आदमी दो साईकिले ₹ 3000 प्रति साइकिल से बेचता है। एक पर 20% का लाभ और दूसरे पर 20% हानि होती है। कुल लेन देन में उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।



हल : विक्रय मूल्य = ₹ 3000

पहले साइकिल पर लाभ % = 20%

दूसरे साइकिल पर हानि % = 20%

पद्धति (i) : एकैक पद्धति द्वारा

पहली साइकिल के लिए

यदि क्रय मूल्य ₹ 100 है तो लाभ ₹ 20 होगा इसलिये विक्रय मूल्य =100+20 = ₹ 120

जब विक्रय मूल्य ₹ 120 है तो क्रिय मूल्य ₹ 100 होगा।

अब यदि विक्रय मूल्य 1 है तो क्रय मूल्य $= \frac{100}{120}$ होगा।

अब यदि विक्रय मूल्य ₹ 3000 है तो क्रय मूल्य $= \frac{100}{120} \times 3000$ = ₹ 2500

दूसरी साइकिल के लिए

यदि क्रय मूल्य ₹ 100 है तो हानि 20 है, तो विक्रय मूल्य = 100-20 = ₹ 80

यदि विक्रय मूल्य ₹ 80 है तो क्रय मूल्य= ₹ 100

अब यदि विक्रय मूल्य ₹ 1 है तो क्रय मूल्य $= \frac{100}{80}$

अब यदि विक्रय मूल्य ₹ 3000 है तो क्रय मूल्य $= \frac{100}{80} \times 3000$ = ₹ 3750

कुल क्रय मूल्य = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

कुल विक्रय मूल्य = ₹ 3000 + ₹ 3000 = ₹ 6000

जब विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से कम है तो हानि = 6250 – 6000 = ₹ 250

हानि % = $\frac{\text{हानि}}{\text{क्रय. मूल्य}} \times 100 = \frac{250}{6250} \times 100 = 4\%$

पद्धति (ii) : अनुपात पद्धति

जब क्रय मूल्य बढ़ता है तो विक्रय मूल्य भी बढ़ता है। इस तरह क्रय मूल्य और विक्रय मूल्य अनुलोमानुपात में है।

पहली साइकिल पर

क्रय मूल्य - विक्रय मूल्य

100 - 120

x - 3000

क्रय मूल्य का अनुपात = विक्रय मूल्य का अनुपात

$100 : x = 120 : 3000$

$$\frac{100}{x} = \frac{120}{3000}$$

$100 \times 3000 = 120\, x$

$$\frac{100 \times 3000}{120} = x$$

$x = 2500$

पहले साइकिल का क्रय मूल्य = ₹ 2500

दूसरी साइकिल पर

क्रय मूल्य	-	विक्रय मूल्य
100	-	80
x	-	3000

$100 : x = 80 : 3000$

$$\frac{100}{x} = \frac{80}{3000}$$

$$x = \frac{100 \times 3000}{80} = ₹\ 3750$$

इस तरह दोनों साइकिल का क्रय मूल्य = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

कुल विक्रय मूल्य = ₹ 6000

विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से कम है इसलिए हानि होती है।

हानि = ₹ 6250 – ₹ 6000 = ₹ 250

$$\textit{हानि प्रतिशत} = \frac{\textit{हानि}}{\textit{विक्रय मूल्य}} \times 100 = \frac{250}{6250} \times 100 = 4\%$$

पद्धति (iii): पहली साइकिल का विक्रय मूल्य = ₹ 3000

लाभ % = 20%

मान लो क्रय मूल्य ₹ x है तो लाभ $= \frac{20}{100} \times x = \frac{20}{100} x$

हमें पता है विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ

$$x+\frac{20}{100}x = 3000$$

$$\frac{100x+20x}{100} = 3000$$

$$\frac{120x}{100} = 3000$$

$$x=\frac{3000\times100}{120} = ₹\ 2500$$

पहली साइकिल का क्रय मूल्य = ₹ 2500

दूसरी साइकिल का विक्रय मूल्य = ₹ 3000

हानि % = 20%

मान लो क्रय मूल्य रु. x

हानि $\frac{20}{100}\times x = \frac{20}{100}x$

हमे मालूम है विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य - हानि

$$x-\frac{20}{100}x = 3000$$

$$\frac{80}{100}x = 3000$$

$$80\ x = 3000\times100$$

$$x = \frac{3000\times100}{80} = ₹\ 3750$$

दूसरे साइकिल का विक्रय मूल्य = ₹ 3750

दोनों साइकिल का क्रय मूल्य = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

कुल विक्रय मूल्य = ₹ 6000

विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से कम है हानि होगी।

हानि = ₹ 6250 – ₹ 6000 = ₹ 250

हानि% $= \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}}\times 100 = \frac{250}{6250}\times100 = 4\%$

उदाहरण 19 : एक वस्तु का मूल्य प्रति वर्ष 20% पहले मूल्य से घटता है। उसका वास्तविक मूल्य ज्ञात करो यदि उसका मूल्य 2 वर्ष पश्चात ₹19,200 हो।

हल: वस्तु का दाम 2 वर्ष पश्चात = ₹ 19,200

प्रति वर्ष उसका दाम 20% प्रति सौ रुपये घटता है।

मान लो पहले वर्ष के आरंभ में उसका मूल्य ₹ 100 है। दूसरे वर्ष के आरंभ में उसका मूल्य ₹ 80 होगा। (यहाँ ₹ सौ का 20%)

तीसरे वर्ष के आरंभ में= ₹ 64 (₹ अस्सी का 20%)

वस्तु का मूल्य जो ₹ 100 था तीसरे वर्ष के आरंभ में उसका मूल्य ₹ 64 होगा।

दो वर्ष पश्चात उसका मूल्य ₹ 19200 होगा।

मान लो उसका वास्तविक मूल्य = ₹ x.

वास्तविक मूल्य का अनुपात = दो वर्ष पश्चात मूल्यों का अनुपात

$x : 100 = 19200 : 64$

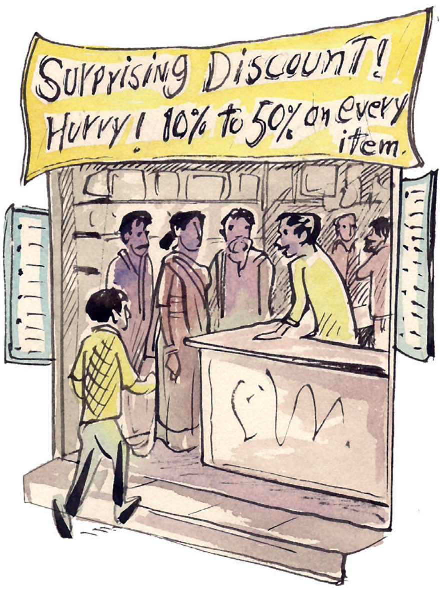
$$\frac{x}{100} = \frac{19200}{64}$$

$64\,x = 19200 \times 100$

$$x = \frac{19200 \times 100}{64}$$

$= 30000$

वस्तु का वास्त्विक मूल्य ₹ 30000 था।



6.7.2 कटौती (Discount)

स्थिति 1:- विजय ने कपड़े की दुकान खोली। लोगों को आकर्षित करने के लिए उसने निम्न विज्ञापन दिया

स्थिति 2 : थोड़े अवसरों जैसे दशहरा, दीपावली, संक्रान्ति पर व्यापारी अंकित मूल्य पर कटौती देते

स्थिति 3 : कभी कभी व्यापारी पुराने माल को, विक्रय में छूट देकर कटौती के रूप में बेचते हैं।

उदाहरण 20 : एक दुकानदार वस्तुओं का अंकित मूल्य, क्रय मूल्य के 25% **अधिक** रखता है और कटौती 12% देता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हलः मान लो क्रय मूल्य ₹ 100.

तो अंकित मूल्य = ₹ 100 + ₹ 25 = ₹ 125.

अंकित मूल्य पर कटौती = 12%

कटौती = $\frac{12}{100} \times 125$ = ₹ 15

विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य – कटौती

= 125 – 15 = 110

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

=110 – 100

= ₹ 10

लाभ % = $\frac{10}{100} \times 100 = 10\%$

दुकानदार को कटौती के पश्चात 10% लाभ होता है।

अभ्यास – 5

1. एक दुकानदार सूटकेस ₹ 480 में खरीद कर ₹ 540 में बेचता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
2. अजय ने टी.वी. ₹ 15000 में खरीदा और उसे ₹ 14100 में बेचा। हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
3. रामू ने एक जगह के खण्ड को ₹ 2,40,000 में बेचकर 20% लाभ पाया। उसने उसे कितने में खरीदा?
4. एक मोबाइल को ₹ 750 में बेचने पर दुकानदार को 10 प्रतिशत की हानि होती है। उसे 5% लाभ प्राप्त करने के लिए कितने में बेचना पड़ेगा?
5. एक किसान दो बैलों के प्रति बैल ₹ 24000 से बेचता है। उसे पहले बैल पर 25 प्रतिशत लाभ और दूसरे पर 20% हानि होती है। कुल लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
6. श्रव्या ने एक घडी को ₹ 480 में खरीदकर उसे संध्या को $6\frac{1}{4}$ %. लाभ से बेचा। संध्या ने उसे दिव्या को बेचकर 10% लाभ पाया। दिव्या ने उसे कितने में खरीदा?
7. एक किताब का अंकित मूल्य ₹ 225 है। प्रकाशक 10% की कटौती देता है। उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
8. एक बढ़ई कुर्सी पर 15% की कटौती देता है। यदि वह कुर्सी को ₹ 680 में बेचता है, तो उसका अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।
9. एक व्यापारी 10% की कटौती देने के पश्चात 10% लाभ प्राप्त करता है। यदि क्रय मूल्य ₹ 900 है तो उसका अंकित मूल्य क्या होगा?

6.7.3 सरल ब्याज (Simple Interest)

राम के पास ₹ 10,000 है उसे खेती के लिए ₹ 15,000 की आवश्यकता है। वह किसानों को बैंक मैनेजर के पास ले जाकर ऐसे वार्तालाप करता है।

राम : श्रीमान मुझे खेती के लिए कुछ पैसे चाहिए।

बैंक मैनेजर : कितने पैसे चाहिए?

रामय्या : ₹ 5000

बैंक मैनेजर : उसे कितने दिनों बाद वापस करोगे?

रामय्या : 1 वर्ष

बैंक मैनेजर : तुम्हें एक वर्ष पश्चात दिये गये धन के साथ 6% ब्याज देना होगा।

राम : जी सर, मैं एक साल बाद ₹ सौ के लिए छह रुपये दूँगा।

मुझे ₹ 1, पर ₹ $\frac{6}{100}$ देने होंगे तो ₹ 5000, पर ₹ $\frac{6}{100} \times 5000$ देने होंगे जो कि ₹ 300. है।

इस तरह मुझे कुल धन ₹ 5300 लौटाने होंगे।

कुछ समय के लिए राशि जो दी जानी है या ली जाती है उसे मूलधन कहते हैं। उधार लेने वाला इस धन का उपयोग कर लौटाता है। इस धन को कुछ समय के लिए अपने पास रखने के लिए ऋणी को कुछ अधिक धन बैंक को देना पड़ता है।

इसे ब्याज कहते हैं।

राशि जो लौटानी होगी लिये गये मूलधन और ब्याज का योग होगा।

कुल धन : मूलधन + ब्याज

ब्याज को मूलधन के प्रतिशत में एक वर्ष के लिए ब्याज निकाला जाता है।
इसे ऐसे लिखते हैं, जैसे 10% प्रति वर्ष या हर साल इसे संक्षिप्त में 10% प्र. व.
10% प्र. व. का मतलब है। मूलधन ₹ 100 है तो ₹ 10 हर वर्ष के अन्त में ब्याज देना होगा। एक उदाहरण लेकर इसका कार्य देखेंगे।

उदाहरण 21 :सुनीता ₹ 5000 का ऋण 12% दर से लेती है। उसे वर्ष के अन्त में कितना ब्याज देना होगा?
हल: मूलधन ₹ 5000 **पर** ब्याज की दर 12% प्र.व.
यदि ₹ 100 ऋण लिया **जाय** तो सुनीता को ₹ 12 ब्याज के रूप में प्रतिवर्ष देने होंगे।
ली गई राशि ₹ 5000 है तो एक वर्ष पश्चात ब्याज की राशि

$$= \frac{12}{100} \times 5000 = ₹\ 750$$

वर्ष के अन्त में सुनीता को कुल धन ₹ 5000 + ₹ 750 = ₹ 5750 लौटाने होंगे।

सर्व साधारण यदि P मूलधन, R% दर प्रतिशत प्रति वर्ष और I ब्याज तो वर्ष के अन्त में कुलधन

$$A = P + \frac{P \times R}{100}$$

यदि अनिवार्य परिस्थितियों में राम मूलधन मैनेजर को कहे अनुसार नहीं भर सकता है तो ऋण राशि को लौटाने का समय एक वर्ष और बढ़ा लेता है। अगले वर्ष के लिए भी ब्याज ₹ 300 होगा। इस तरह राम को 2 वर्ष का ब्याज ₹ 600 भरना होगा।
₹100 के ऋण 3 वर्ष के लिए 18% से 3 वर्ष के अन्त में ब्याज

$18 + 18 + 18 = 3 \times 18 = ₹\ 54$

जैसे समय बढ़ेगा ब्याज भी बढ़ेगा। **जो ब्याज प्रतिवर्ष समान रहता है, साधारण ब्याज कहलाता है।**

सर्वसाधारण मूलधन $= P$ ब्याज की दर $= R$ समय $= T$ वर्ष

ब्याज $(I) = P \times R\% \times T$ or $P \times \frac{R}{100} \times T = \frac{PRT}{100} = \frac{PTR}{100}$

यह कीजिए

1. राशि ₹ 8250 पर तीन वर्ष के लिए 8% प्र.व. की दर से ब्याज ज्ञात कीजिए
2. ₹ 3000 को 9% ब्याज की दर से दी गई राशी पर 2½ वर्ष पश्चात कितना ब्याज प्राप्त होगा?

उदाहरण 22 : कितने समय में राशि ₹ 6880, ₹ 7224 बनेगी? यदि दर प्रतिशत 10% प्र.व. है।

हल : कुल धन = ₹ 7224

मूलधन= ₹ 6880

साधारण ब्याज = कुल धन -मूलधन = ₹ 7224 – ₹ 6880 = ₹ 344

$R\% = 10\%$

अब $I = P \times \frac{R}{100} \times T$

$344 = 6880 \times \frac{10}{100} \times T$

$344 \times 100 = 6880 \times 10 \times T$

इसलिए, $T = \frac{344 \times 100}{6880 \times 10} = \frac{1}{2}$ वर्ष= 6 महीने

उदाहरण 23 : कितना मूलधन 2 वर्ष 4 महीने में 8% की दर से ₹ 3927 ब्याज प्रदान करेगा?

हल: साधारण ब्याज

हल : साधारण ब्याज = ₹ 3927,

$R\% = 8\%$

$T = 2$ वर्ष $+ 4$ महीने

$\left(2 + \frac{4}{12}\right)$ Yrs.

$\left(2 + \frac{1}{3}\right)$ Yrs. $= \frac{7}{3}$ Yrs.

$$I = P \times \frac{R}{100} \times T$$

$$3927 = P \times \frac{8}{100} \times \frac{7}{3}$$

$$3927 \times 100 \times 3 = P \times 8 \times 7$$

$$P = \frac{3927 \times 100 \times 3}{8 \times 7}$$

P = ₹ 21037.50

मूलधन = ₹ 21037.50

उदाहरण 24 : कितनी दर प्र.व. ₹ 6360 पर $2\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए ₹ 1378 ब्याज प्रदान करेगी?

हल : मूलधन (P) = ₹ 6360

समय (T) = $2\frac{1}{2}$ वर्ष = $\frac{5}{2}$ वर्ष

साधारण ब्याज (S.I) = ₹ 1378

$I = P \times \frac{R}{100} \times T$ का उपयोग कर

$$1378 = 6360 \times \frac{R}{100} \times \frac{5}{2}$$

$$1378 \times 100 \times 2 = 6360 \times 5 \times R$$

इसलिए, $R = \frac{1378 \times 100 \times 2}{6360 \times 5} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}\%$

उदाहरण 25 : कितनी दर प्र.व. पर मूलधन 16 वर्षों में तिगुनी होगा?

हल : मान लो मूलधन ₹ x है।

कुलधन 16 वर्षों पश्चात= ₹ 3x

कुलधन - मूलधन = ब्याज

$3x - x = 2x$

$P = x, \quad T = 16, \quad I = 2x$

$$I = P \times \frac{R}{100} \times T$$

$$2x = x \times \frac{R}{100} \times 16$$

$$2x \times 100 = x \times 16 \times R$$

इसलिए, $R = \frac{2x \times 100}{x \times 16} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ %

अभ्यास - 6

1. ₹ 12600 राशि 9% प्र.व. की दर से कितने समय में ₹ 15624 बनेगी?
2. कितनी दर प्र.व. से एक राशि 8 वर्ष 4 महीने में दुगुनी होगी?
3. विद्यालय के बच्चों के लिए मित्र बैंक की घोषणा की जाती है। वे बच्चों को गुल्लक दिये जाते हैं। बच्चों को अपनी बचाई गयी राशि इसमें जमा करनी होती है। बैंक एक वर्ष में एक बार इसे एकत्रित करता है। बैंक,बच्चों की बचत को बढ़ावा देने के लिए उन्हें बचत पर 6% ब्याज देगा। यदि बचत ₹10000 से अधिक हो तो 5% ब्याज दिया जायेगा। एक पाठशाला ₹ 9000 एक वर्ष के लिए जमा करती है तो ब्याज कितना मिलेगा?
4. 8% प्र.व. की दर से कुछ राशि जमा कर दी गई जो 2 वर्ष में ₹12122 बन गई। वह राशि 2 वर्ष 8 महीने में 9% की दर से कितनी होगी?
5. कुछ ब्याज प्रति वर्ष दर से ₹ 6500 की राशि 4 वर्ष में ₹ 8840 बन गई। उसी दर से ₹1600 कितने समय में ₹1816 बनेगा?

आओ ब्याज निकालना सीखें

बच्चों चलो, साधारण ब्याज का खेल खेलें।

5 सदस्य यह खेल खेल सकते हैं।

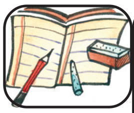
1. 3 कटोरे लेकर उस पर P, R और T अंकित करो। तीनों कटोरों में पाँच-पाँच कागज डालिए। जिनपर संख्याएँ लिखी हों। (सलाहः कटोरी P के सभी कागज 100 या 1000 के गुणांक हों।)
2. प्रत्येक कटोरी में से एक-एक करके तीन 3 कागज चुनिए।
3. कटोरी P के कागज मूलधन, T कटोरी के कागज समय और R कटोरी के कागज ब्याज की दर को सूचित करते है।

4. अब ब्याज ज्ञात करो और I, P, T और R सबको बताओ।

5. यदि आप सही उत्तर बताते हो तो अपने ब्याज को अंकित करो, अन्यथा 0 अंकित करो

सूचना : अपनी इच्छा अनुसार खेलक्रम तीन या अधिक बार दोहराओ और मूल्य अंकित करो। तालिका में

ब्याज की मूल्य				
नाम	1 बार	2 बार	3 बार	कुल



मुख्यांश

- अपनी दिनचर्या में हम अनुपात का उपयोग करते हैं। जैसे मेरी आय ₹10000 है और मेरे मित्र की ₹ 20000 अर्थात, मेरी आय मेरे मित्र की आय से अधिक है या मेरे मित्र की आय मेरे से दुगनी है, मेरे और मेरे मित्र की आय का अनुपात 1:2 और मेरे मित्र और मेरी आय का अनुपात 2:1
- जब दो अनुपात समान हो तो उसे समानुपात कहते हैं। समानुपात हमारे प्रतिदिन के समस्याओं को हल करने में सहायक हैं।
- यदि कोई संख्या घटती–बढ़ती है, तो उसके समानुपाती संख्या भी घटती–बढ़ती है। इन्हें सीधा समानुपात या अनुलोमानुपात कहते हैं।
- अनुपात को प्रतिशत में दर्शाया जाता है। प्रतिशत शब्द का अर्थ है- प्रति सैकड़ा या सैकड़ों में से प्रतिशत का सूचक (%) है। 13% का अर्थ सौ में से 13

  $13\% = \frac{13}{100} = 0.13$
- प्रतिशत को विभिन्न परिस्थितियों में उपयोग करते हैं। जैसे लाभ या हानि कटौती और साधारण ब्याज इत्यादि।

अनुपात से खेल

1,2,3,...9 तक के अंक इस तरह जमाओ कि दो संख्याओं का अनुपात 1:2, हो या $\frac{7329}{14658} = \frac{1}{2} = 1:2$. यह दिलचस्प है।
इससे भी दिलचस्प यह है कि अंकों को 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8 1:9 में भी दर्शाया जा सकता है। इन अंकों को ज्ञात करो आनंद लो।

दत्तों का संचालन

(DATA HANDLING)

7

7.0 परिचय :

रवि समाचार पत्र में खेल समाचार पढ़ रहा था। खेल के पन्ने पर उसने दो तालिकाएँ देखी जो निम्न प्रकार से थीं।

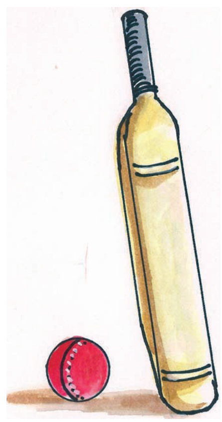
वर्ल्ड़ कप के 5 श्रेष्ठ बल्लेबाज	
बल्लेबाज का नाम	रन
टी. दिलशान (श्रीलंका)	500
सचिन तेंदुलकर (भारत)	482
के. संगाकारा (श्रीलंका)	465
जोनथान ट्राट (इंग्लैंड)	422
यू. थरंगा (श्रीलंका)	395

तलिका - 1

वर्ल्ड़ कप 2012 के 5 श्रेष्ठ गेंदबाज	
बल्लेबाज का नाम	रन
शाहीद आफरिदी (पाकिस्तान)	21
जहीर खान	21
स्काउती (न्यूजीलैंड)	18
रोबिन पीटरसन (दक्षिण अफ्रीका)	15
मुरलीधरन (श्रीलंका)	15

तलिका - 2

यह तालिका हमें क्या दर्शाती है?



तालिका 1 हमें विश्वकप 2011 में उन बल्लेबाजों के नाम तथा उनके द्वारा बनाये गये रनों की जानकारी देती है। यह जानकारी अन्त में निर्णय लेने के लिए महत्वपूर्ण होती है। जैसे खेल के आयोजकों के लिए यह आसान हो जाता है कि किसे सर्वश्रेष्ठ बल्लेबाज को पुरस्कार दिया जाए।

तलिका 2 हमें विश्वकप 2011 में उन गेंदबाजों के नाम तथा उनके द्वारा लिये गये विकटों की जानकारी देती है। यह जानकारी अन्त में निर्णय लेने के लिए महत्वपूर्ण होती है, जैसे खेल आयोजकों के लिए यह आसान हो जाता है कि किसे श्रेष्ठ गेंदबाज का पुरस्कार दिया जाए।

वह जानकारी जो संख्या या शब्दों के रूप में मिलती है जिससे कि अंतिम निर्णय या किसी की पुष्टि हो उसे दत्त कहते हैं। उपरोक्त तलिकाओं में बल्लेबाजों के नाम और उनके द्वारा बनाये गये रन, गेंदबाज और उनके द्वारा लिए गये विकेटों की जानकारी को दत्त कहते हैं। दत्तों को अकसर आलेख या तालिकाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। सांख्यिकी सूचनाओं को तथ्यों का 'निरीक्षण' कहतें हैं।

प्रयत्न कीजिए: अपने विद्यालय में बोर्ड पर लिखी सूचनाओं को पढ़ो। क्या अप आप किन्हीं दत्तों की जानकारी प्राप्त करेंगे? इन दत्तों की जानकारी प्राप्त करने का प्रयास करें।

7.1 दत्तों का आयोजन (Organising Data)

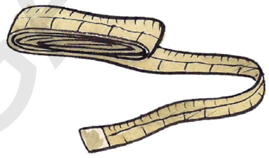
जवाहर बाल आरोग्य रक्षा योजना के अन्तर्गत एक विद्यालय के आठवीं कक्षा के 7 विद्यार्थियों के बारे में जानकारी प्राप्त की गई।

कृष्णा ने इन 7 विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ अपनी कापी में नोट की। ऊँचाइयाँ निम्न रहीं।

अमला 125 से.मी. लेखा - 133 से.मी., तबस्सुम - 121 से.मी., सुधा - 140 से.मी., वनजा- 117 से.मी., लेनिन - 129 से.मी. और राजेश - 132 से.मी.

कुमार ने इन ऊँचाइयों को आरोही क्रम में लिखकर उन्हें तलिका के रूप में लिखा।

विद्यार्थी का नाम	ऊँचाई (से.मी. में)
वनजा	117
तबस्सुम	121
आमला	125
लेनिन	129
राजेश	132
लेखा	133
सुधा	140



निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

i) सबसे लंबे छात्र का नाम क्या है?

ii) सबसे छोटे छात्र का नाम क्या है?

iii)अमला और राजेश की ऊँचाइयों में क्या अंतर है?

आपने कृष्णा या कुमार द्वारा दिये गयें दत्तों का उपयोग किया होगा। कुमार द्वारा दिये गये दत्त व्यवस्थित हैं और समझने में भी आसान हैं।

यह कीजिये

एक परीक्षा में अमर ने विभिन्न विषयों में निम्न अंक प्राप्त किये। तेलुगु - 20, हिन्दी - 21, अंग्रेजी - 20, गणित - 19, विज्ञान - 24, सामाजिक - 17.

अमर और पीटर के अंकों को दत्तों के रूप में व्यवस्थित करके तुलना करो।

कक्षा - परियोजना कार्य :

भार ज्ञात करने वाली मशीन द्वारा अपने कक्षा के छात्रों का भार ज्ञात करें। इन दत्तों को व्यवस्थित करके तालिका बनाइए।

याद रहे इन भारों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखिए। फिर इन प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

a) कक्षा में किस छात्र की लम्बाई सबसे अधिक है?

b) कक्षा में कितने बच्चों का भार 25 कि.ग्रा. से अधिक है?

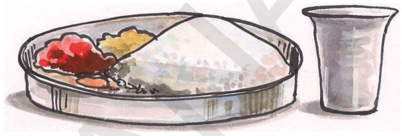
c) कक्षा में कितने बच्चों का भार 20 कि.ग्रा.और 25 कि.ग्रा. के बीच है?

7.2 प्रतिनिधिमान (Representative Values)

एक हास्टल में

- प्रतिदिन प्रत्येक बच्चो द्वारा ग्रहण किया गया औसत चावल 150 ग्राम हैं।

बच्चे की औसत आयु 13 वर्ष है।
बच्चे की औसत ऊँचाई 135 से.मी. है।



उपरोक्त दत्तों के आधार पर क्या हम कह सकते हैं कि प्रत्येक बच्चा प्रतिदिन 150 ग्राम चावल खाता है? क्या प्रत्येक बच्चे की आयु 13 वर्ष और ऊँचाई 135 से.मी. है? नहीं, क्योंकि हम जानते हैं कि कुछ बच्चे 150 ग्राम से अधिक चावल, कुछ बच्चे 150 ग्राम से कम और कुछ केवल 150 ग्राम चावल ही खाते हैं। यही स्थिति बच्चों की आयु तथा उनकी ऊँचाई में होगी। 150 ग्राम चावल का तात्पर्य है कि प्रत्येक बच्चा हास्टल में 150 ग्राम चावल ग्रहण करता है। अर्थात यह चावल ग्रहण करने का प्रतिनिधित्व मान है। इसी प्रकार हास्टल में प्रत्येक बच्चे की आयु 13 वर्ष है। 13 वर्ष आयु के प्रतिनिधित्व मान को 'मध्यमान' कहते हैं। आगे की उप इकाई में हम मध्यमान के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे। उसी प्रकार माध्यिका एवं बहुलक भी प्रतिनिधित्व मान हैं।

7.3.1 मध्यमान (Arithmatic Mean)

उदाहरण - 1 एक विद्यालय में खेल के शिक्षक ने विद्यार्थियों को प्रतिदिन अभ्यास की तालिका इस प्रकार बनाई।

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
मिनट	20	35	40	30	25	45	15

राजेन्द्र द्वारा सप्ताह में अभ्यास के लिए लिया गया कुल समय

20 + 35 + 40 + 30 + 25 + 45 + 15 = 210 मिनट

अब प्रतिदिन अभ्यास के लिए लिया गया समय को ज्ञात करने के लिए हम कुल समय को कुल दिनों से भाग करेंगे।

30 मिनट राजेन्द्र द्वारा प्रतिदिन अभ्यास के लिए लिया गया औसत समय है।

उदाहरण 2. एक सब्जी बेचने वाले की एक हफते में कमाई क्रमशः ₹ 200, ₹150, ₹180, ₹ 160, ₹ 170 और ₹170 है। सब्जी वाले की प्रतिदिन औसत कमाई ज्ञात करो।

हल: कुल कमाई = 200+150+180+300+160+170+170= ₹1330

कुल दिन = 7

औसत कमाई $= \frac{1330}{7} =$ ₹190

इस लिए इन दत्तों का औसत मध्यमान कहलाता है।

मध्यमान (A.M) = निरीक्षणों का योगफल /निरीक्षणों की संख्या

प्रयत्न करो :

1. खिलाड़ियों की आयु (वर्ष में) इस प्रकार है 16, 16, 16, 14, 17, 18. तो निम्न ज्ञात करो।

i) सबसे नौजवान और सबसे बड़े खिलाड़ी की आयु क्या है?

ii) खिलाड़ियों का मध्यमान

आप प्रतिदिन औसत कितने ग्लास पानी पीते हो? आप सप्ताह में कितने ग्लास पानी पीते हो? आप औसत किस प्रकार मालूम करोगे।

7.3.2 मध्यमान का सीमान्त क्या है?

अनिल, अमर, एन्टनी और इंदर के तेलगु, हिन्दी और अंग्रेजी विषय में प्राप्त अंक नीचे तालिका में दिये गये हैं।

	तेलगु	हिन्दी	अंग्रेजी
अनिल	15	8	10
अमर	10	10	12
एन्टोनी	11	6	11
इंदर	12	12	13

आइए, विद्यार्थियों के प्रत्येक विषय में औसत प्राप्त अंक ज्ञात करें।

तेलगु	हिन्दी	अंग्रेजी
मध्यमान = $\frac{15+10+11+12}{4}$	मध्यमान = $\frac{8+10+6+12}{4}$	मध्यमान =
$= \frac{48}{4}$	$\frac{36}{4}$	= am ……
= 12 = ……..	= ………	
अधिकतम अंक = 15	अधिकतम अंक = …….	अधिकतम अंक =…….
न्यूनतम अंक = 10	न्यूनतम अंक = …….	न्यूनतम अंक = …….
मध्यमान = 12	मध्यमान = …….	मध्यमान = …….

इस प्रकार आपको पता चलेगा कि **मध्यमान हमेशा न्यूनतम एवं अधिकतम मान के मध्य रहता है।**

7.3.3 मध्यमान का गुण

उदाहरण : 3 एक परिवार के 4 सदस्यों की आयु इस प्रकार है। कृष्णा - 44 वर्ष राधिका - 39 वर्ष, नीहारिका -17 वर्ष, निखिल - 12 वर्ष (i) सदस्यों की औसत आयु ज्ञात करो (ii) पाँच वर्ष पूर्व उनकी औसत आयु क्या थी? (iii) क्या आप उनकी औसत आयु और पाँच वर्ष पूर्व की आयु में कोई संबध बता सकते हैं?

हलः परिवार के सदस्यों की वर्तमान आयु = 44, 39, 17, 12 वर्ष

परिवार के सदस्यों की आयु का वर्ष = 4

परिवार के सदस्यों की आयु का औसत = $\frac{44+39+17+12}{4} = \frac{112}{4}$ = 28 वर्ष

पाँच वर्ष पूर्व सदस्यों की आयु = $44-5, 39-5, 17-5, 12-5$

= 39, 34, 12, 7

इसलिए पाँच वर्ष पूर्व आयु का औसत (मध्यमान) = $\frac{39+34+12+7}{4} = \frac{92}{4}$ = 23 वर्ष

अर्थात, वर्तमान आयु में 5 वर्ष घटाने पर सदस्यों की औसत आयु 5 वर्ष कम हो जाती है।

पश्चात उनकी आयु का मध्यमान क्या होगा?

अब परिवार की औसत आयु ज्ञात करो अब से तीन वर्ष बाद आप क्या अनुमान लगाते हैं? अब से 10 वर्ष बाद परिवार की औसत आयु क्या होगी?

इसलिए जब दत्तों के मान में कोई संख्या बढ़ाने या घटाने पर मध्यमान भी उसी संख्या के अनुरूप घटता या बढ़ता है।

इसे करो

1. 10 दत्तों के निरीक्षणों के न्यूनतम मान 15 और अधिकतम मान 25 हो तो दत्तों का मध्यमान क्या होगा?

   (i) 12 (ii) 15 (iii) 21 (iv) 27

2. निम्न दत्तों के निरीक्षण कीजिए और बिना हल किये दत्तों का मध्यमान ज्ञात कीजिए। दत्त है : 23, 45, 33, 21, 48, 30, 34, 36 और 35

   (i) 20 (ii) 35 (iii) 48 (iv) 50

अभ्यास - 1

1. 26 फरवरी से 4 मार्च 2011 तक हैदराबाद के दिन का तापमान इस प्रकार रहा।
   26^{0}C, 27^{0}C, 30^{0}C, 30^{0}C, 30^{0}C, 32^{0}C, 33^{0}C और 32^{0}C,
   i) सप्ताह का अधिकतम तापमान क्या था?
   ii) सप्ताह का औसत तापमान क्या रहा?

2. एक विद्यालय में दोपहर के भोजन कार्यक्रम के अन्तर्गत 5 दिनों तक ग्रहण किया गया चावल इस प्रकार रहा। 15,750 कि.ग्र. 14,850 कि.ग्र. 16,500 कि.ग्र. 14,700 कि.ग्राम और 17,700 कि.ग्रा। पाँच दिनों में ग्रहण किये गये भोजन का औसत क्या रहा?

3. एक गाँव में चार वर्षों तक निम्न फसलें उगाई गई। फसल पर प्रति एकड़ लाभ (₹ में) इस प्रकार रहा

फसल	2005	2006	2007	2008
मूंगफली	₹ 7000	₹ 8000	₹ 7500	₹ 7500
जवार	₹ 6000	₹ 1000	₹ 8000	₹ 1000
बाजर	₹ 9000	₹ 5000	₹ 3000	₹ 4000

ऊपर दी गई तालिका के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

i) प्रत्येक फसल का चार वर्ष में औसत लाभ ज्ञात कीजिए।

ii) उपरोक्त उत्तर के आधार पर अगले वर्ष कौन सी फसल उगानी चाहिए?

4. APSRTC बस द्वारा 4 दिनों में 39,30,45 और 54 यात्रियों ने आदिलाबाद से निर्मल का सफर किया। प्रत्येक दिन यात्रियों का औसत क्या रहा?

5. चार मासिक परीक्षाओं में तीन विद्यार्थियों द्वारा अंग्रेजी में प्राप्त अंक इस प्रकार रहे।

विद्यार्थी का नाम	मासिक परीक्षा-1	मासिक परीक्षा–२	मासिक परीक्षा-3	मासिक परीक्षा-4
अन्जू	अनुपस्थित	19	23	21
नीलेश	0	20	22	24
लेखा	20	24	24	24

1) लेखा के औसत अंक ज्ञात कीजिए।

2) अंजू के औसत अंक ज्ञात कीजिए। औसत ज्ञात करते समय तीन से भाग देंगे या चार से? क्यों?

3) नीलेश के औसत अंक ज्ञात कीजिए। औसत ज्ञात करते समय क्या आप तीन से भाग देंगे या चार से? क्यों?

4. अंग्रेजी में किस विद्यार्थी का प्रदर्शन अच्छा रहा?

6. 3 मित्रों ने होटल में नाश्ता किया, उनका बिल इस प्रकार रहा ₹ 16, ₹ 17 और ₹ 21.

i) उनका औसत खर्च क्या होगा? ii) यदि उन्होंने उनके द्वारा दिये बिल से 3 गुणा खर्च किया तो उनका औसत खर्च क्या होगा? iii) यदि होटल के मैनेजर 50 प्रतिशत कटौती दे तो उनका औसत खर्च क्या होगा? iv) उनके खर्च और औसत खर्च में क्या संबध है?

7. प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

8. प्रथम 5 अभाज्य संख्याओं का मध्यमान ज्ञात कीजिए।

9. चार पूर्णांकों के समूह में दो छोटे पूर्णांकों का मध्यमान 102 है। तीन छोटे पूर्णांकों का मध्यमान 103 है। सभी चारों पूर्णांकों का मध्यमान 104 है। दिये गये पूर्णांकों में सबसे बड़ा पूर्णांक कौन सा है?

10) किन्हीं दत्तों का उपयोग करते हुए दो प्रश्न हल कीजिए।

परियोजना कार्य : अपने घर के आस पास के घरों के परिवारों की जानकारी प्राप्त कीजिए और परिवार के सदस्यों की औसत ज्ञात कीजिए।

7.4 बहुलक (Mode)

प्रतिनिधित्व मान का दूसरा प्रकार बहुलक है। आइए, उदाहरण देखें।

उदाहरण 4:- एक दुकानदार ने अधिक संख्या में खाने का तेल बेचने के लिए हफ्ते में बिकने वाले तेलों का ब्योरा बनाया।

दिन	बेचे गये तेल के पैकेट
सोमवार	GGGSSSSPP
मंगलवार	GGGSSSSSPP
बुधवार	GGSSSSSP
गुरुवार	GGGSSSP
शुक्रवार	GGGSSPP
शनिवार	GSSSSSSSS
रविवार	GGGSSSP

G = मुंगफली का तेल, S = सुरजमुखी तेल, P= पामोलिन तेल का पैकेट

इस परिस्थिति में दुकानदार के लिए यह संभव है कि वह बेचे गये तेल के पैकेटों का मध्यमान (औसत) ज्ञात कर सके।

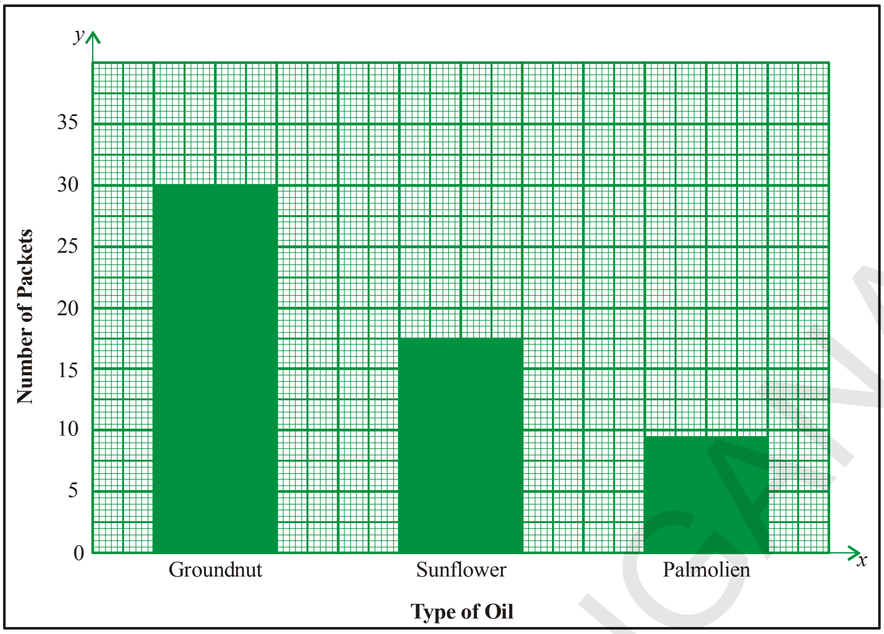
हल : दुकानदार सबसे पहले उसके द्वारा आदेश दिये गये तेल के पैकेटों का औसत ज्ञात करेगा।

$$\text{तेल के पैकेटों का औसत} = \frac{18+30+9}{3} = \frac{57}{3} = 19.$$

क्या दुकानदार को हर प्रकार के तेलों के 19 पैकेट अपनी दुकान में रखने होंगे?

दुकानदार अब अपनी दैनिक विक्रयता को देखेगा। यह जाँच करके उसने पता लगाया कि मूंगफली के तेल की मांग सबसे अधिक है, जबकि पामोलिन तेल की मांग सबसे कम है। यदि वह प्रत्येक ब्रांड के 19 पैकेट का आदेश देता है तो उसके पास मूंगफली के तेल की कमी तथा पामोलिन तेल अधिक मात्रा में बच जायेगा। इसलिए दुकानदार को चाहिए कि वह मूंगफली का तेल अधिक मंगाये और पामोलिन तेल कम मात्रा में। इसलिए सुरजमुखी तेल (30 पैकेट) दत्तों का प्रतिनिधित्व मान है जो कि ज्यादातर बेचा जाता है।

दत्तों के निरीक्षण में अधिक बार पुनरावृत्ति होने वाली संख्या को बहुलक कहते हैं। आलेख में उपस्थित सबसे लम्बा स्तम्भ दत्तों का बहुलक दर्शाता है। बहुलक को आलेख द्वारा इस प्रकार दर्शाया जाता है।



उदाहरणः-4 :- नीचे दी गई संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए - 2,3,5,3,4,7,3,2,1,7,3

हलः- दी हुई संख्याओं को व्यवस्थित करने पर 1,2,2,3,3,3,3,4,5,7,7

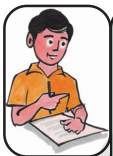
इन संख्याओं में संख्या तीन की पुनरावृति अधिक बार हुई है। इसलिए बहुलक-3

उदाहरण5: निम्न संख्याओं का 3, 5, 9, 6, 5, 9, 2, 9, 3, 5 बहुलक ज्ञात कीजिए।

हलः- छोटी से बड़ी संख्याओं को व्यवस्थित करने पर 2, 3, 3, 5, 5, 5, 6, 9, 9, 9.

यहाँ 5 और 9 की पुनरावृत्ति 3 बार हुई है इसलिए इन दत्तों का बहुलक 5 और 9 है। इस प्रकार के दत्तों को द्विबहुलक दत्त कहते हैं।

नोटः- यदि दिये हुए दत्तों में प्रत्येक दत्त की पुनरावृति बराबर हो तो उन दत्तों का बहुलक नहीं होगा।



इसे करें।

1. निम्न दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

(i) 5, 6, 3, 5, 4, 9, 5, 6, 4, 9, 5

(ii) 25, 14, 18, 15, 17, 16, 19, 13, 12, 24

(iii) 10, 15, 20, 15, 20, 10, 15, 20, 10

उदाहरण-6 एक मासिक परीक्षा में 50 विद्यर्थियों के अंक नीचे दिये गये हैं। दत्तों के बहुलक ज्ञात कीजिए। कुल अंक 10 हैं।

प्राप्त अंक	विद्यार्थियों की संख्या
00	2
1	1
2	2
3	1
4	-
5	4
6	10
7	15
8	9
9	5
10	1
कुल	50

हल : ऊपर दिये दत्तों के निरीक्षण से पता चलता है कि अधिकतर विद्यार्थियों ने 7अंक प्राप्त किये। इसलिए बहुलक 7 है।

नोटः- निरीक्षण में 7 की पंद्रह बार पुनरावृति हुई है इसलिए 15 को बहुलक नहीं समझना चाहिए।

उदाहरण : 7 नीचे दी गई कौन सी परिस्थितियों में बहुलक एक प्रतिनिधित्व मान है।

a) एक दुकानदार किस तरह यह तय करे कि कौन से माप की कमीजे अधिक मात्रा में मंगवाये।

b) 20 व्यक्तियों के लिए चावल की खरीददारी।

c) आपके घर के दरवाजों की ऊँचाई ज्ञात करना।

हलः पहले प्रश्न में मान लो दुकानदार 4 तरह (माप) की कमीजों की बिक्री फरवरी माह में इस प्रकार है।

कमीज का माप	संख्या
M	15
L	18
XL	40
XXL	22
कुल	92

दुकानदार द्वारा बेची गई औसत कमीजों की संख्या $= \dfrac{12+18+40+22}{4} = 23$ कमीज

(a) इस परिस्थिति में क्या दुकानदार प्रत्येक माप की 23 कमीजें मंगवायेगा? वह दत्तों का फिर से निरीक्षण करेगा। उसे पता चलता है कि XL माप की कमीजें अधिक संख्या में बिकती हैं। यदि वह प्रत्येक माप की 23 कमीजें मंगवाता है तो उसे XL माप की कमीजों की कमी होगी, इसलिए वह सोचेगा कि XL नाप की कमीजें ही अधिक संख्या में मंगवाई जायें और बाकी कमीजें कम संख्या में। इसलिए दुकानदार इस परिस्थिति में बहुलक का उपयोग करके निर्णय लेगा।

(b) हमें यह पता नहीं है कि कौन अधिकतम खाता है और कौन न्यूनतम। इस परिस्थिति में यदि हम अधिक खाने वाले के हिसाब से 20 गुणा चावल लें तो बच सकता है, यदि हम कम चावल खाने वाले व्यक्ति के हिसाब से 20 गुणा खरीदें तो चावल कम पड़ जायेगा। इसलिए इस प्रश्न में बहुलक का उपयोग करना सही नहीं होगा।

(c) यदि घर के व्यक्तियों की ऊँचाई क्रमशः 134 से.मी., 125 से.मी., 100 से.मी., 125 से.मी. और 144 से.मी. तो दत्तो का बहुलक 125 होगा और हम यह राय देंगे कि घर के दरवाजें की ऊँचाई 125 से.मी. हो। यदि हम 5 व्यक्तियों की ऊँचाइयों का मध्यमान भी ज्ञात करें तो वह 144 नहीं हो सकता। इसलिए यदि हम मध्यमान भी ज्ञात करें तो भी सभी व्यक्तियों के लिए कठिन होगा। इस प्रश्न में हम न तो मध्यमान को उपयोगी बता सकते हैं, न ही बहुलक को ।

प्रयत्न करो:

1. एक ऐसा उदाहरण दीजिए जहाँ मध्यमान प्रतिनिधित्व मान हो।
2. एक ऐसा उदाहरण दीजिए जहाँ बहुलक प्रतिनिधित्व मान हो।

अभ्यास - 2

1. एक लंबकूद में 7 विद्यार्थियों का प्रदर्शन इस प्रकार रहा। 98 से.मी., 125 से.मी., 140से.मी., 155से.मी., 174 से.मी., 140से.मी., 155 से.मी., इन दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

2. क्रिकेट टीम के सदस्यों की आयु है - 25, 26, 25, 27, 28, 30, 31, 27, 33, 27, 29है (i) दत्तों का मध्यमान एवं बहुलक ज्ञात करो (ii) कितने खिलाड़ियों को और जोड़ सकते हैं जिससे कि दत्तों का बहुलक बदल जाये (जोड़े गये खिलाड़ियों की आयु क्या होनी चाहिए)

3. निम्नलिखित दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए - 12, 24, 36, 46, 25, 38, 72, 36, 25, 38, 12, 24, 46, 25, 12, 24, 46, 25, 72, 12, 24, 36,25, 38 और 36.

4. नीचे प्रश्नों में मध्यमान या बहुलक का उपयोग करना चाहिए या नहीं निर्णय लीजिए।

   (i) एक दुकानदार विभिन्न प्रकार के मंजन बेचता है और यह निर्णय लेने की सोच रहा है कि किस प्रकार के मंजन अधिक संख्या में खरीदे जायें।

(ii) यदि अध्यापक परीक्षा कक्ष में समुचित उत्तर पुस्तिकाएँ लाना चाहता है।

(iii) यदि शादी–विवाह के लिए बनाये जाने वाले लड्डुओं की संख्या

(iv) अपनी कक्षा के लोगों के पसंदीदा क्रिकेटर को जानने के लिए।

7.5 माध्यिका (Median)

माध्यिका अभी तक मध्यमान एवं बहुलक को प्रतिनिधित्व मान के रूप में देखा गया है। आइए, अब इनके अलावा अन्य परिस्थिति में इन्हें जाने।

मैनेजर	-	₹ 40,000
मजदूर 1	-	₹ 3,300
मजदूर 2	-	₹ 5,000
मजदूर 3	-	₹ 4,000
मजदूर 4	-	₹ 4,200
मजदूर 6	-	₹ 4,500
मजदूर 7	-	₹ 4,200
मजदूर 8	-	₹ 4,300
मजदूर9	-	₹ 3,500
मजदूर 10	-	₹ 3,500

क्या हम वेतन के मध्यमान या बहुलक के रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं?

आइए, इस वेतन का मध्यमान ज्ञात करें।

$$\text{वेतन का मध्यमान} = \frac{\text{कुल वेतन}}{\text{मज़दूरों की संख्या}}$$

$$= \frac{3300+5000+4000+4200+3500+4500+4200+4300+3500+3500+40000}{11}$$

$= ₹\ 7272.72$

क्या यह वेतन मैनेजर या मजदूरों के वेतन का प्रतिनिधित्व करता है? नहीं, यह मैनेजर के वेतन से बहुत कम है तथा मजदूरों के वेतन से कहीं अधिक है।

आइए प्रतिनिधित्व मान ज्ञात करने की अन्य विधि देखें।

इन संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

3300, 3500, 3500, 3500, 4000, 4200, 4200, 4300, 4500, 5000, 40000

अर्थात, दोनों ओर 5 संख्याओं का समूह है। इनमें से 5 कर्मचारी ₹ 4200 से कम और अन्य 5 कर्मचारी ₹ 4200 से अधिक कमाते हैं।

इस संख्या (4200) को 'माध्यिका' कहते हैं।

उपरोक्त उदाहरण में दत्तों की संख्या 11 है। इसलिए दिये गये दत्तों को दो समान समूहों में बांटती है।

आइए यह ज्ञात करे जब दिये हुए दत्तों की संख्या सम हो।

मान लो उपरोक्त उदाहरण में और एक मजदूर को जोड़ लिया जाये जिसकी वेतन 4000 है।

अब दत्तों का आरोही क्रम

3300, 3500, 3500, 3500, 4000, 4200, 4200, 4300, 4500, 5000, 40000

यहाँ पर मध्य भाग में दो दत्त हैं। (4000 और 4200)

इसलिए इस परिस्थिति में माध्यिका ज्ञात करने के लिए हम 4000 और 4200 का औसत लेना होगा।

अर्थात वेतन की माध्यिका $= \frac{4000+4200}{2} =$ ₹ 4100.

उदा 8 : 7 स्नातकों (ग्रजूएटों) का मासिक वेतन ₹ 8000, ₹ 9000, ₹ 8200, ₹ 7900, ₹ 8500, ₹ 8600 और ₹ 60000. हो तो उनके वेतन की माध्यिका वेतन ज्ञात करो

हलः स्नातकों का वेतन आरोही क्रम में 7900, 8000, 8200, 8500, 8600, 9000, 60000

परीक्षणों की संख्या = 7

मध्यपद (चौथा पद) = 8500

माध्यिका वेतन = ₹ 8500

उदा 10 : 49, 48, 15, 20, 28, 17, 14 और 110 की माध्यिका ज्ञात करो।

हल : आरोही क्रम = 14, 15, 17, 20, 28, 48, 49, 110

परीक्षणों की संख्या = 8

मध्य-पद(चौथा-और पाँचवा पद) 20 और 28

माध्यिका 4वें एवं 5वें पद का औसत $= \frac{20+28}{2} = 24$

इसलिए माध्यिका 24 है।

अभ्यास - 3

क्यों सत्य असत्य है बताइए।

1) किन्हीं दत्तों में सबसे बड़े और सबसे छोटे निरीक्षण को मध्यमान कहते हैं।

i) सोपान आलेख में सबसे बड़े स्तंभ को बहुलक कहते हैं।

ii) माध्यिका ज्ञात करते समय दत्तों के प्रत्येक निरीक्षण मान को लिया जाता है।

iii) चार संख्याओं (दत्तों) की माध्यिका दिये हुए दत्तों की एक संख्या होती है।

2) एक गाँव में 7 परिवारों की मासिक आय 1200, 1500, 1400, 1000,1000,1600, 10000 है।

i) परिवारों की आय की माध्यिका ज्ञात कीजिए

ii) यदि एक और परिवार जिसकी मासिक आय 1500 हो, उसे जोड़ा जाए तो अब माध्यिका क्या होगी?

3. कुछ दत्तों का परीक्षण 16, 72, 0, 55, 65, 55, 10और 41 है। चैतन्या से शून्य '0' को छोड़कर शेष निरीक्षणों के बहुलक और माध्यिका ज्ञात की। क्या चैतन्या ने सही किया?

4) तीन धनाम्तक पूर्णकों के कितने विभिन्न समुच्चय बनाये जा सकते हैं? जिसका मध्यमान 6 और माध्यिका 7 हो और बहुलक न हो,

5) 3, 4, 5, 5 और 8 में चार पूर्णांकों को जोड़ा गया। यदि इन दत्तों के मध्यमान, मध्यिका और बहुलक में 1 जोड़ा जाये हो इन पूर्णांकों में सबसे बड़ा पूर्णाक कौनसा होगा।

खेल खेलो :

एक पासा लो जिसके फलक पर अंक लिखे हैं। अब तीन छात्रों का एक समूह बनाओ और हर छात्र को पासा जमीन पर डालने के लिये कहो। सभी छात्रों द्वारा पासा की संख्याएँ नोट करो। प्रत्येक छात्र इस क्रिया को 10 बार करेगा। इस प्रकार प्रत्येक छात्र की 10 संख्याएँ होंगी। अन्त में इन दत्तों का मध्ययान, माध्यिका एंव बहुलक ज्ञात कीजिए।

7.6 दत्तों को दर्शाना :

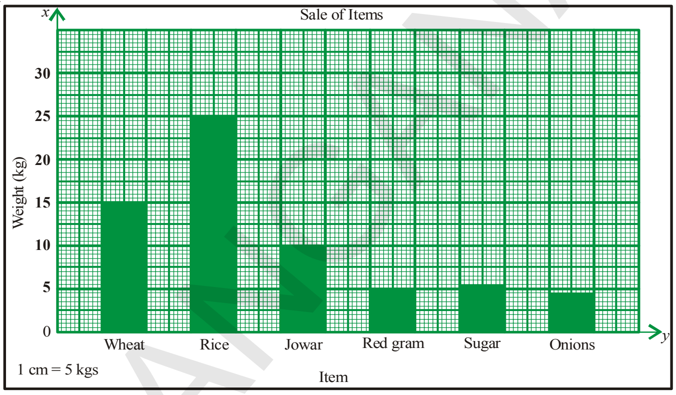
हमने पिछली कक्षा में पढ़ा है कि दत्तों को किस प्रकार सोपान आलेख द्वारा दर्शाया जाता है। चित्रलेखन द्वारा वस्तुओं को चित्रों द्वारा दर्शाया जाता है। चित्रालेखन आलेख द्वारा दत्तों को दर्शाना अधिक समय के साथ-साथ कठिन भी होता है,

इसलिए सोपान आलेख द्वारा दत्तों को दर्शाना काफी सरल प्रक्रिया है।

7.6.1 सोपान आलेख (Bar Graph)

इस भाग में हम सोपान आलेख को आसानी से समझने का प्रयास करेंगे। हम जानते हैं कि सोपान आलेख एक ही चौड़ाई वाले स्तंभ क्षितिजीय या उर्ध्वाधर रूप में एक दूसरे से समान दूरी पर होते हैं। प्रत्येक स्तंभ की लम्बाई किसी विशेष दत्त की बारंबारिता को दर्शाती है। इन स्तंभों की लम्बाई के लिए भी एक पैमाना लिया जाता है।

उदाहरण 10 : उपरोक्त सोपान आलेख एक दुकान में बेची जाने वाली विभिन्न वस्तुओं की बिक्री दर्शाता है।



(i) x-अक्ष और y -अक्ष पर क्या लिया गया है?

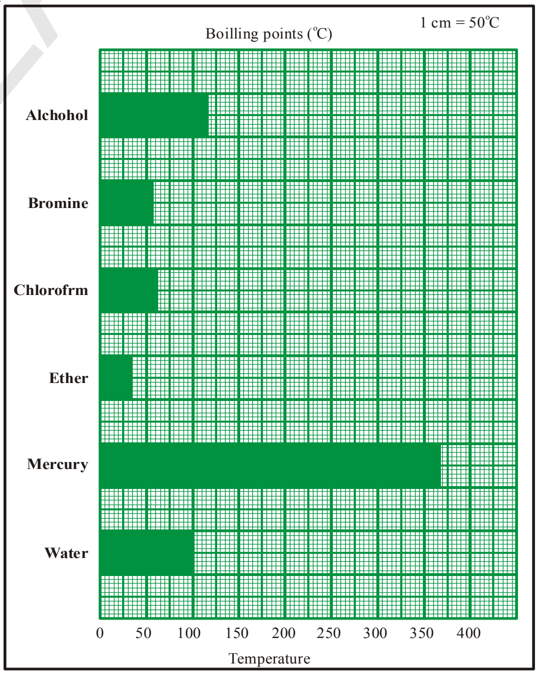
(ii) y -अक्ष पर कौन सा पैमाना है?

(iii) इनमें से किसकी अधिक बिक्री हुई है और कितनी?

(iv) क्या प्याज की बिक्री चने की बिक्री से अधिक है?

(v) जवार और चने की बिक्री का अनुपात क्या है?

उदाहरण 11 : सोपान आलेख का निरीक्षण करो।



(i) यह अलेख किसकी जानकारी दे रहा है?

(ii) x-अक्ष और y-अक्ष पर क्या लिया गया है?

(iii) निम्न लिखित द्रवों में किस द्रव का क्वथनांक अधिक है?

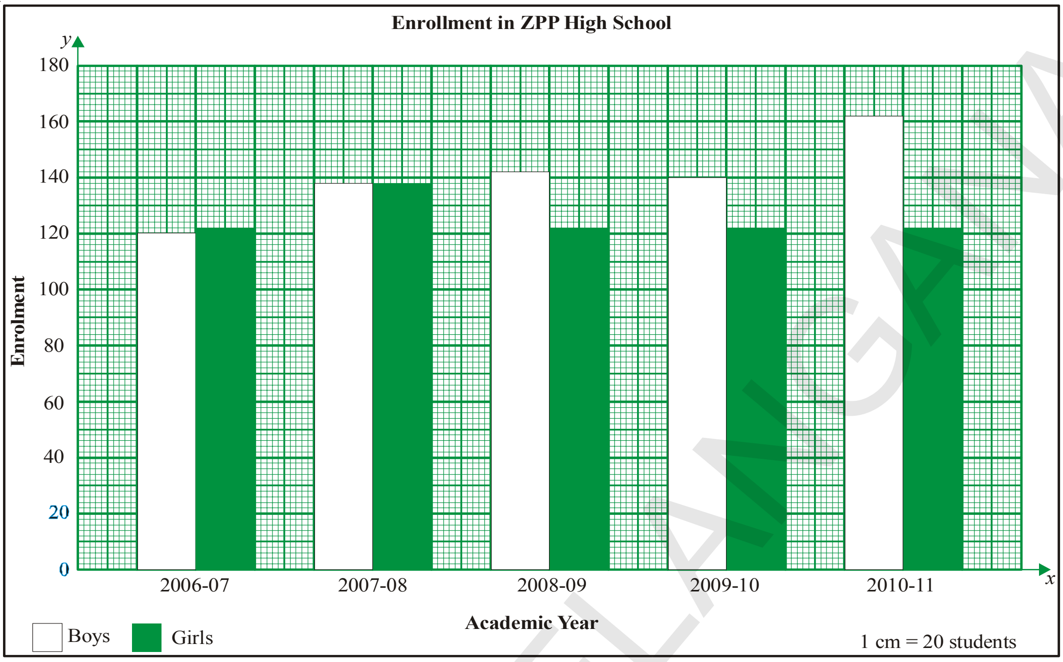
(iv) किस द्रव का क्वथनांक सबसे कम है?

(v) पारा और ईथर के क्वथनांक में क्या अनुपात है?

7.6.2 द्विसोपान आलेख (Double Bar Graph)

आइए, अब अन्य प्रकार के सोपान आलेख देखें।

उदाहरण 13 : इस आलेख में जिला परिषद स्कूल में सत्र के अनुसार विद्यार्थियों की संख्या को दर्शाया गया है। इस आलेख पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



उपरोक्त आलेख में प्रत्येक सत्र में दो-दो स्तंभ हैं। ये क्या दर्शाते हैं? इस प्रकार के आलेख को द्विसोपान आलेख कहते हैं। यह दो निरीक्षणों को एक साथ दर्शाता है।

(i) किस वर्ष विद्यालय में लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से अधिक रही?

(ii) किस वर्ष विद्यालय में लड़कों एवं लड़कियों की संख्या समान रही?

(iii) किस वर्ष में लड़कियों की संख्या न्यूनतम रही?

(iv) सत्र 2007-08 मे विद्यालय में कुल विद्यार्थियों की संख्या क्या थी?

उदाहरण : सातवीं कक्षा के पाँच विद्यार्थियों के गणित और विज्ञान विषय के अंक तालिका में दिये गये हैं। इन दत्तों को द्विसोपान आलेख द्वारा दर्शाइए।

छात्र का नाम	गणित	विज्ञान
श्रवण	70	75
रमन	35	30
मणि	65	75
रेणुका	90	100
गिरिजा	22	35
शर्मिला	50	50

हल: द्विसोपान आलेख की रचना के पद

1. ग्राफ पेपर पर x-अक्ष (क्षितिजीय) और y-अक्ष (ऊर्ध्वाधर) बनाओ। वे आपस में '0' बिन्दु पर मिलते हैं।

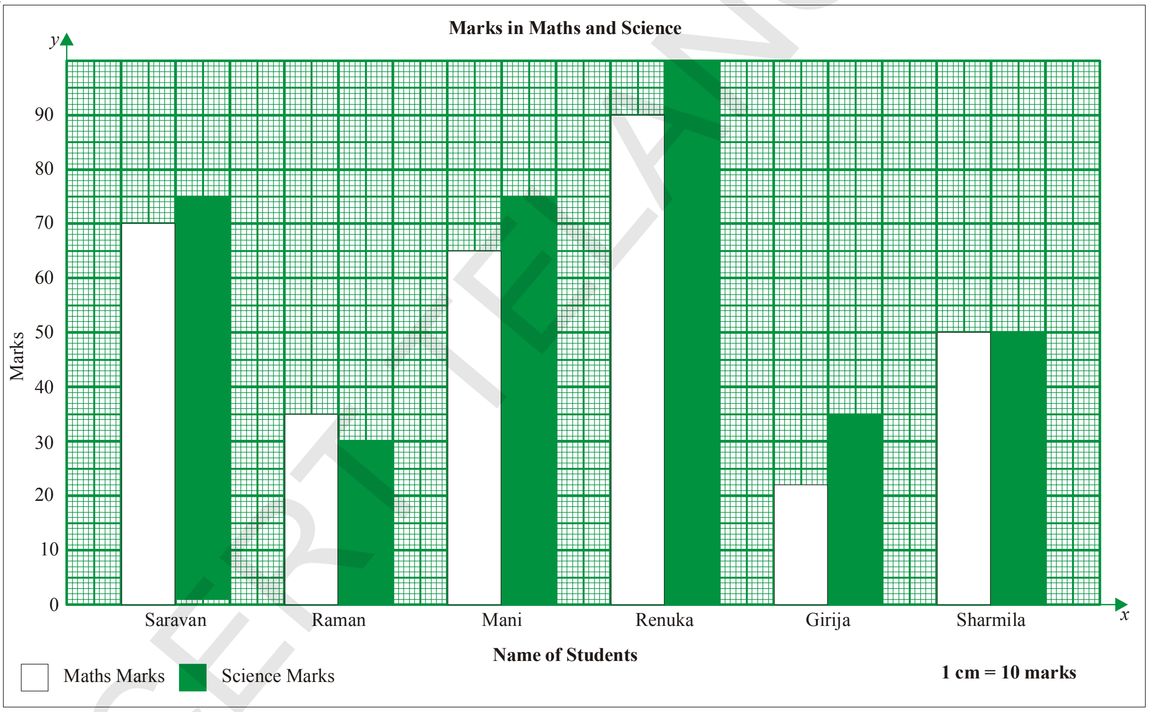
2. अक्ष पर विद्यार्थियों के नाम लिखिए।

3. गणित और विज्ञान विषय के अंक y-अक्ष पर लें।;

4. y-अक्ष के लिए उचित पैमाना लीजिए, ताकि दोनों विषयों के अंक आसानी से लिये जा सकें। अंक y-अक्ष पर 100, इस तरह प्रति 1 से.मी. = 10 अंक के लगभग होगा

5. अंक को 10 से भाग देकर प्रत्येक स्तभ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

6. गणित और विज्ञान के अंकों को साथ-साथ स्तम्भों द्वारा प्रदर्शित करो:

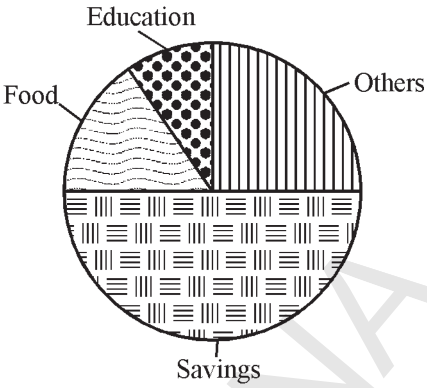


7.6.3 **पाई चित्र/चार्ट (Pie Chart)**

एक परिवार का मासिक बजट एक तालिका द्वारा प्रदर्शित किया गया है। इस दत्त को पाई तालिका द्वारा दर्शाया गया है।

यदि खर्च अधिक होगा तो वह पाई चार्ट में अधिक स्थान घेरेगा।

बजट	खर्च
भोजन	1500
पढ़ाई	750
अन्य	2250
बचत	4500
कुल आय	9000



उपरोक्त पाई चित्र को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) पाई चित्र की आकृति किस प्रकार होती है?

(ii) पाई चित्र में प्रत्येक आकृति को दर्शाने वाले भागों के नाम क्या है?

(iii) हाँ या नहीं में उत्तर दीजिए। (a) कुल आय का अधिकतर भाग बचत में जाता है।

(b) कुल आय का न्यूनतम भाग पढ़ाई के लिए खर्च होता है।

7.6.4 पाई चार्ट (तालिका) की रचना

आइए, ज्ञात करें कि किस प्रकार पाई चार्ट की रचना की जाती है।
पाई चार्ट में कुल आय को प्रत्येक मद वृत के हिस्से में दर्शाया जाता है।
हम जनते हैं कि वृत का कोण 360^0 होता है। मान लो कुल आय (रु.9000) के प्रत्येक मद (हिस्से)को इस वृत की सहायता से दर्शाना है।
खर्च का प्रत्येक कारण, कुल आय का हिस्सा है इसलिए वृतखण्ड का कोण या वृतखण्ड का क्षेत्रफल, प्रत्येक मद और कुल आय के अनुपात पर निर्भर करता है।

इसलिए प्रत्येक भाग का कोण $= \dfrac{\text{कुल खर्च}}{\text{कुल आय}} \times 360$

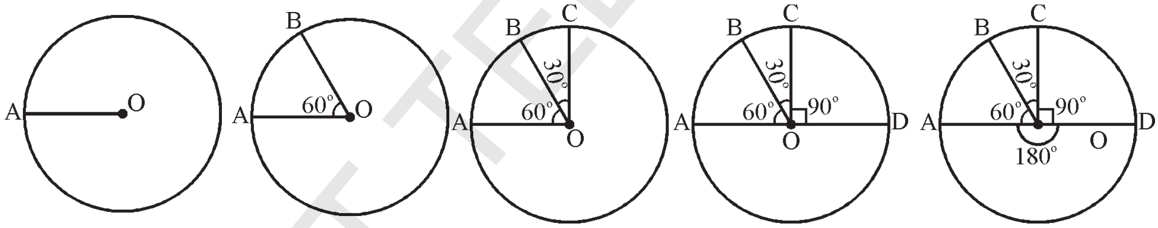
वृतखण्ड के कोण जानने के लिए हम एक तालिका बनायेंगे। इसकी रचना के चरण निम्न प्रकार से हैं–

1. सुविधानुसार किसी भी त्रिज्या का वृत बनाइए। मान लो '0' केन्द्र है।
2. सुविधानुसार वृत्त की परिधि पर एक बिन्दु 'A' बनाइए, उससे वृत्त केन्द्र '0' से जोड़िए। यह रेखा 'OA' बनेगी।
3. भोजन के लिए वृतखण्ड का कोण 60^0 बनाइए। $<AOB=60^0$

4. पढ़ाई के लिए वृत्त खण्ड के कोण 30^0 बनाइए। $<BOC = 30^0$
5. अन्य खर्चों के लिए वृतखण्ड क कोण 90^0 $<COD=90^0$
6. अब $<DOA=180^0$ होगा जो कि बचत के लिए कोण है।

बजट मद	खर्च	खर्च और कुल आय का अनुपात	वृतखण्ड का कोण या वृतखण्ड का क्षेत्रफल
भोजन	1500	$\frac{1500}{9000}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times 360^o = 60^o$
शिक्षा	750	$\frac{750}{9000}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}\times 360^o = 30^o$
अन्य	2250	$\frac{2250}{9000}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times 360^o = 90^o$
बचत	4500	$\frac{4500}{9000}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\times 360^o = 180^o$

नोट : जाँच कीजिए कि क्या वृतखण्ड के सभी कोणों का योग 360^0 है?



अभ्यास - 4

1. निम्न दत्तों का सोपान आलेख बनाइए।

क्रमगत वर्षों में भारत की जनगणना वर्ष नीचे तालिका में दी गई है।

वर्ष	1941	1951	1961	1971	1981	1991	2001
जनसंख्या	320	360	440	550	680	850	1000

जनसंख्या (लगभग) 1991 और 2001 जनगणना के आधार पर है।

2. निम्न दत्तों को पाई चार्ट द्वारा दर्शाइए।

विभिन्न खर्च	भोजन	चिकित्सा	वस्त्र	शिक्षा	बचत
राशी	₹ 3750	₹ 1875	₹ 1875	₹1200	₹ 7500

3. निम्न दत्तों क द्विसोपान आलेख बनाइए।

वर्ष 1999 में राज्यों में जन्म और मृत्यु दर इस प्रकार है।

राज्य	जन्म दर	मृत्यु दर (प्रति 1000 पर)
आन्ध्र प्रदेश	22	8
कर्नाटक	22	8
तमिलनाडु	19	8
केरल	18	6
महाराष्ट्र	21	8
उडीसा	24	11

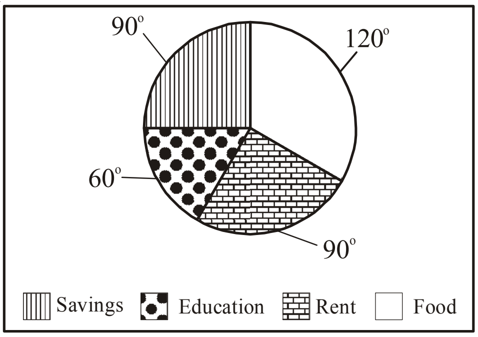
स्रोतः यह तालिका SRS 1999 की विठ्ठल सांख्यिकी से ली गई हैं।

4. निम्न दत्तों को पाई चार्ट द्वारा दर्शाइए

बालक की प्रतिदिन क्रियाओं का ब्यौरा इस प्रकार है।

प्रतिदिन क्रियाएँ	निद्रा	विद्यालय	खेलने	अन्य
समय	8 घंटे	6 घंटे	2 घंटे	8 घंटे

5. दिये गये चित्र में परिवार द्वारा एक महीने भर में होने वाले खर्च का विवरण दिया गया है। खर्च को कोणों के रूप में दर्शाया गया है। इसी पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



(i) किस मद (वस्तु) पर खर्च न्यूनतम है?

(ii) किस मद पर खर्च सबसे अधिक है?

(iii) यदि परिवार की मासिक आय ₹ 9000 हो तो किराये पर खर्च क्या होगा?

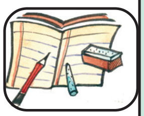
(iv) यदि परिवार का भोजन पर खर्च ₹ 3000 हो तो शिक्षा पर होने वाला खर्च क्या है?

परियोजना कार्य

1. अपने घर के आस-पास विभिन्न प्रकार के घरों के विवरण लीजिए और उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

2. अपने परिवार द्वारा विभिन्न प्रकार के खर्चों को पाई चार्ट द्वारा दर्शाइए।

3. विविध समाचार पत्रों, पत्रिकाओं आदि में दिये गये आलेखों व पाई चार्टों को एकत्रित कर उन्हें स्कूल के सूचना बोर्ड पर दर्शाइए।



मुख्यांश

- मध्यमान, बहुलक एंव माध्यिका दत्तों को प्रतिनिधित्व मान हैं।
- दत्तों के समुच्च्य को जोड़कर निरीक्षणों की संख्या से भाग देने पर मध्यमान प्राप्त होता है जो कि दत्तों के न्यूनतम एवं अधिकतम मान के बीच होता है।
- दत्तों में जिस निरीक्षणों की संख्या अधिक होती है, उसे बहुलक कहते हैं। दत्तों का बहुलक एक या एक से अधिक या कभी नहीं भी होता है।
- दत्तों के निरीक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद बीच वाले परीक्षण को माध्यिका कहते हैं। (निरीक्षणों की संख्या सम होने पर बीच के दो परीक्षणों के मध्यमान, मध्यिका कहलाती है।
- पाई चार्ट एक वृत्ताकार चार्ट होता है जो कि वृत्तखंडों में विभजित होता है।
- उसका उपयोग दत्तों को प्रदर्शित करने के लिए किया जाता है। प्रत्येक पाई चार्ट में प्रत्येक वृतखण्ड का कोण उसके द्वारा दर्शाई गई मात्रा के समानुपाती होता है।

डॉ. सी. आर. राव (भारत)
सन् **1920** ई.

एक प्रसिद्ध सांख्यिकी ज्ञाता जो अपने अनुमान के सिद्धांत **(1945)** के लिए प्रसिद्ध हुए। उन्होंने क्रेमर–राव असमानता **(Cramer-Rao Inequality)** और फिशर–राव प्रमेय **(Fisher-Rao theorm)** पर कार्य किया।

त्रिभुजों की अनुरूपता

(CONGRUENCY OF TRAINGLES)

8

8.0 परिचयः-

यदि हम एक रुपये का सिक्का ले कर उस पर दूसरा सिक्का रखें तो तो क्या वे दोनों समान होंगे? यह क्यों समान है? यह समान इसलिए है क्योंकि इनके आकार और परिमाण समान है। इसी प्रकार नोटबुक पेपर भी समान परिमाण और आकार के होते हैं।

अपने आसपास की वस्तुओं पर ध्यान दो, कुछ वस्तुएँ समान आकार के और समान परिमाण की होती हैं। किन्हीं पाँच वस्तुओं के उदाहरण दीजिये।

जब हम अनुरूप आकृतियों के विषय में बात करते हैं, तो हम देख सकते कि एक समरूप चित्र को दूसरे समरूप चित्र के ऊपर रख दें तो वे अनुरूप होंगे यह उत्तम पद्धति है।

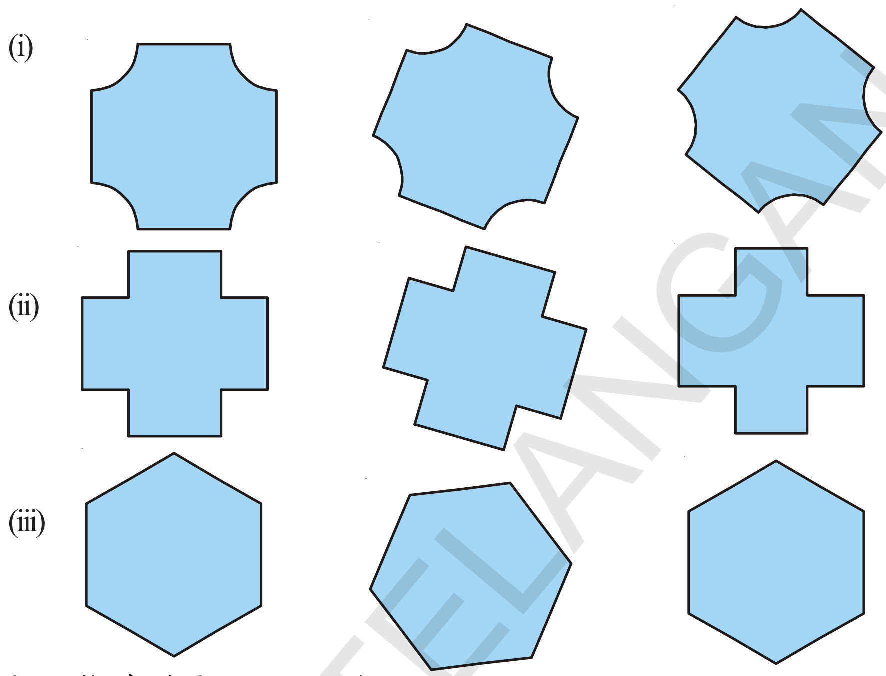
क्या सभी दस रुपये के नोट समान हैं, इसे तुम कैसे पहचानोगे?

उसी प्रकार क्या 5 रुपये के नोट समान और अनुरूप हैं।

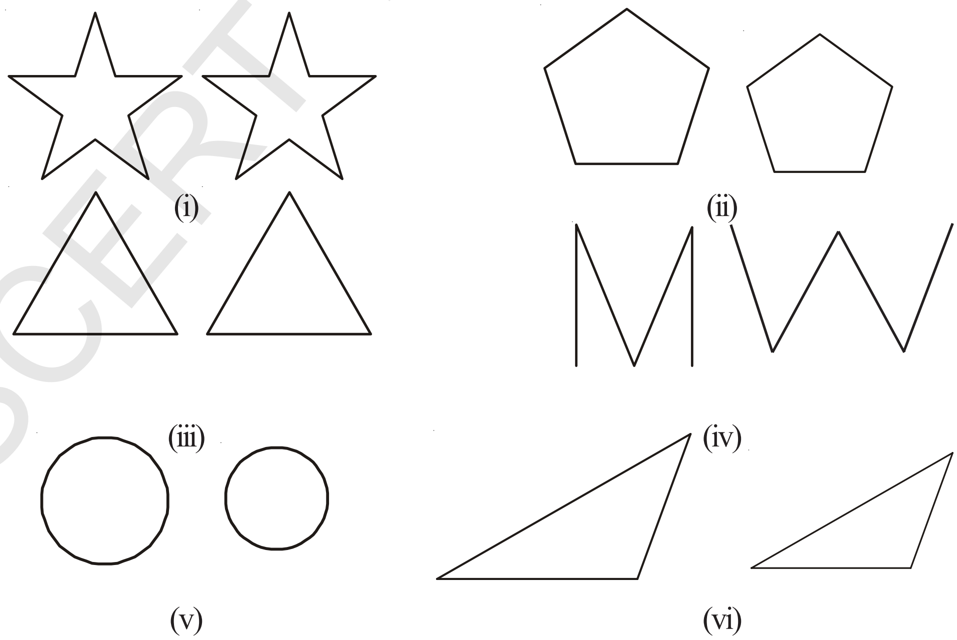
अपने आसपास के अनुरूप की वस्तुओं को देखने के बाद कुछ और समरूप चित्र देखें।

यह कीजिए

1. यहाँ पर कुछ आकृतियाँ हैं। दी गयी पंक्ति में सभी एक दूसरे के अनुरूप हैं या नहीं? समरूप हैं क्या? तुम चित्रित करो और देखो।

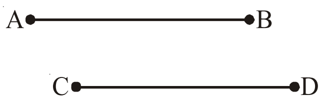


2. निम्न में कौनसे चित्र समरूप हैं?

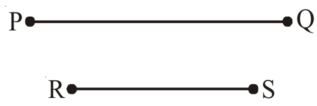


8.1 अनुरूप रेखाखंड (Congruency of Line segments)

इन दो जोडियों को देखो



चित्र 1



चित्र 2

रेखाखण्ड AB को उतारो, ट्रेस पेपर पर तुम देखोगे कि AB चित्र CD पर समा जाएगा। इसलिए रेखाखंड समरूप हैं। इसे $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. लिखते हैं।

इसी को दोहराओ चित्र दो में तुम क्या देखोगे? क्या वे समरूप हैं?

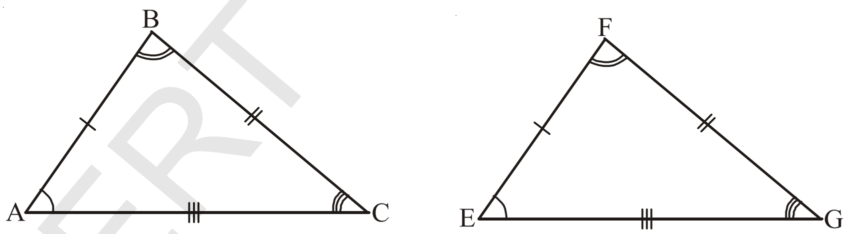
तुम देखोगे कि चित्र 1 के रेखाखण्ड एक दूसरे के समान है क्योंकि उनकी लंबाई समान है लेकिन दूसरे चित्र में ऐसा नहीं है।

रेखाखण्ड में एक ही इकाई होती है, वह है लंबाई, इसलिए वे समरूप हैं। इस तरह यदि दो रेखाखण्ड समान हो तो उनकी लम्बाई समान रहती है।

इसे इस प्रकार लिख सकते हैं, AB=CD, इसका अर्थ है $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

8.2 त्रिभुज अनुरूपता (Congruency of Traingles)

हमें मालूम है कि दो रेखाखण्ड अनुरुप होते हैं। वे एक दूसरे की तरह दिखते हैं। इसी प्रकार दो त्रिभुज भी अनुरूप हो सकते हैं। यदि वे एक दूसरे के नकल हों। अर्थात जब वे एक–दूसरे को ढँक लें।



ΔABC और ΔEFG एक दूसरे को ढक लेते हैं। पूर्णरूप से अतः वे समान आकार और परिमाण के हो तो वे समरूप त्रिभुज कहे जाएँगे। दो त्रिभुजों की समानता को $\Delta ABC \cong \Delta EFG$. लिखते हैं।

यदि दो त्रिभुज समरूप हों तो उनके छः भाग **अर्थात्** तीन कोण और तीन भुजाएँ समरूप होती हैं। इसे हम इस तरह भी कह सकते हैं कि यदि दोनों त्रिभुजों के भाग समान है तो वे समरूप त्रिभुज होंगे। यदि हम ΔABC को उठाकर ΔEFG पर रखें तो उनके **सभी भाग** एक दूसरे से **मिलने** चाहिए ताकि A पर E मिलें B पर F और C पर G उसी प्रकार $\angle A$ पर $\angle E$, मिले, $\angle B$ पर $\angle F$ **तथा**, $\angle C$ पर $\angle G$ मिले आखिर में AB, EF पर मिले, BC, FG पर **तथा** और AC, EG पर **मिले**।

अतः दो त्रिभुज अनुरूप हो तो उनके संलग्न भाग जैसे शीर्ष, कोण, भुजाएँ एक दूसरे से मिले या समान हो।

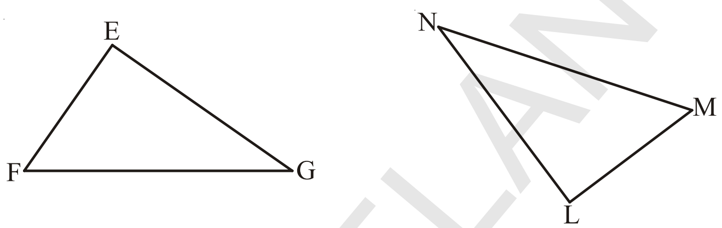
ΔABC और ΔEFG में

$A \rightarrow E$	$B \rightarrow F$	$C \rightarrow G$	(संलग्न शीर्ष)
$\angle A \cong \angle E$	$\angle B \cong \angle F$	$\angle C \cong \angle G$	(संलग्न कोण)
$\overline{AB} \cong \overline{EF}$	$\overline{BC} \cong \overline{FG}$	$\overline{AC} \cong \overline{EG}$	(संलग्न भुजा)

समरूप त्रिभुज के संलग्न कोणों के संबध अंग्रेजी अक्षर के क्रम में दर्शाये गये हैं। अतः हम कह सकते हैं कि $\Delta ABC \cong \Delta EFG$ जाँच कर देखा कि $\Delta ABC \cong \Delta EFG$, उनके संलग्न शीर्ष, भुजा और कोण समान हैं।

यह कीजिए

1. $\Delta EFG \cong \Delta LMN$

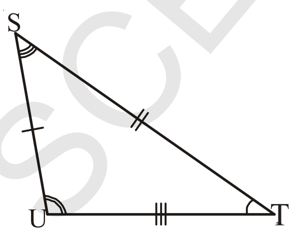


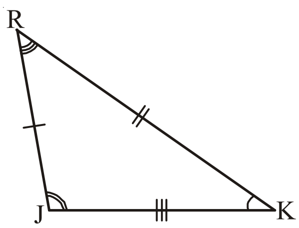
दो त्रिभुजों के संलग्न शीर्ष कोण और भुजाएँ लिखें।

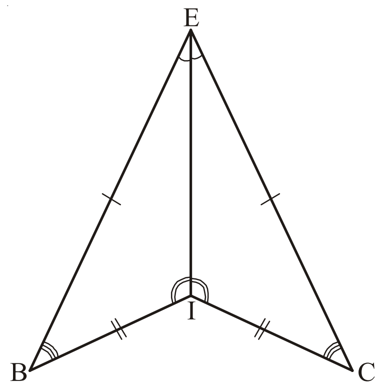
2. यदि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ हैं तो ΔABC के भाग लिखो

(i) DE (ii) $\angle E$ (iii) DF (iv) EF (v) $\angle F$

3. निम्न जोड़ियों में समरूप त्रिभुज की जोड़ी कौनसी हैं? '$\cong$'.इस चिन्ह का उपयोग करके लिखो।'







4. समरूप कोण और भुजाएँ निम्न जोडियों में लिखो।

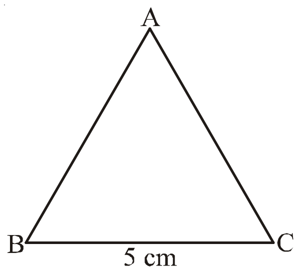
1. $\Delta TUV \cong \Delta XYZ$ 2. $\Delta CDG \cong \Delta RSW$

8.3 अनुरूप त्रिभुज के नियम

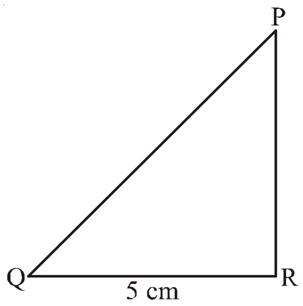
क्या यह आवश्यक है कि त्रिभुजों की अनुरूपता मालूम करने के लिए संलग्न चित्रों का परीक्षण किया जाये? कम से कम माप या परिमाण से तुम कैसे ज्ञात करोगे? इसे देखेंगे।

8.3.1 भुजा, भुजा, भुजा (अनुरूप) (SSS)

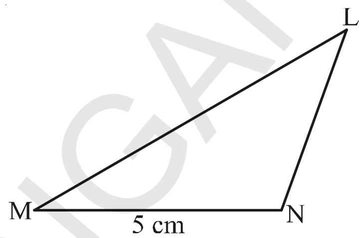
क्या तुम सभी समान चित्र उतारोगे जब त्रिभुज की एक भुजा 5 से.मी. है। कमल, नम्रता और सुमन ने इस प्रकार उतारे।



कमल



नम्रता

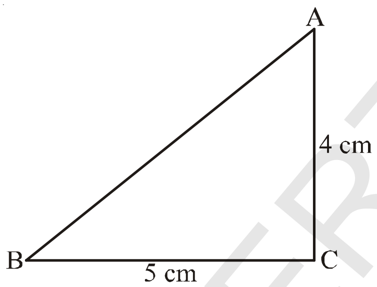


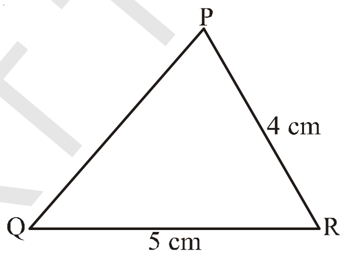
सुसन

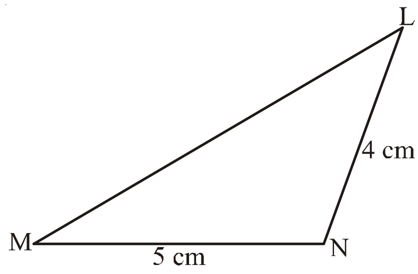
तुम देखोगे कि सभी त्रिभुज अलग-अलग हैं। कमल ने समबाहु त्रिभुज उतारा। नम्रता ने समकोण त्रिभुज उतारा, सुमन ने अधिक कोण त्रिभुज उतारा।

यदि त्रिभुज को दो भुजाएँ 4 से.मी. और 5 से.मी. दी गई हो तो क्या तुम तीनों त्रिभुज उतार सकते हो?

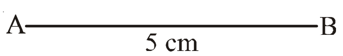
दुबारा कमल, नम्रता और सुमन ने त्रिभुजों के चित्र उतारे।

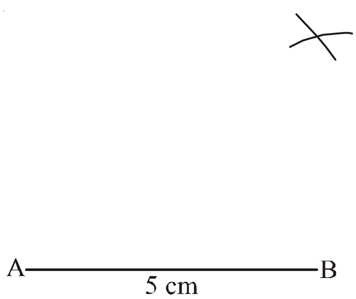


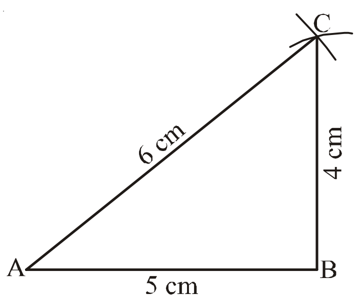




यदि तीनों भुजाएँ मालूम हो तो क्या कमल, नम्रता और सुमन समान चित्र तीन भुजाओं द्वारा 4 से.मी., 5 से.मी., 6 से.मी. से उतार सकते हैं ?







अतः क्या समरूप त्रिभुज ABC का चित्र उतार सकते हो? हमें त्रिभुज की तीन भुजाओं की आवश्यकता होती है। यह है भुजा-भुजा-भुजा (S.S.S)

नियम :

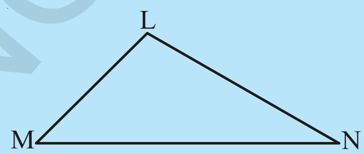
यदि कोई त्रिभुज इसलिए समरूप हैं क्योंकि उनकी भुजाएँ समान हैं, तो उनकी भुजाओं के संलग्न कोण भी समान होंगे?

यह भुजा-भुजा-भुजा (S.S.S) की अनुरूपता की आवश्यकताएँ

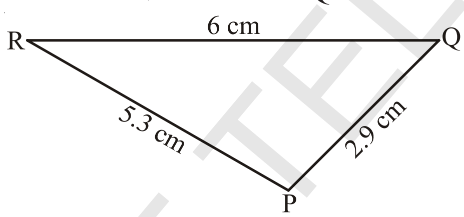
यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के समान हो, तो दोनों त्रिभुज अनुरूप होंगे।

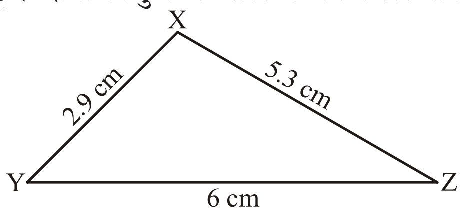
प्रयास कीजिए

ΔLMN. की लम्बाई मापो। इन मापों से त्रिभुज बनाओ। एक पेपर पर ΔLMN के ऊपर रखो। क्या ये चित्र समरूप हैं अनुरूपता का कौन सा नियम इसके लिए **अपनायेंगे**?



उदा 1. क्या $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$? उन दोनों त्रिभुज के संलग्न कोण लिखो।





हलः दिए गए चित्र से ΔPQR और ΔXYZ, से

$PQ = XY = 2.9$ cm

$QR = YZ = 6$ cm

$RP = ZX = 5.3$ cm

भुजा-भुजा-भुजा समरूपता नियम से

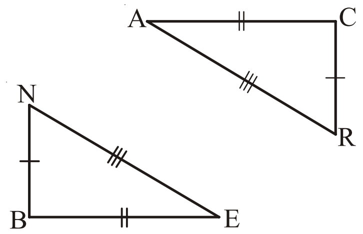
स्पष्ट P बिन्दु संलग्न है बिन्दु X से और Q बिन्दु संलग्न है Y से और R बिन्दु संलग्न है बिन्दु Z से।

अतः $\angle P, \angle X$; $\angle Q, \angle Y$; $\angle R, \angle Z$ संलग्न कोण हैं।

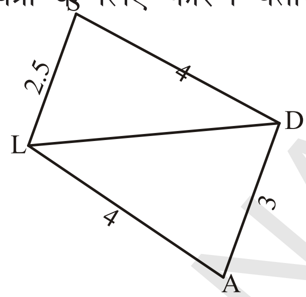
अभ्यास – 1

1. बताओ कि SSS समरूपता सही है क्या? निम्न चित्रों के लिए कारण बताओः-

(i)

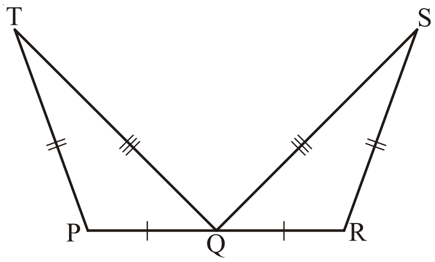


(ii)

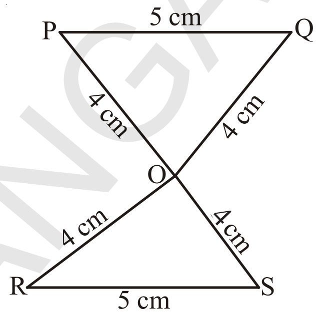


2. निम्न समरूप त्रिभुज के लिए संलग्न कोणों की जोड़ी बताओ।

(i)



(ii)



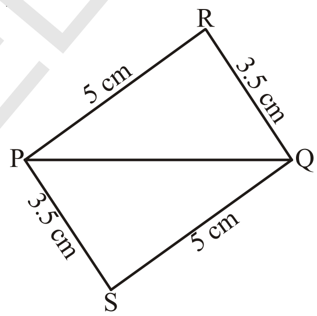
3. समरूप चित्र में सही उत्तर बताइए

(i) $\Delta PQR \cong \Delta PQS$

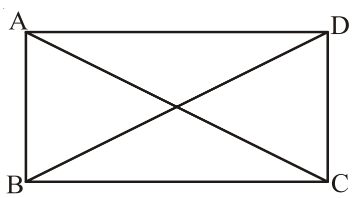
(ii) $\Delta PQR \cong \Delta QPS$

(iii) $\Delta PQR \cong \Delta SQP$

(iv) $\Delta PQR \cong \Delta SPQ$

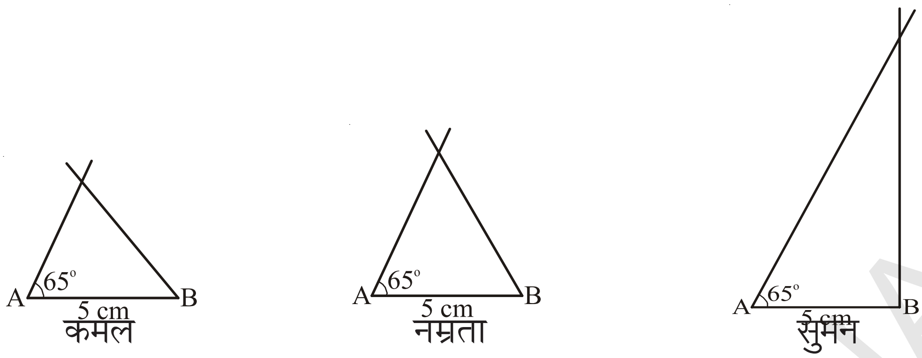


4. नीचे दिए गये चित्र में AB=DC और AC=DB या $\Delta ABC \cong \Delta DCB$.



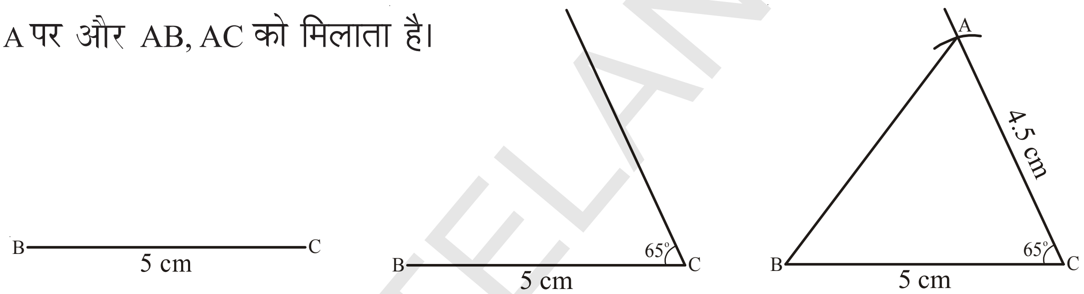
8.3.2 भुजा-कोण-भुजा अनुरूपता (SAS)

हमने देखा कि यदि त्रिभुज की केवल एक भुजा दी गई हो तो समरूप त्रिभुज का चित्र अंकन संभव नहीं है। यदि एक कोण और एक भुजा दी गई हो तो क्या यह सभव है? कमल, नम्रता और सुमन को एक भुजा 5 से.मी. और एक कोण 65^0 बताया गया। वे इस प्रकार त्रिभुज उतारते हैं।



अब यदि तीनों में से त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दिया गया हो तो क्या होगा? अब वे तीनों त्रिभुज की भुजाएँ 5 से.मी. और 4.5 से.मी. और एक कोण 65^0 लेकर त्रिभुज उतारते हैं।

कमल ΔABC चित्रित करता है, भुजा BC आधार = 5से.मी. उसके बाद $\angle C=65^0$ चाँदा का उपयोग कर और उसके बाद 4.5 से.मी. की दूरी प्रकार में लेकर C से 4.5 से.मी. का चाप खींचता है A पर और AB, AC को मिलाता है।



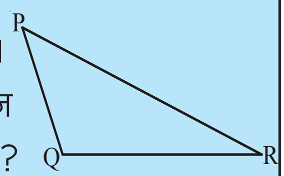
क्या तुम 65^0 का कोण बिन्दू B पर भुजा AB=4.5 से.मी. रेखा खींच सकते हो? क्या वह कमल के त्रिभुज के समान समरूप होगा? क्या तुम आधार 4.5 से.मी., भुजा = 5 से.मी., कोण = 65^0 ले सकते हो? क्या वह त्रिभुज कमल के त्रिभुज के समरूप होगा? तुम देखोगे कि सभी स्थितियों में त्रिभुज समरूप होंगे।

क्या हम ΔABC को या समरूप ΔABC के **जैसा** चित्र बना सकते हैं? हमें दो भुजाओं की लम्बाई और उनके मध्य का कोण जानना आवश्यक है। तुम देखोगे कि भुजा-कोण-भुजा (SAS) नियम के अंतर्गत Δ समरूप होगा।

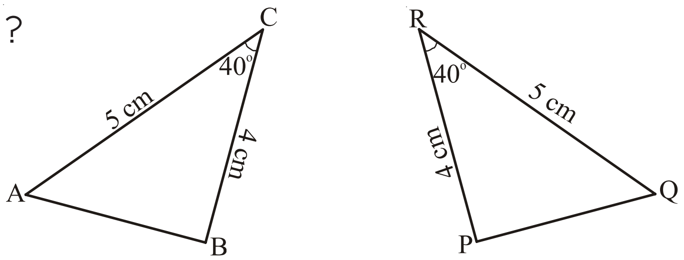
भुजा-कोण-भुजा नियम समरूप त्रिभुज के लिए, **यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ, उनसे बना कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनसे बने कोण के समान हों तो तब दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।**

प्रयास कीजिए

PQR में PQ और QR की लम्बाई मापो और कोण Q मापो। अब एक कागज पर इन तीनों मापों के आधार पर त्रिभुज उतारो। उसे PQR रूप में अंकित करो। क्या वे समरूप हैं? यहाँ समरूपता का कौनसा नियम अपनाया जायेगा?



उदा 2 : नीचे दिए गये त्रिभुज के मापों के आधार पर बताओ कि क्या त्रिभुज समरूप है? इनमें संलग्न कोण कौन से हैं?



हलः ΔABC और ΔPQR में $AC=QR$ और $BC=PR$ और कोण $\angle C \cong \angle R$

इसलिए $\Delta ABC \cong \Delta QPR$.

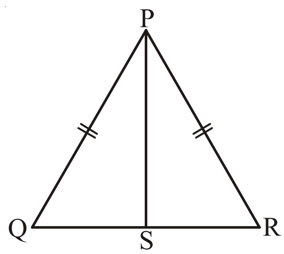
अतः संलग्न शीर्ष इस प्रकार है।

$A \leftrightarrow Q$, $B \leftrightarrow P$ और $C \leftrightarrow R$

इसलिए, $\angle A \cong \angle Q$, $\angle B \cong \angle P$ और $\angle C \cong \angle R$

उदा 3 : ΔPQR, में $PQ = PR$ और PS कोण $\angle P$ का समद्विभाजक है। क्या ΔPQS और ΔPRS समरूप है? यदि है तो कारण बताओ।

हल : Δ PQS और Δ PRS में



$PQ = PR$ (दिया गया)

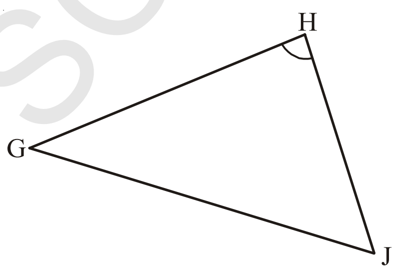
$PS = PS$ (दोनों त्रिभुजों की समनिष्ट भुजा)

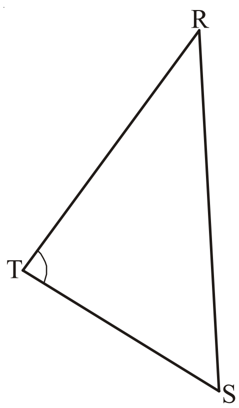
और कोण $\angle QPS \cong \angle RPS$ (PS कोण का समद्विभाजक)

इसलिए, $\Delta PQS \cong \Delta PRS$ (नियम अनुसार)

अभ्यास - 2

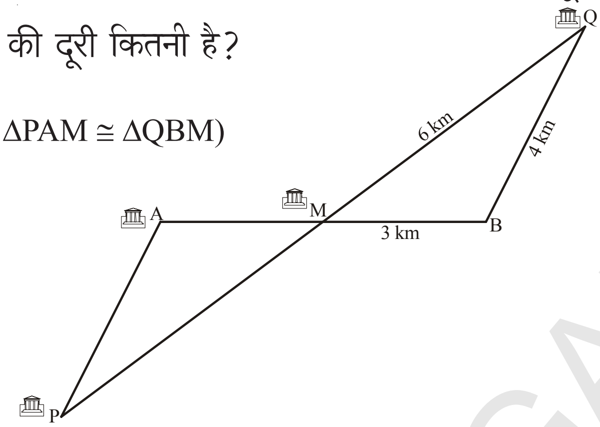
1. यह बताने के लिए कि भुजा–कोण–भुजा नियम के अंतर्गत दोनों त्रिभुज समरूप हैं या नहीं, तुम्हें और कौनसी जानकारी चाहिए?





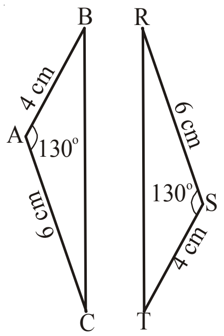
2. नीचे दिया गया मानचित्र पाँच अलग–अलग गाँवों का है। गाँव M गाँव A और B के ठीक आधी दूरी पर है। गाँव M, गाँव P और Q के भी ठीक आधी दूरी पर है। तो गाँव A और गाँव P के बीच की दूरी कितनी है?

(हिन्ट : देखो $\Delta PAM \cong \Delta QBM$)

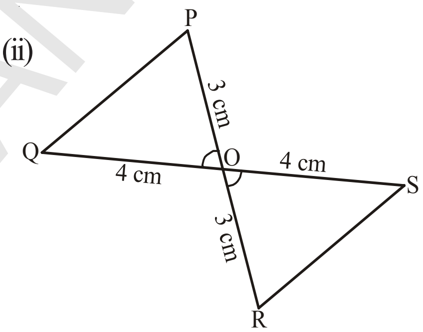


3. नीचे दिए गए त्रिभुजों की जोड़ियाँ देखो और बताओ कि क्या वे समरूप हैं? यदि समरूप हैं तो संलग्न भाग बताओ।

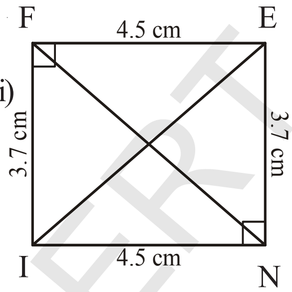
(i)



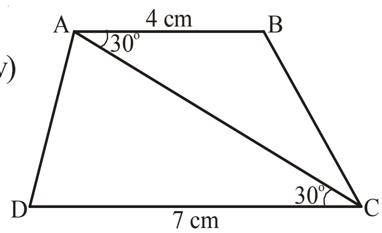
(ii)



(iii)

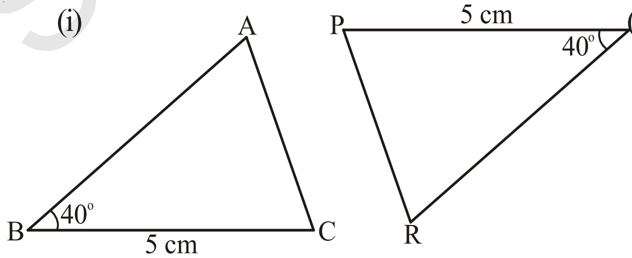


(iv)

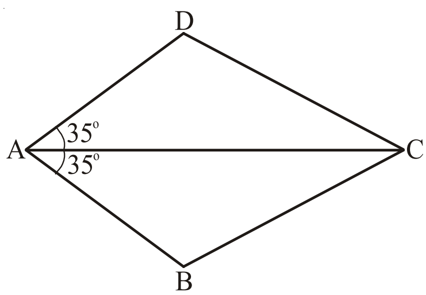


4. कौनसी संलग्न भुजा हमें मालूम होनी चाहिए जिससे पता चले कि त्रिभुज समरूप है? भुजा-कोण-भुजा नियम के अनुसार :

(i)



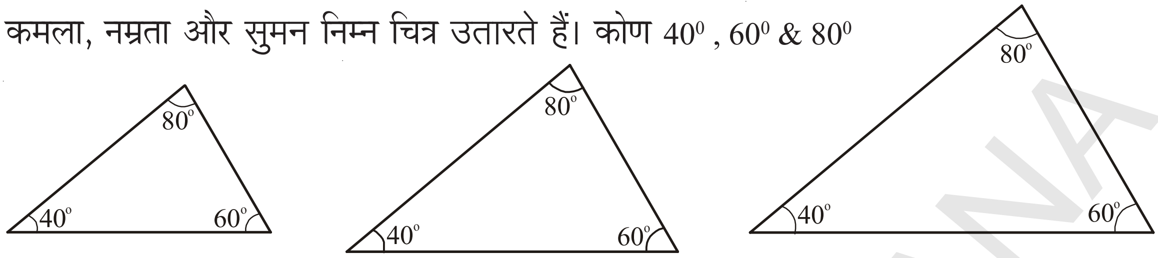
(ii)



8.3.3 कोण-भुजा-कोण समरूपता (ASA)

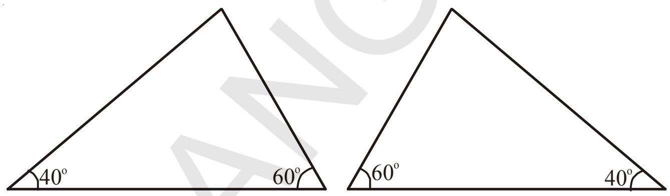
क्या त्रिभुज का एक कोण ज्ञात हो तो त्रिभुज उतार सकते हो? **क्या** त्रिभुज के सभी कोण मालूम हो तो समरूप त्रिभुज उतार सकते हैं?

कमला, नम्रता और सुमन निम्न चित्र उतारते हैं। कोण 40^0 , 60^0 & 80^0



कमला नम्रता सुमन

इसलिए त्रिभुज के सभी कोण समरूप हैं। त्रिभुज की भुजाएँ समरूप नहीं हैं।



Kamal Susana

अतः हमें भुजाओं की लंबाई ज्ञात होना चाहिए। समरूप त्रिभुज को चित्रित करने के लिए यदि दो कोण और एक भुजा मालूम हो तो? कमल और नम्रता कोण 60^0 और 40^0, भुजा = 5cm से एक त्रिभुज उतारते हैं।

दोनों छात्र चित्र उतारते हैं। दिए गए माप से हमें यह मालूम होता है कि जब हम एक दूसरे जैसा समरूप त्रिभुज उतारना है तो हमें दो कोण और एक भुजा मालूम होनी चाहिए। (दो भुजा और एक कोण) इससे यह मालूम होता है कि **यहाँ** कोण-भुजा-कोण नियम लागू होता है।

कोण-भुजा-कोण-नियम : यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और एक भुजा के समान हो तो दोनों त्रिभुज अनुरूप हैं।

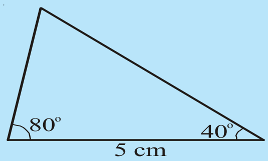
यह कीजिए

अध्यापक छात्रों को कोण 60^0, 40^0 और भुजा 5cm से त्रिभुज उतारने को कहते हैं। सुमन तीसरा कोण 80^0 है मालूम करती है। कोण योग नियम अनुसार, कमल, सुमन और नम्रता त्रिभुज उतारते हैं। निम्न माप से

कमल 60^0, 40^0 और 5 से.मी. भुजा (शिक्षक के कहे अनुसार)

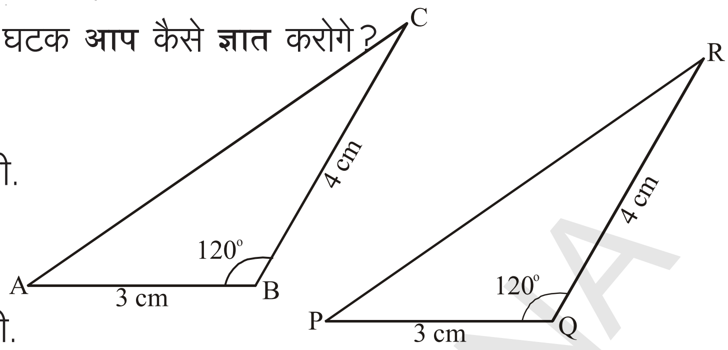
सुमन : 80^0, 40^0 और 5 से.मी. भुजा

नम्रता : 60^0, 80^0 और 5 से.मी. भुजा



इन त्रिभुजों को काट कर उन्हें एक दूसरे पर रखते हैं। क्या वे समरूप हैं? आप भी यह कीजिए।

उदाहरण 4 : दो त्रिभुज ΔCAB और ΔRPQ **दिये गये** है। जाँच करो कि वे समरूप हैं या नहीं। यदि वे समरूप हैं तो उनके **अन्य** घटक **आप** कैसे **ज्ञात** करोगे?



हलः CAB और RPQ में

$BC = QR = 4$ से.मी.

$\angle B = \angle Q = 120°$

$AB = PQ = 3$ से.मी.

अतः Δ CAB की दो भुजाएँ समान है (संलग्न भुजाएँ और कोण PQR के।)

इसलिए भुजा समरूपता नियम से $\Delta CAB = \Delta RPQ$

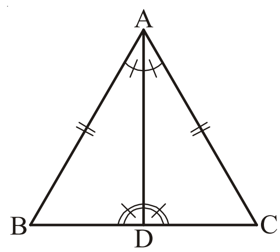
अतः दो त्रिभुजों में

$AC \cong PR$

$\angle C \cong \angle R$ and $\angle A \cong \angle P$

उदाहरण5 : चित्र में त्रिभुज के समान कोण दर्शाये गये हैं, वे समरूप हैं या नहीं। प्रमाणित कीजिए

हलः ΔABD और ΔACD



$\angle BAD \cong \angle CAD$ (दिये गये प्रश्न में)

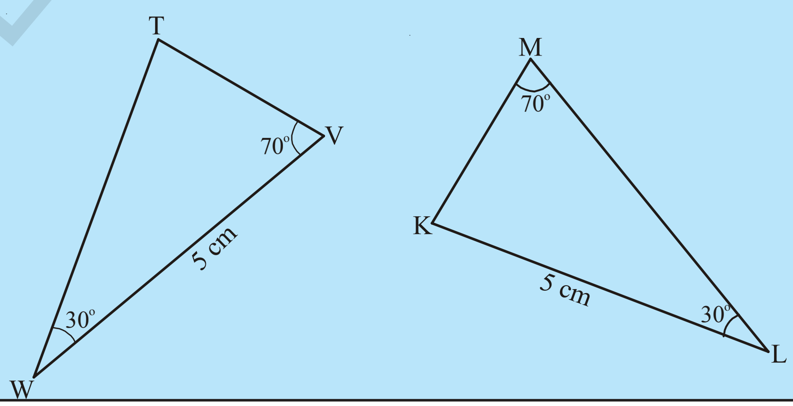
$\angle ADB \cong \angle ADC$ (दिये गये प्रश्न में)

$AD \cong AD$ उभयनिष्ट भुजा दिया गया

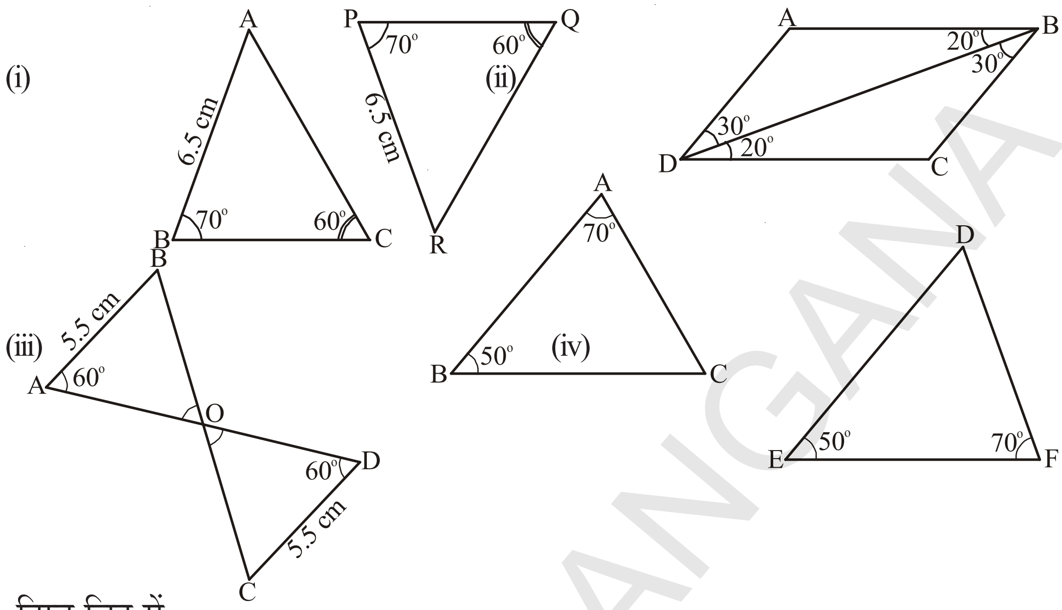
अतः कोण-भुजा-कोण नियम अनुसार $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

इसे करो :

क्या यह त्रिभुजों की जोड़ी समरूप है? अपने उत्तर का कारण बताओ।



1. निम्न त्रिभुजों की जोड़ियों में समरूप जोड़ी कौनसी है? समरूपता का कारण लिखिए।

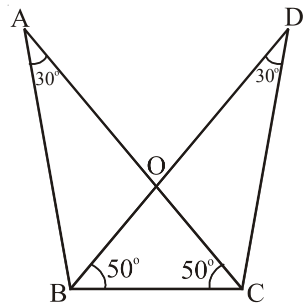


2. निम्न चित्र में

(i) क्या ΔABC और ΔDCB समरूप हैं?

(ii) क्या ΔAOB समरूप ΔDOC?

और दोनों संलग्न चित्रों में क्या संबध है? बताइए। अपने उत्तर का कारण बताइए।



8.3.4 समकोण-कर्ण भुजा समरूपता (RHS)

किसी समकोण त्रिभुज में हमें पहले से ही जानते है कि उसमें एक **कोण समकोण होता** है। तो हमें और क्या मालूम करना चाहिए कि दो त्रिभुज समरूप हैं?

मान लो ΔABC का उदाहरण लो जहाँ $B=90^0$ है। क्या हम इसका एक समरूप त्रिभुज बना सकते हैं। यदि–

(i) BC ही मालूम हो

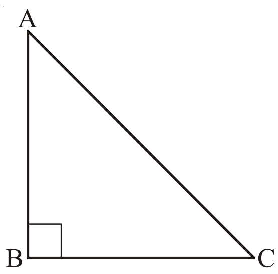
(ii) $\angle C$ ही मालूम हो

(iii) $\angle A$ और $\angle C$ दिया गया हो

(iv) AB और BC दिया गया हो

(v) $\angle C$ और BC दिया गया हो

(vi) BC और AC दिया गया हो



जब तुम इन चित्रों के रफ चित्र उतारकर देखोगे तो पाओगे कि यह केवल निम्न परिस्थितियों में (iv), (v) और (vi) में संभव होगा।

अंतिम परिस्थिति हमारे लिए नयी है। इसे समकोण-कर्ण–भुजा नियम कहते हैं।

समकोण–कर्ण–भुजा नियम के अनुसारः

यदि एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण के समान हो तब दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।

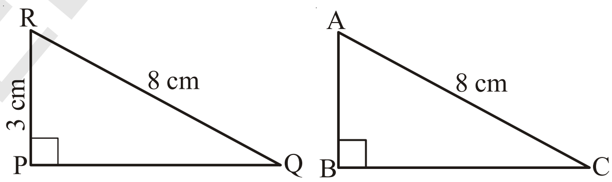
उदाहरण 6 : नीचे दो त्रिभुजों के माप दिये गये हैं। उन्हें निरीक्षण करके बताइए कि वे एक–दूसरे के समरूप हैं या नहीं। RHS समरूप नियम के प्रयोग द्वारा। यदि आप पाते हैं कि ये समरूप त्रिभुज हैं तो इन्हें सांकेतिक रूप में लिखिए।

	ΔABC	ΔPQR
(i)	$\angle B = 90^o$, AC = 8 से.मी., AB = 3 से.मी.	$\angle P = 90^o$, PR = 3 से.मी., QR = 8 से.मी.
(ii)	$\angle A = 90^o$, AC = 5 से.मी., BC= 9 से.मी.	$\angle Q = 90^o$, PR = 8 से.मी., PQ = 5 से.मी.

हलः

(i) यहाँ, $\angle B = \angle P = 90^o$

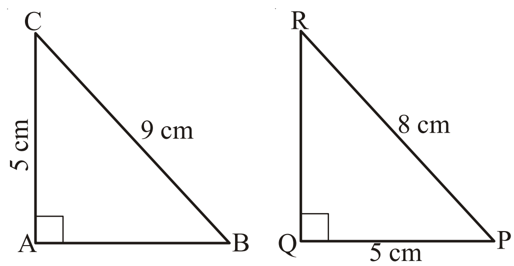
कर्ण, AC = **कर्ण** RQ (= 8 से.मी.) और भुजा AB = भुजा RP (= 3 से.मी.)



ΔABC ΔPQR

इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (नियम RHS के अनुसार).

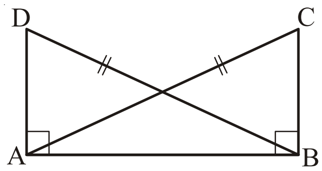
(ii) यहाँ , $\angle A = \angle Q = 90^o$ और भुजा AC = भुजा PQ (= 5 cm).कर्ण, BC $\neq$ कर्ण, PR



ΔABC ΔPQR

इसलिए यह त्रिभुज समरूप नहीं है।

उदा 7: इस चित्र में , $\overline{DA} \perp \overline{AB}$, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ और $AC = BD$.



ABC और DAB की तीन समान जोड़ियों के नाम लिखो। ΔABC और ΔDAB.

कौनसी जोड़ियाँ सही हैं?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

हल:- तीन समान भागों की जोड़ियाँ

$\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$

$AC = BD$ (दिया गया है)

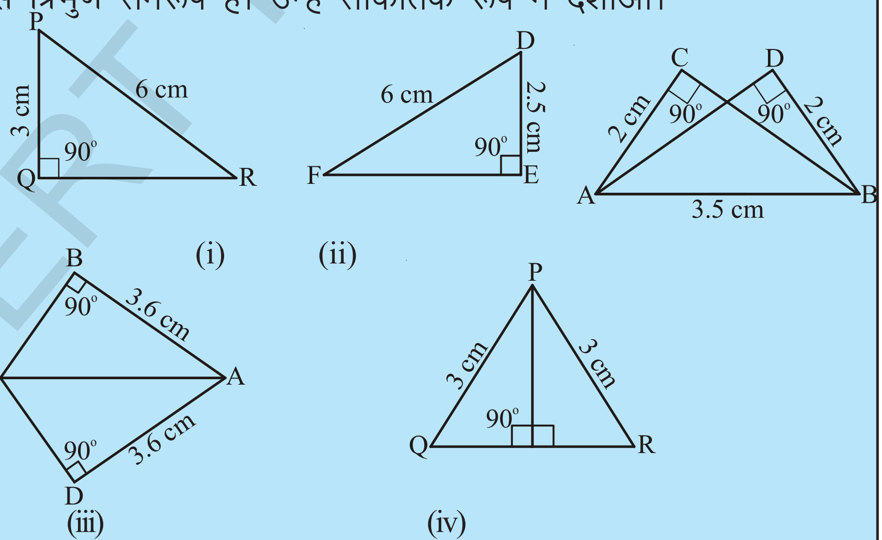
$AB = BA$ (उभयनिष्ट भुजा)

$\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (समकोण **कर्ण** भुजा नियम अनुसार).

ऊपर दी गई जानकारी से,
नियम (i) सत्य है।
नियम (ii) यह निरर्थक है। संलग्न चित्र में शीर्ष नियम संतुष्ट नहीं करता

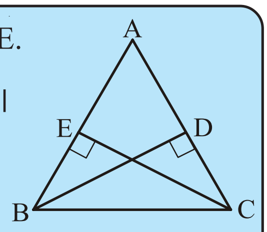
प्रयास कीजिए

1. नीचे दिए गए चित्रों में कुछ त्रिभुजों के माप दिये गये हैं। RHS नियम द्वारा कौन से त्रिभुज समरूप हैं। उन्हें सांकेतिक रूप में दर्शाओ।



2. RHS समरूपता नियम से $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ और कौनसी जानकारी की आवश्यकता है, **जब** दिया गया है **कि** $\angle B = \angle P = 90^\circ$ और $AB = RP$?

3. इस चित्र में, $\overline{BD}$ और $\overline{CE}$ लम्ब ΔABC जब कि $BD = CE$.

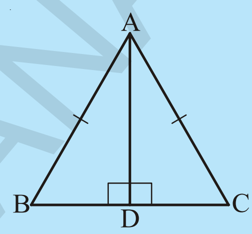


(i) ΔCBD और ΔBCE में तीन समान जोड़ियाँ हैं। बताओ।

(ii) क्या $\Delta CBD \cong \Delta BCE$? क्यों और क्यों नहीं?

(iii) क्या $\angle DBC = \angle EBC$? क्यों और क्यों नहीं?

4. ABC समद्विबाहु त्रिभुज है $\overline{AB} = \overline{AC}$ और $\overline{AD}$ एक लम्ब है, (चित्र से)



(i) ΔADB और ΔADC के समान भाग बताओ।

(ii) क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$? क्यों और क्यों नहीं??

(iii)क्या $\angle B \cong \angle C$? क्यों और क्यों नहीं??

(iv) क्या $BD \cong CD$? क्यों और क्यों नहीं??

अभ्यास - 4

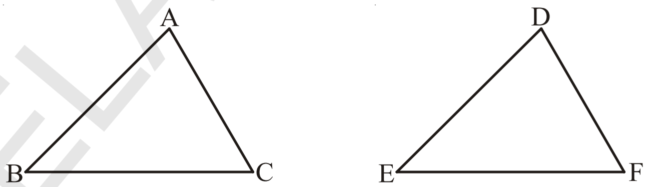
1. **निम्न में कौन-सी अनुरूपता का उपयोग करोगे?**

(i) दिया गया : $AC = DF$

$AB = DE$

$BC = EF$

इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

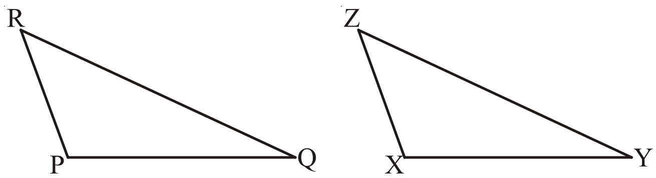


(ii) दिया गया : $ZX = RP$

$RQ = ZY$

$\angle PRQ \cong \angle XZY$

इसलिए, $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

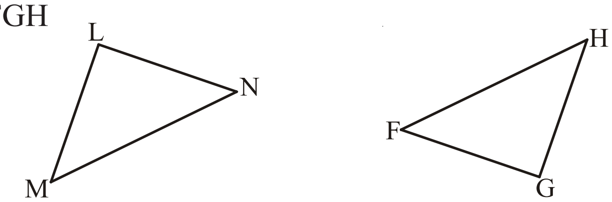


(iii) दिया गया : $\angle MLN \cong \angle FGH$

$\angle NML \cong \angle GFH$

$ML = FG$

इसलिए, $\Delta LMN \cong \Delta GFH$

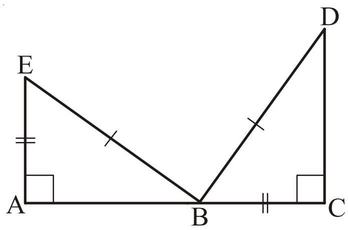


(iv) दिया गया : EB = DB

AE = BC

$\angle A = \angle C = 90^{o}$

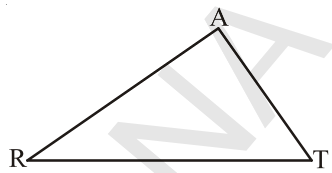
इसलिए, $\Delta ABE \cong \Delta CDB$



2. $\Delta ART \cong \Delta PEN$ क्या तुम इसे दर्शा सकते हो ?

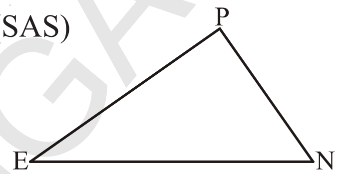
(i) भुजा-भुजा-भुजा (SSS) नियम के उपयोग से तुम्हें यह बताना होगा के

(a) AR = (b) RT = (c) AT =



(ii) दिया गया है $\angle T = \angle N$ तो तुम्हें भुजा–कोण–भुजा (SAS) नियम के उपयोग कर यह बताना होगा के

(a) RT = और (ii) PN =



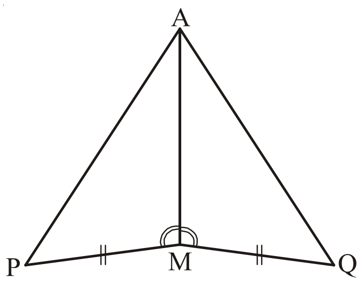
(iii) यदि यह दिया गया कि AT = PN तो तुम्हें कोण–भुजा–कोण (ASA) नियम के उपयोग द्वारा यह बताना होगा

(a) ? (b) ?

3. इसमें दर्शाना होगा $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$.

निम्न उत्पत्ति में कारण लिखो

चरण	कारण
(i) PM = QM	(i) ....
(ii) $\angle PMA \cong \angle QMA$	(ii) ....
(iii) AM = AM	(iii) ....
(iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$	(iv) ....

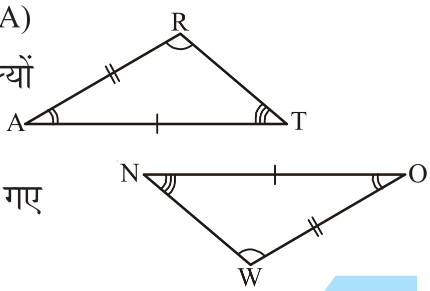


4. ΔABC, में $\angle A = 30^{o}$, $\angle B = 40^{o}$ और $\angle C = 110^{o}$

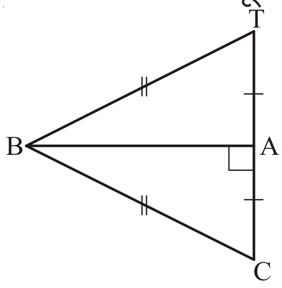
ΔPQR, में $\angle P = 30^{o}$, $\angle Q = 40^{o}$ और $\angle R = 110^{o}$

एक विद्यार्थी कहता है कि कोण–कोण–कोण (AAA) नियमानुसार $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ क्या यह सही है? क्यों और क्यों नहीं ?

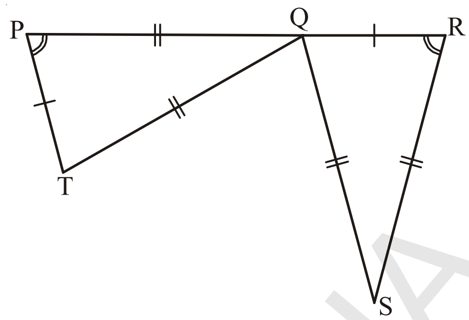
5. चित्र में दो त्रिभुज समरूप हैं। संलग्न भाग अंकित किए गए हैं। हम लिख सकते हैं कि $\Delta RAT \cong$?



6. समरूप नियम को पूर्ण करो।



$\Delta ABC \cong ?$



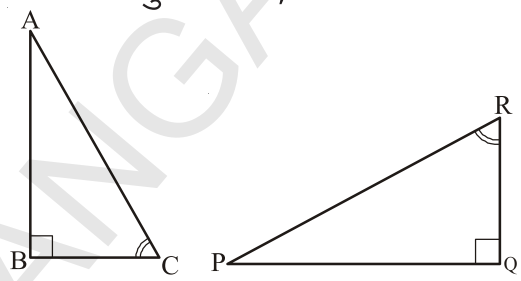
$\Delta QRS \cong ?$

7. एक वर्गाकार कागज पर दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुज उतारो, जिसमें

(i) त्रिभुज समरूप है।

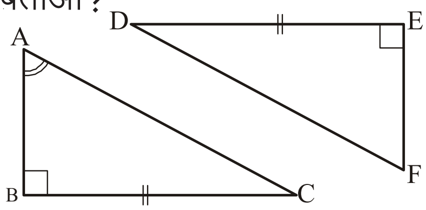
(ii) त्रिभुज समरूप नहीं हैं।

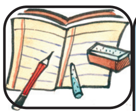
इनकी परिमिति के बारे में आप क्या कहोगे?



8. यदि ABC और PQR समरूप है तो एक संलग्न जोड़ी का नाम बताओ और किस नियम के अनुसार **आपने** ज्ञात किया है यह भी बताओ?

9. समझाओ? $\Delta ABC \cong \Delta FED$.





मुख्यांश

1. समरूप त्रिभुज समान आकार और समान प्रमाण के होते हैं।
2. त्रिभुजों की समरूपता जाँचने के लिए एक-दूसरे पर रखने **की पद्धति**।
3. दो रेखा खण्ड AB और CD समरूप होंगे जब उनकी लम्बाई समान हो। उसे $AB \cong CD$ लिख सकते है। जबकि, साधारणतः $AB = CD$.
4. यदि त्रिभुज के सभी भाग, दूसरे त्रिभुज के संलग्न भाग के समान हों, तो वे त्रिभुज एक-दूसरे के समरूप कहलायेंगे।

5. दो त्रिभुजों की समरूपता दर्शाने के लिए आवश्यक व संपूर्ण नियम इस प्रकार हैं–

(i) भुजा–भुजा–भुजा (SSS) नियम : **यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाअओं के समान हो, तो दोनों त्रिभुज अनुरूप होंगे।**

(ii) भुजा–कोण–भुजा (SAS) नियम : **यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ, उनसे बना कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनसे बने कोण के समान हों तो दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।**

(iii) कोण–भुजा–कोण (ASA) नियम : **यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और एक भुजा के समान हो तो दोनों त्रिभुज अनुरूप हैं।**

(iv) समकोण-कर्ण-भुजा (RHS) नियम : **यदि एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण के समान हो तब दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।**

त्रिभुजों की रचनाएँ

(CONSTRUCTION OF TRIANGLES)

9

9.0 परिचयः

इस अध्याय में आप त्रिभुजों की रचना के बारे में सीखेंगे। आपको सभी 6 तत्वों की आवश्यकता नहीं है जैसे कि तीन कोण और तीन भुजाएँ। त्रिभुज की रचना के लिए आपको केवल वही जानकारी चाहिए जिसमें दो त्रिभुज समरूप होते हैं। अर्थात त्रिभुज की रचनाओं के लिए निम्न परिस्थितियों की जानकारी **आवश्यक है।**

(i) त्रिभुज की तीनों भुजाएँ (भु.भु.भु.) (S.S.S.)

(ii) दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण (भु.को.भु.) (S.A.S.)

(iii) दो कोण और उनके बीचे की भुजा (को.भु.को.) (A.S.A.)

(iv) समकोण, कर्ण और संलग्न भुजा (स.क.भु.) (R.H.S.)

यदि त्रिभुज की दो भुजाएँ और कोई एक कोण दिया गया हो तो त्रिभुज की रचना कर सकते हैं। अर्थात त्रिभुजों की समरूपता को ध्यान में रख कर त्रिभुज को उतारना आवश्यक नहीं है।

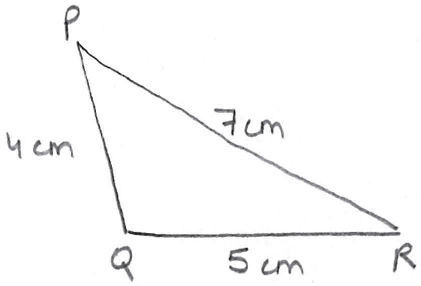
चलिए सभी चारों नियम के अनुसार त्रिभुजों की रचना करेंगे।

9.1 त्रिभुज की रचना जब तीनों भुजाओं का मापन दिया गया हो। (S.S.S.)

जब कभी ज्यामिति की रचना करना हो तो एक रफ स्केच पहले उतारना होगा। जो भुजाओं की पहचान कराता है। अर्थात हम पहले एक त्रिभुज उतारेंगे और उस नामांकित कर दिया गया मापन लिखेंगे।

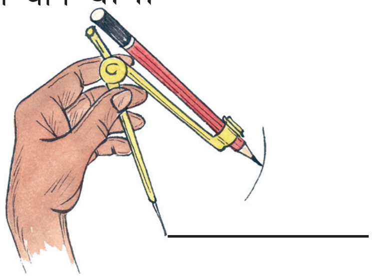
उदाहरण 1: ΔPQR **की रचना कीजिए इसमें** PQ = 4 सें.मी., QR = 5 सें.मी. और RP = 7 सें.मी.हो।

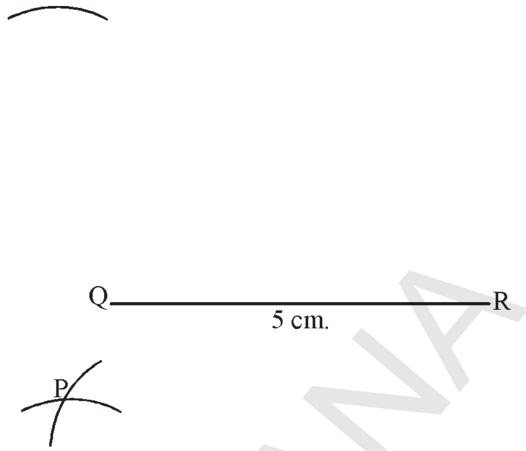
पद 1 : त्रिभुज का रफ चित्र उतार कर उसे नामांकित कर मापन लिखो।



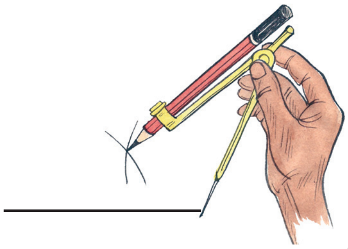
एक रेखा खंड QR खींचों जिसकी लंबाई 5 सें.मी. हो।

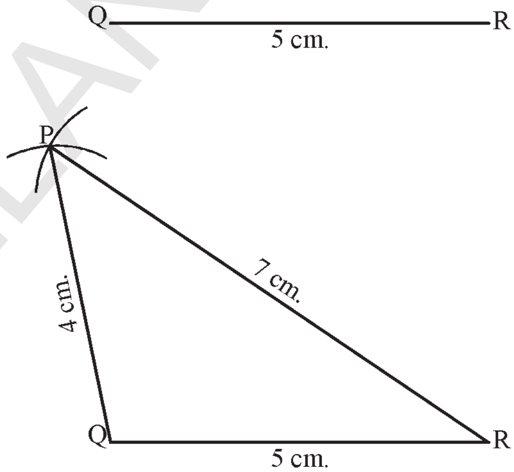
पद 3 : Q को केंद्र मानकर 4 सें.मी. अर्ध व्यास का चाप **खींचो**





पद 4 : बिंदु P, R से 7 सें.मी. दूरी पर **होने के कारण**,7 सें.मी. **का अर्धव्यास लेकर, R से दूसरा चाप खींचो जो पहले वालें चाप को P पर काटता है।**





पद 5 : Q,P और P,R. को मिलाओ। **अवश्यक** Δ PQR की रचना की गई।

इन्हें करिए

1. ऊपद दिये गये मापन द्वारा त्रिभुज की रचना करो। परंतु आधार लेकर।
2. Δ PET की रचना करो। जब की PE = 4.5 से.मी. ET = 5.4 सें.मी. और TP = 6.5 सें.मी. अपनी नोट बुक में उतारो और एक पेपर पर कि रचना करो। पेपर पर उतारे त्रिभुज को काट कर नोट बुक के त्रिभुज पर लगाओ दोनों त्रिभुज समरूप हैं। आपके उत्तर को गणितीय नियम के अनुसार लिखिए।

अभ्यास - 1

1. ΔABC की रचना करो। जबकि AB = 5.5 cm, BC = 6.5 cm और CA = 7.5 cm.

2. ΔNIB की रचना करो। जबकि NI = 5.6 cm, IB = 6 cm और BN = 6 cm. यह किस प्रकार क त्रिभुज है?

3. ΔAPE समबाहु की रचना करो जबकि भुजा = 6.5 cm.

4. ΔXYZ की रचना करो जबकि XY = 6 cm, YZ = 8 cmऔर ZX = 10 cm. प्रकार का उपयोग करके कोण X मालूम करो। यह किस प्रकार का त्रिभुज है?

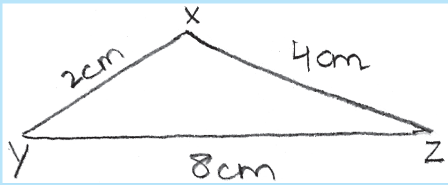
5. ΔABC की रचना करो जबकि AB = 4 cm, BC = 7 cm और CA= 3 cm. यह किस प्रकार का त्रिभुज है?

6. ΔPEN की रचना करो जबकी PE = 4cm EN=5 cm और NP=3 cm यदि त्रिभुज के भीतर वृत्त खींचें तो कितने संगामी बिन्दु होंगे? दिए गए परिमाण से कितने त्रिभुज बनेंगे? क्या यह सभी त्रिभुज में संभव होगा?

इसे करो:-

सुशांत एक प्रश्न बनाया: खींचो ΔXYZ जबकि XY = 2 cm, YZ = 8 cm और XZ = 4 cm.

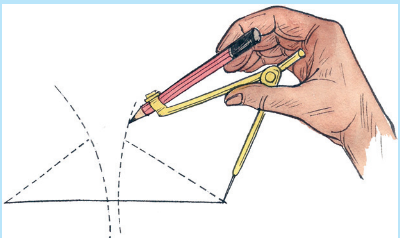
चित्र में बताए अनुसार रफ चित्र बनाए



श्रीजा ने प्रश्न पढ़कर सुशांत **से कहा कि** यह

संभव नहीं है **क्योंकि** इन मापन से त्रिभुज **नहीं** उतारे जा सकता है।

अब सुशांत इस चित्र को चित्र (2) के जैसा बनाना शरु किया।



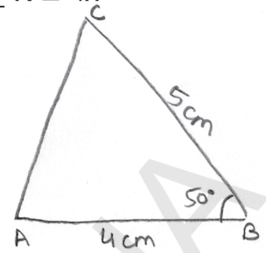
तुम यह देखो की **क्या** सुशांत चित्र बना सकता है? यदि नहीं तो क्यों?

श्रीजा ने कौनसा गुण अपनाया अपने मित्र से इसकी चर्चा करो।

9.2 त्रिभुज की रचना करो जबकि दो भुजाएँ और एक कोण दिया गया हो। (भु.को.भु.) (S.A.S.)

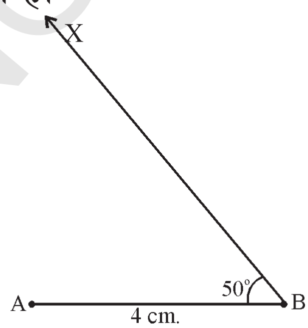
उदा 2: त्रिभुज की रचना करो जबकि AB = 4 cm, BC = 5cm and $\angle B = 50°$

चरण 1 : त्रिभुज का रफ चित्र उतारकर दिये गये मापन लिखो।

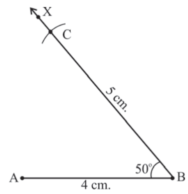


चरण 2 : एक 4 cm का रेखाखण्ड AB खीचो.

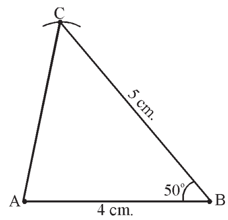
चरण 3 : B से किरण $\overrightarrow{BX}$ उतारो जो AB से 50° का कोण बनाती है।



चरण 4 : 5 cm अर्धव्यास वाले चाप को $\overrightarrow{BX}$ पर B से एक चाप खींचों जो को C पर D काटे।



चरण 5 : C, A को मिलाओ। इस प्रकार Δ ABC प्राप्त होगा।



अभ्यास - 2

1. ΔCAR की रचना करो जबकि CA = 8 cm, $\angle$A = 60° और AR = 8 cm. CR, $\angle$R और $\angle$C. को मापो यह किस प्रकार का त्रिभुज है?

2. ΔABC की रचना करो जबकि AB = 5 cm, $\angle$B = 45° और BC = 6 cm.

3. ΔPQR की रचना करो जब कि $\angle$R=100°, QR = RP = 5.4 cm.

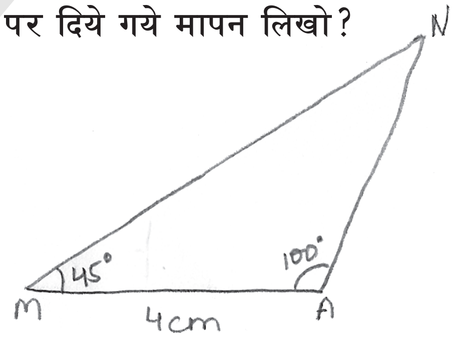
4. ΔTEN की रचना करो जब कि TE = 3 cm, $\angle$E = 90° और NE = 4 cm.

9.3 त्रिभुज की रचना करो जबकि दो कोण और उनके मध्य की भुजा दी गई हो।

उदा 3

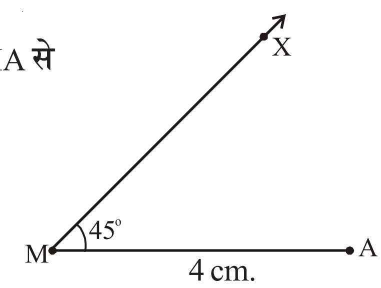
ΔMAN की *रचना करो जबकि* MA = 4 cm, $\angle$M = 45° and $\angle$A = 100°.

चरण 1 : त्रिभुज का एक चित्र उतारकर उस पर दिये गये मापन लिखो?

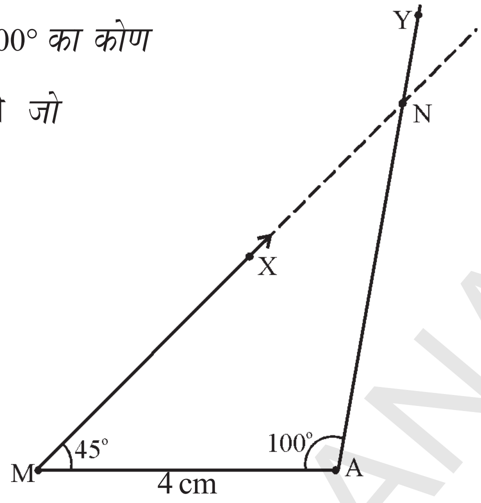


चरण 2 : एक रेखा खण्ड MA =4 cm. खींचो।

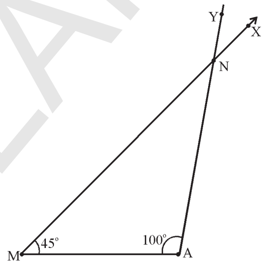
चरण 3 : M से किरण $\overline{MX}$ उतारो जो MA से 45° का कोण बनाती है।



चरण 4 : किरण $\overrightarrow{AY}$ **खींचो जिससे** A *पर* 100° *का कोण* बनें। $\overrightarrow{MX}$ को आगे तक बढाओ *जो* किरण $\overrightarrow{AY}$ **को** N *पर काटता है।*

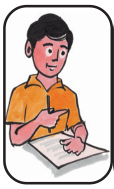


sरण 5 : दो किरणों *का* प्रतिछेदक बिन्दु को N से सूचित करो । Δ MAN अभीष्ट त्रिभुज होगा।



4 cm

यह कीजिये



त्रिभुज की रचना करो जिसके कोण 105^0 और 95^0 हो और भुजा अपनी मर्जी की हो। क्या तुम इस प्रकार त्रभुज बनापाओगे इसकी चर्चा करो।

अभ्यास - 3

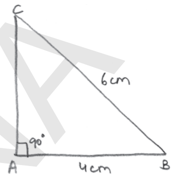
1. Δ NET की रचना करो जिसके माप NE = 6.4 cm, $\angle N = 50°$ and $\angle E = 100°$.
2. Δ PQR की रचना करो जब कि QR = 6 cm, $\angle Q = \angle R = 60°$. अन्य दो भुजाओं को मापो और उस त्रिभुज को नाम दो।
3. Δ RUN की रचना करो जब कि RN = 5cm, $\angle R = \angle N = 45°$. अन्य दो कोण और

भुजाओं को मापो त्रिभुज को नाम दो।

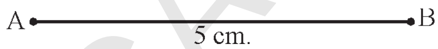
9.4 समकोण त्रिभुज की रचना करना जब कि कर्ण और एक भुजा दी गयी हो।

उदा 4 : Δ ABC की रचना करो **जिसमें समकोण** A **पर है।** और BC = 6 cm; AB = 5 cm.

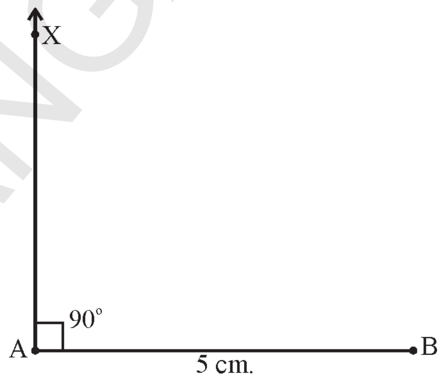
चरण 1 : **समकोण त्रिभुज का चित्र उतारकर दिये गये माप लिखिये।**



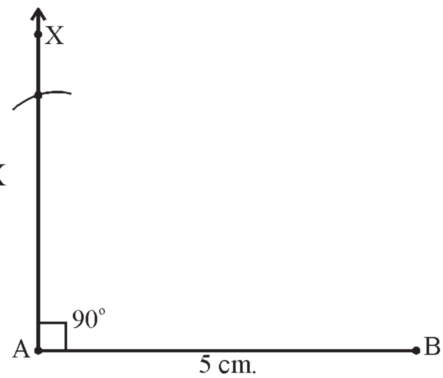
सूचना:समकोण के सामने की भुजा कर्ण कहलाती है।



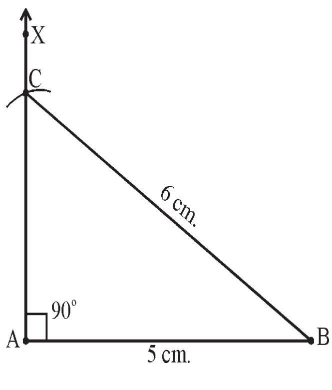
चरण 2 : **एक** रेखाखण्ड AB = 5 **से.मी.** की खींचो।



चरण 3 : *AB के लंबवत किरण* $\overrightarrow{AX}$ *उतारो।*



चरण4 : B बिन्दु से एक चाप 6 cm **का** खींचो जो AX को C पर काटे



चरण 5 : B से C मिलाओ इस प्रकार अभिष्ट त्रिभुज Δ ABC प्राप्त होगा।

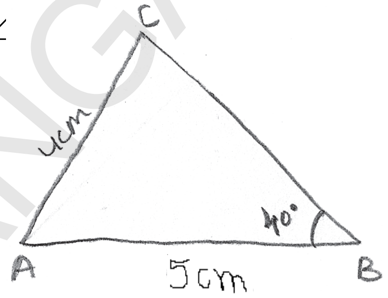
अभ्यास - 4

1. ABC समकोण त्रिभुज की रचना करो जबकि $\angle B = 90°$, AB = 8 cm और AC = 10 cm.
2. PQR की रचना करो जबकि R पर समकोण कर्ण 5cm और एक संलग्न भुजा 4cm है।
3. समकोण समद्विबाहु ΔXYZ की रचना करो जब कि $\angle Y = 90°$ और दो भुजाएँ प्रत्येक 5 cm की हो।

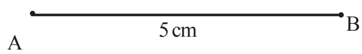
9.5 त्रिभुज की रचना करो जबकि दो भुजाएँ और असंलग्न भुजा है दी गयी हो।

उदा 5 : ABC की रचना करो जबकि AB=5cm, AC=4cm, $\angle$

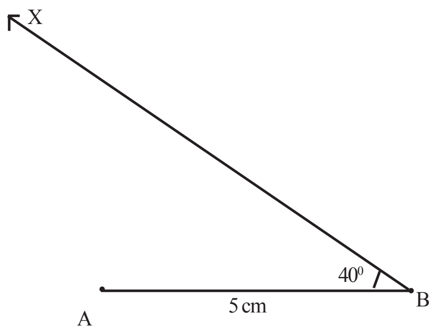
चरण 1 : ΔABC का एक रफ चित्र उतार कर उस पर दिये गये माप लिखो।



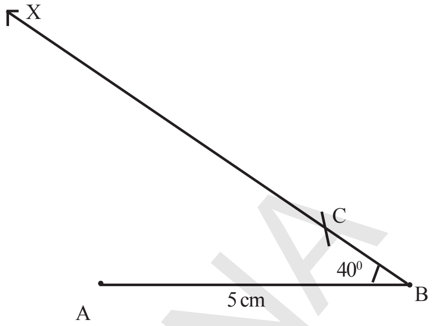
चरण 2 : 5cm का एक रेखाखण्ड खींचो।



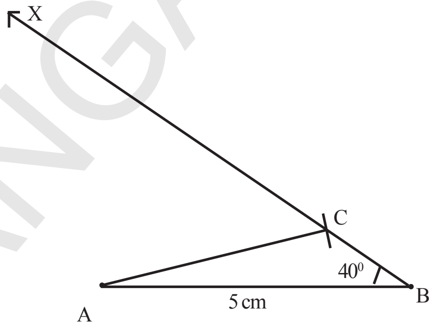
चरण 3 : *B से एक किरण BX उतारो जो AB से 40^0 का कोण बनाती है।*



चरण 4 : केन्द्र A से 4 cm का अर्धव्यास लेकर एक चाप खींचों जो BX को C पर काटे



चरण 5 : प्रतिछेदित बिन्दु को C नाम दो और CA को मिलाओ इस प्रकार अभिष्ट त्रिभुज ABC बने।

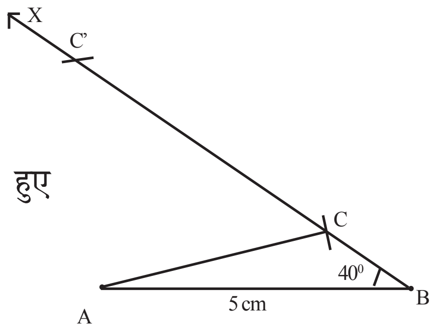


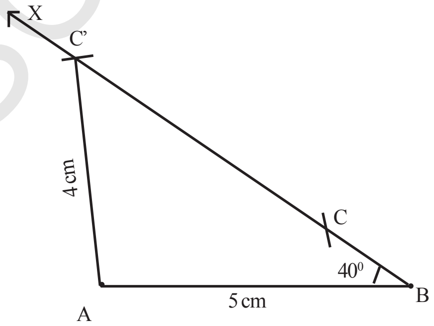
क्या तुम BX किरण को किसी *और* बिन्दु पर काट पाओगे?

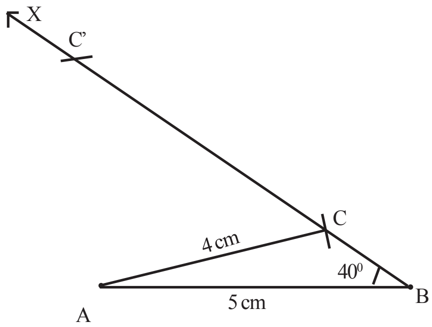
तुम देखोगे कि $\angle B$ न्यून कोण है।

4 cm का अर्धव्यास ले कर किरण $\overrightarrow{BX}$ को दुबारा काटो

नीचे दिए गए अनुसार इस प्रकार हमें दो त्रिभुज प्राप्त हुए







यह कीजिए

अपनी मर्जी के कोई दो भुजायें और एक अधिक कोण (जो इन भुजाओं के बीच न हो) लेकर त्रिभुज की रचना कीजिये। क्या आप इस प्रकार के दो त्रिभुज बना पाओगे?

अभ्यास - 5

1. ABC की रचना करो जब कि AB=4.5 cm AC =4.5 cm और $\angle B=50^0$ बताओ कि **क्या** दो त्रिभुज बनेंगे?

2. XYZ की रचना करो जबकि XY = 4.5 cm XZ=3.5cm और Y=70^0 बताओ कि उससे दो त्रिभुज बनेंगे।

3. ANR की रचना करो जबकि AN **और** AR **भुजा** की लम्बाइ 5cm और 6cm है। $\angle N=100^0$ बताओ कि **क्या** दो त्रिभुज बनेंगे?

4. PQR की रचना करो जबकि QR=5.5cm QP=5.5cm और $\angle Q=60^0$ RP को मापो और बताओ कि यह कैसा त्रिभुज है।

5. निम्न तालिका द्वारा त्रिभुज की रचना करो।

त्रिभुज	माप परिमाप
Δ ABC	BC = 6.5 cm, CA = 6.3 cm, AB = 4.8 cm.
Δ PQR	PQ = 8 cm, QR = 7.5 cm, $\angle$PQR = 85°
Δ XYZ	XY = 6.2 cm, $\angle$Y = 130°, $\angle$ Z = 70°
Δ ABC	AB = 4.8 cm, AC = 4.8 cm, $\angle$B = 35°
Δ MNP	$\angle$N = 90°, MP = 11.4 cm., MN = 7.3 cm.
Δ RKS	RK = KS = SR = 6.6 cm.
Δ PTR	$\angle$P = 65°, PT = PR = 5.7 cm.

मुख्यांश

एक त्रिभुज की रचना की जा सकती है यदि,

(i) त्रिभुज की तीनों भुजा दी गई हो।

(ii) दो भुजा और एक कोण।

(iii) दो कोण और एक भुजा।

(iv) कर्ण समकोण और भुजा।

बीजीय व्यंजक
(ALGEBRAIC EXPRESSIONS)

10

10.0 परिचय-

छठवीं कक्षा में आप पढ़ चुके हैं कि चर राशि के विभिन्न मूल्य और अचर राशियों के मूल्य समान रहते हैं। आप यह भी पढ़ चुके **है** कि चर राशि और अचर राशि x,y,z,a,b,p,m आदि द्वारा दर्शाते हैं। साधारण बीजीय व्यंजक $2x - 3$ के बारे में आप जान चुके हैं। आप यह भी जान चुके हैं कि किस प्रकार बीजीय व्यंजकों का उपयोग सूत्र स्थापित करने और मूल्य ज्ञात करने के लिए होता है।

इस अध्याय में हम बीजीय व्यंजक और किसी चर राशि के बहुपदों को जोड़ने , घटाने के बारे में पढ़ेंगे। इसी प्रकार हम पद, सजातीय पद, विजातिय पद और बहुपदी के बारे में **मालूम करेंगे**।

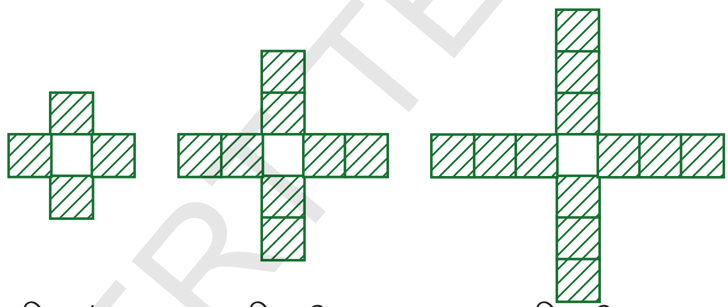
सबसे पहले हम छठवीं कक्षा में क्या पढ़े हैं, इसे दोहराएँगें।

अभ्यास - 1

1) निम्न आकार बनाने के लिए कितनी दियासलाई की तीलियाँ चाहिए।

1) H आकार 2) V आकार

2) नीचे रंगीन टाइल्स और सफेद टाइल्स के नमूने दिए गए हैं।



चित्र 1 चित्र 2 चित्र 3

ऊपर बताये गये चित्र के अनुसार और दो चित्र उतारो।

नीचे दी गई तालिका बीजीय व्यंजकों द्वारा पूर्ण करो -

चित्र संख्या	1	2	3	4	5
कुल टाइल्स की संख्या					

3) दिए गए पदों को चर राशि, अचर राशि और अंकगणित क्रियाओं (arithmetic operation) में व्यक्त करो -

i) 6 ज्यादा है p से

ii) 4 में से x घटाने पर

iii) y में से 8 घटाने पर

iv) - 5 से q गुणा करने पर

v) y को 4 से भाग करने पर

vi) p और q के गुणनफल का एक चौथाई भाग

vii) 5 को z के तीन गुणा से जोड़ने पर

viii) x को 5 से गुणा कर उसमें 10 जोड़ने पर

x) 5 को y के दोगुणा से घटाने पर

xi) 10 को y से गुणा करके 13 जोडने पर

4) निम्नलिखित व्यंजक कथन के रूप में लिखो।

(i)	$x + 3$	(ii)	$y - 7$	(iii)	$10L$
(iv)	$\frac{x}{5}$	(v)	$3m + 11$	(vi)	$2y - 5$

5) नीचे कुछ घटनाएँ दी गई हैं, इनमें से चर या अचर कौनसी हैं– -

उदाहरण - अपनी आयु या मूल्य बदलते रहता है। यह चर राशि का उदाहरण है।

1) जनवरी माह में दिनों की संख्या

2) दिन का तापक्रम

3) तुम्हारे कक्षा की लंबाई

4) बढ़ने वाले पौधों की ऊंचाई।

10.1 बीजीय पद, अंकीय (numeric) पद

व्यंजक $2x + 9$ पर ध्यान दो

यहाँ x को दो से गुणा करके उसमें 9 जोड़ा गया है। $2x$ और 9 दोनों पद बीजीय पद हैं। $2x+9$ में $2x$ बीजीय व्यंजक और 9 अंकीय पद कहलाता है।

दूसरा व्यंजक - $3x^2 - 11y$ पर ध्यान दो ।

3 को x और x से गुणा करने पर $3x^2$ प्राप्त हुआ।

11 और y का गु.फ $11y$ है। $3x^2$ से $11y$ को घटाने पर $3x^2 - 11y$ प्राप्त होता है।

$3x^2 - 11y$ व्यंजक में $3x^2$ एक पद है और $11y$ दूसरा पद है।

जब हम x को x से गुणा करते हैं तो उसे x^2 लिखते हैं।

इसी प्रकार 4 गुणा 4 को 4^2 लिखते हैं, उसी प्रकार x को तीन बार गुणा करने पर x^3 लिखते हैं। इसी प्रकार $6 \times 6 \times 6$ को 6^3 लिखते हैं।

यह करो -

इन व्यंजको में पदों को पहचानो -

(i) $5x^2 + 3y + 7$ (ii) $5x^2y + 3$ (iii) $3x^2y$

(iv) $5x - 7$ (v) $5x + 8 - 2(-y)$ (vi) $7x^2 - 2x$

10.1.1 सजातीय और विजातीय पद (Like and Unlike Terms)

निम्न पर ध्यान दो

(i) $5x$ और $8x$ (ii) $7a^2$ और $14a^2$

(iii) $3xy$ और $4xy$ (iv) $3xy^2$ और $4x^2y$

पहले उदाहरण में, दोनों पद के समान चर राशि हैं। उदा- के लिए x और चर राशि का घातांक समान है। जबकि दूसरे उदाहरण में दोनों पद समान चर राशि है, a और चर राशि का घातांक 2 समान है

तीसरे उदाहरण में दोनों पद समान चर राशि वाले हैं। जैसे x और y और उनके घातांक की चर राशि, x की 1 और y चर राशि का घातांक 1 है।

चौथे उदाहरण में दोनों पद के समान चर राशि x और y **को** उनके घातांक समान नहीं हैं, पहले पद में उनका घातांक 1 है और दूसरे का 2 है। उसी प्रकार पहले पद y का घातांक 2 है और दूसरे पद में y का घातांक 1 है।

प्रथम तीन पदों की जोड़ी सजातीय पद हैं और चौथी जोड़ी विजातीय पद हैं।

समान पद वह पद है जिसमें समान चर राशि और समान घातांक रहते है।

यह करो -

सजातीय पदों को एकत्रित करो।

$12x, 12, 25x, -25, 25y, 1, x, 12y, y, 25xy, 5x^2y, 7xy^2, 2xy, 3xy^2, 4x^2y$

2. सत्य या असत्य- बताओ, उनके कारण बताओ।

(i) $7x^2$ और $2x$ विजातीय पद है।

(ii) pq^2 और $-4pq^2$ सजातीय पद है।

(iii) xy, $-12x^2y$ और $5xy^2$ सजातीय पद है।

10.2 गुणक (Co-efficient)

9 xy में ; '9' गुणक है 'xy' का अतः $9(xy) = 9xy$

'x' गुणक है '9y' का अतः $x(9y) = 9xy$

'y' गुणक है '9x' का अतः $y(9x) = 9xy$

'9x' गुणक है 'y' का अतः $9x(y) = 9xy$

9y गुणक है 'x' का अतः $9y(x) = 9xy$

xy गुणक है '9' का अतः $xy(9) = 9xy$

क्योंकि 9 एक अंकीय संख्या है इसलिए यह अंकीय गुणक कहलाता है.
इसी प्रकार x, y संख्याओं के **अक्षर** मान हैं x, y ये चर राशि हैं।
उसी प्रकार '-5x', में '–5' अंकीय गुणक एवं x **अक्षर** गुणक है।

यह कीजिये

(i) 'x' का अंकीय गुणक क्या है?

(ii) '–y' का अंकीय गुणक क्या है?

(iii) '–3z' में **अक्षर** गुणक क्या है?

(iv) क्या अंकीय गुणक अचर रहता है?

(v) क्या **अक्षर** गुणक कभी भी चर राशि ही रहता है?

10.3 व्यंजक (Expressions)

व्यंजक, एक पद या दो पद जिसमें धन (+) या ऋण (-) रहते हैं।

उदाहरण: $6x + 3y$, $3x^2 + 2x + y$, $10y^3 + 7y + 3$, $9a + 5$, $5a + 7b$, $9xy$, $5 + 7 - 2x$, $9 + 3 - 2$

सूचना : गुणा '×' और भाग '÷' दो अलग पद नहीं है उदा : $2x \times 3y$ and $\frac{2x}{3y}$ एक ही पद है।

करो -

1. इस व्यंजक में कितने पद हैं?

(i) $x + y$ (ii) $11x - 3y - 5$ (iii) $6x^2 + 5x - 4$

(iv) $x^2z + 3$ (v) $5x^2y$ (vi) $x + 3 + y$

(vii) $x - \frac{11}{3}$ (viii) $\frac{3x}{7y}$ (ix) $2z - y$ (x) $3x + 5$

10.3.1 अंकीय एवं बीजीय व्यंजक (Numerial and algebraic expressions)

निम्न उदाहरण को देखो।

(i) $1 + 2 - 9$ (ii) $-3 - 5$ (iii) $x - \frac{11}{3}$ (iv) $4y$

(v) $9 + (6-5)$ (vi) $3x + 5$ (vii) $(17-5) + 4$ (viii) $2x - y$

उदाहरण - i, ii, v, vii में क्या कोई बीजीय पद है?

यदि व्यंजक का प्रत्येक पद अचर पद है तो उसे सांख्यिक व्यंजक कहते है। वह व्यंजन जिसमें कम से कम एक बीजीय पद हो बीजीय व्यंजक कहलाता है।

ऊपर के उदाहरण में कौन से बीजीय व्यंजक हैं?

प्रयास करो .

तीन पदों के साथ तीन बीजीय व्यंजक लिखो।

आर्यभट्ट (भारत)

सन् 475-550ई.

इन्होंने 499 ईसवी **में** आर्यभाटिया नामक ज्योतिषशास्त्र लिखा। बीजीय व्यंजकों का प्रयोग करनेवाले ये प्रथम भारतीय थे। इन्हीं के नाम पर भारत के प्रथम उपग्रह का नाम आर्यभट्ट रखा गया।

10.3.2 बीजीय व्यंजकों के प्रकार (Types of Algebraic expressions)

किसी व्यंजक में पदों की संख्या के आधार पर बीजीय व्यंजक रहता है।

पदों की संख्या	व्यंजक का नाम	उदाहरण
एक पद	एक पदीय	(a) x (b) $7xyz$ (c) $3x^2y$ (d) qz^2
दो विजातीय पद	द्विपदी	(a) $a + 4x$ (b) $x^2 + 2y$ (c) $3x^2 - y^2$
तीन विजातीय पद	त्रिपदी	(a) $ax^2 + 4x + 2$ (b) $7x^2 + 9y^2 + 10z^3$
एक से **अधिक** विजातीय पद	बहुपदी	(a) $4x^2 + 2xy + cx + d$ (b) $9p^2 - 11q + 19r + t$

नोट - द्विपद, त्रिपदी भी बहुपदीय बीजीय व्यंजक हैं।

इसे कीजिए।

1. प्रत्येक प्रकार के दो बीजीय व्यंजक के उदाहरण दो।
2. नीचे दिए गए व्यंजन में एक पदी, द्विपदी, त्रिपदी, बहुपदी पहचानो -

   (i) $5x^2 + y + 6$ (ii) $3xy$

   (iii) $5x^2y + 6x$ (iv) $a + 4x - xy + xyz$

10.4 बीजीय व्यंजकों का वर्गीकरण (Degree of algebraic expressions)

बीजीय व्यंजकों के वर्गीकरण के बारे में जानने से पहले यह मालूम करना है कि एक पदी क्या है ?

10.4.1 एक पदी का घातांक (Degree of Monomial)

$9x^2y^2$ में

1. 'x' का घातांक क्या है ?
2. 'y' का घातांक क्या है ?
3. दोनों घातांक का योग कितना है?

चर राशियों के घातांको का योगफल एक पदी में विद्यमान हो तो उसे पद का घातांक या एक पदी का घातांक कहते है ।

इस तालिका को देखे -

क्र सं	एक पदी	घातांक			एक पदी का घातांक
x	y	z			
1	x	1	-	-	1
2	$7x^2$	2	-	-	2
3	-3xyz	1	1	1	1 + 1 + 1 = 3
4	$8y^2z^2$	-	2	2	2 + 2 = 4

10.4.2 अचर राशि का घातांक (Degree of Constant terms)

मान लो अचर पद 5 के बारे में देखेंगे।
$x^o = 1$, इस प्रकार भी लिख सकते हैं– 5 को $5x^o$ भी लिख सकते हैं। अचर पद शून्य रहता है।

10.4.3 बीजीय व्यंजक का घातांक

इस तालिका को देखे -

क्र. सं	बीजीय व्यंजक	प्रत्येक पद के घातांक				व्यंजक का घातांक
1.	$7xy^2$	3	-	-	-	3
2	$3y - x^2y^2$	1	4	-	-	4
3	$4x^2 + 3xyz + y$	2	3	1	-	3
4	$pq - 6p^2q^2 - p^2q + 9$	2	4	3	0	4

दूसरे उदाहरण में सबसे अधिकतम घातांक 4 है, इसलिए व्यंजक का घातांक 4 है। उसी प्रकार तीसरे व्यंजक का घातांक 3 है। चौथे व्यंजक का घातांक 4 है।

व्यंजक के पदों के घातांको में सबसे बड़े घातांक को व्यंजक का घातांक कहते है।

अभ्यास - 2

1. सजातीय पद पहचान कर लिखो -

   (i) $a^2, b^2, -2a^2, c^2, 4a$ (ii) $3a, 4xy, -yz, 2zy$

   (iii) $-2xy^2, x^2y, 5y^2x, x^2z$ (iv) $7p, 8pq, -5pq, -2p, 3p$

2. बताओ कि निम्न व्यंजन अंकीय व्यंजन है या बीजीय।

   (i) $x + 1$ (ii) $3m^2$ (iii) $-30 + 16$

   (iv) $4p^2-5q^2$ (v) 96 (vi) x^2-5yz

   (vii) $215x^2yz$ (viii) $95 \div 5 \times 2$ (ix) $2 + m + n$

   (x) $310 + 15 + 62$ (xi) $11a^2+6b^2-5$

3. बताओं कि निम्न व्यंजन एक पदी, द्विपदी, त्रिपदी या बहुपदी है।

   (i) y^2 (ii) $4y - 7z$ (iii) $1 + x + x^2$

   (iv) $7mn$ (v) $a^2 + b^2$ (vi) 100

   (vii) $ax + 9$ (viii) $p^2 - 3pq + r$ (ix) $3y^2 - x^2y^2 + 4x$

   (x) $7x^2 - 2xy + 9y^2 - 11$

4. प्रत्येक एक पदी का घातांक लिखो.

   (i) $7y$ (ii) $-xy^2$ (iii) xy^2z^2

   (iv) $-11y^2z^2$ (v) $3mn$ (vi) $-5pq^2$

5. प्रत्येक बीजीय व्यंजकों का घातांक ज्ञात करो।

   (i) $3x-15$ (ii) $xy + yz$ (iii) $2y^2z + 9yz - 7z - 11x^2y^2$

   (iv) $2y^2z + 10yz$ (v) $pq + p^2q - p^2q^2$ (vi) $ax^2 + bx + c$

6. कोई दो बीजीय व्यंजक समान घातांक वाले लिखो -

10.5 सजातीय पदों का जोड़ और घटान

निम्न प्रश्न पर ध्यान दो

1. विनय के पास जितनी पेंसिलें हैं उसकी चारगुणा पेंसिलें सिद्धू के पास हैं। तो दोनों के पास कुल कितनी पेंसिलें हैं?

2. टॉनी और बाशा एक दुकान को जाते हैं, टॉनी 7 पुस्तक और बाशा 2 पुस्तक खरीदते हैं, सभी पुस्तकों के दाम एक ही हैं, तो टॉनी ने बाशा से कितने ज्यादा पैसे खर्च किए?

इस प्रकार के प्रश्न हल करने के लिए यह मालूम होना चाहिए कि सजातीय पदों को कैसे जोड़ा या घटाया जाये। आइए इसे सीखें-

1. सिद्धू के पास कितनी पेंसिलें हैं, प्रश्न में नहीं दिया गया है। अतः मान लो कि x पेंसिल है, विनय के पास सिध्दू से 4 गुणा अधिक पेंसिलें हैं– $4 \times x = 4x$

कुल पेंसिलों का योग मालूम करने के लिए x और $4x$ को जोड़ना होगा।

इसलिए कुल पेंसिल $= x + 4x = (1 + 4)\ x = 5x$ (बंटन नियम द्वारा)

2. प्रत्येक पुस्तक का मूल्य नहीं दिया गया, मान लो इसे y लेंगे, इसलिए टॉनी

$7 \times y =$ रु.$7y$ खर्च किए।

बाशा ने $2 \times y =$ रु.$2y$ खर्च किए

टॉनी ने कितने रूपये ज्यादा खर्च किए यह मालूम करने के लिए $2y$ को $7y$ में से घटाना होगा।

इसलिए खर्च किए गए अधिक रुपये $= 7y - 2y = (7-2)y =$ रु.$5y$ (बंटन नियम द्वारा)

इससे यह मालूम होता है कि **दो या दो से अधिक सजातीय पदों का योग उनके अंक गुणकों के योग के समान रहता है।**

"दो या दो से अधिक सजातीय पदों का अंतर उनके अंकीय गुणकों गुणकों के अंतर के समान होता है।"

यह करो

1. सजातीय पद जोडो-

(i)	$5x, 7x$	(ii)	$7x^2y, -6x^2y$	(iii)	$2m, 11m$
(iv)	$18ab, 5ab, 12ab$	(v)	$3x^2, -7x^2, 8x^2$	(vi)	$4m^2, 3m^2, -6m^2, m^2$
(vii)	$18pq, -15pq, 3pq$				

2. प्रथम पद को दूसरे पद में से घटाओ -

(i)	$2xy, 7xy$	(ii)	$5a^2, 10a^2$	(iii)	$12y, 3y$
(iv)	$6x^2y, 4x^2y$	(v)	$6xy, -12xy$		

10.5.1 विजातीय पदों का जोड़ और घटान

$3x$ और $4y$ विजातीय पद है उनका योग $3x + 4y$ इस प्रकार लिख सकते है। जबकि x और y विभिन्न चर राशियाँ हैं। इसके लिए बंटन नियम लागू नहीं किया जा सकता। न ही इसे जोड़ सकते हैं।

10.6 बीजीय व्यंजकों को सरल करो (Simplification)

इस व्यंजक में $9x^2 - 4xy + 5y^2 + 2xy - y^2 - 3x^2 - 6xy$

इस व्यंजक में कुछ सजातीय पद हैं, वे $9x^2$ और $-3x^2$; $5y^2$ और y^2 और $2xy$ और $-6xy$.

सजातीय पदों को जोड़ने पर बीजीय व्यंजक प्राप्त होता है।

अब यह देखेंगे कि यह व्यंजक किस प्रकार सरल हुआ-

क्र.सं	चरण	हल करने की विधि
1.	व्यंजक लिखो	$9x^2 - 4xy + 5y^2 + 2xy - y^2 - 3x^2 + 6xy$
2.	सजातीय पदों की जोडी बनाओ	$(9x^2 - 3x^2) + (2xy - 4xy + 6xy) + (5y^2 - y^2)$
3.	सजातीय पद जोड़ो	$(9-3)x^2 + (2-4+6)xy + (5-1)y^2 = 6x^2 + 4xy + 4y^2$

नोट - यदि व्यंजक में दो पद असमान हो तो उसका सरल रूप

दूसरे उदाहरण में $5x^2y + 2x^2y + 4 + 5xy^2 - 4x^2y - xy^2 - 9$

चरण 1 : $5x^2y + 2x^2y + 4 + 5xy^2 - 4x^2y - xy^2 - 9$

चरण 2: $(5x^2y + 2x^2y - 4x^2y) + (5xy^2 - xy^2) + (4-9)$ सजातीय पदों को एकत्रित करो

चरण 3 : $3x^2y + 4xy^2 - 5$

इसे करो -

1. हल करो -

(i) $3m + 12m - 5m$ (ii) $25yz - 8yz - 6yz$

(iii) $10m^2 - 9m + 7m - 3m^2 - 5m - 8$ (iv) $9x^2 - 6 + 4x + 11 - 6x^2 - 2x + 3x^2 - 2$

(v) $3a^2 - 4a^2b + 7a^2 - b^2 - ab$ **(vi)** $5x^2 + 10 + 6x + 4 + 5x + 3x^2 + 8$

10.7 व्यंजक का मानक रूप (Standard form of an expression)

$3x + 5x^2 - 9$. इस व्यंजक में प्रथम, द्वितीय, तृतीय, पदों के घातांक 1, 2 और 0 है, तो पदों के घातांक अवरोहण में नहीं हैं।

तो इन पदों को इस प्रकार व्यवस्थित करो कि उनके घातांक अवरोहण क्रम में है अब हमें व्यंजक $5x^2 + 3x - 9$ प्राप्त हुआ।

अब $3c + 6a - 2b$ में सभी घातांक समान है, तो दिया हुआ व्यंजक मानक रूप में है, इसे हम $6a - 2b + 3c$ के रूप में लिख सकते है।

इन व्यंजनों में पदो को व्यवस्थित रूप में लिखने पर अर्थात घातांक अवरोहण क्रम रखने पर यह सुंदर दिखेगा। यह व्यंजकों का मानक रूप भी है।

मानक रूप में व्यंजकों का उदारहण

(i) $7x^2+2x+11$ (ii) $5y^2-6y-9$

यह कीजिये

1. निम्न व्यंजक मानक रूप में लिखो

(i) $3x+18+4x^2$ (ii) $8-3x^2+4x$

(iii) $-2m+6-3m^2$ (iv) $y^3+1+y+3y^2$

2. निम्न में कौनसे मानक रूप में है,

(i) $9x^2+6x+8$ (ii) $9x^2+15+7x$

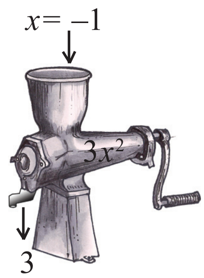
(iii) $9x^2+7$ (iv) $9x^3+15x+3$

(v) $15x^2+x^3+3x$ (vi) $x^2y+xy+3$

(vii) $x^3+x^2y^2+6xy$

3. किन्हीं पाँच व्यंजकों को मानक रूप में लिखिए।

10.8 व्यंजक का मूल्य ज्ञात करना।



उदाहरण 1: $3x^2$ का मूल्य ज्ञात करो, यदि $x=-1$

हल : चरण 1: $3x^2$ (व्यंजक लिखो)

चरण 2 : $3(-1)^2$ (व्यंजक का मूल्य रखो)

चरण 3 : $3(1)=3$

उदाहरण 2 : x^2-y+2 का मूल्य ज्ञात करो जबकि यदि $x=0$ और $y=-1$

हल : चरण 1 : x^2-y+2 (व्यंजक लिखो)

चरण 2 : $0^2-(-1)+2$ (चर राशि में मूल्य रखो)

चरण 3 : $1+2=3$

उदाहरण 3 : एक त्रिभुज का क्षे.फ. $A=\frac{1}{2}bh$. दिया गया है। यदि $b=12$ से.मी. और $h=7$ से.मी. तो त्रिभुज का क्षे.फ. ज्ञात करो

हल : चरण 1: $A=\frac{1}{2}bh$

चरण 2: $A=\frac{1}{2}\times12\times7$

चरण 3: $A=42$ वर्ग से.मी.

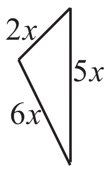
प्रयास कीजिए

1. व्यंजक '$-9x$' का मूल्य ज्ञात करो जब $x = -3$.
2. व्यंजक **को** ज्ञात करो जबकि उसका मूल्य समान है - 9, जब $x = -3$.

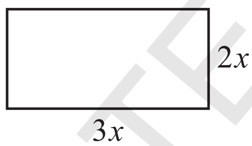
अभ्यास - 3

1. PR रेखा की लंबाई ज्ञात करो, निम्न चित्र से 'a' के पदों में.

2. (i) त्रिभुज की परिमिति मालूम करो



(ii) आयत की परिमिति मालूम करो



3. दूसरा पद प्रथम पद से घटाओ।

(i) $8x, 5x$ (ii) $5p, 11p$ (iii) $13m^2, 2m^2$

4. . निम्न एक पदों का मूल्य ज्ञात करो जबकि $x = 1$.

(i) $-x$ (ii) $4x$ (iii) $-2x^2$

5. सरल करो और मूल्य ज्ञात करो जबकि $4x + x - 2x^2 + x - 1$, $x = -1$.
6. व्यंजक $5x^2 - 4 - 3x^2 + 6x + 8 + 5x - 13$ को सरल करो और मूल्य ज्ञात करो जबकि $x = -2$
7. यदि $x = 1$; $y = 2$ तो निम्न के मूल्य ज्ञात करो ।

(i) $4x - 3y + 5$ (ii) $x^2 + y^2$ (iii) $xy + 3y - 9$

8. **आयत** *का क्षे.फ* $A = l \times b$ दिया गया, यदि $l = 9$cm, $b = 6$cm, हो तो क्षे.फ. ज्ञात करो
9. साधारण व्याज का सूत्र $I = \frac{PTR}{100}$ दिया गया है। यदि P = रु. 900, T = 2 वर्ष और R = 5% तो साधारण व्याज मालूम करो।

10. वेग (s), दूरी (d) और समय (t) के बीच का संबंध $s = \frac{d}{t}$. द्वारा दिया गया है। s, का मूल्य ज्ञात करो यदि d = 135 मी. और t = 10 सेकंड.

10.9 बीजीय व्यंजक – संकलन या जोड़

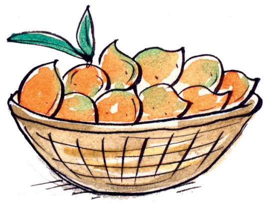
1. समीरा के पास कुछ आम है, पद्मा के पास समीरा से 9 ज्यादा है, मेरी कहती है कि उसके पास समीरा और पद्मा के पास जितने आम हैं, उनके योग से 4 आम ज्यादा है, तो मेरी के पास कुल कितने आम है?

हम यह नही जानते हैं कि समीरा के पास कितने आम हैं? उसके पास x आम हैं, मान लेंगे। पद्मा के पास समीरा से 9 आम ज्यादा है। इसलिए पद्मा के पास $= x + 9$ आम

मेरी के पास समीरा और पद्मा से 4 आम ज्यादा है।

इसलिए मेरी के पास कुल आम $= x + (x + 9) + 4$ आम

$= 2x + 13$ आम



2. गणित की परीक्षा में राजू को इमरान से 11 अंक ज्यादा मिले। राहुल को राजू और इमरान को जितने अंक मिले। उससे 4 अंक कम मिले तो राहुल को कितने अंक मिले?

मान लो इमरान को x अंक मिले।

सूचना : इमरान के अंक को हम x क्यों मान रहे है?

राजू को इमरान से 11 अंक ज्यादा मिले $= x + 11$ अंक राहुल को, इमरान और राजू से 4 अंक कम मिले $= x + x + 11 - 4$ अंक

$= 2x + 7$ *अंक*

उपरोक्त परिस्थितियों में व्यंजक जोड़ने और घटाने होंगे। इसी प्रकार वास्तविक जीवन में इस प्रकार की घटना-घटती है, उसे भी इस प्रकार हल किया जा सकता है। आइए अब हम बीजीय व्यंजकों का जोड और घटाना सीखेंगे ।

10.9.1 बीजीय व्यंजकों का जोड़

ब्रीजीय व्यंजकों का जोड़ या योग सजातीय पदों को जोड़ने या सरल करने से प्राप्त होता है। इसकी दो विधियाँ हैं।

(i) स्तंभ या ऊर्ध्वाधर विधि

(ii) पंक्ति या क्षितिजीय विधि

(i) स्तंभ या ऊर्ध्वाधर विधि (Vertical or Column Method)

उदा 4 : $3x^2+5x-4$ और $6+6x^2$ जोड़ो।

क्र.सं	हल करने की विधियाँ	चरण
1	व्यंजक को व्यवस्थित रूप में लिखो, यदि आवश्यक हो तो	(i) $3x^2+5x-4 = 3x^2+5x-4$ (ii) $6+6x^2 = 6x^2+6$
2	सभी व्यंजको को एक **दूसरे के** नीचे इस प्रकार लिखना चाहिए कि सजातीय पद एक ही स्तंभ में हो।	$3x^2+5x-4$ $6x^2 \quad\quad +6$
3.	एक ही खाने में आनेवाले सजातीय पद जोडो और उसी खाने के नीचे योग को लिखे .	$3x^2+5x-4$ $6x^2 \quad\quad +6$ $9x^2+5x+2$

उदा 5 : $5x^2+9x+6, 4x+3x^2-8$ और $5-6x$ को जोडो।

चरण 1 :

$$5x^2+9x+6 = 5x^2+9x+6$$
$$4x+3x^2-8 = 3x^2+4x-8$$
$$5-6x = -6x+5$$

चरण 2 :

$$\begin{array}{rrr} 5x^2 & +9x & +6 \\ 3x^2 & +4x & -8 \\ & -6x & +5 \\ \hline \end{array}$$

चरण 3 :

$$8x^2+7x+3$$

(ii) पंक्ति या क्षितिजीय विधि

उदा 6 : $3x^2 + 5x - 4$ और $6 + 6x^2$ जोड़ो।

क्र.सं	चरण	हल करने के विधि
1	व्यंजकों के बीच योग का संकेत लगाकर लिखना चाहिए	$3x^2 + 5x - 4 + 6 + 6x^2$
2	सजातीय पदों को एक साथ लिखो	$(3x^2 + 6x^2) + (5x) + (-4 + 6)$
3	सजातीय पदों के गुणक लिखो	$(3+6)\, x^2 + 5x + 2$
4	सरल किये गये गुणकों से परिणामी व्यंजक लिखिए	$9x^2 + 5x + 2$

इसे करो -

1. निम्न व्यंजक जोड़ो।

   (i) $x - 2y,\ 3x + 4y$

   (ii) $4m^2 - 7n^2 + 5mn,\ 3m^2 + 5m^2 - 2mn$

   (iii) $3a - 4b,\ 5c - 7a + 2b$

10.9.2 बीजीय व्यंजक - घटाना

10.9.2(a) बीजीय व्यंजको का योग विलोम

यदि एक धन संख्या 9 में -9 को जोड़ा जाए तो $9+(-9) = 0$ -9 योग विलोम है, 9 का और 9 योग विलोम है -9 का **यदि दो संख्याओं का योग शून्य होता है तो उन दो संख्याओं को एक दूसरे के योग विलोम कहते है।**

क्या यह बीजीय व्यंजक के लिए सही है?

क्या सभी बीजीय व्यंजकों में योग विलोम रहता है ?

यदि है तो '$3x$' का योग विलोम क्या है ?

'$3x$' योग विलोम '$-3x$', $3x + (-3x) = 0$

इसलिए '$-3x$' का योग विलोम $3x$ और '$3x$' का योग विलोम '$-3x$'.

इसी प्रकार प्रत्येक बहुपदी से संबंधित एक और बहुपदी रहता है, जिसका योग शून्य बहुपदी होता है ये दोनों बहुपदी एक दूसरे के योग विलोम कहलाते हैं।

उदा **6 :** इस व्यंजक का **योग** विलोम ज्ञात करो ($6x^2 – 4x + 5$).

हल **:** योग विलोम $6x^2 – 4x + 5$ का **योग** विलोम $= – (6x^2 – 4x + 5) = –6x^2 + 4x – 5$

10.9.2(b) *घटाना* -

यदि A और B व्यंजक हैं तो $A – B = A + (–B)$

अतः A बहुपदी में से B बहुपद को घटाने के लिए हम B का जोड़ विलोम A में जोड़ देते है।

आइए अब हम बीजीय व्यंजकों को घटाने के लिए पंक्ति और स्तंभ दोनों विधियों का प्रयोग करेंगे।

(i) स्तंभ या ऊर्ध्वाधर विधि -

उदा 7 : $3a + 4b – 2c$ को $3c + 6a – 2b$ में से घटाओ।

क्र.सं	**चरण**	**हल करने के विधि**
1	व्यंजकों को व्यवस्थित रूप में लिखो। यदि आवश्यक हो तो	$3c+6a-2b=6a-2b+3c$ $3a+4b-2c=3a+4b-2c$
2	व्यंजक इस प्रकार लिखने चाहिए कि घटाये जाने वाले व्यंजक सजातीय पद के नीचे आये।	$6a-2b+3c$ $3a+4b-2c$
3	निचली पंक्ति के सभी व्यंजकों के चिह्न बदलिए। इससे उनका योग विलोम प्राप्त होगा। सजातीय पदों को **पंक्ति** के अनुसार जोड कर प्राप्त परिणाम को उसी **पंक्ति** के नीचे ही लिखना चाहिए	$6a-2b+3c$ $3a+4b-2c$ (–) (–) (+)
4	स्तंभानुसार सजातीय पदों को जोडिये और परिणाम को नीचे दर्शाये अनुसार स्तंभ में लिखिये।	$6a-2b+3c$ $3a+4b-2c$ (–) (–) (+) $3a-6b+5c$

उदा 8 : $4+3m^2$ को $4m^2+7m-3$ में से घटाओ

चरण 1: $4m^2+7m-3 = 4m^2+7m-3$

$4+3m^2 \quad = \quad 3m^2+4$

चरण 2: $4m^2+7m-3$

$3m^2 \qquad +4$

चरण 3: $\begin{array}{lr} 4m^2 + 7m & - 3 \\ 3m^2 & + 4 \\ - & - \end{array}$

चरण 4: $\begin{array}{lr} 4m^2 + 7m & - 3 \\ 3m^2 & + 4 \\ - & - \\ \hline m^2 + 7m & - 7 \\ \hline \end{array}$

(ii) पंक्ति या क्षितिजीय विधि -

उदा 9 : $3a + 4b - 2c$ को $3c + 6a - 2b$ में से घटाओ।

क्र.सं	चरण	हल करने के विधि
1	व्यंजक जिसको दूसरे से घटाना है उसे कोष्टक में लिखकर उसके सामने (-) लगाइए।	$3c+6a-2b-(3a+4b-2c)$
2	दूसरे व्यंजक के योग विलोम को प्रथम में जोड़ना हैं।	$3c+6a-2b-3a-4b+2c$
3	सजातीय पदों को जोड़ी बना कर जोड़ो या घटाओ (परिस्थिति को देखकर)	$(3c+2c)+(6a-3a)+(-2b-4b)$ $=5c+3a-6b$
4	परिणाम लिखिए	$3a-6b+5c$

उदा 10 : $3m^3+4$ को $6m^3+4m^2+7m-3$ में से घटाओ।

चरण 1: $6m^3+4m^2+7m-3-(3m^3+4)$

चरण 2: $6m^3+4m^2+7m-3-3m^3-4$

चरण 3: $(6m^3-3m^3)+4m^2+7m-3-4$

$=3m^3+4m^2+7m-7$

चरण 4: $3m^3+4m^2+7m-7$

अभ्यास - 4

1. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों की दोनों विधियाँ क्षितिजीय और ऊर्ध्वाधर विधि से ज्ञात करो और बताओ कि दोनो विधियों के उत्तर समान है या नहीं?

   (i) $x^2-2xy+3y^2$; $5y^2+3xy-6x^2$

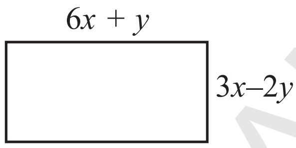
   (ii) $4a^2+5b^2+6ab$; $3ab$; $6a^2-2b^2$; $4b^2-5ab$

   (iii) $2x+9y-7z$; $3y+z+3x$; $2x - 4y - z$

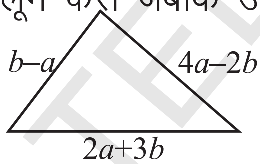
   (iv) $2x^2-6x+3$; $-3x^2-x-4$; $1+2x-3x^2$

2. हल करो : $2x^2+5x-1+8x+x^2+7-6x+3-3x^2$

3. आयत की परिमिति ज्ञात करो



4. त्रिभुज की परिमिति मालूम करो जबकि उसकी भुजाएँ $2a + 3b$, $b–a$, $4a–2b$.



5. द्वितीय व्यंजक को प्रथम व्यंजक में से घटाओ

   (i) $2a+b$, $a–b$

   (ii) $x+2y+z$, $–x–y–3z$

   (iii) $3a^2–8ab–2b^2$, $3a^2–4ab+6b^2$

   (iv) $4pq–6p^2–2q^2$, $9p^2$

   (v) $7–2x–3x^2$, $2x^2–5x–3$

   (vi) $5x^2–3xy–7y^2$, $3x^2–xy–2y^2$

   (vii) $6m^3+4m^2+7m–3$, $3m^3+4$

6. $x^2–5xy+2y^2$ और $y^2–2xy–3x^2$ के योग को $6x^2–8xy–y^2$ और $2xy–2y^2–x^2$ के योग में से घटाओ।

7. $1+2x–3x^2$ में क्या जोड़ने पर $x^2–x–1$ आयेगा?

8. $3x^2 - 4y^2 + 5xy + 20$ में से क्या घटाने पर $-x^2 - y^2 + 6xy + 20$ आएगा?

9. तीन व्यंजकों का योग $8 + 13a + 7a^2$ है उनमें से दो पद $2a^2 + 3a + 2$ और $3a^2 - 4a + 1$ है तो तीसरा व्यंजक ज्ञात करो।

10. यदि $A = 4x^2 + y^2 - 6xy;$

$B = 3y^2 + 12x^2 + 8xy;$

$C = 6x^2 + 8y^2 + 6xy$

ज्ञात करो (i) $A + B + C$ (ii) $(A - B) - C$ (iii) $2A + B$ (iv) $A - 3B$

पृष्ठावलोकन

- एक बीजीय व्यंजक एक पद या **अनेक** पदों का **संयोजन** है जिसमें चिह्न + धन या - घटा रहा है।
- प्रत्येक बीजीय व्यंजक में एक पद अचर रहता है। तब यह व्यंजक अंकीय गुणक कहलाता है। यदि एक व्यंजक में कम से कम एक व्यंजक पद रहता है उसे बीजीय व्यंजक कहते है।
- बीजीय व्यंजक में एक पद को एक पदी कहते है। एक बीजीय व्यंजक में दो विजातीय पद हो तो उसे द्विपदी कहते हैं। यदि एक व्यंजक में तीन विजातीय पद हो तो उसे त्रिपदी कहते हैं। एक बीजीय व्यंजक में तीन से ज्यादा पद विजातीय हो तो उसे बहुपदी कहते हैं।
- एक पद अक्षरों के घातांकों के योग को पद का घातांक कहते हैं।
- किसी में अचर राशि का घातांक शून्य रहता है।
- व्यंजकों के पदों के घातांको में सबसे अधिक घातांक को व्यंजक का घातांक कहते हैं।
- यदि किसी बहुपदी के दो पद सजातीय न हो तो उस बहुपदी को सरलीकृत रूप अथवा मानक (Standard) रूप में माना जाएगा।

घात और घातांक

(EXPONENTS AND POWER)

11

11.0 परिचय

1- सन 2011 की जनगणना के अनुसार भारत की जनसंख्या लगभग 1,20,00,00,000 है।

2 - सूर्य और पृथ्वी के मध्य की दूरी लगभग 15,00,00,000 कि.मी है।

3 - शून्य में प्रकाश की गति 30,00,00,000 मी/सेकंड है। एक सेकंड में प्रकाश 30,00,00,000 मी. दूरी तय करता है।

4 - सन 2011 की जनगणना के अनुसार आन्ध्रप्रदेश की जनसंख्या लगभग 8,50,00,000 है।

ऊपर दी गई संख्याएँ सभी बड़ी हैं। क्या वे आसानी से पढ़ी, लिखी व समझी जा सकती हैं। कदापि नहीं।

घात और घातांक की सहायता से हम ऐसी बड़ी संख्याओं को आसानी से पढ़ सकते हैं। इस अध्याय में हम घात और घातांक तथा उसके नियमों को पूर्ण रूप सें पढ़ेगें।

11.1 गुणा का विस्तार रूप

निम्न में बार–बार दोहराये जानेवाली योग संख्याएँ :

$4 + 4 + 4 + 4 + 4$

$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$

$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$

गुणा के नियमानुसार संक्षिप्त में हम बार–बार दोहरायी जानेवाली समान राशि की योग संख्याओं की हम 5x4, 6x5, 8x7 के रूप में लिखते हैं।

क्या हम गुणांक विधि से दोहरायी जानेवाली संख्या को सरलता से जान सकेंगे। निम्नलिखित का अवलोकन कीजिए।

सन 2011 की जनगणना के अनुसार बिहार की जनसंख्या लगभग 10,00,00,000 है। यहाँ पर 10 को अपने आप से 8 बार गुणा किया गया है। वह है - 10x 10x10x10x10x10x10x10

हम बिहार की जनसंख्या को 10^8 के रूप में लिख सकते है। यहाँ 10 आधार कहलाता है और 8 उसका घातांक कहलाता है। हम उसे 10 का घातांक 8 के रूप में पढ़ते है। शून्य में प्रकाश की गति 30,00,00,000 मी/सें है। इसे हम घात रूप में 3x10 मी से लिखते है। यहाँ पर 10 आधार है और 8 उसका घातांक।

सूर्य और पृथ्वी के मध्य की दूरी लगभग 15,00,00,000 कि.मी है। इसे **15×10^7** के रूप में लिखते है। इसमें 10 आधार है और 7 उसका घातांक।

सन् 2011 की जनगणना के अनुसार आन्ध्रप्रदेश की जनसंख्या लगभग 8,50,00,000 है। इसे हम **85×10^6** रूप में लिखते है। यहाँ पर 10 को आधार और 6 को घातांक कहते है।

हम दी गई संख्या के विस्तार रूप को घातांक के रूप में लिख सकते है।

उदाहरणतः $36584 = (3\times10000) + (6\times1000) + (5\times100) + (8\times10) + (4\times1)$

$$= (3\times10^4) + (6\times10^3) + (5\times10^2) + (8\times10^1) + (4\times1)$$

हल करो -

1. निम्न लिखित को घात रूप में लिखिए।
   (i) पृथ्वी के सम्पूर्ण तल का क्षेत्रफल 510,000 वर्ग कि.मी है।
   (ii) राजस्थान की जनसंख्या लगभग 7,00,00,000 है।
   (iii) पृथ्वी की आयु लगभग 4550 मिलियन वर्ष है।
   (iv) 1000 कि.मी को मीटर में बदलो
2. घातांकों का प्रयोग करते हुए विस्तार रूप में लिखो
   (i) 48951 (ii) 89325

11.1.1 भिन्न-भिन्न आधारों के घातांक (Exponents with other bases)

इससे पहले हमने देखा कि सभी घात संख्याओं का आधार 10 था, आधार अन्य राशियों का भी हो सकता है। उहाहरण $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

यहाँ पर 3 आधार है और 4 उसका घातांक।

इसी तरह $125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

यहाँ पर 5 आधार और 3 उसका घातांक है।

उदाहरण 1 - निम्न में कौन सी संख्या बड़ी है।

3^4 या 4^3 ?

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

$81 > 64$

इसलिए $3^4 > 4^3$

यह कीजिए

1. क्या 3^2 समान है 2^3 के? जाँच करो।

2. निम्न संख्याओं को घात रूप में लिखो उनके 1- आधार 2 - घातांक 3- इस नियम को किस प्रकार पढ़ा जाता है? लिखो।

(i) 32 (ii) 64 (iii) 256 (iv) 243 (v) 48

वर्ग और घन (घातांक में)

किसी राशि के आधार का घातांक 2 या 3 हो तो उन घातांको को विशेष नाम दिया गया है।

$10^2 = 10 \times 10$ इसे **10** का घातांक **2** या **10** का वर्ग कह कर पढ़ा जाता है।

$4^2 = 4 \times 4$ इस प्रकार इसे **4** का घातांक **2** या **4** का वर्ग कह कर पढ़ा जाता है।

$10 \times 10 \times 10 = 10^3$ को **10** का घातांक **3** या **10** घन कह कर पढ़ा जाता है।

इसी प्रकार $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ को 6 का घातांक 3 या 6 का घन कह कर पढ़ा जाता है।

साधारण किसी घनात्मक का सांकेतिक रूप a को आधार के रूप में लिखा जाता है।

$a \times a$ $= a^2$ (इसे a का घातांक 2 या a का वर्ग कह कर पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a$ $= a^3$ (इसे a का घातांक 3 या a का घन कह कर पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a \times a$ $= a^4$ (इसे a का घातांक 4 कहकर पढ़ा जाता है)

______________ $= a^5$ (____________________________________)

______________ $= a^6$ (____________________________________) आदि

साधारण हम कह सकते है कि $\mathbf{a \times a \times a \times a \times a \times a \times}$.................... ***'m'*** बार को हम = $\mathbf{a^m}$ संकेत द्वारा है यहाँ ***'a'*** आधार है और ***'m'*** घातांक

यह कीजिए

1. निम्न लिखित को विस्तार रूप में लिखो -

(i) p^7 (ii) l^4 (iii) s^9 (iv) d^6 (v) z^5

2. निम्न लिखित गुणनफलों को घात रूप में लिखो

(i) $a \times a \times a \times$ .... 'l' बार

(ii) $5 \times 5 \times 5 \times 5$.................... '$n$' बार

(iii) $q \times q \times q \times q \times q$ .... 15 बार

(iv) $r \times r \times r \times$ .... 'b' बार

11.2 राशियों के रूढ खण्डों को घात रूप में इस प्रकार लिखा जाता है

आइए जाने कि नीचे लिखी संख्याओं के गुणनफल की रूढ संख्याएँ हो तो उन्हें घात रूप में कैसे लिखा जाता है।

(i) 432 (ii) 450

हल *(i):* $432 = 2 \times 216$

$= 2 \times 2 \times 108$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= 2^4 \times 3^3$

2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

इसलिए, $432 = 2^4 \times 3^3$

(ii) 450 $= 2 \times 225$

$= 2 \times 3 \times 75$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 25$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$= 2 \times 3^2 \times 5^2$

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

इसलिए, $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

यह कीजिए

निम्न के गुणनफल जो रूढ़ संख्याएँ हों तो उन्हें घात के रूप में लिखा

(i) 2500 (ii) 1296 (iii) 8000 (iv) 6300

अभ्यास - 1

1. निम्नलिखित प्रश्नों के आधार व घातांक लिखो तथा इनका विस्तार रूप लिखो

(i) 3^4 (ii) $(7x)^2$ (iii) $(5ab)^3$ (iv) $(4y)^5$

2. निम्नलिखित को घात रूप में लिखो

(i) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

(ii) $3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

(iii) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

3. निम्नलिखित के गुणनफलों को रूढ़ संख्या के घात रूप में लिखो

(i) 288 (ii)1250 (iii) 2250 (iv) 3600 (v) 2400

4. निम्न में बड़ी संख्या कौनसी है? दर्शाओ

(i) 2^3 या 3^2 (ii) 5^3 या 3^5 (iii) 2^8 या 8^2

5. यदि $a = 3, b = 2$ हो तो (i) $a^b + b^a$ (ii) $a^a + b^b$ (iii) $(a + b)^b$ (iv) $(a - b)^a$ **का मूल्य ज्ञात कीजिए।**

11.3 घात के नियम (Laws of exponents)

कुछ नियमों द्वारा घात राशियों को सरलतापूर्वक गुणा कर सकते है। इन नियमों की चर्चा हम करते है।

11.3.1 समान आधार वाली राशियों का गुणा

उदा **2 :** $2^4 \times 2^3$

हल **:** $2^4 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times 2)}_{4 \text{ बार}} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{3 \text{ बार}}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$ इसके समान ही 2^{4+3} (जैसे $4 + 3 = 7$)

इसलिए, $\underbrace{2^4 \times 2^3}\ = \underbrace{2^{4+3}}$

उदा **3:** $5^2 \times 5^3$

हल **:** $5^2 \times 5^3 = \underbrace{(5 \times 5)}_{2 \text{ बार}} \times \underbrace{(5 \times 5 \times 5)}_{3 \text{ बार}}$

$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 5^5$ और इसको समान ही 5^{2+3} (जैसे $2 + 3 = 5$)

इसलिए, $\underbrace{5^2 \times 5^3} = \underbrace{5^{2+3}}$

यह कीजिए

2^4, 2^3 और 2^7 मूल्य ज्ञात करो।

जाँच करो $2^4 \times 2^3 = 2^7$

5^2, 5^3 और 5^5 का मूल्य ज्ञात करो और जाँच करो कि $5^2 \times 5^3 = 5^5$

उदा 4 : $a^4 \times a^5$

हल : $a^4 \times a^5 = (a \times a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a)$

$= (a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a)$

$= a^9$ यह समान है a^{4+5} के (यहाँ $4 + 5 = 9$)

इसलिए, $a^4 \times a^5 = a^{4+5}$

ऊपर बताए गए उदाहरणों के आधार पर हम कह सकते है कि

$a^m \times a^n$ = ($a \times a \times a$ ....'m' बार) × ($a \times a \times a \times$ ....'n' बार)= a^{m+n}

यदि 'a', कोई अकरणीय संख्या है और 'm', 'n' घन पूर्णांक घातांक हो तो

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

हल करो

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ सूत्र की सहायता से निम्न प्रश्नो को हल करो

   (i) $3^{11} \times 3^9$ (ii) $p^5 \times p^8$

2. नीचे लिखे प्रश्नो का मूल ज्ञान करो | यहाँ k एक अकरणीय संख्या है |

   (i) $k^3 \times k^4 = k^?$ (ii) $k^{15} \times k^? = k^{31}$

11.3.2 घात पर घात (Exponent of Exponent)

उदा 5 : हल करो $(3^2)^3$

हल : यहाँ '3^{2^3}' में आधार है 3^2 और घातांक '3' है

$(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$= 3^{2+2+2}$ (समान आधार वाले संख्या के घात पर घात का गुणा)

$= 3^6$ इसके समान है $3^{2\times3}$ $(2 \times 3 = 6)$

इसलिए, $(3^2)^3 = 3^{2\times3}$

यह कीजिये :

3^2 के घन को 3^6 में व्यक्त कीजिये और जाँच कीजिये कि $(3^2)^3 = 3^6$?

उदा 6 : चलो हल करते है। $(4^5)^3$

हल : $(4^5)^3 = 4^5 \times 4^5 \times 4^5$

$= 4^{5+5+5}$ (समान आधार वाले संख्या के घात पर घात का गुणा)

$= 4^{15}$ इसके समान है $4^{5\times3}$ (as $5 \times 3 = 15$)

इसलिए, $(4^5)^3 = 4^{5\times3}$

उदा 7: $(a^m)^4$

हल : $(a^m)^4 = a^m \times a^m \times a^m \times a^m$

$= a^{m+m+m+m}$ (समान आधार वाले संख्या के घात पर घात का गुणा)

$= a^{4m}$ इसके समान है $a^{m\times4}$ (as $4 \times m = 4m$)

इसलिए, $(a^m)^4 = a^{m\times4}$

उपर्युक्त उदाहरणों के आधार पर हम कह सकते है कि $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m$...... **n** बार $= a^{m+m+m+\ldots n}$ **बार** $= a^{mn}$

> **जब** $a \neq 0$ के **लिये** a अकरणीय संख्या **हो और**
> m,n घन पूर्णांक **हो, तो** $(a^m)^n = a^{mn}$

11.3.3 गुणनफल के घातांक

उदा 8 : मान लो $3^5 \times 4^5$

हल : यहाँ 3^5 और 4^5 में घातांक समान है आधार 5 अलग अलग है

$3^5 \times 4^5 = (3\times3\times3\times3\times3) \times (4\times4\times4\times4\times4)$

$= (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4)$

$= (3\times4)^5$

इसलिए, $3^5 \times 4^5 = (3 \times 4)^5$

उदा 9: मान लो $4^4 \times 5^4$

हल : यहाँ 4^4 और 5^4 में घातांक समान है, आधार 4 अलग अलग है

$4^4 \times 5^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$

$= (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)$

$= (4 \times 5)\times (4 \times 5) \times (4 \times 5) \times (4 \times 5)$

$= (4 \times 5)^4$

इसलिए, $4^4 \times 5^4 = (4 \times 5)^4$

उदा **10 :** हल करो $p^7 \times q^7$

हल : यहाँ पर p^7 और q^7 के घातांक समान है वे है 7 पर आधार भिन्न-भिन्न है ।

$$p^7 \times q^7 = (p \times p \times p \times p \times p \times p \times p) \times (q \times q \times q \times q \times q \times q \times q)$$
$$= (p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times q \times q \times q \times q \times q \times q \times q)$$
$$= (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q)$$
$$= (p \times q)^7$$

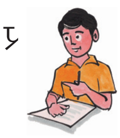
इसलिए, $p^7 \times q^7 = (p \times q)^7$

उपर्युक्त उदाहरण का निष्कर्ष है कि $\boldsymbol{a^m \times b^m = (a \times b)^m = (ab)^m}$

> $\boldsymbol{a^m \times b^m = (ab)^m}$, जहाँ a और b एक अकरणीय संख्या है और m एक घन पूर्णांक संख्या है ।

यह कीजिए

$a^m \times b^m = (a\,b)^m$ सूत्र का प्रयोग करते हुए निम्न प्रश्नो को हल करो ।



(i) $(2 \times 3)^4$ (ii) $x^p \times y^p$ (iii) $a^8 \times b^8$ (iv) $(5 \times 4)^{11}$

11.3.4 .भागफल के घात का नियम

भागफल के घात के नियम से पहले हम घातांक के ऋण पूर्ण संख्याओं पर चर्चा करेंगे ।

11.3.4(a) ऋणात्मक घातांक **(Negative exponents)**

निम्न पर ध्यान दे

2^5	=	32	3^5	=	243
2^4	=	16	3^4	=	81
2^3	=	8	3^3	=	27
2^2	=	4	3^2	=	9
2^1	=	2	3^1	=	3
2^0	=	1	3^0	=	1
2^{-1}	=		3^{-1}	=	
(Hint: half of 1)			(Hint: one-third of 1)		
2^{-2}	=		3^{-2}	=	

32 कौनसा भाग 16 है?

2^5 और 2^4? में अंतर ज्ञात करों

आपने देखा कि घातांक की संख्या एक घटने पर राशि का मान पहले से आधा हो जाता है, उपर्युक्त उदा- के अनुसार हम कह सकते है,

$2^{-1} = \frac{1}{2}$ और $2^{-2} = \frac{1}{4}$ और

$3^{-1} = \frac{1}{3}$ और $3^{-2} = \frac{1}{9}$

अधिक जानकारी के लिए हम देखते हैं कि $2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$

इसी प्रकार, $3^{-1} = \frac{1}{3}$ और $3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$

a **कोई** *अकरणीय संख्या है और* n *कोई पूर्णांक हो* **तो**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

हल करो

1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, सूत्र का प्रयोग करते हुए निम्न प्रश्नो को हल करो

(i) x^{-7} (ii) a^{-5} (iii) 7^{-5} (iv) 9^{-6}

11.3.4(b) शून्य घातांक

ऊपर के नियमों के प्रयोग से हम देखते है कि

$2^0 = 1$

$3^0 = 1$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

$4^0 = 1$

$5^0 = 1$ और इस तरह

शून्य के अलावा सभी 'a' पूर्णांकों के लिए

$a^0 = 1$

11.3.4(c) विभाजन का घात नियम **जब** आधार समान हो

उदा **11 :** हल करो $\frac{7^7}{7^3}$

हल : $\frac{7^7}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times \cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{7} \times \cancel{7}} = 7 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 7^4$ इस प्रकार लिखा जाता है 7^{7-3} (यहाँ पर $7 - 3 = 4$)

इसलिए, $\frac{7^7}{7^3} = 7^{7-3}$

उदा **12:** हल करो $\frac{3^8}{3^3}$

हल : $\frac{3^8}{3^3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 3^5$ इस प्रकार लिखा जाता है 3^{8-3} (यहाँ पर $8 - 3 = 5$)

इसलिए, $\frac{3^8}{3^3} = 3^{8-3}$

उदा **13:** हल करो $\frac{5^5}{5^8}$

हल : $\frac{5^5}{5^8} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}{5 \times 5 \times 5 \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5^3}$

$\frac{1}{5^3}$ इस प्रकार लिखा जाता है $\frac{1}{5^{8-5}}$ (यहाँ पर $8 - 5 = 3$)

इसलिए, $\frac{5^5}{5^8} = \frac{1}{5^{8-5}}$

उदा **14:** हल करो $\frac{a^2}{a^7}$

हल : $\frac{a^2}{a^7} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{a}}{a \times a \times a \times a \times a \times \cancel{a} \times \cancel{a}} = \frac{1}{a \times a \times a \times a \times a}$

$= \frac{1}{a^5}$ इस प्रकार लिखा जाता है $\frac{1}{a^{7-2}}$ (यहाँ पर $7 - 2 = 5$)

इसलिए, $\frac{a^2}{a^7} = \frac{1}{a^{7-2}} = \frac{1}{a^5}$

उपर्युक्त उदाहरणों के आधार पर हम कह सकते है कि

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ यदि $m > n$ और $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ if $m<n$

यह a=0 और m,n एक घन पूर्णांक है

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ यदि $m > n$ और $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ if $n > m$

क्या होगा यदि m=n हो? उत्तर दो

उदा **15 :** हल करो $\frac{4^3}{4^3}$

हल : $\frac{4^3}{4^3} = \frac{4 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{1} = 1$ . . . . . (1)

यह हम जानते है कि $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

इसलिए ज्ञात करो $\frac{7^4}{7^4} = ?$

(1के आधार पर)

उपर्युक्त उदाहरण में आपने क्या देखा

हम कह सकते है $\frac{a^4}{a^4} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a} = 1$

पर $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ के आधार पर (नियमानुसार)

हम पाते है $\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0 = 1$

यहाँ ध्यान दे m, n (m = n) जहाँ $a=0$

हम पाते है $a^0=1$

यदि m = n है तो $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = 1}$

यह कीजिए

1. a^{m-n} या $\frac{1}{a^{n-m}}$ सूत्र के आधार पर निम्न प्रश्न हल करो

(i) $\frac{13^8}{13^5}$ (ii) $\frac{3^4}{3^{14}}$

2. उचित संख्या से रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए

उदा : $\frac{8^8}{8^3} = 8^{\boxed{8-3}} = 8^{\boxed{5}}$

(i) $\frac{12^{12}}{12^7} = 12^{\square} = 12^{\square}$ (ii) $\frac{a^{18}}{a^{\square}} = a^{\square} = a^{\boxed{10}}$

11.3.4(c) समान घातांकों से पदों का विभाजन

उदा 16: $\left(\frac{7}{4}\right)^5$

हल : $\left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}$

$= \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}$

$= \frac{7^5}{4^5}$ (परिभाषा के अनुसार)

इसलिए , $\left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{7^5}{4^5}$

उदा 17: $\left(\frac{p}{q}\right)^6$

हल : $\left(\frac{p}{q}\right)^6 = \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right)$

$= \frac{p \times p \times p \times p \times p \times p}{q \times q \times q \times q \times q \times q}$

$= \dfrac{p^6}{q^6}$ परिभाषा के अनुसार

इसलिए, $\left(\dfrac{p}{q}\right)^6 = \dfrac{p^6}{q^6}$

उपर्युक्त उदाहरण के आधार पर हम कह सकते है

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times a \text{ 'm' times}}{b \times b \times b \times b \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times b \text{ 'm' times}} = \frac{a^m}{b^m}$$

यदि $a= 0, b=0$ हो और m एक घन पूर्णांक हो तो $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

हल करो

1. रिक्त स्थान भरो

(i) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^3 = \dfrac{5^3}{\square}$ (ii) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\square} = \dfrac{3^5}{2^5}$

(iii) $\left(\dfrac{8}{3}\right)^4 = \dfrac{\square}{\square}$ (iv) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{11} = \dfrac{\square}{y^{11}}$

11.3.5 ऋणात्मक आधार के पद

उदा **18 :** विस्तार $(1)^4, (1)^5, (1)^7, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, (-1)^5$

हल : $(1)^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(1)^7 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

उपर्युक्त हल के आधार पर हमने देखा

(i) 1 का घातांक 1 है तो उत्तर भी 1 .

(ii) (–1) का यदि घातांक ऋणात्मक विषम संख्या हो तो उत्तर (-1) होगा, यदि घातांक ऋणात्मक सम संख्या हो तो परिणाम (+1) होगा.

$(-a)^m = -a^m$ यादि ‘m’ विषम संख्या है

$(-a)^m = a^m$ यादि‘m’ सम संख्या है

आइए हम कुछ अन्य उदाहरण देखे।

$(-3)^4 = (-3)\ (-3)\ (-3)\ (-3) = 81$

$(-a)^4 = (-a)\ (-a)\ (-a)\ (-a) = a^4$

$$(-a)^{-3} = \frac{1}{(-a)} \times \frac{1}{(-a)} \times \frac{1}{(-a)} = \frac{1}{-a^3} = \frac{-1}{a^3}$$

उदा 19 : $\frac{-27}{125}$ घातांक रूप में लिखो।

हल :$-27 = (-3)\,(-3)\,(-3) = (-3)^3$

$125 = 5 \times 5 \times 5 = (5)^3$

इसिलिए , $\frac{-27}{125} = \frac{(-3)^3}{(5)^3}$ as $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

यहाँ, $\frac{-27}{125} = \left(\frac{-3}{5}\right)^3$

यह कीजिए

1. विस्तार रूप में लिखो

(i) $(a)^{-5}$ (ii) $(-a)^4$ (iii) $(-7)^{-5}$ (iv) $(-a)^m$

2. घात रूप में लिखो।

(i) $(-3) \times (-3) \times (-3)$ (ii) $(-b) \times (-b) \times (-b) \times (-b)$

(iii) $\frac{1}{(-2)} \times \frac{1}{(-2)} \times \frac{1}{(-2)}$...... '$m$' बार

अभ्यास – 2

1. घात नियमो का प्रयोग करते हुए निम्न प्रश्न हल करो।

(i) $2^{10} \times 2^4$ (ii) $(3^2) \times (3^2)^4$ (iii) $\frac{5^7}{5^2}$

(iv) $9^2 \times 9^{18} \times 9^{10}$ (v) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^8$ (vi) $(-3)^3 \times (-3)^{10} \times (-3)^7$

(vii) $(3^2)^2$ (viii) $2^4 \times 3^4$ (ix) $2^{4a} \times 2^{5a}$

(x) $(10^2)^3$ (xi) $\left[\left(\frac{-5}{6}\right)^2\right]^5$ (xii) $2^{3a+7} \times 2^{7a+3}$

(xiii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ (xiv) $(-3)^3 \times (-5)^3$ (xv) $\frac{(-4)^6}{(-4)^3}$

(xvi) $\frac{9^7}{9^{15}}$ (xvii) $\frac{(-6)^5}{(-6)^9}$ (xiii) $(-7)^7 \times (-7)^8$

(xix) $(-6^4)^4$ (xx) $a^x \times a^y \times a^z$

2. 3^{-4} को किस संख्या से गुणा करने पर परिणाम 729 होगा?

3. यदि $5^6 \times 5^{2x} = 5^{10}$, *हो तो* x *का मूल्य ज्ञात करो।*

4. ज्ञात करो $2^0 + 3^0$

5. हल करो $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^a \times \left(\frac{x^b}{x^a}\right)^a \times \left(\frac{x^a}{x^a}\right)^b$

6. सत्य/असत्य जाँच कर उत्तर **दीजिये।**

(i) $100 \times 10^{11} = 10^{13}$ (ii) $3^2 \times 4^3 = 12^5$ (iii)) $5^0 = (100000)^0$

(iv) $4^3 = 8^2$ (v) $2^3 > 3^2$ (vi) $(-2)^4 > (-3)^4$

(vii) $(-2)^5 > (-3)^5$

परियोजना कार्य

अपने पडोस के किन्हीं दस परिवारों की मासिक आय की जानकारी एकत्रित करे, उन्हे हजार या लाख मे पूर्ण संख्या बनाकर प्रत्येक परिवार की आय को घात रूप में प्रकट करें।

11.3.6 बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना

पृथ्वी का (भार) लगभग 5967 x 10^{21} कि.ग्रा है। सौर मण्डल की एक छोर से दूसरी छोर की चौड़ाई लगभग 946 x 10^{5} कि.मी है।

इन सभी अंकों की तुलना हम आसानी से नहीं कर सकते। कुछ नियमों से हम सूचित कर सकते हैं कि पृथ्वी का भार लगभग 5.976×10^{24} कि.ग्रा है। सौर मण्डल की एक छोर से दूसरी छोर की चौड़ाई 9.46×10^{7} कि.मी है।

अभ्यास - 3

निम्न संख्याओं के घात नियमानुसार सूचित करो।

(i) पृथ्वी और चन्द्रमा के मध्य की दूरी लगभग 384000000 मी. है।

(ii) सम्पूर्ण विश्व लगभग 12,000,000,000 वर्ष पुराना है।

(iii) सौर मण्डल के मध्य स्थित सूर्य और अन्तरिक्ष की दूरी लगभग 300,000,000,000,000,000,000 मी. है।

(iv) पृथ्वी के भूभाग से समुद्री भाग लगभग 1,353,000,000 घन कि.मी. है।

अवलोकन करो

- बड़ी राशियों को घात के रूप में लिखने से आसानी से पढ़ा और समझा जा सकता है।
- $10{,}000 = 10^4$ (10 का घातांक 4); $243 = 3^5$ (3का घातांक 5) ; $64 = 2^6$ (2 का घातांक 6). इन उदाहरणों में 10, 3, 2 आधार है और 4, 5, 6 उनके घातांक
- घात नियम के अनुसार : $a \neq 0$, $b \neq 0$ *और* m *और* n का घन *पूर्णांक हो तब*

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(iv) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (v) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ if $m > n$

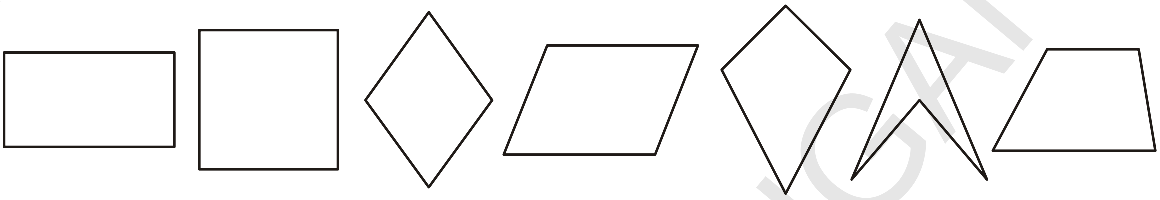
(vi) $\dfrac{a^m}{b^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ यदि $n > m$ (vii) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

(viii) $a^0 = 1$ (जहाँ $a \neq 0$)

चतुर्भुज (QUADRILATERALS) 12

कक्षा छठवीं में हमने चतुर्भुज की परिभाषा पढ़ी थी इस अध्याय में हम चतुर्भुज के प्रकार के बारे में विस्तार से पढ़ेंगे

12.0 चतुर्भुज

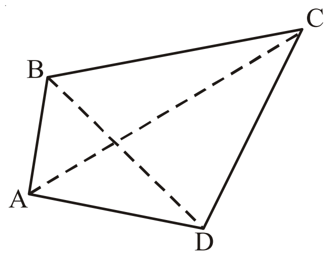


इन चित्रों में क्या समानताएँ हैं?

संकेत :- भुजाओं की संख्या, कोण, शीर्ष, 'बंद संवृत आकृतियाँ' हैं या 'खुली आकृतियाँ'

चतुर्भुज एक संवृत (बंद) आकृति है जिसकी चार भुजाएँ चार कोण,चार शीर्ष होते हैं।

चतुर्भुज ABCD में



(i) चार भुजाँए $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ और $\overline{DA}$ है।

(ii) A, B, C और D चार **शीर्ष** है।

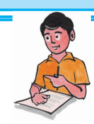
(iii) ∠ABC, ∠BCD, ∠CDA और ∠DAC ये चार **कोण** है ।

(iv) चतुर्भुज में विपरीत शीर्षों को जोडने वाले रेखा खण्ड चतुर्भुज के **कर्ण** कहलाते है। $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ चतुर्भुज ABCD **कर्ण** है।

(v) चतुर्भुज के **संलग्न** शीर्षो वाली भुजाएँ चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ कहलाती है। चतुर्भुजABCD, $\overline{AB}$ में $\overline{BC}$ और B **आसन्न भुजाएँ** हैं।

(vi) *चतुर्भुज के दो कोण* जो *सामान्य* भुजा पर हैं **संलग्न कोण** कहलाते हैं।अर्थात ∠ABC और ∠BCD **संलग्न कोण** है। $\overline{BC}$ स भुजा।

हल करो।



1.अन्य आसन्न भुजाएँ और सामान्य शीर्ष ज्ञात करो।

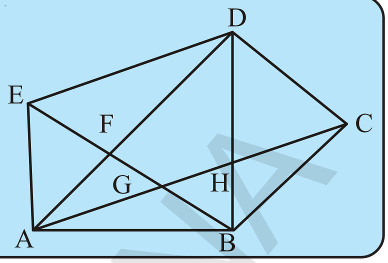
2. अन्य आसन्न कोणो की जोडी एवं भुजाएँ ज्ञात करो।

(vii) चतुर्भुज में $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ और $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ दो जोडी **सम्मुख भुजाएँ** कहलाती है। इनके शीर्ष समान नही होती है!

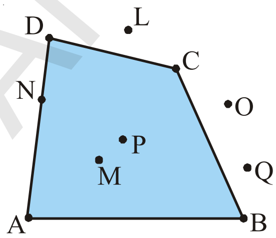
(viii) चतुर्भुज के दो कोण जिसकी एक समान भुजा न हो तो वे सम्मुख कोण कहलाते हैं। चतुर्भुज की दो जोड़ियाँ $\angle BAD$, $\angle DCB$ और $\angle ADC$, $\angle CBA$ चतुर्भुज के सम्मुख कोण हैं।

प्रयास करे

दिए गए चित्र में चतुर्भुज के कितने प्रकार है? उनके नाम बताइए।



12.1 चतुर्भुज के अन्तर्गत और बहिर्गत



चतुर्भुजABCD *के अंतर्गत कौनसे बिन्दु है?*

कौनसे बिन्दु चतुर्भुज के बहिर्गत है?

चतुर्भुज पर *कौनसे* बिंदु स्थित है?

बिन्दु P और M चतुर्भुज के अर्न्तगत है। बिन्दु L, O और Q चतुर्भुज के बहिर्गत है बिंदु N, A, B, C और D चतुर्भुज में स्थित है।
चतुर्भुज के अर्न्तगत अन्य मनचाहे बिन्दु अंकित कीजिए।
चतुर्भुज के बहिर्गत अन्य बिन्दु अंकित करो।

चतुर्भुज के बहिर्गत कितने बिन्दुओं की आपने कल्पना की है।

12.2 उत्तल और अवत्तल चतुर्भुज

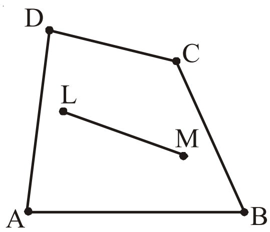
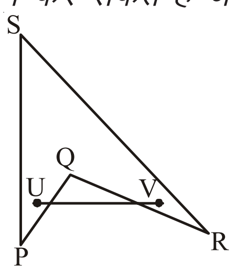


Figure1

चतुर्भुज ABCD *के मध्य मे* L और M *दो बिन्दुओं को चिन्हित करो उन्हे मिलाओ क्या मिलाई गई रेखा चतुर्भुज के* बहिर्गत *बिन्दुओ से मिलती है?*
आप चतुर्भुज ABCD के अर्न्तगत स्थित दो बिन्दुओ को जान सकते है। जो चतुर्भुज के रेखा खण्ड से जुडी है यह देखपाना असम्भव है। यही समान कार्य हम चतुर्भुज PQRS में करते है।
चतुर्भुज PQRS के अर्न्तगत UV दो बिन्दु चिन्हित करो और उन्हें जोड़ो। *क्या उन्हे चतुर्भुज के बहिर्गत गुजरती हुई रेखा द्वारा जोडा जा सकते? क्या हम ऐसी अन्य रेखाओं का निर्माण कर सकते है? क्या हम ऐसे दो बिन्दुओ को जोडने वाली रेखा खण्ड का निर्माण कर सकते है जो चतुर्भुज के अर्न्तगत है?* **क्या** *यह संभव है?*



हम कह सकते है

चतुर्भुज ABCD एक उत्तल चतुर्भुज है, जिसके अर्न्तगत खींचे जाने वाले रेखा खण्ड चतुर्भुज के उत्तल मे ही स्थित है।

चतुर्भुज PQRS को **अवत्तल** चतुर्भुज है जिसके उत्तल में खीची जाने वाली सभी रेखाएँ अन्तर्गत हो यह आवश्यक नही है।

इस प्रकार कीजिए

1.

(i) क्या EFGH चतुर्भुज उत्तल चर्तुभुज है?

(ii) क्या TUVW चतुर्भुज एक **अवत्तल** चतुर्भुज है?

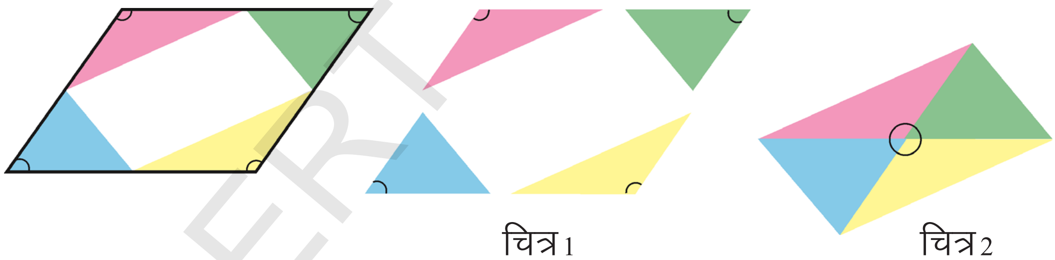
(iii) चतुर्भुज EFGH. के दोन कर्ण / क्या वे एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है?

(iv) चतुर्भुज TUVW. के दोनों कर्ण उतारिए क्या वे दोनो एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है? हम पाते है कि उत्तल चतुर्भुज के दोनों कर्ण एक दूसरे को चतुर्भुज के अन्तर्गत ही प्रतिच्छेत करते है।

12.3 समानान्तर चतुर्भुज के कोण-योग गुण।

क्रिया 1

एक अट्टे का टुकडा लो। उस पर समानान्तर चतुर्भुज *ABCD* उतार कर काटो । चित्र



चित्र 1 चित्र 2

1 के अनुसार उसके चार भाग करो। उन्हे पुनः चित्र 2 के अनुसार जमाओ।

जिससे सारे कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ एक ही बिंदु पर जुड़े।

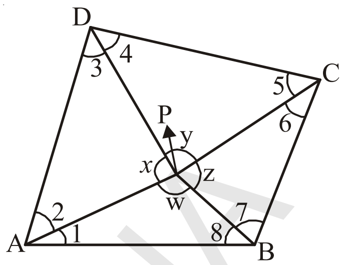
क्या $\angle 1, \angle 2, \angle 3,$ और $\angle 4$ का योग के समान हैं?

चतुर्भुज के चारों कोणो का योग 360°. होता है।

सूचना : $\angle 1, \angle 2, \angle 3,$ आदि को हम इस ढंग से भी सूचित कर सकते है जैसे $m\angle 1, m\angle 2, m\angle 3,$ आदि।]

हम कुछ अन्य विधियो द्वारा भी हल कर सकते हैं।

1. चतुर्भुज ABCD के अंतर्गत P - बिंदु स्थित है। चित्र मे दिखाए अनुसार को शीर्ष A, B, C और D. से जोड़ो।



चित्र में ΔPAD में

$m\angle 2 + m\angle 3 = 180° - x$ .... (1)

इसी प्रकार ΔPDC, $m\angle 4 + m\angle 5 = 180° - y$ .... (2)

ΔPCB में $m\angle 6 + m\angle 7 = 180° - z$ और .... (3)

ΔPBA, में $m\angle 8 + m\angle 1 = 180° - w$. .... (4)

के सभी कोणो का योग

(1), (2), (3) और (4) को जोड़ने पर प्राप्त योग

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 + m\angle 7 + m\angle 8$

$= 180° - x + 180° - y + 180° - z + 180° - w$

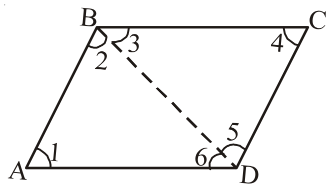
$= 720° - (x + y + z + w)$

($x + y + z + w = 360°$; एक बिंदु पर कोणो के योग के अनुसार)

$= 720° - 360°$ $= 360°$

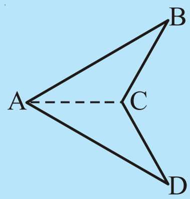
इस प्रकार चतुर्भुज के सभी कोणो का योग 360° होता है

2. चतुर्भुज ABCD. बनाओ'। उसे कर्ण द्वारा दो त्रिभुजो में विभक्त करो। हम 1, 2, 3, 4, 5 और 6. कोण पाते है हम कोण योग गुण के नियम द्वारा हम सरलता से प्राप्त कर सकते है कि $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ का योग 360°. है।



इस प्रकार प्रयास कीजिए।

यदि चतुर्भुज उत्तल चतुर्भुज **नहीं है** तो क्या होगा चतुर्भुज को मोडकर दो त्रिभुजो में ब्दलकर उनके अंतर्गत कोणो का योग ज्ञात करो । अ**वत्त**ल चतुर्भुज के आन्तरिक कोणो का योग क्या होगा?



उदा **1** :एक चतुर्भुज के तीन कोण 55°, 65° और 105°. है। तो चौथा कोण क्या होगा?

हल : चतुर्भुज के चारो कोणो का योग 360°.

दिए गए तीन कोणो का योग $= 55° + 65° + 105° = 225°$

इसिलिए चौथा कोण $= 360° - 225° = 135°$

उदा **2 :** एक चतुर्भुज के दो कोण $80°$ और $120°$. है । शेष अन्य दो कोण समान है। तो प्रत्येक कोण का माप क्या होगा?

हल **:** चतुर्भुज के चार कोणो का योग $360°$ है।

दिए गए दो कोणो का योग $= 80° + 120° = 200°$

इसलिए शेष दो कोणों का योग $= 360° – 200° = 160°$

शेष दो कोण समान है।

इसलिए प्रत्येक कोण $= 160° \div 2 = 80°$

उदा **3 :** एक चर्तुभुज कोण $x°$, $(x – 10)°$, $(x + 30)°$ और $2x°$. है। कोण ज्ञात करो ।

हल **:** यहाँ चारो कोणों का योग $= 360°$

इसलिए, $x + (x – 10) + (x + 30) + 2x = 360°$

हल $5x + 20 = 360°$

$x = 68°$

अर्थात चार कोण हैं- $= 68°$; $(68–10)°$; $(68+30)°$; $(2\times68)°$

$= 68°, 58°, 98°$ और $136°$.

उदा **4 :** एक चतुर्भुज के कोणो का अनुपात $3 : 4 : 5 : 6$. है, कोण ज्ञात करे।

हल **:** चतुर्भुज के चार कोणो का योग $= 360°$ है।

कोणो का अनुताप $3 : 4 : 5 : 6$

इसलिए कोण है $3x, 4x, 5x$ और $6x$.

$$3x + 4x + 5x + 6x = 360$$

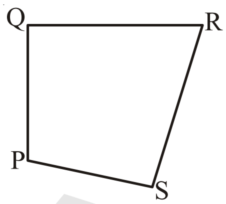
$$18x = 360$$

$$x = \frac{360}{18} = 20$$

यहाँ कोण है $= 3 \times 20; 4 \times 20; 5 \times 20; 6 \times 20$

$= 60°, 80°, 100°$ और $120°$

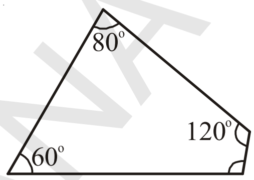
अभ्यास - 1



1. चतुर्भुज PQRS में

(i) भुजाएँ, कोण, शीर्ष एवं कोणों के नाम लिखो।

(ii) आसन्न भुजाएँ, आसन्न कोण, सम्मुख भुजाएँ और सम्मुख कोणो के नाम लिखो।



2. एक चतुर्भुज के तीन कोण $60°$, $80°$ और $120°$. है तो चौथा कोण ज्ञात करो।

3. चतुर्भुज के कोणो का अनुताप $2 : 3 : 4 : 6$. हे तो प्रत्येक कोण का माप ज्ञात करो

4. एक चतुर्भुज उतारिए, जिसके चारो कोण समान हों। प्रत्येक कोण ज्ञात करो।

5. एक चतुर्भुज के कोण $x°$, $(x + 10)°$, $(x + 20)°$, $(x + 30)°$. है। **कोणों का** ज्ञात करो।

6. एक चतुर्भुज के कोणो का अनुपात $1 : 2 : 3 : 6$. नही होगा क्यो? कारण **बताओ**।

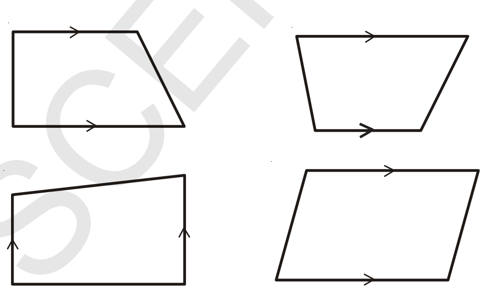
संकेत :- ऐसे चतुर्भुज की रफ आकृति **बनाने** का प्रयास करो।

12.4 चतुर्भुज के प्रकार

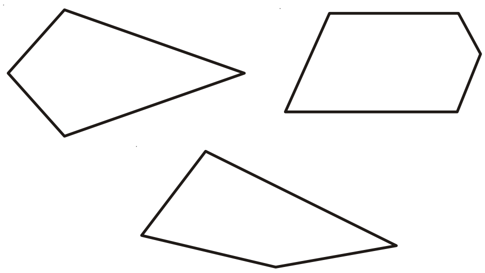
भुजाओ और कोणो के आधार पर भिन्न भिन्न चतुर्भुज के अलग अलग नाम है।

12.4.1 समलम्ब चतुर्भुज

समलम्ब चतुर्भुज की एक जोडी समानान्तर रेखाएँ होती है।



ये समलम्ब चतुर्भुज है

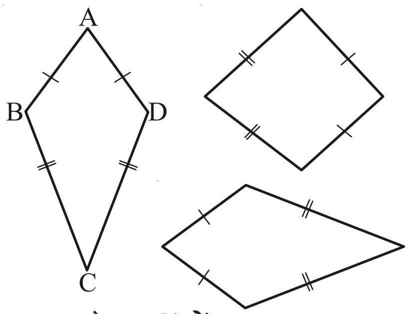


ये समलम्ब चतुर्भुज नही है।

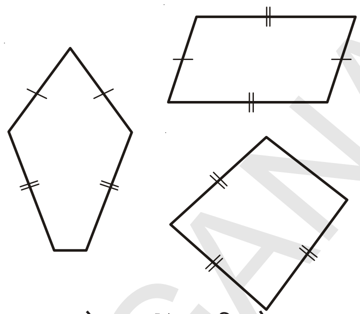
सूचना :- तीर का निशान समानान्तर रेखाओ को सूचित करता है।
दूसरी ओर के चतुर्भुज समानान्तर क्यो नही है?

12.4.2 पतंग (Kite)

चतुर्भुज में दो आसन्न भुजाएँ समान होती है उसे पतंग कहते है। प्रत्येक चित्र में समान चिन्हित की गई भुजाओं की लम्बाई समान है। उदाः के लिए AB = AD और BC = CD.



ये पतंगें **हैं**



ये पतंगें नही है

द्वितीय समूह की आकृतियाँ पतंग क्यो नही है?

ध्यान दो।

(i) पतंग की चार भुजाएँ है (यह एक उत्तल चतुर्भुज है।)

(ii) इसमे दो जोडी सम्मुख भुजाएँ आपस में समान होती है !

प्रयोग **2**

एक मोटा कागज लो । उसे मध्य से मोडो। चित्र में दिखाए अनुसार अलग लम्बाई वाली दो रेखाँए खीचों। दूसरे चित्र में दिखाए अनुसार उन रेखाओ पर से कागज को काट कर खोल दो हमें पतंग का आकार प्राप्त होगा ।

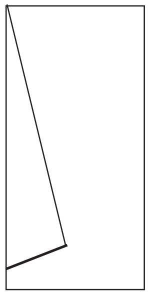


Figure1

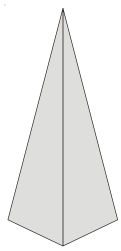


Figure2

क्या पतंग की रेखाएँ **सममिति** है ?

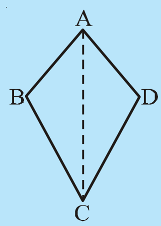
पतंग के दोनो कर्णो को मोडिए । समकोण में काटने के लिए **गुनिये** (Set squares) का **उपयोग** करे!

क्या पतंग के कर्ण समान है ? जांच करो।

(कागज को मोडकर या मापकर **देखिये**) क्या वे कर्ण एक दुसरे को प्रतिच्छेदित करते है?

प्रयास करो

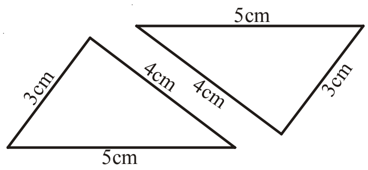
सिद्ध करो की पतंग ABCD में ΔABC और ΔADC सर्व समान है।

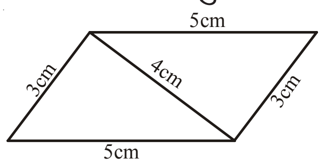


12.4.3 समानान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)

प्रायोगिक कार्य 3

एक ही जैसे दो त्रिभुज के टुकडे लो। जिनकी भुजाएँ 3 से.मी, 4 से.मी, 5 से.मी हो उन्हे निम्न चित्रानुसार जमाओ।



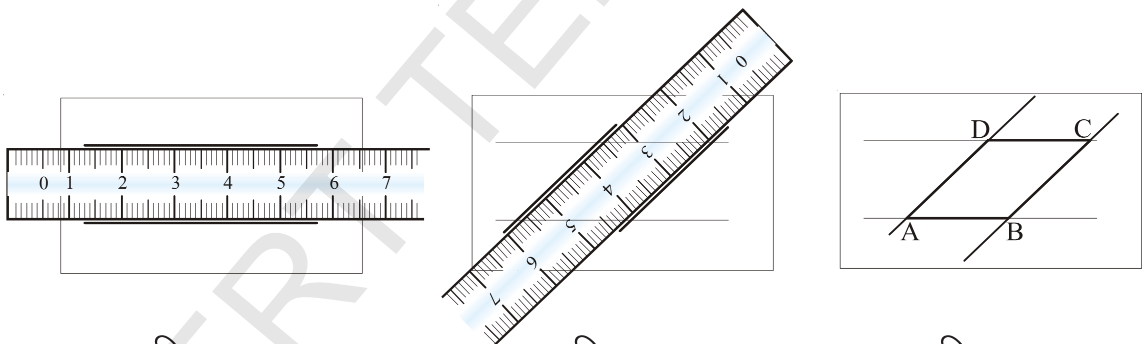


हम समानान्तर चतुर्भुज पाते है। क्या इनकी भुजाएँ समानान्तर है? क्या ये समानान्तर भुजाएँ समान है? आप **इन** त्रिभुजो की सहायता से अन्य दो समानान्तर चतुर्भुज बना सकते है। उन्हे ज्ञात करो।

समानान्तर चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज है जिसकी दो जोडी सम्मुख भुजाएँ समानान्तर होती है

प्रायोगिक कार्य 4

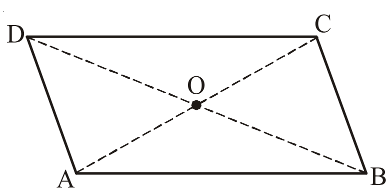
चित्र 1 में दिखाए अनुसार कागज पर स्केल की सहायता से दो रेखाएँ खींचो।

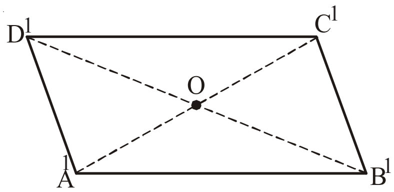


चित्र 1 चित्र 2 चित्र 3

फिर उस पटरी को चित्र 2 के अनुसार उन रेखाओ पर तिरछा रखकर दो और रेखाएँ खींचो जो दो जोडी समानान्तर रेखाओं से मिलकर समानान्तर चतुर्भुज बनाती है।

12.4.3(a) समानान्तर चतुर्भुज के नियम (गुण) समानान्तर चतुर्भुज की भुजाएँ दो एक ही आकार के समानन्तर चतुर्भुज लो उन्हें ABCD और $A^1B^1C^1D^1$ कहो।





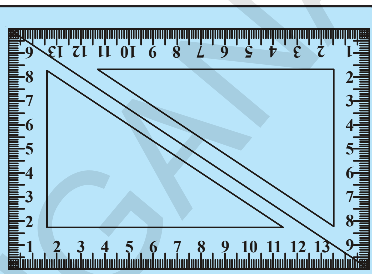
और $\overline{AB}$ यहाँ नाम के अतिरिक्त $\overline{A'B'}$ समान है । ऐसे ही दूसरी आसन्न भुजाएँ भी समान होगी क्या $\overline{A'B'}$ और $\overline{DC}$. क्या वे मिलते हैं। क्या उनकी लंबाई $\overline{A'B'}$ और $\overline{DC}$ समान है।

ऐसे ही $\overline{AD}$ और $\overline{B'C'}$ की लम्बाई जाँचो। आपने क्या **देखा**?

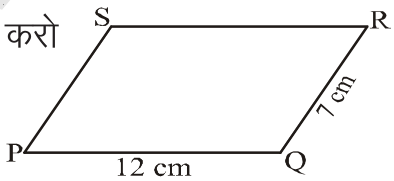
आपने **देखा** कि दोनो ही विधि का परिणाम समान है। यहाँ समानान्तर चतुर्भुज भुजाओ की लम्बई समान होती है।

प्रयास करो

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ कोण वाले दो **गुनिये** लो उन्हे चित्र मे दर्शाए अनुसार जमाओ क्या वे तुम्हे उपर्युक्त गुणो की जाँच करने मे सहायक होंगे। क्या हम कह सकते हैं कि सभी आयात समानान्तर चतुर्भुज होते है।



उदा **5 :** समानान्तर चतुर्भुज PQRS की परिमिति ज्ञात करो



हल **:** समानान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओ की लम्बाई समान होती है।

प्रश्न के अनुसार, PQ= SR = 12 से.मी और QR = PS = 7 से.मी

इस रीति से परिमिति = PQ + QR + RS + SP

= 12 से.मी + 7 से.मी + 12 से.मी + 7 से.मी = 38 से.मी

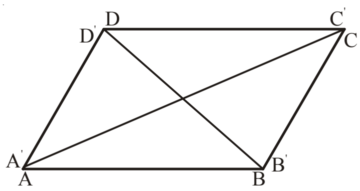
समानान्तर चतुर्भुज के कोण

प्रायोगिक कार्य 6

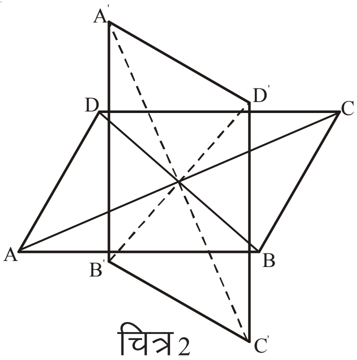
मान लो ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है एक पारदर्शी कागज पर उसे उतारो और A'B'C'D'. नाम दो। A'B'C'D' को ABCD पर लिखो। चित्र 1 के अनुसार - - - - पर जमाओ। जहाँ

कर्ण एक दुसरे से मिलते है। वहाँ पर पिन लगाओ अब पारदर्शी कागज चित्र 2 के अनुसार 90^0 पर घुमाइए। उस समानान्तर चतुर्भुज को भी समान दिशा 90^0 पर घुमाओ। आप चित्र 3 के अनुसार उस समानान्तर चतुर्भुज को पाओगे। आप देखते है कि A बराबर स्थित है C पर, इसी प्रकार B स्थित है D पर।

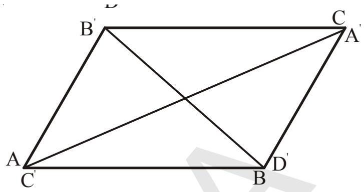
यह दर्शाता है कि और के कोणों के बारे में इसी तरह और कोणों की भी जाँच करो आपके उत्तर को लिखिए।



चित्र 1



चित्र 2



चित्र 3

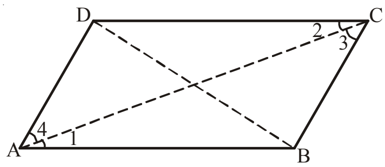
चित्र 3 के अनुसार D होगा B पर **अपनी जानकारी लिखिये।**

प्रयोग करो।

उपयुक्त आधार पर $30° - 60° - 90°$ माप के दो चतुर्भुज लो। क्या ये आकृति उपर्युक्त नियमो की जाँच में सहायक सिद्ध होगी।

आप तर्कानुसार इस उपाय को उचित **कह** सकते है।

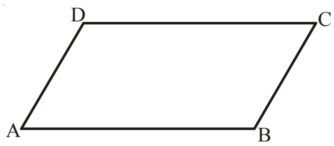
यदि चतुर्भुज ABCD के कर्ण $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ हो तो आप पाओगे $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर कोणो के गुण।)



ΔABC और ΔCDA सर्वसमान है। $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (कोण भुजा कोण स्वयं तथ्यानुसार).

इसलिए, $m\angle B = m\ \angle D$ (c.p.c.t.).

इसी प्रकार , $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, इसिलिए, $m\ \angle A = m\ \angle C$. (c.p.c.t.).



यहाँ समानान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोणो का माप समान होता है।

हम समानान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण की ओर अपना ध्यान देंगे।

चतुर्भुज ABCD में $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ के और $\overline{DA}$ तिर्यक रेखा है।

इसलिए , $\angle A$ और $\angle B$ तिर्यक रेखा के एक ही दिशा के दो आंतरिक कोण होंगे। वे संपूरक कोण होंगे।

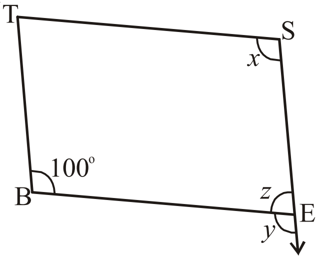
क्या $\angle A$ **और** $\angle B$ भी पूरक कोण है आप **क्या** कह सकते है? क्यों?

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ और $\overline{BA}$ एक तिर्यक रेखा जो $\angle A$ और $\angle D$ आंतरिक कोण है।

इन्हें करिए

उपरोक्त चित्र में किन्हीं और दो पूरक कोणों की जोड़ियाँ पहचानिए।

उदा **6 :** चतुर्भुज BEST में x, y, z का मूल्य ज्ञात करो।



हल : $\angle S$ का सम्मुख कोण $\angle B$ है

इसलिए , $x = 100°$ (सम्मुख कोण समान है)

$y = 100°$ (संगत कोण)

$z = 80°$ (हम कह सकते है $\angle y, \angle z$ समानान्तर कोणो का युग्म है। समानान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण पूरक कोण होंगे।

पूर्व में दिए गए उदाहरण के आधार पर समान परिणाम प्राप्त करते है।

उदा **7 :** चतुर्भुज RING में $m\angle R = 70°$ हो तो अन्य कोण ज्ञात करो।

हल **:** $m\angle R = 70°$ दिया गया है।

तो $m\angle N = 70°$

समानान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण है।

पहले $\angle R$ और $\angle I$ पूरक कोण है

$m\angle I = 180° - 70° = 110°$

और $m\angle G = 110°$ since $\angle G$ and $\angle I$ (समानांतर चतुर्भुज के कोण हैं।)

अर्थात $m\angle R = m\angle N = 70°$ और $m\angle I = m\angle G = 110°$

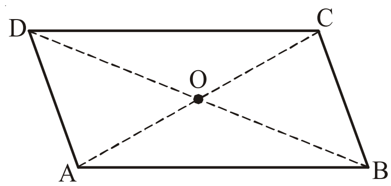
प्रयास करो -

उपयुक्त आधार पर $m\angle I$ और $m\angle G$ दूसरी विधि से

(चतुर्भुज का कोण योग नियम)

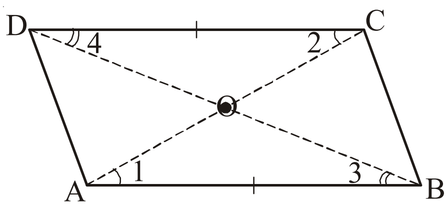
12.4.3 (b) समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण

क्रिया 7



एक ABCD नामांकित चतुर्भुज की आकृति का टुकडा लो । उसके कर्ण $\overline{AC}$ और $\overline{DB}$ डाक दूसरे से O पर मिलते है।

$\overline{AC}$ को मोडकर C और A. का मध्य बिन्दु ज्ञात करो। क्या वह मध्य बिन्दु O के समान है।



$\overline{DB}$ को मोडकर O और D पर B.का मध्य बिन्दु ज्ञात करो क्या वह मध्य बिन्दु O के समान है।

क्या कर्ण $\overline{DB}$ और AC मध्य बिन्दु O पर एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है। अपने मित्रो से इस

विषय पर चर्चा करे। यही क्रिया पुनः दोहराकर DB का मध्य ब्न्दिु कहाँ पर स्थित होगा ज्ञात करो।

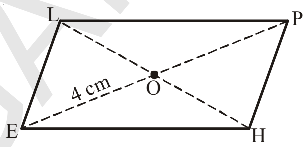
समानान्तर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (कोण भुजा कोण) **क्या** स्वयं तथ्य के अनुसार जाँच करना कठिन होगा। तथ्य के अनुसार जाँच करना कठिन नही होगा।

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (कोण भुजा कोण) का

इससे प्राप्त होगा $AO = CO$ और $BO = DO$

उदा **8 :** HELP एक समानान्तर चतुर्भुज है जिसमें $OE = 4$ जहाँ O कर्णो का प्रतिच्छेदित बिन्दु है क्या HL कर्ण से 5 cm से.मी अधिक होगा।

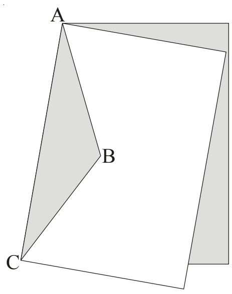


हल : यदि $OE = 4$ से.मी **तब** OP **भी** 4 से.मी होगा क्यो?
इसिलिए $PE = 8$ से.मी (क्यों)
PE कर्ण HL से 5 से.मी अधिक है।
इसिलिए, $HL = 8 + 5 = 13$ से.मी

यहाँ , $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ से.मी

12.4.4 समचतुर्भुज (Rhombus)

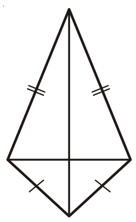
इसके पूर्व हमने पतंग के आकार का कागज काटा था। जैे हम ABC काट कर निकालते है तो हमें पतंग की आकृति मिलेगी। यहाँ AB और BC की लम्बई भिन्न भिन्न है। यदि $AB = BC$, खीचा जाए तो सम चतुर्भुजाकार **बन**ने वाली पतंग समचतुर्भुज कहलाती है।
समचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती है। इसके कर्ण एक **दूसरे को** समद्विभाजित करते है।



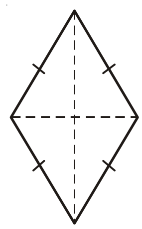
समचतुर्भुज

समचतुर्भुज के सभी गुण समानान्तर चतुर्भुज में भी है।
पतंग में भी यही गुण विद्यमान है। इन सभी की सूची बनाओ।

पुनः अवलोकन करके अपनी सूची की जाँच करो।



पतंग



समचतुर्भुज

समचतुर्भुज के कर्ण एक दुसरे को लम्ब समद्विभाजित करते है।

क्रिया **8**

एक समचतुर्भुज की आकृति का कागज लो। उसे मोड कर उसकी जाँच करो कि उसके कर्ण एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है। ये कर्ण समकोण पर एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है तो वर्ग के किनारे से प्रयोग कर इसकी जांच कर सकते है। तार्किक नियमानुसार गुणो को सिद्ध कर सकते है।

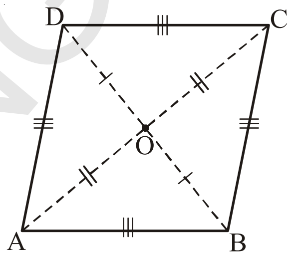
अब इस नियम की जाँच तर्क (logic) चरण द्वारा करेंगे।

ABCD एक समचतुर्भुज है और समानान्तर चतुर्भुज भी है।

इसलिए $OA = OC$ **और** $OB = OD$.

हम देख कर जानेंगे कि $m\angle AOD = m\angle COD = 90°$.

यह ..... (भुजा, भुजा,भुजा) स्वयं **तथ्य** पर आधारित है।



$\Delta AOD \cong \Delta COD$

इसिलिए , $m\angle AOD = m\angle COD$

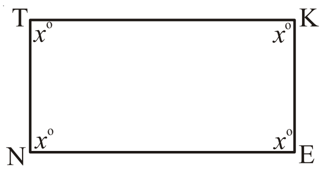
जैसे कि $\angle AOD$ और $\angle COD$ कोणो का युग्म है।

$$m\angle AOD = m\angle COD = 90°$$

निष्कर्ष यह है कि समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को लम्ब समद्विभाजित करते है।

12.4.5 आयत (Rectangle)

आयत वह समानान्तर चतुर्भुज है जिसके कोण समान है। इसकी परिभाषा क्या है? अपने मित्रो से चर्चा करो। यदि आयत के सभी कोण समान है तो उनका माप क्या होगा।



मान लो आयत का प्रत्येक कोण $x°$. है।

$4x° = 360°$ क्यो ?

इसिलिए , $x° = 90°$

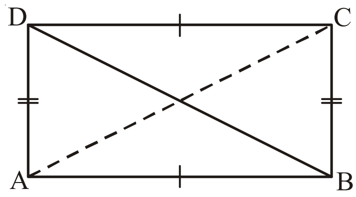
आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है। इसिलिए आयत एक समानान्तर चतुर्भुज है। जिसके प्राय: कोणो का माप समकोण होता है।

समानान्तर चतुर्भुज होने के कारण आयत की सम्मुख भुजाएँ आपस में समान होती है। और इसके कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

एक समानान्तर चतुर्भुज में कर्णो की लम्बाई अलग अलग होती है। पर आश्चर्य यह है कि आयत के कर्णो की लम्बई समान होती है। (यह एक विशेषता है)

सिद्ध करने के लिए यह आसान है।

आयत ABCD is a rectangle,



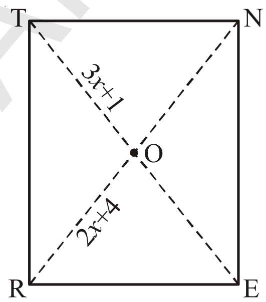
$\Delta ABC \cong \Delta ABD$

क्यों कि $AB = AB$ (एकाकी है)

$BC = AD$ (क्यो?)

$m\angle A = m\angle B = 90°$ (क्यो?)

यह 1 SAS (भुजा कोण भुजा) स्वयं तथ्यानुसार $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ के और $AC = BD$ (c.p.c.t.)
यहाँ आयत के कर्णो की लम्बई समान होती है।



उदा 9 : RENTएक आयत है। जिसके कर्ण एक दुसरे को O पर प्रतिच्छेदित करते है। यदि x, हो तो $= 2x + 4$ और $OT = 3x + 1$. का मान ज्ञात करो।

हल : OT कर्ण TE का आधा **है और** RN का आधा OR है ।

यहाँ कर्ण एक दुसरे के समान है (**क्यों**?)

इसिलिए **उनका आधा** भी समान होता है।

इसिलिए $3x + 1 = 2x + 4$

या $x = 3$

12.4.6 वर्ग (Square)

वर्ग वह आयत है जिसकी आसन्न भुजाएँ समान होती है। अर्थ यह है कि वर्ग में भी आयत के सभी गुण विद्यमान है साथ ही एक अतिरिक्त गुण यह है कि उसकी चारो भुजाओं की लम्बई समान होती है। आयत के समान ही वर्ग के कर्णो की लम्बई भी समान होती है।

आयत में **कर्ण** एक दुसरे को लम्ब समद्विभाजित करने की आवश्यकता नही होती है। (जाँच करो) यह वर्ग के लिए सत्य नही है।

आइए सिद्ध करते है-

BELT एक वर्ग है इसिलिए $BE = EL = LT = TB$

मान लो ΔBOE और ΔLOE तथ्यानुसार

OB=OL (क्यो)

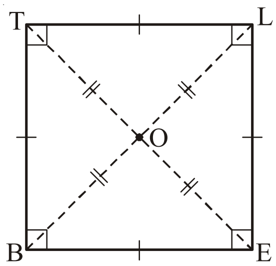
OE **सामान्य** (common) है।

यहाँ SSS (भुजा, भुजा, भुजा) स्वंय तथ्य के अनुसार $\Delta BOE \cong LOE$

इसलिए $\angle BOE = \angle LOE$

किन्तु $\angle BOE + \angle LOE = 180^\circ$ (क्यो)

$$\angle BOE = \angle LOE = \frac{180}{2} = 90^\circ$$



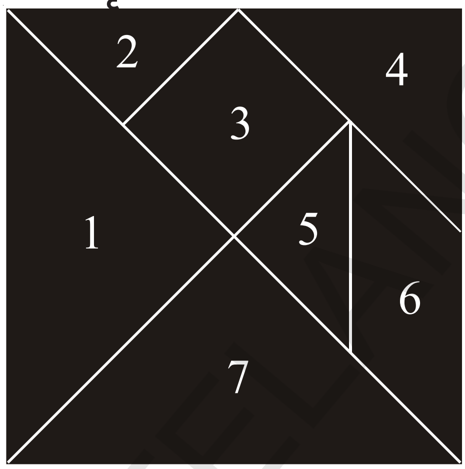
यहाँ वर्ग के कर्ण एक दूसरे को लम्ब समद्विभाजित करते है। वर्गो के कर्णो में

(i) कर्ण एक दुसरे को प्रतिच्छेदित करते है। (वर्ग एक समानान्तर चतुर्भुज है)

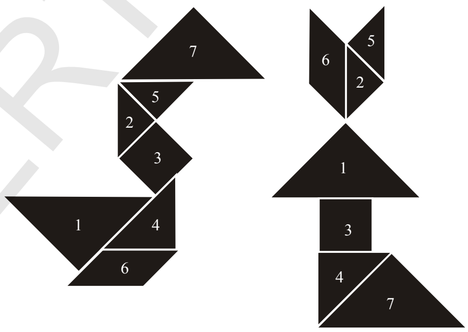
(ii) समान लम्बाई वाले है (वर्ग एक आयत होने के कारण)

(iii) और एक दुसरे पर लंब है।

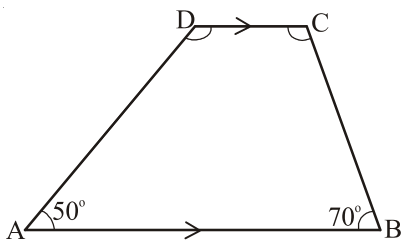
12.5 टैन्ग्राम की सहायता से आकृति बनानाः



इसमे समलम्ब चतुर्भुज, समानान्तर चतुर्भुज, आयत और वर्ग सभी आकार के टुकडो का प्रयोग करो। इन टुकडो का प्रयोग करते हुए कई प्रकार की आकृतियाँ ब्ना सकते है आपको दो उदाहरण दिए गए है।



उदा **10 :** ABCDएक समलम्ब चतुर्भुज में $\overline{AB}$ समानांतर है $\overline{CD}$. If $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. Find $\angle C$ और $\angle D$.



हल : जैसा कि $\overline{AB}$ समानान्तर है $\overline{CD}$

$\angle A + \angle D = 180°$ (तिर्यक रेखा के एक ही दिशा के अंतः कोण है)

इसलिए $\angle D = 180° - 50° = 130°$

इसी प्रकार, $\angle B + \angle C = 180°$

इसिलिए $\angle C = 180° - 70° = 110°$

उदा**11 :** एक समानान्तर चतुर्भुज में दो आसन्न कोणों का अनुपात 3:2 है तो उस चतुर्भुज के कोण ज्ञात करो।

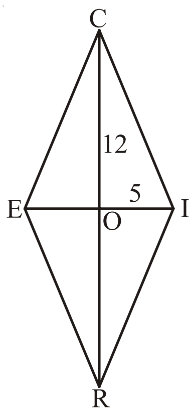
हल : समानान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण पूरक कोण होते है।

उनका योग $= 180°$

आसन्न कोणों का अनुपात $= 3:2$

इसलिए प्रत्येक कोण $180 \times \frac{3}{5} = 108°$ और।

$180 \times \frac{2}{5} = 72°$



उदा **12 :** RICE एक समचतुर्भुज है OE और OR. ज्ञान करो

हल : समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते है।

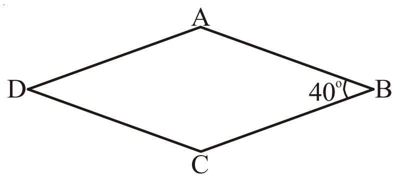
जैस $OE = OI$ और $OR = OC$

इसलिए, $OE = 5$ और $OR = 12$

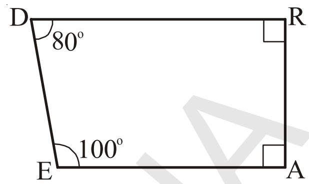
अभ्यास - 2

1. सत्य असत्य लिखो।
   - (i) सभी आयत वर्ग होते है। ( )
   - (ii) सभी समचतुर्भुज, समानान्तर चतुर्भुज होते है। ( )
   - (iii) सभी वर्ग समचतुर्भुज एवं आयत होते है। ( )
   - (iv) सभी वर्ग समानान्तर चतुर्भुज होते है। ( )
   - (v) सभी पतंग समचतुर्भुज होते है। ( )
   - (vi) सभी समचतुर्भुज, पतंग होते है। ( )
   - (vii) सभी समानान्तर चतुर्भुज समलम्ब चतुर्भुज होते है। ( )
   - (viii) सभी वर्ग, समलम्ब चतुर्भुज होते है। ( )
2. वर्ग क्या है समझाइए।
   - (i) चतुर्भुज
   - (ii) समानान्तर चतुर्भुज
   - (iii) समचतुर्भुज
   - (iv) आयत।

3. समचतुर्भुज ABCD में $\angle CBA = 40°$. हो तो अन्य कोण ज्ञात करो।

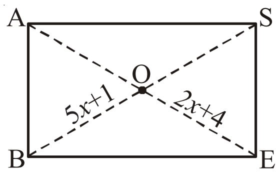


4. समानान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण $x°$ और $(2x + 30)°$. हो तो उसके अन्य कोण ज्ञात करो।



5. DEAR समलम्ब चतुर्भुज है। उसकी कौन-सी दो भुजाएँ समानान्तर है।

6. BASE एक आयत है उसके कर्ण एक दूसरे को 0 पर प्रतिच्छेदित करते है, यदि x, $OB = 5x+1$ और $OE = 2x + 4$ हो तो x का मान ज्ञात करो?



7. ABCD एक समानान्तर चतुर्भुज है यदि $\angle A = 70°$ और तो क्या $\angle C = 65°$? होगा? कारण बताओ।

8. समानान्तर चतुर्भुज के दो आसन्न भुजाओ का अनुपात 5:3 है उसकी परिमिति 48 से.मी है तो भुजाओ की लम्बाई ज्ञात करो?

9. चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे पर लंब हो तो वह चतुर्भुज हमेशा सम चतुर्भुज होगा। चित्र द्वारा सिद्ध करो।

10. ABCD समलम्ब चतुर्भुज में $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. है। यदि $\angle A = \angle B = 30°$, है तो अन्य दो कोणो का माप क्या होगा?

11. रिक्त स्थान भरो:-

(i) समानान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ समान हो तो वह ____________ है।

(ii) समानान्तर चतुर्भुज का एक कोण 90^0 का है और दो आसन्न भुजाएँ समान हो तो वह ____________ है।

(iii) समलम्ब चतुर्भुज ABCD मे $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. है यदि $\angle D = x°$ तो $\angle A$ = ____________.

(iv) समानान्तर चतुर्भुज के प्रत्येक कर्ण ________ त्रिभुजो में विभाजित करते है।

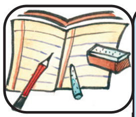
(v) ABCD समानान्तर चतुर्भुज में कर्ण $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ एक दूसरे को o पर प्रतिच्छेदित करते है यदि AO = 5cm हो तो AC = ________ cm होगा।

(vi) ABCD, समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को o पर प्रतिच्छेदित करते है तो $\angle AOB$ = ________ डिग्री होगा।

(vii) ABCD समानान्तर चतुर्भुज है तो $\angle A - \angle C =$ ________ डिग्री।

(viii) ABCDएक आयत है जिसका कर्ण $AC = 10cm$ हो तो कर्ण $BD =$ _______cm. होगा।

(ix) ABCD एक वर्ग है जिसका कर्ण $\overline{AC}$ है तो $\angle BAC =$ __________ डिग्री होगा।



पृष्ठावलोकन

1. चार रेखा खण्डो **की** ब्न्द (संवृत्त) आकृति चतुर्भुज कहलाती है।
2. एक समतल को प्रत्येक चतुर्भुज तीन भागों मे **विभाजित** करता है।
   1) अन्तर्गत 2) बहिर्गत 3) चतुर्भुज
3. प्रत्येक चतुर्भुज एक जोडी कर्ण होती है।
4. यदि चतुर्भुज के कर्ण चतुर्भुज के अन्तर्गत हो तो वह **अवत्तल** चतुर्भुज कहलाता है।
5. चतुर्भुज के आन्तरिक कोणो का योग 360° डिग्री होता है।
6. चतुर्भुज के गुण

चतुर्भुज	गुण
समानान्तर चतुर्भुजः- वह चतुर्भुज है **जिसकी** सम्मुख भुजाओ की जोडी समानान्तर होती है।	(1) सम्मुख भुजाएँ समान होती है (2) सम्मुख कोण समान होते है (3) कर्ण एक दुसरे **को** सम द्विभाजित करते है
समचतुर्भुज :- वह समानान्तर चतुर्भुज है जिसकी सभी भुजाआ की लम्बई समान होती है।	(1) सभी गुण समानान्तर चतुर्भुज के होते है। (2) कर्ण एक दूसरे पर लम्ब होते है
आयत :- वह समानान्तर चतुर्भुज है। जिसके सभी कोण समकोण होते है।	(1) सभी गुण समानान्तर चतुर्भुज के होते है (2) इसका प्रत्येक कोण समकोण होता है (3) कर्ण समान होते है।
वर्ग :- आयत की तरह इसकी भुजाएँ समान होती है।	सभी गुण समानान्तर चतुर्भुज सम चतुर्भुज और आयत के है।
पतंग :- वह चतुर्भुज है जिसकी दो जोडी आसन्न भुजाएँ आपस मे समान होती है।	(1) कर्ण एक दूसरे पर लम्ब होते है (2) कर्णो की लंबाई समान नही होती है (3) कर्ण एक दूसरे **को** समद्विभाजित करते है।
समलम्ब चतुर्भुज :- वह चतुर्भुज है जिसमे एक जोडी भुजाएँ समानान्तर होती है।	1) एक जोडी सम्मुख भुजाएँ समानान्तर होती है।

क्षेत्रफल और परिमिति

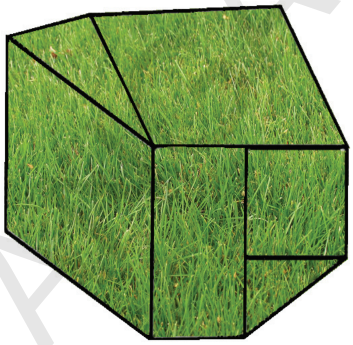
(AREA AND PERIMETER)

13

13.0 परिचय

इसमे आप बेडोल खेत (चित्र 1) का क्षेत्रफल जानना चाहती है। इस लिए उसने अपने खेत को यथा क्रम त्रिभुज, आयत समानान्तर चतुर्भुज, सम चतुर्भुज और वर्ग (चित्र 2) में विभाजित करती है। वह सोचती है कि इन सभी आकारो का क्षेत्रफल ज्ञात करके वह अपने खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कर लेगी।

चित्र 1

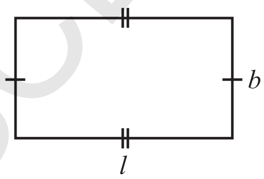
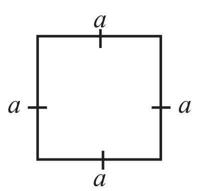


चित्र 2

इससे पूर्व हमने जाना कि वर्ग और आयात का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किया जाता है। इस अध्याय में हम समानान्तर चतुर्भुज त्रिभुज और समचतुर्भुज के क्षेत्रफल को ज्ञात करने की विधि जानेंगे। आइए पूर्व में सीखे गये वर्ग और आयत के क्षेत्रफल एवं परिमिति ज्ञात करने की विधि का पुनः अवलोकन करे।

अभ्यास - 1

1. नीचे दी गई तालिका की पूर्ति करो।

चित्र	आकार	क्षेत्रफल	परिमिति
	आयत	$l \times b = lb$	______
	वर्ग	______	4a

2. कुछ वर्गो का माप नीचे तालिका में दिया गया है। उसमें रिक्त स्थानो की पूर्ति करो।

वर्ग की भुजा	क्षेत्रफल	परिमिति
15 से.मी	225 वर्ग से.मी	
		88 से.मी

3. कुछ आयत के माप की तालिका नीचे दी गई है। उसमें रिक्त स्थानो की पूर्ती करो।

लम्बाइ	चौडाई	क्षेत्रफल	परिमिती
20 से.मी	14 से.मी		
	12 से.मी		60 से.मी
15 से.मी		150 से.मी	

13.1 समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of a parallelogram)

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल चित्र 1 के आकार को देखिए। यह एक समानान्तर चतुर्भुज है। आइए सीखे इस का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किया जाता है।

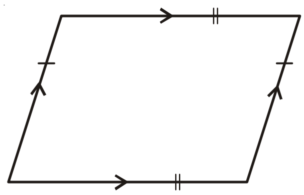


Figure 1

क्रिया 1

- एक कागज पर एक समानान्तर चतुर्भुज उतारिए।
- उसे समानान्तर चतुर्भुजाकार मे काटिए।
- चित्र 2 में दर्शाएनुशार **बिन्दु** रेखा को काटिए। एक त्रिभुजाकार कागज का टुकडा अलग होगा।

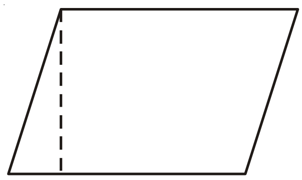


Figure 2

- उस त्रिभुजाकार टुकडे को चित्र 3 में दर्शाएनुशार आकृति के दूसरी ओर लगाइए दोनो टुकडे मिलने पर आयात का निर्माण होगा।

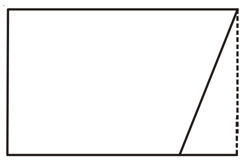


Figure 3

क्या तुम कह सकते हो कि चित्र 2 का समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल चित्र 3 के आयात के क्षेत्रफल के समान होगा? आप पाओगे कि यह सत्य है।

उपर्युक्त क्रिया में आपने देखा कि समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल के समान है।

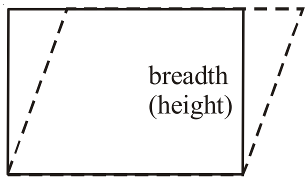
हम जानते है कि आयत का क्षेत्रफल - लम्बाई **X** चौडाई और यह भी जानते हैं कि आयत की लम्बाई समानान्तर चतुर्भुज के आधार बराबर है और आयत की चौडाई समानान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई के समान है।

इसलिए समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल - आयत का क्षेत्रफल

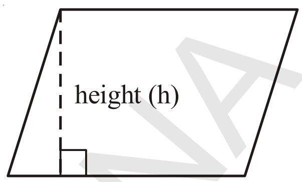
= लम्बाई × चौडाई

= आधार × ऊँचाई (

(लम्बाई = आधार, चौडाई = ऊँचाई)

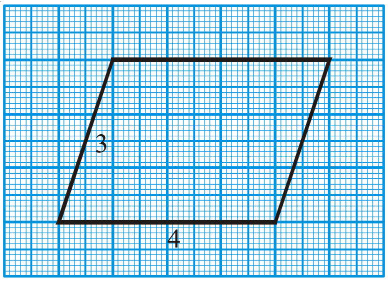


जैसे कि समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल - आधार **(b)** X आसन्न **(h)** भुजा की ऊँचाई **A = bh**



उदाहरण ***1 :*** प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

(i)



हल :

समानान्तर चतुर्भुज का आधार (b) = 4 इकाई

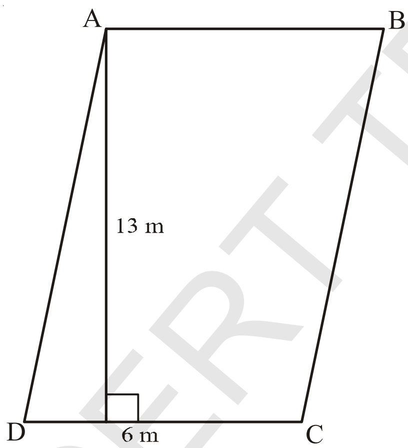
समानान्तर चतुर्भुज की ऊँचाइ (h) = 3 इकाई

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (A) = bh

इसलिए, A = 4 × 3 = 12 वर्ग. इकाई

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल - 12 वर्ग इकाई

(ii)



हल :

समानान्तर चतुर्भुज का आधार (b) = 6 मी

समानान्तर चतुर्भुज की ऊँचाइ (h) = 13 मी

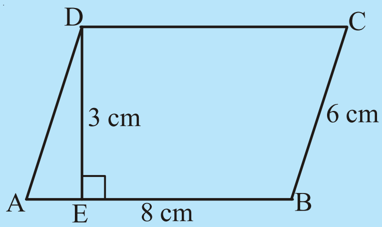
समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (A) = bh

इसलिए , A = 6×13 = 78 वर्ग मी

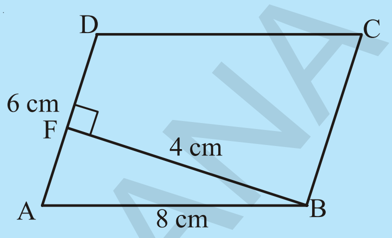
समानान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 78 व.मी होगा।

प्रयास करो

चित्र 1 के समानान्तर चतुर्भुज की भुजाएँ 8 से.मी और 6 से.मी है। उस समानान्तर चतुर्भुज का आधार क्या **होगा**? ऊँचाई क्या **होगा**? उसका क्षेत्रफल क्या **होगा**? चित्र 2 में समानान्तर चतुर्भुज का आधार क्या **होगा**? उसकी ऊँचाई क्या **होगी**? उसका क्षेत्रफल क्या **होगा**? क्या चित्र 1 और चित्र 2 के क्षेत्रफल समान है?

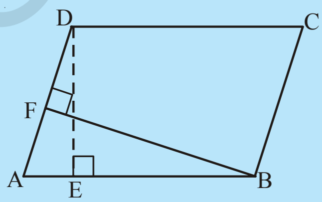


चित्र 1



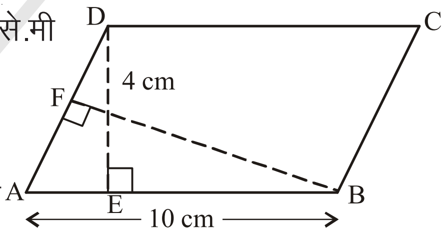
चित्र 2

समानान्तर चतुर्भुज की किसी भी भुजा को हम आधार ले सकते है। चित्र 1 में DE भुजा AB पर लम्ब है। इसलिए AB उस समानान्तर चतुर्भुज का आधार और DE उसकी ऊँचाई है। चित्र 2 में BF भुजा AD पर लम्ब है। जैसे AD उसका आधार है और BF उसकी ऊँचाई है।



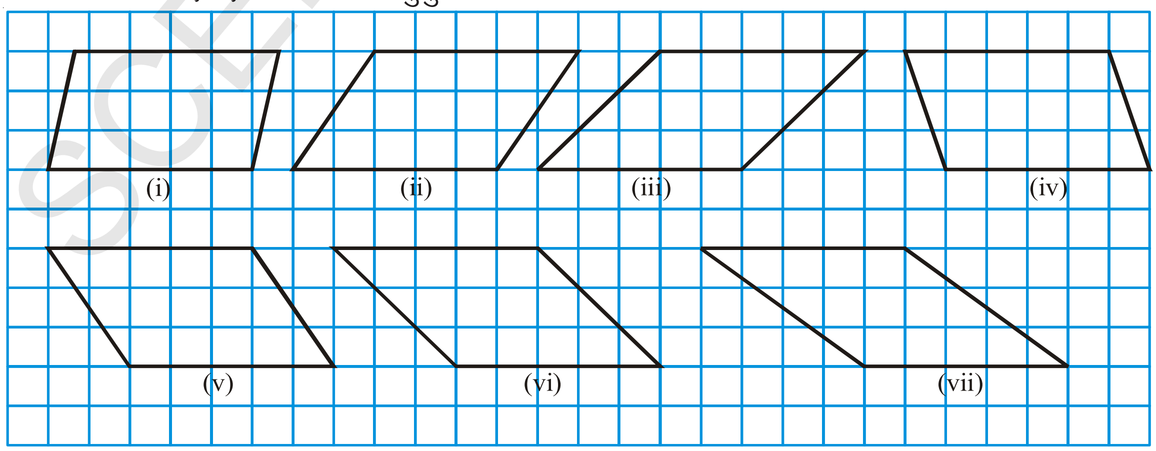
प्रयत्न करो

1. समानान्तर चतुर्भुज ABCDमें AB = 10 से.मी और DE = 4 से.मी



ज्ञात करो (i) ABCD का क्षेत्रफल।
(ii) यदि BF, से.मी हो ता AD = 6 से.मी लम्ब्राई ज्ञात करो

2. नीचे दिएगए समानान्तर चतुर्भुज का गहन अध्ययन करो।

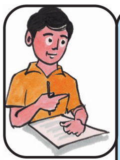


(i) प्रत्येक वर्गों को गिनते हुए हर समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो। हर समानान्तर चतुर्भुज में दो अपूर्ण वर्गों को गिन कर एक पूर्ण वर्ग मानो।

नीचे दी गई तालिका को क्रम बद्ध पूर्ण करो :-

समानान्तर चतुर्भुज	आधार	ऊँचाई	क्षेत्रफल	वर्गों की गिनती से क्षेत्रफल		
				पूर्ण वर्ग की संख्या	अपूर्ण वर्ग की संख्या $\times \frac{1}{2}$	कुल पूर्ण वर्ग
(i)	5 इकाई	3 इकाई	$5 \times 3 = 15$ वर्ग काई	12	$6 \times \frac{1}{2}$	15
(ii)						
(iii)						
(iv)						
(v)						
(vi)						
(vii)						

(ii) समान आधार और समान ऊचाई वाले समानान्तर चतुर्भुज बनाने पर क्या उनका क्षेत्रफल समान होगा।



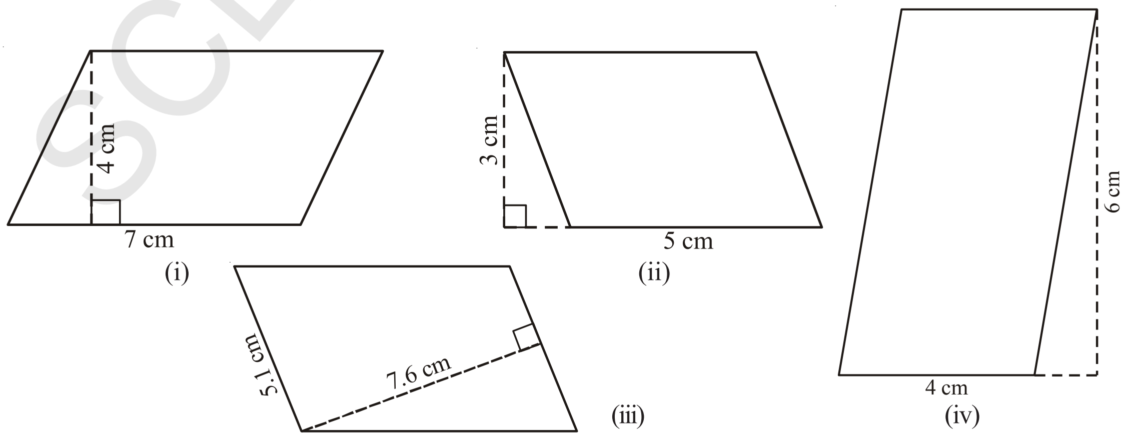
प्रयत्न करो

(i) आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र में और समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र में क्या सम्बन्ध है।

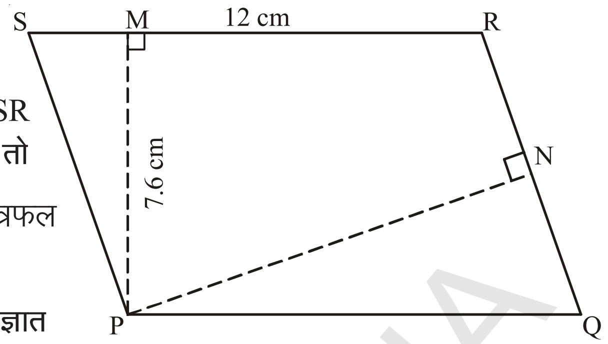
(ii) आयत एक समानान्तर चतुर्भुज है। पर समानान्तर चतुर्भुज एक आयत नही है,

अभ्यास - 2

1. प्रत्येक समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो?



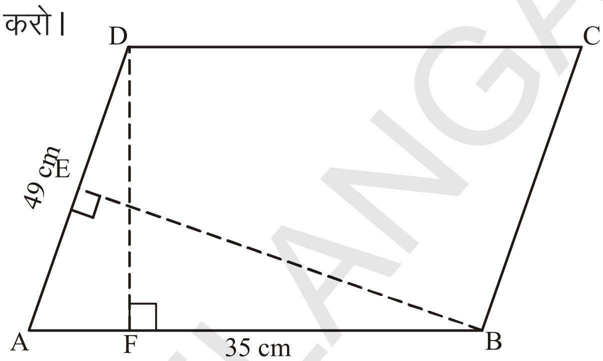
2. PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज है। P से उसकी ऊँचाई $\overline{SR}$ तक PM है और P से उसकी ऊँचाई $\overline{QR}$ तक PN होगी। यदि SR = 12 से.मी. और PM = 7.6 से.मी. हो तो



(i) समानान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

(ii) यदि QR = 8 से.मी. होतो PN ज्ञात करो ।

3. समानान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ DF और BE है तथा उसकी ऊँचाई AB और AD है। उसका क्षेत्रफल 1470 वर्ग से.मी है। यदि AB=35 से.मी और AD=49 से.मी हो तो BE और DF की लम्बाई ज्ञात करो।



4. एक समानान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई उसके आधार का एक तिहाई है। यदि उसका क्षेत्रफल 192 वर्ग से.मी को उसका आधार और ऊँचाई ज्ञात करो।

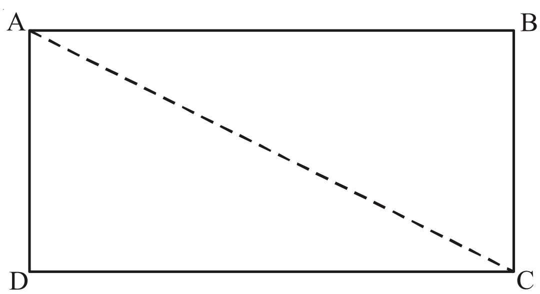
5. एक समानान्तर चतुर्भुज के आधार और ऊँचाई का अनुपात 5:2. है। उसका क्षेत्रफल 360वर्ग मी हो तो आधार और ऊँचाई ज्ञात करो।

6. एक वर्ग और समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल समान है। यदि वर्ग की भुजा 40 से.मी. समानान्त्र चतुर्भुज की ऊँचाई 20 से.मी. हो तो समानान्तर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए ।

13.2 त्रिभुज का क्षेत्रफल

13.2.1 त्रिभुज आयात का भाग होता हैं

आयात का एक भाग है त्रिभुज एक आयात उतारिए एककर्ण द्वारा उसे दो त्रिभुजो में विभक्त करो।



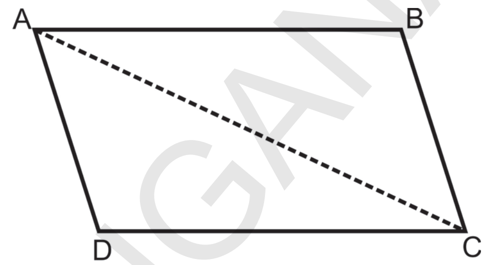
एक त्रिभुज को दुसरे पर रख कर देखे क्या उनका क्षेत्रफल समान है? क्या हम कह सकते है कि

वे त्रिभुज एक दुसरे के अनुरूप है। हम पाते है की दोनो त्रिभुज एक दूसरे के अनुरूप है। इस कारण आयत का क्षेत्रफल दोनो त्रिभुजों के क्षेत्रफल के योग के समान **होता** है।

इसलिये प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (त्रिभुज का क्षेत्रफल)

$$= \frac{1}{2} \times (l \times b) = \frac{1}{2}\, lb$$

13.2.2 त्रिभुज समनान्तर चतुर्भुज **का** भाग **होता है**



चित्र के अनुसार एक समनान्तर चतुर्भुज लो उसे एक कर्ण के साथ काटे हम दो त्रिभुज पाते है। दोनो त्रिभुज का एक दूसरे पर रखने क्या वे समान आकार के होगें उनका क्षेत्रफल समान होगा?

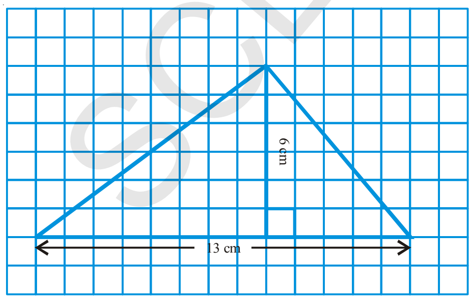
हम पाते है कि समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल दो त्रिभुजो के क्षेत्रफल के योग समान होगा।

इसलिए प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (समनान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (आधार $\times$ ऊँचाई)

$$= \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2}\, bh$$

उदा -2 त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो



हल :

त्रिभुज का आधार (b) = 13 सें.मी.

त्रिभुज की ऊँचाई (h) = 6 सें.मी.

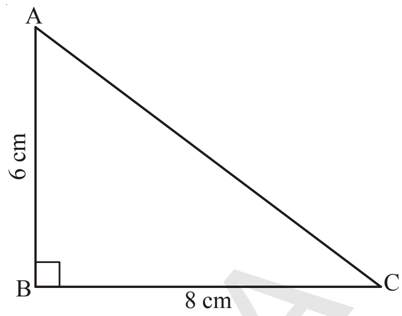
त्रिभुज का क्षेत्रफल (A) $= \frac{1}{2}$ (**आधार** $\times$ ऊँचाई) या $\frac{1}{2}\, bh$

इसलिए, $A = \frac{1}{2} \times 13 \times 6$

$= 13 \times 3 = 39$ सें.मी.^{2}

इसलिए त्रिभुज का क्षेत्रफल 39 सें.मी.^{2} है

उदा 3 : **त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो**



हल: **त्रिभुज का आधार** (b) $= 8$ सें.मी.

त्रिभुज की ऊँचाई (h) $= 6$ सें.मी.

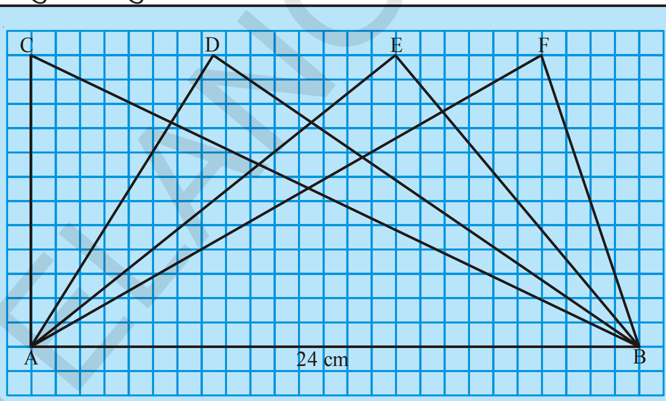
त्रिभुज का क्षेत्रफल (A) $= \frac{1}{2}$ bh

इसलिए, $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ सें.मी.^{2}

इसलिए ΔABC का क्षेत्रफल $= 24$ सें.मी.^{2}

ध्यान दो की समकोण त्रिभुज दो भुजाएँ उसकी ऊँचाई भी है।

प्रयास करो



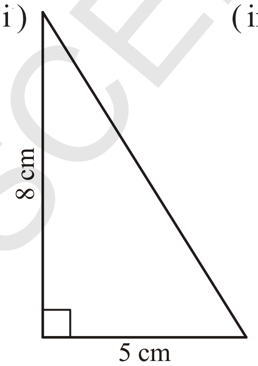
इस चित्र के सभी त्रिभुज का आधार AB = 24 सें.मी. है। क्या आधार AB पर बनाए गए सभी त्रिभुज की ऊँचाई समान है?

क्या सभी त्रिभुज का क्षेत्रफल है। उत्तर की सहायता से कारण बताओ क्या वे एक दूसरे के अनुरूप है?

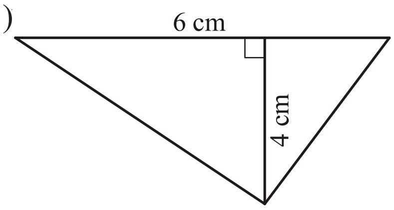
अभ्यास - 3

1. नीचे दिए गए त्रिभुजों के **क्षेत्रफल** ज्ञात करो।

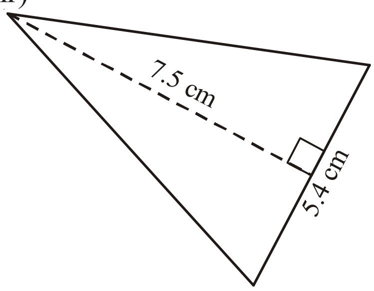
(i)



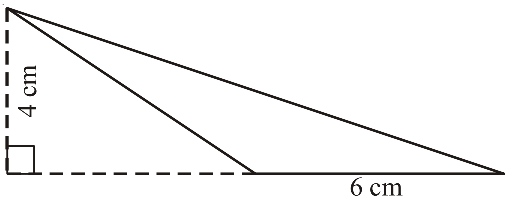
(ii)



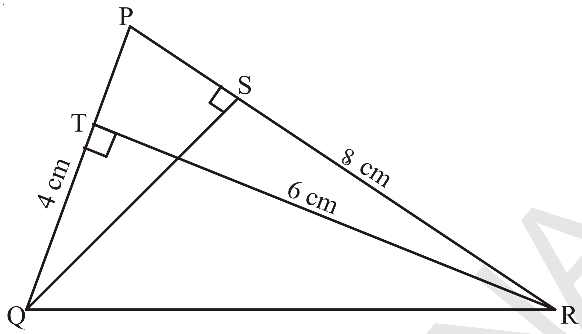
(iii)



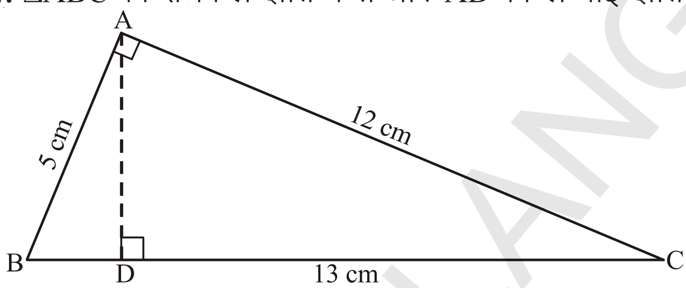
(iv)



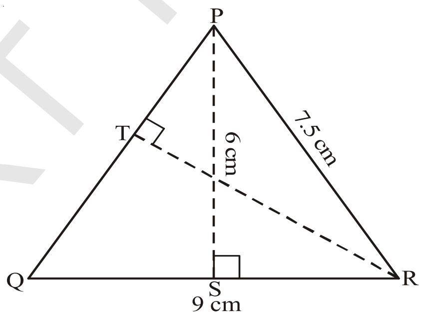
2. ΔPQR में, $PQ = 4$ सें.मी , $PR = 8$ सें.मी , $RT = 6$ सें.मी. है ।तो (i) ΔPQR का क्षेत्रफल ज्ञात करें (ii) QS की लम्बाई ज्ञात करो.



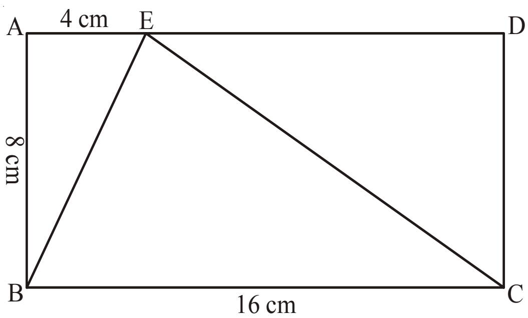
3. ΔABC में A पर समकोण है । BC पर AD लम्ब है । $AB = 5$ सें.मी, $BC = 13$ सें.मी., $AC = 12$ सें.मी. ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात करो और AD की लम्बाई ज्ञात करो .



4. ΔPQR एक समद्विवाह त्रिभुज है। जिसमें $PQ = PR = 7.5$ सें.मी और $QR = 9$ सें.मी है. P से QR पर PS ऊँचाई 6 सें.मी है। . ΔPQR का क्षेत्रफल ज्ञात करो. PQ से R की ऊँचाई RT ज्ञात करो.

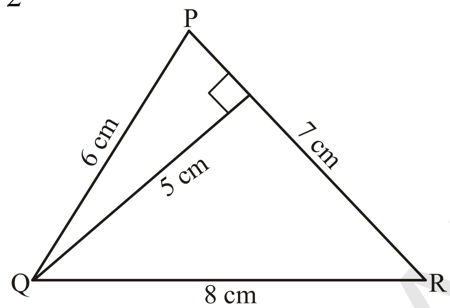


5. ABCD आयत में $AB = 8$ सें.मी, $BC = 16$ सें.मी और AE=4 सें.मी है. ΔBCE का क्षेत्रफल ज्ञात करे. ΔBAE और ΔCDE के क्षेत्रफल का योग Δ BEC के क्षेत्रफल के समान होगा, क्यों?



6. रामू ने कहा कि ΔPQR का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \times 7 \times 5$ सें.मी^{2}

रामू ने कहा कि यह है - $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5$ सें.मी^{2}. दोनों मे सत्य कौन है और क्यो।

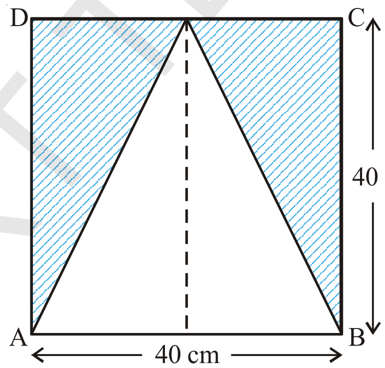


7. त्रिभुज का क्षेत्रफल 220 वर्ग सें.मी है। जिसकी ऊँचाई 11 सें. मी. है, तो उसका आधार ज्ञात करो।

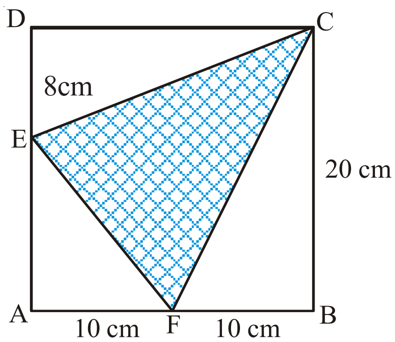
8. त्रिभुज की ऊँचाई आधार की दुगनी है। यदी उसका क्षेत्रफल 400 वर्ग सें.मी. है तो आधार की लम्बाई और ऊँचाई ज्ञात करें।

9. त्रिभुज का क्षेत्रफल उस आयत के क्षेत्रफल के समान है । जिसकी लम्बाई और चौडाई लगभग 20 सें.मी. और 15 सें.मी. है। त्रिभुज का आधार 30 सें.मी हो तो ऊँचाई का ज्ञात करो।

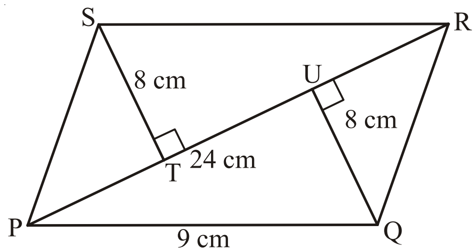
10. चित्र में ABCD छायंकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



11. चित्र में ABCD छायंकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



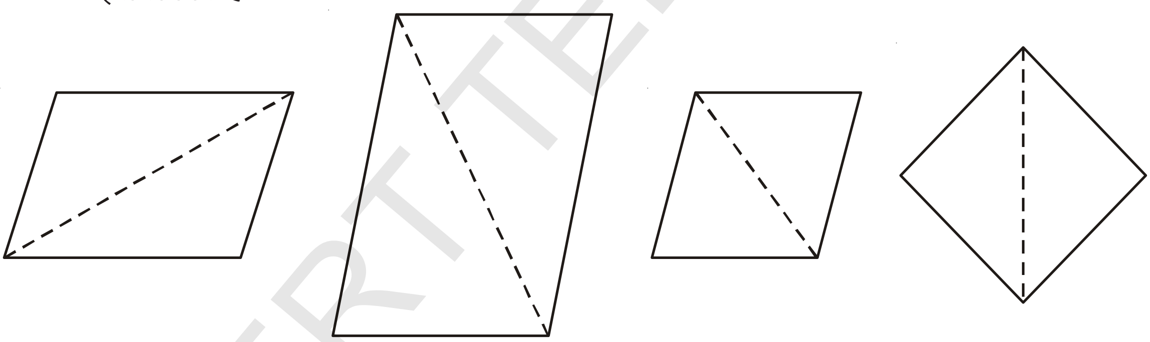
12. समानान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात करें। यदि PR = 24 सें.मी., QU = ST = 8 सें.मी.



13. त्रिभुज के आधार और ऊँचाई का अनुपात 3:2 है। यदि उसका क्षेत्रफल 108 वर्ग सें.मी है तो आधार और ऊँचाई ज्ञात करें।

13.3 समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

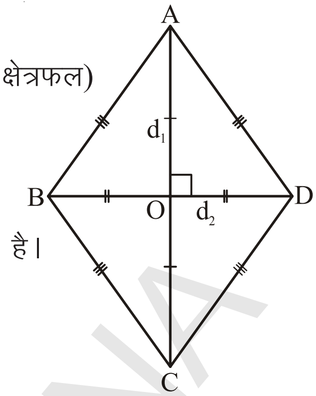
संतोष और अखिला दोनो अच्छे मित्र है। दोनों ने कागज के टुकडे से खेलना प्रारंभ किया। एक दिन संतोष ने अखिला को भिन्न-२ कागज के टुकडे दिए । उन टुकडों से उसने भिन्न भिन्न समनान्तर चजुर्भुजाकार आकृतियाँ बनाई वे इस प्रकार है।



संतोष ने अखिला से पूछा किस समनान्तर चतुर्भुज की भुजाएँ समान है। अखिला ने उत्तर दिया अन्तिम दो की भुजाएँ समान है। संतोष ने कहा यदि समनान्तर चतुर्भुज की सभी भुजाएँ समान है तो वह समचतुर्भुज कहलाता है। आइए सीखे कि समचतुर्भुज का क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किया जाता है।

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल भी समनान्तर चतुर्भुज की तरह उसे दो सर्व समान त्रिभुजों मे विभक्त करके ज्ञात करेंगे।

ABCD एक समचतुर्भुज है।



ABCD समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = (ΔACD का क्षेत्रफल) + (ΔACB का क्षेत्रफल)

$$= \left(\frac{1}{2}\times AC\times OD\right)+\left(\frac{1}{2}\times AC\times OB\right)$$

कर्ण एक दूसरे की लम्ब समद्विभाजित करते है।

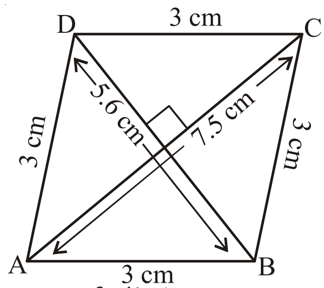
$$= \frac{1}{2}AC\times(OD+OB) = \frac{1}{2}AC\times BD$$

$$= \frac{1}{2}d_1\times d_2 \quad (AC=d_1 \text{ और } BD=d_2)$$

दूसरे शब्दों मे कह सकते है की समचतुर्भूज का क्षेत्रफल उसके कर्णो के गुणनफल के आधे के समान होगा।

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\ d_1d_2$$

उदा **4 :** ABCD समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञान करो।



हल : कर्ण को लम्बाई (d_1) = 7.5 सें.मी

दूसरे कर्ण की लम्बाई (d_2) = 5.6 सें.मी

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2}\ d_1\ d_2$

इसलिए, A = $\frac{1}{2}\times 7.5\times 5.6 = 21$ वर्ग सें.मी

इसलिए, ABCD समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 21 वर्ग सें.मी

उदा **5:** समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 60 वर्ग सें.मी है। यदि एक कर्ण 8 सें.मी है तो दूसरा कर्ण ज्ञात करों।

हल : कर्ण को लम्बाई (d_1) = 8 सें.मी

दूसरे कर्ण की लम्बाई = d_2

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times d_1\times d_2$

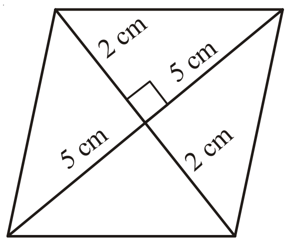
इसलिए, 60 = $\frac{1}{2}\times 8\times d_2$

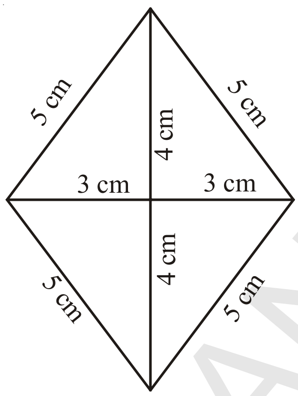
d_2 = 15 सें.मी

इसलिए, दूसरे कर्ण की लम्बाई15 सें.मी

अभ्यास – 4

1.नीचे दिए गये समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो?





2. रिक्त स्थानो का मूल्य ज्ञात करो-

कर्ण -1 (d_1)	कर्ण -2 (d_2)	समचतुर्भुज का क्षेत्रफल
12 सें.मी	16 सें.मी	
27 सें.मी		2025 वर्ग मी. मी
24 मी	57.6 मी	

3. यदि समचतुर्भुज का क्षे.फ 216 वर्ग सें.मी और कर्ण की लं 24 सें.मी हो तो दूसरे कर्ण की लम्बाई ज्ञात करो।

4. एक मकान का फर्श बनाने के लिए 3000 सम चतुर्भुजकार टाइल्स का प्रयोग किए गया यदि प्रत्येक टाईल्स के कर्ण 45 सें.मी और 30 सें.मी प्रति वर्ग मी कि दर से फर्श पर पालिश करने का कुल खर्च ज्ञात करो, यदि ₹ 2.50 प्रति वर्ग मीटर हो

13.4 वृत्त की परिमीति (Circumference of a circle)

नाजिया एक साइकिल के पहिए से खेल रही है, वह दौडती हुए छडी की - (इ.एम) सहायता से पाहिए को घुमा रही है पाहिया एक बार घूमने में कितनी दूरी तय करता है? पहिया एक बार घूमने में जितनी दूरी तय करता है उस पहिए की लम्बाई भी उतनी ही है। उस पहीए की गोलाकार लम्बाई ही उस पहिए की परिमिती होगी। पहिए द्वारा तय की गई द्वारा तय की गयी दूरी उसके घूमने की संख्या में परस्पर क्या सम्बन्ध है।

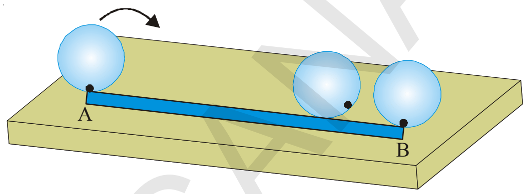
पहिए द्वारा तय की गई दूरी = पहिए की घूमने की

संख्या × पहिए की गोलाकार लम्बाई

क्रिया - 2

जया ने एक अट्टे को गोलाकार काटा उसे सजाने (इं.एम) के लिए वह गोले के चारो ओर लेस चिपकाना चाहती है, इस रीति से उस अट्टे की परिमिति जितनी लम्बे लेस की आवश्यकता होगी क्या वह पटरी की सहायता से उस अट्टे की परीमिति माप सकेगी।

आइए देखते है जया क्या-क्या करती है।



जया ने टेबल पर एक रेखा खीचीं उसके प्रारंभ मे बिंदु A लगाया, फिर उसने अट्टे के एक किनारे पर चिन्ह लगाया। उस चिन्हित भाग को रेखा पर गोलाकार अट्टे के चिन्हित भाग पर रखा। फिर रेखा पर A बिन्दू से उसे घुमाने लगी तब तक घुमाती रही जब तक वह घूम कर पुनःचिन्हीत भाग तक आ गया। जिस स्थान पर वह चिन्हीत भाग आया उसे बिन्दू B लगाया अब AB की लम्बाई उस गोलाकार अट्टे की परिमीति समान होगी उसे AB की लम्बाई जितनी लम्बे लेस की आवश्यकता होगी।

प्रयोग करो-

एक बोतल का ढक्कन लो एक चूडी अन्य कोई गोलाकार वस्तु लो इस विधि से उसकी परिमिती ज्ञात करो।

ऊपर बताई गई विधि से प्रत्येक गोलाकार वस्तु की परिमिति ज्ञात करना आसान नही है इसलिए हम इसकी विधि का प्रयोग करेगे आइए देखें की वृत्त के व्यास और परिधि में कोई परस्पर सम्बन्ध है। एक व्यक्ती ने अलग अलग त्रिज्या **वाले** — वृत्ताकार अट्टे लेकर उनकी परिधि ज्ञात की उसने उनके व्यास और परीधि का अनुपात भी जाना।

उसके व्दारा जाँच की गाई तालिक निम्न है-

वृत्त	त्रिज्या	व्यास	परीधि	परीधि और व्यास का अनुपात
1.	3.5 सें.मी	7.0 सें.मी	22.0 सें.मी	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 सें.मी	14.0 सें.मी	44.0 सें.मी	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 सें.मी	21.0 सें.मी	66.0 सें.मी	
4.	21.0 सें.मी	42.0 सें.मी	132.0 सें.मी	
5.	5.0 सें.मी	10.0 सें.मी	32.0 सें.मी	
6.	15.0 सें.मी	30.0 सें.मी	94.0 सें.मी	

ऊपर दी गई तालिका से आपने क्या जाना। क्या परिधि और व्यास का अनुपात सभी वृत्तों में लगभग समान है। क्या हम कह सकते है की वृत्त की परिधि हमेशा उसके व्यास को तिगुनी होती है।

वृत्त के परिधि उसके व्यास का अनुपात $\frac{22}{7}$ या 3.14. होगा इस रीति से यह स्थिर है (π पै) व्दारा सूचित किया जाता है।

इसलिए , $\frac{c}{d} = \pi$ यहाँ वृत्त की परिधि 'c' है और वृत्त का व्यास 'd'

जैसे, $\frac{c}{d} = \pi$

$c = \pi d$

जैसे की वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का दुगुना होता है, $d = 2r$

$c = \pi \times 2r$ या $c = 2\pi r$

इस रीति से वृत्त की परिधि = **πd** या **2πr**

उदा **6** : वृत्त की परिधि ज्ञात करो जिसका व्यास 10 सें.मी है ($\pi = 3.14$ लो) हल उ वृत्त का व्यास 10 सें.मी

वृत्त की परिधि

हल **:** वृत्त का व्यास (d) = 10 सें.मी

वृत्त की परिधि (c) $= \pi d$

$= 3.14 \times 10$

c = 31.4 सें.मी

इस रीति से वृत्त की परिधि 31.4 सें.मी

उदा **7 :** 14 सें.मी त्रीज्य वाले वृत्त की परिधि ज्ञात करो. ($\pi = \frac{22}{7}$ लो)

वृत्त की त्रिज्या (r) = 14 सें.मी

वृत्त की परिधि (c) $= 2\pi r$

इसलिए, $c = 2 \times \frac{22}{7} \times 14$

c = 88 सें.मी

इस रीति से वृत्त की परिधि 88 सें.मी होगी

अभ्यास - 5

1. वृत्त की परिधि ज्ञात करों जिसकी त्रिज्याएँ दी गई है।

   (i) 35 सें.मी (ii) 4.2 सें.मी (iii) 15.4 सें.मी

2. वृत्त की परिधि ज्ञात करों जिनके व्यास है।

   (i) 17.5 सें.मी (ii) 5.6 सें.मी (iii) 4.9 सें.मी

3. (i) $\pi = 3.14$, लेकर वृत्त की परिधि ज्ञात करो। जिनकी त्रिज्याएँ है।

   (a) 8 सें.मी (b) 15 सें.मी (c) 20 सें.मी

   (ii) 44 सें. मी परिधि वाले वृत्त की त्रीज्य $\pi = \frac{22}{7}$ लेकर ज्ञात करें।

4. यदि वृत्त की परिधि 264 सें. मी हो तो उसका त्रीज्य ज्ञात करो। ($\pi = \frac{22}{7}$ ले)

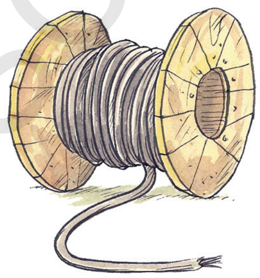
5. 33 सें.मी परिधि वाले वृत्त का व्यास ज्ञात करो।

6. 35 सें. मी त्रिज्या वाला पहिया 660 सें.मी दूरी तय करने के लिये कितनी बार घूमेगा. ($\pi = \frac{22}{7}$ ले)

7. दो वृत्तो के व्यास का अनुपात 3 : 4 है तो दोनो वृत्तो की परिधि का अनुपात ज्ञात करो।

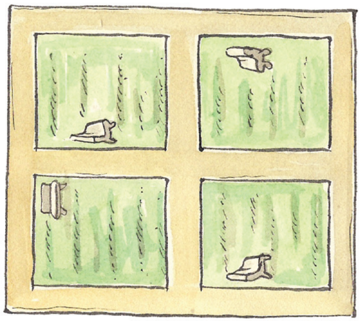
8. एक रोड रोलर 2200 मी दूरी तय करने के लिए 200 बार घूमता है तो उस रोड रोलर की त्रिज्या ज्ञात करों।

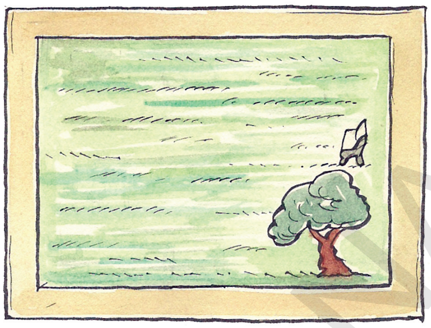
9. एक गोलाकार घडी के मिनट का काँटा 15 सें.मी दूरी तय करता है वह मिनट का काँटा 1 घण्टे में कितना दूरी तय करेगा। ($\pi = 3.14$ ले)



10. 25 सें.मी वाले गोले पर तार लपेटा गया उसे सीधा करने वर्ग में बदला गया तो उस वर्ग की लम्बाई क्या होगी?

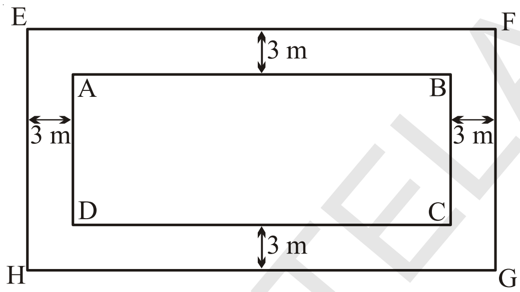
13.5 आयताकार रास्ता (Rectangular Pathway)





बगीचे के बाहर चारो ओर रास्ता है। आइए सीखे उस रास्ते का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करें। तथा उसे बनाने में लगने वाले खर्च ज्ञात करने में उसका प्रयोग करें।

उदा **8** - 60 मी. लम्बा और 40 मी. चौडा आयताकार स्थल है। उसके चारों ओर बाहर 3 मी चौडा रास्ता बना है तो रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



हल : मान लो ABCD दिया गया स्थल है। जिसके चारो ओर 3 मी रास्ता है, रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिये बडे आयत EFGH के क्षेत्रफल में से छोटे आयत ABCD का क्षेत्रफल घटाए

भीतरी आयत ABCD की लम्बाई = 60 मी

भीतरी आयत ABCD की लम्बाई = 40 मी

ABCD आयताकार स्थल का क्षे. फ = (60 x 40) वर्ग मी

= 2400 वर्ग मी

रास्ते की चौडाई = 3 मी

बाहरी आयत EFGH की लम्बाई = 60 मी+ (3+3) मी

= 66 मी

बाहरी आयत EFGH की चौडाई = 40 मी + (3+3) मी

= 46 मी

EFGH बाहरी आयताकार स्थल का क्षे. फ = 66 x 46 वर्ग मी

= 3036 वर्ग मी

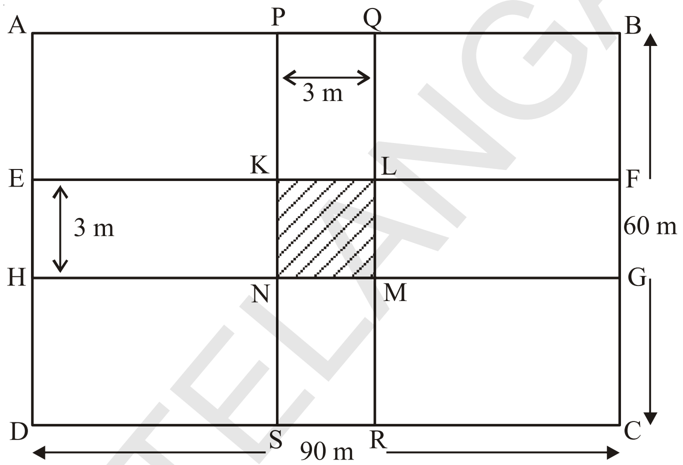
इसिलिए रास्ते का क्षे. फ = (3036 - 2400) वर्ग मी

= 636 वर्ग मी

उदा **9-** एक आयताकार खेत के माप 90 मी और 60 मी है, जिसके मध्य से उसे 3 मी चौडे दो समानान्तर रास्ते बनाए गए है जो एक दूसरे की मध्य से काटते है तो ज्ञात करो।

(i) रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

(ii) ₹ 110 प्रति वर्ग मी की दर से रास्ते को बनाने का खर्च ज्ञात करो।



हल. मान लो ABCD एक आयतकार खेत है PQRS और EFGH 3 मी चौडे रास्ते है।

(i) रास्ते PQRS और EFGH का मध्य भाग KLMN है जो दो बार बनता है। इसलिए उसे बार घटना होगा।

प्रश्न के आधार पर हम जानते है की PQ = 3 मी, और PS = 60 मी.

EH = 3 मी, और EF = 90 मी. KL = 3 मी, और KN = 3 मी.

रास्ते का क्षेत्रफल = PQRS आयत का क्षेत्रफल + EFGH आयत का क्षेत्रफल
- KLMN वर्ग का क्षेत्रफल

$= (PS \times PQ) + (EF \times EH) - (KL \times KN)$

$= (60 \times 3) + (90 \times 3) - (3 \times 3)$

$= (180 + 270 - 9)$ वर्ग मी

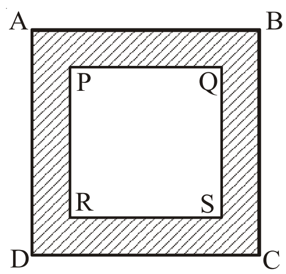
$= 441$ वर्ग मी

(ii) बनाने का खर्च = ₹ 110 प्रति वर्ग मी

रास्ते के निर्माण का खर्च = 110×441

= ₹ 48,510

उदा **10**. 100 मी भुजा वाले वर्गकार बगीचे के बाहर 5 मी चौडा रास्ता बना है। तो रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करों। ₹ 250 प्रति 10 वर्ग मी. कि दर से रास्ते पर सीमेन्ट लगाने का खर्च ज्ञात करो।



हल : मान लो PQRS एक वर्गाकार खेत है जिसकी भुजा 100 कि.मी.है। छायांकित भाग रास्ते को सूचित करता है।

AB की लम्बाई = 100 + (5 + 5) = 110 मी

वर्ग PQRS का क्षेत्रफल = (भूजा)^2 = (100 मी)^2 = 10000 वर्ग मी

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = (भूजा)^2 = (110 मी)^2 = 12100 वर्ग मी

इसलिए रास्ते का क्षेत्रफल = (12100 - 10000) = 2100 वर्ग मी

प्रति 10 वर्ग.मी. पर सीमेन्ट लगाने का खर्च= ₹ 250

प्रति 1 वर्ग.मी. पर सीमेन्ट लगाने का खर्च = $\frac{250}{10}$

2100 वर्ग.मी. सीमेन्ट लगाने का खर्च = $\frac{250}{10} \times 2100$

= ₹ 52,500

अभ्यास - 6

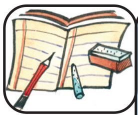
1. 45 मी भूजा वाले वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसे चारो ओर 2.5 मी. चौडा रास्ता बना है। तो रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

2. एक विद्यालय के बीचोबीच 18 मी. लम्बा और 12.5 मी चौडा हाल है। उसके दीवारों से 50 सें.मी. की दूरी फर्श पर कारपेट नहीं बिछा है तो कारपेट का क्षेत्रफल फर्श और खुले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करों।

3. एक वर्गाकार घास के मैदान की भूजा 80 मी है। जिसमें टहलने के लिए 4 मी चौडे समानान्तर रास्ते बने है। जो मैदान के मध्य मे एक दूसरे को विभक्त करते है। तो रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करों।

4. माप वाले कमरे के चारो ओर 2 मी चौडे वरंडा बना है। कमरे की लंबाई-चौड़ाई क्रमशः $8\,m \times 5\,m$. है। तो वरंडे का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

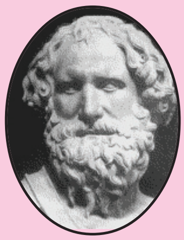
5. एक आयताकार बगीचे की लम्बाई 700 मी और चौडाई 300 मी है। जिसके मध्य में 10 मी चौडे दो समानान्तर रास्ते बने है। जो एक दूसरे के मध्य में विभक्त करते है तो रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करो और शेष बगीचे का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



पूर्वावलोकन

- समानान्तर चतुर्भूज का क्षेत्रफल उसके आधार (b) और ऊँचाई (h) के गुणनफल के समान है वह है $A = bh$ समानान्तर चतुर्भुज की किसी भी भूजा को हम आधार मान सकते है।
- त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार (b) और ऊँचाई (h) के गुणनफल का आधा होगा वह है-$A = \frac{1}{2}$ bh.
- समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके कर्णों के गुणनफल का आधा होगा वह है - $\mathbf{A} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.
- वृत्त की परिधि $= 2\pi r$ जहाँ वृत्त की त्रिज्या r और $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14

आर्कमिडीज (ग्रीस) 287-212 ई.पू.
इन्होंने पहली बार π की गणना की।
इन्होंने वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल की गणना करने के लिए सूत्र की खोज की।



3 डी और 2डी आकृतियों को पहचानना

(2D AND 3D SHAPES - UNDERSTANDING)

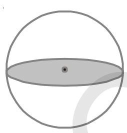
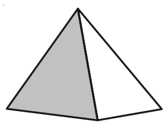
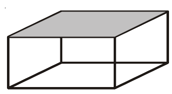
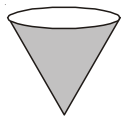
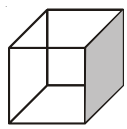
14

14.0 परिचय

कक्षा 6 में हमने विभिन्न त्रिविमीय आकृतियों का परिचय दिया। उनके फलक (तल) का शीर्ष तथा किनारों की जानकारी दी। सर्व प्रथम कक्षा में प्राप्त पूर्वज्ञान की पुनरावृत्ति करेंगे।

अभ्यास - 1

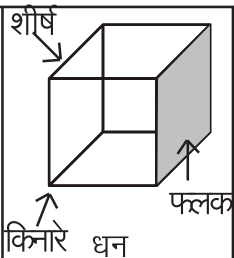
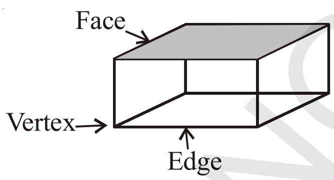
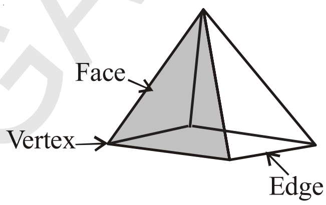
1. नीचे कुछ वस्तुओं के चित्र दिए गये हैं उन्हें विभिन्न श्रेणियों में विभिक्त करके उनकी आकृति के अनुसार उनके नाम तालिका में भरिये।

 गोला	 बेलन	 प्रिज्म	 घनाभ	 शंकु	 घन

2. दैनिक जीवन में प्रयोग की जाने वाली कम से कम दो वस्तुओं के नाम लिखो, जो नीचे दिए गए मौलिक 3 डी आकृतियों जैसी हों।

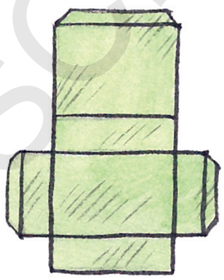
(i)	शंकु	-----------	-----------	-----------	-----------
(ii)	घन	-----------	-----------	-----------	-----------
(iii)	घनाभ	-----------	-----------	-----------	-----------
(iv)	गोला	-----------	-----------	-----------	-----------
(v)	बेलन	-----------	-----------	-----------	-----------

3. नीचे दी गयी आकृतियों को पहचानो और उनके फलकों (तल) शीर्षों और किनारों की संख्या लिखो।

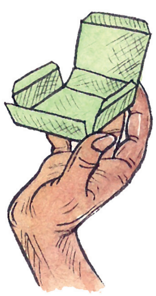
	 धन	 धनाभ	 प्रिज्म
फलक			
शीर्ष			
किनारे			

14.1 3 डी आकृतियों की रूपरेखा

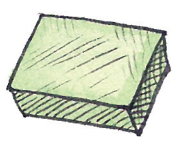
हम अब 3डी आकृति की कल्पना 2डी धरातल पर कर सकते हैं। उन्हे सादे पृष्ठ पर उतार कर। विभिन्न 3डी आकृतियों की रूपरेखा को चित्रित करना संभव है। एक अट्टे का डिब्बा (टूथ, पेस्ट या जूते का डिब्बा...आदि) लेंगे। डिब्बे को सीधा करके उसके किनारे काटेगे। अब आप के पास डिब्बा बनाने के लिए ढाँचा तैयार है रूपरेका व ढाँचा एक प्रकार से 2डी (चित्र-1) का रेखा स्वरूप है। जिसे जब मोड़ा जाता है। (चित्र-2) तो परिणामः 3डी आकृति (चित्र-3) तैयार होती है।



चित्र 1

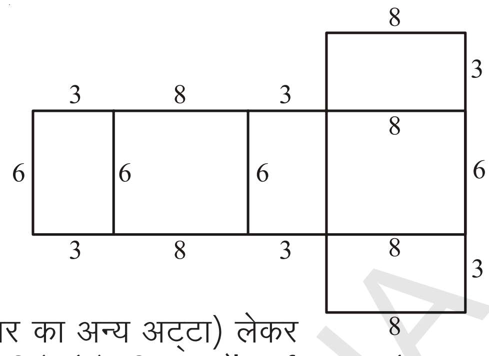


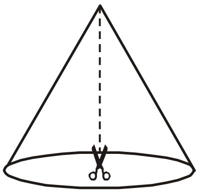
चित्र 2

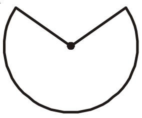


चित्र 3

यहाँ एक डिब्बे की रूपरेखा तैयार है। इसे काट कर एक मोटे कागज पर चिपकाएँ और उचित स्थान पर मोड कर तथा गोंद द्वारा चिपका कर डिब्बे बनाने की कोशिश करें।




चित्र 1


चित्र 2

उसी तरह से एक आइसक्रीम कोन का आवरण (या उसी आकार का अन्य अट्टा) लेकर उसे तिरछे धरातल से काटिये जैसे चित्र-1 में दर्शाया गया है। आप शंकु बनाने के लिए ढाँचा पायेंगे (चित्र-2)

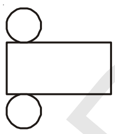
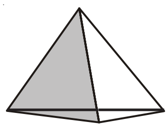
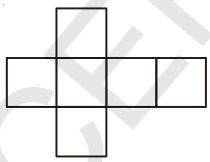
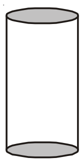
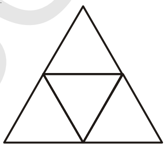
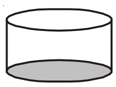
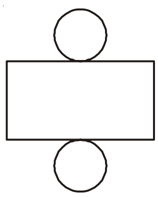
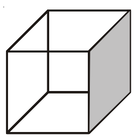
प्रयत्न करो

इसे करने का प्रयास करें- अध्यापक या साथियों की सहायता से विभिन्न आकृतियों (बेलन,घन, घनाभ और शंकु) की वस्तुएँ लेकर उन्हें काट कर उनकी रूपरेखा तैयार करो।

उपरोक्त क्रियाओं द्वारा आप को ज्ञात होगा कि आप के पास विभिन्न आकृतियों के अलग अलग ढाँचे तैयार है। प्रत्येक आकृति के लिए एक या हमारे काटने के अनुसार एक से अधिक रूप-रेखाएँ प्राप्त कर सकते हैं।

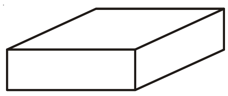
अभ्यास -2

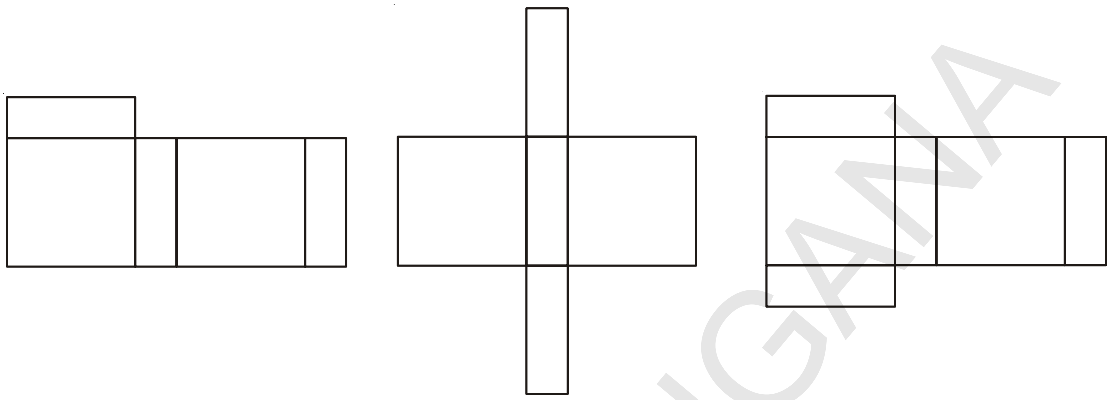
1. नीचे कुछ रूपरेखाएँ दी गयी है। उन्हे उतार कर काट कर मोटे कागज पर उचित आकार मे मोड कर चिपकाएँ। 3 डी आकृति से रूपरेखा की जोड़ियाँ बनायें।

Nets (रूपरेखाएँ)	**3D shapes**
	
	
	
	

2. यहाँ प्रत्येक आकृति के लिए तीन नेटस् (रूपरेखाएँ) दी गई है। नेटस् को 3डी आकृति के साथ जोडो।

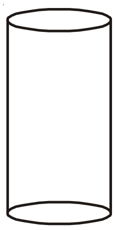
(i)

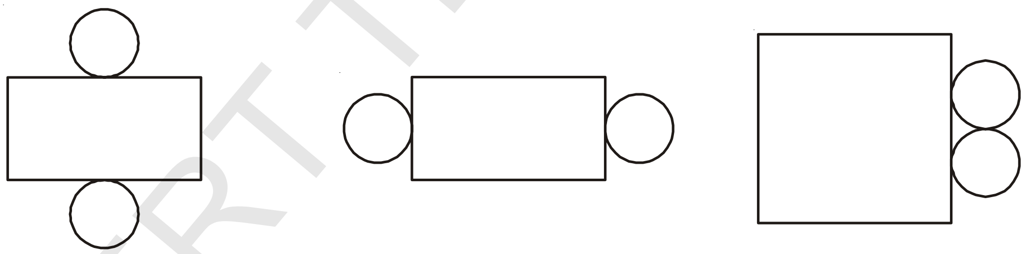




(a) (b) (c)

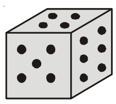
(ii)



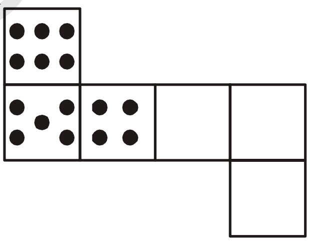


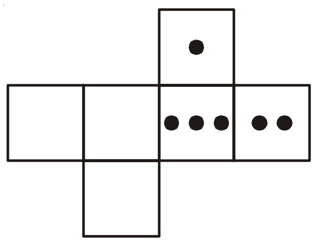
(a) (b) (c)

3. पासा (डाइस) एक घन है जिससे प्रत्येक दल पर बिन्दु होते हैं। पासा के दो विरोधी तलो के बिन्दुओं का योगफल हमेशा सात होता है।



यहाँ पासा (डाइस) बनाने की दो रुपरेखाएँ हैं इसके रिक्त स्थानों में उचित बिन्दु भरो।





इसे खेलो

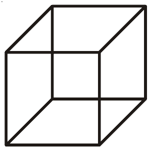
आप और आपका साथी एक–दूसरे के पीछे बैठे हैं। आप दोनों मे से कोई एक 3डी आकृति बनाने की रूपरेखा पढ़ता है, जबकि दूसरा साथी उसे अनुसरण करके रूपरेखा (ढाँचा) बना कर वर्णित वस्तुएँ बनाता है।

14.2 समतल धरातल पर ठोस आकृति चित्रित करना

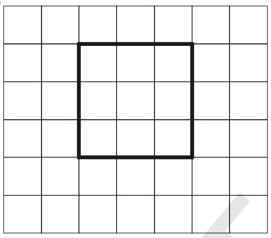
हमारा समतल धरातल एक कागज (पृष्ठ) है। जब आप ठोस आकृति बनाएँगे तो प्रतिबिंब कुछ ठीक नहीं बनेगा। ये दृष्टि भ्रम है। यहाँ 3 डी आकृति को समतल धरातल पर बनाने के लिए दो तकनीके सहायक होगी ।

14.2.1 तिरछा नक्शा (Sland Design)

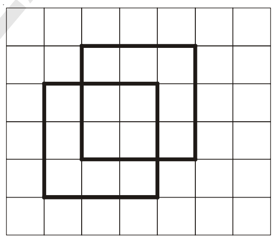
यहाँ एक घन का चित्र है। जैसा इसे सामने से देखने पर यह घन जैसा दिखता है, उसका अंदाजा हो जाता है। वास्तविकता में हम इसके सभी तल नहीं देख सकते हैं। असल में घन में सभी लंबाइयाँ समान नही होती। फिर भी आप उसे घन है, पहचान लेते है। इस प्रकार के ठोस नक्शे को हम तिरछा नक्श कहते है।



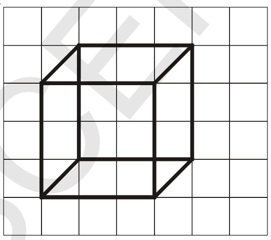
ऐसा नक्शा आप कैसे बना सकते हैं? चलो यह बनाने की तकनीक सीखे। आप को जरूरत पड़ेगी, एक वर्गो वाली लकीरें या बिन्दुएँ कागज की प्रारंभ में शीट ले कर अभ्यास करो। बाद में सादे कागज पर (बिना लकीरें या बिन्दुओं वाला) उतारो। चलो उतारे (चित्रित करे) एक $3 \times 3 \times 3$ घन (प्रत्येक किनारा 3इकाई हो) का तिरछा चित्र.



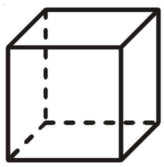
चरण-1
सम्मुख तल का चित्रण



चरण-2
विरुद्ध तलों का चित्रण। तल समान हो लेकिन चरण से कुछ हट के हो।



चरण 3
उपयुक्त किनारों को जोडो.



चरण 4
पुनः छिपे हुए शीर्षो को बिन्दु वाली रेखाओं से बनाओ (ये एक परम्परा है अब चित्र तैयार है।

उपरोक्त तिरछी आकृतियों मे क्या आपने निम्न टिप्पणियों पर ध्यान दिया।

(i) सम्मुख भुजा और विपरीत भुजा का माप समान है।
(ii) घन में सभी किनारे समान हैं ऐसा दिखाई देता है जबकि वास्तव में किनारे समान नहीं लिये गये।

अब आप घनाभ का तिरछा चित्र बनाने का प्रयत्न करें (याद रखो घनाभ के तल आयताकार होगें)

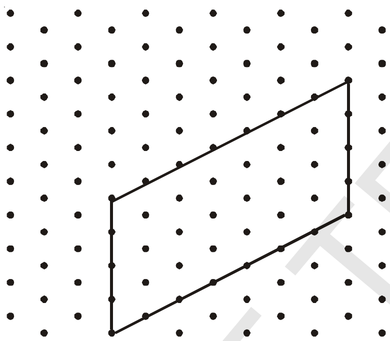
दिये गये ठोस आकृतियों के माप दिये जाने पर आप उसके चित्र (नक्शे) बना सकते हैं। उसके लिए हमें एक आइसोमेट्रिक शीट की आवश्यकता होती है।

चले एक घनाभ बनाएँ जिसके लिए आइसोमेट्रिक शीट पर लें लंबाई 7 से.मी., चौड़ाई 3 से.मी. और ऊँचाई 4 से.मी. परिमाण में लेगें।

14.2.2 आइसोमेट्रिक रेखाचित्र

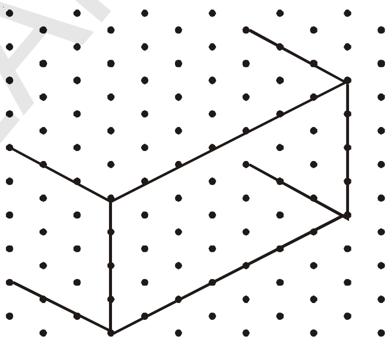
दी गई ठोस आकृतियों के माप यदि ज्ञात हो तो उसे चित्रित करने के लिए आइसोमेट्रिक शीट का प्रयोग कर सकते हैं। इस सीट में कागज को बिन्दुओं या रेखाओं द्वारा छोटे-2 समकोण त्रिभुजो में विभक्त किया जाता है।

चलो हम $7 \times 3 \times 4$ (अर्थात किनारों की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 7, 3, 4 इकाई)



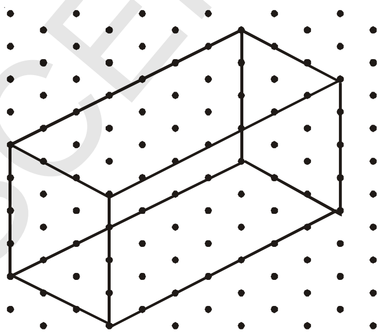
चरण-1

– सम्मुख तल दर्शाता हुआ आयत उतारेंगे



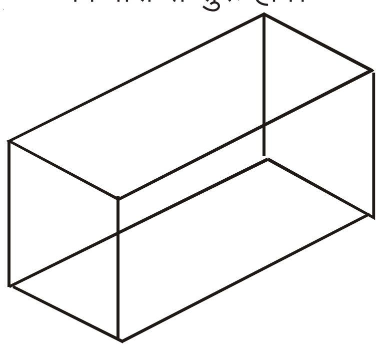
चरण-2

समानान्तर रेखा खण्ड उतारेंगे जो आयत के चार किनारों से शुरू होंगे।



चरण-3

उचित रेखाखण्डों से किनारो को जोड़ो

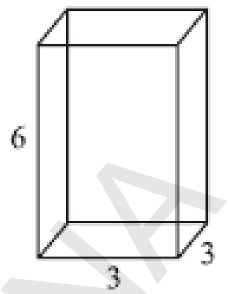


चरण-4

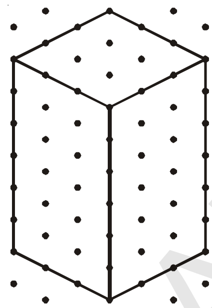
यह एक आइसोमेट्रिक घनाभ मिलाते हुए जोडेंगे।

ध्यान रखे कि आइसोमेट्रिक रेखाचित्र में ठोस के माप सही होने चाहिए। तिरछे रेखाचित्र जैसे नही।

उदा ***1*** **:** यहाँ घनाभ का तिरछा रेखा चित्र है इसके जैसा आइसोमेट्रिक रेखाचित्र बनाओ।



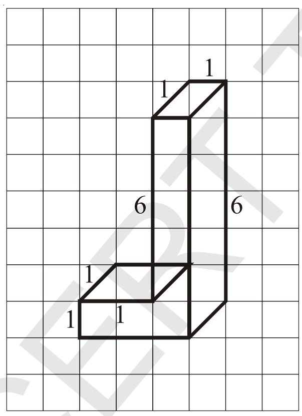
हल**:** लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 3, 3 और 6 इकाई है।



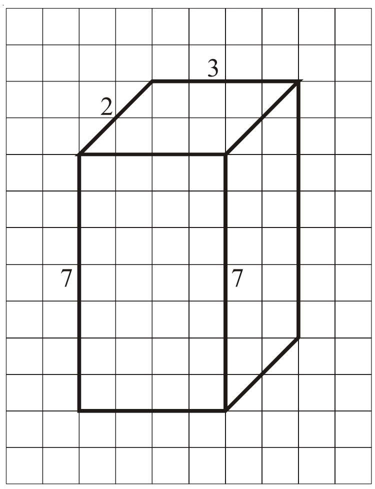
अभ्यास-3

1. एक आइसोमेट्रिक बिन्दु लेकर नीचे दी गई प्रत्येक आकृति बनाओ।

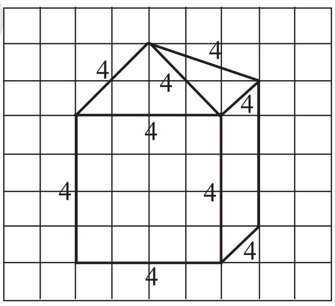
(i)



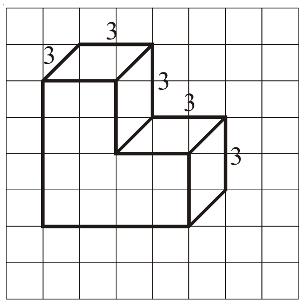
(ii)



(iii)



(iv)

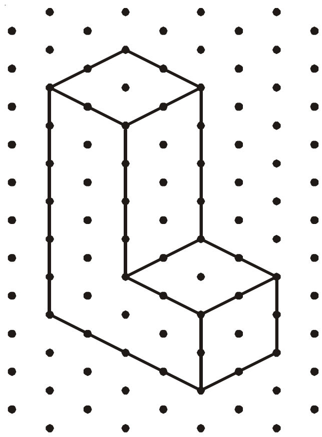


2. एक घनाभ के परिमाण और 5 cm, 3 cm and 2 cm. है। इस घनाभ के तीन भिन्न (अलग-अलग) आइसोमेट्रिक रेखाचित्र बनाओ।

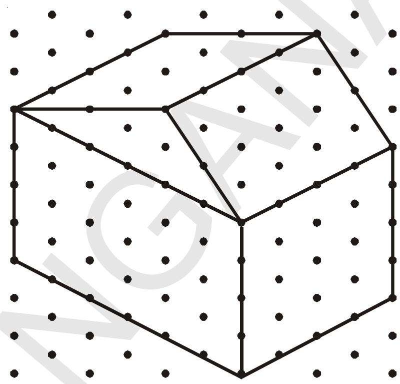
3. तीन घन जिनमें प्रत्येक की भुजा *2 cm* है, उन्हे एक के बाजू एक रख कर घनाभ बनाया गया। इस घनाभ के लिए तिरछा या आइसोमेट्रिक रेखाचित्र बनाइए।

4. दिए गए आइसोमेट्रिक आकृतियों के तिरछे रेखाचित्र बनाइए।

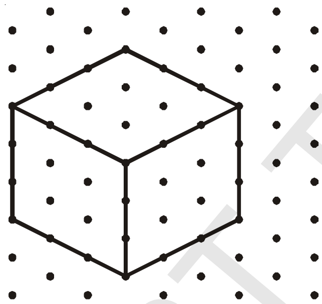
(i)



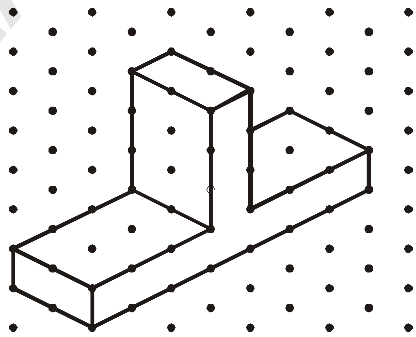
(ii)



(iii)



(iv)

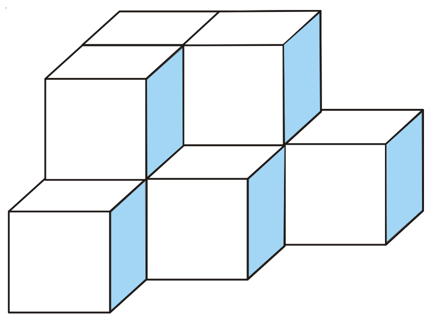


5. निम्न का (i) तिरछा रेखा चित्र और (ii) आइसोमेट्रिक रेखाचित्र बनाओ।

(a) एक घनाभ जिसके परिणाम *5 cm, 3 cm* और *2 cm.* है, (क्या आपका रेखाचित्र तिरछा है?)

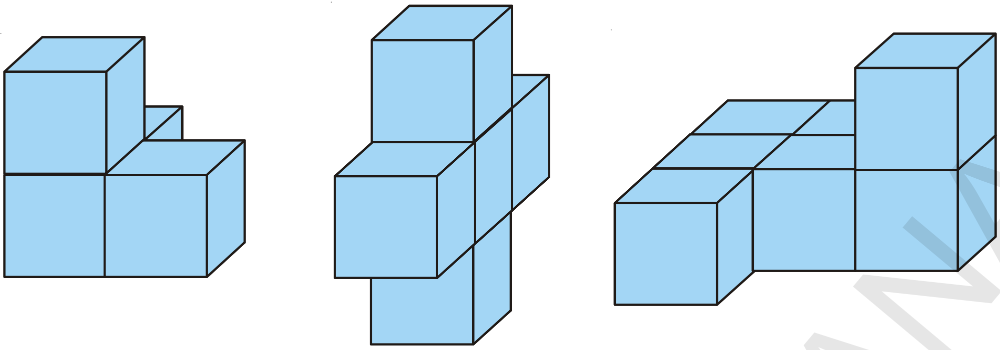
(b) एक घन जिसकी भुजा *4 cm* लंबी है ।

14.3 ठोस वस्तुओं को देखना

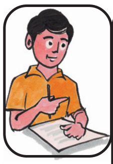


कभी-कभी जब आप किसी मिली-जुली आकृतियों को देखते है तो उनमे से कुछ अंश आपकी दृष्टि से ओझल हो जाते है या दिखाई नही देते।

यहाँ कुछ क्रियाकलाप दिये गए है, जो आप को उन ठोस वस्तुओं को देखने में सहायता करेंगे और आप जान पाओगे कि वे कैसे दिखते हैं। कुछ घन लो और नीचे दर्शाए अनुसार व्यवस्थित करो।

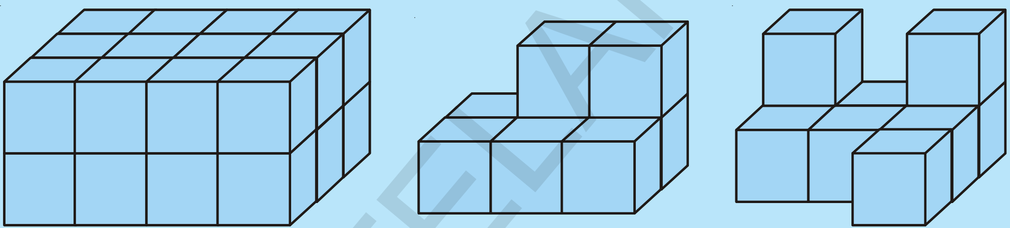


अब आप अपने मित्रों से पूछिए कि नीचे व्यवस्थित घनों की अनुमानित संख्या क्या है।



प्रयास करो

नीचे दिए गए व्यवस्थित घनों की संख्या मालूम करो।

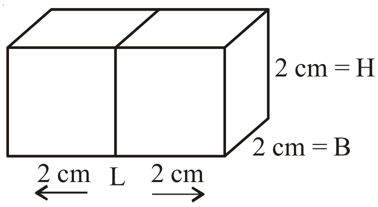


इस प्रकार के दृश्य समझने में बहुत सहायक होते हैं।

माना आप घनों को मिला कर एक घनाभ बनाते हैं। आपको जानकारी होगी की घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या होगी।

उदा **2 :** यदि दो घन जिनका परिणाम 2 सें.मी., 2 सें.मी., 2 सें.मी. है। उन्हें भुजाओं से मिला कर रखने पर बनाने वाली घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या होगी?

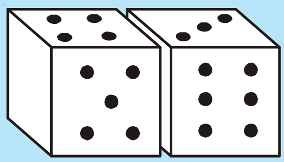
हल **:** चित्र में दर्शाए अनुसार यदि उन्हें भुजाओं से जोड़कर रखा गया तो परिमाण में केवल लंबाई बढ़ेगी, जो $2 + 2 = 4$ सें.मी. होगी।



चौडाई =2 सें. मी और ऊँचाई =2 सें. मी .

प्रयास कीजिए

1. चित्र में दर्शाए अनुसार दो पासों को एक के बाजू एक रखा गया, क्या आप कह सकते हो कि उसके विपरीत तलों का योग क्या होगा?



   (i) 5 + 6 (ii) 4 + 3

   (याद रखो कि दो विपरीत तलों का योग 7 होता है)

2. तीन घन जिनकी भुजा 2 सें.मी. है एक के बाजू एक व्यवस्थित करके एक घनाभ बनाया गया. इसका एक तिरछा रेखाचित्र बनाकर बताओ की उसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या होगी?

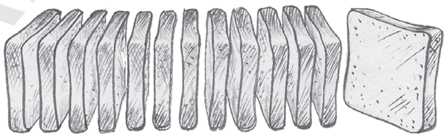
14.3.1 ठोस के विभिन्न खण्डों का अवलोकन

आइए देखते हैं कि वस्तु 3-डी विभिन्न दृष्टिकोण से कैसे दिखती है।

14.3.1a) वस्तु को काटकर या पतले टुकडे (स्लाइस) करके उसका अवलोकन करना

स्लाइसिंग का खेल

यहाँ एक डबलरोटी है, यह घनाभ है, जिसके तल वर्गाकार है। इसे चाकू द्वारा स्लाइस करेंगे।



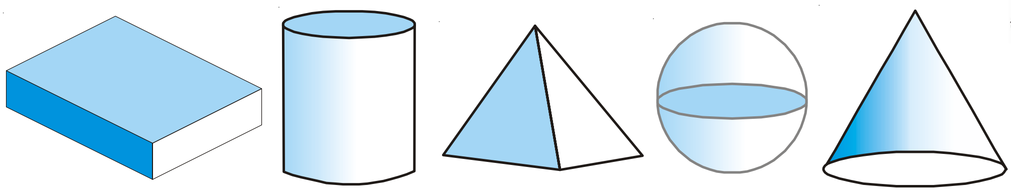
जब उसे ऊर्ध्वाकार काटेंगे तो आपको कई टुकड़े मिलेंगे, जैसे कि चित्र में दर्शाया गया है। प्रत्येक टुकड़ा वर्गाकार होगा। हम इसे पूरी डबलरोटी के तल की अनुप्रस्थ काट खण्ड कहेंगे, इसका अनुप्रस्थ खण्ड एक वर्ग है।

सावधान यदि आप का कहा गया खण्ड लंबवत होगा तो आप को अलग अनुप्रस्थ खण्ड प्राप्त हो सकते हैं। इसके बारे मे विचार करों। अनुप्रस्थ खण्ड की सीमा समतल तिरछी प्राप्त होगी। क्या आपने इस पर ध्यान दिया।

रसोईघर का खेल- क्या आपने पकाने के लिए काटी गई कुछ सब्जियों के अनुप्रस्थ खण्डों को ध्यान से देखा, विभिन्न टुकडों को ध्यान से देखो और उनके अनुप्रस्थ खण्डों के आकार जानो।

इसे करो।

1. नीचे दी गयी आकृतियों के मिट्टी के ठोस प्रतिरूप बनाइए। उनके लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई पहचानिए। रफ कागज पर इनकी आकृति बनाइए।

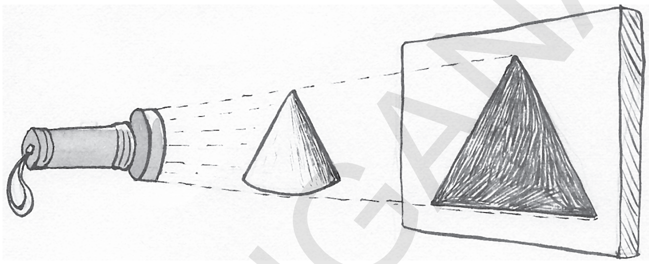


14.3.1b) परछाई का दूसरा खेल

परछाई का खेल

त्रिविमीय वस्तुएँ द्विमापी में कैसे दिखाई देती हैं। इसे परछाई द्वारा मालूम करना सबसे अच्छा रास्ता है। क्या आपने परछाई का खेल देखा है। यह एक प्रकार का मनोरंजन है। जहाँ ठोस वस्तुओं की आकृति को प्रकाशित वस्तु (जैसा टाँर्च) एक भ्रम होता है, वे गणित का असाक्ष्य प्रयोग हैं। इस कार्यकलाप के लिए आपको एक प्रकाश स्रोत और कुछ ठोस आकृतियों की आवश्यकता होगी। यदि आप के पास एक प्रोजक्टर है तो ठोस को लैम्प के नीचे रखो और यह ज्ञात करो।

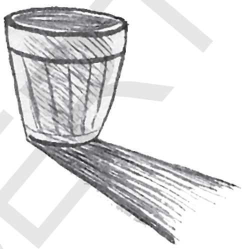
शंकु के सामने एक टाँर्च लाईट रखो। परदे पर कैसे प्रतिबिम्ब दिखाई देता है। ठोस त्रिविमीय है तो परछाई कैसी होगी, यदि शंकु के स्थान पर घन रखोगे तो कैसी परछाई प्राप्त होगी.? प्रकाश के स्रोत को विभिन्न स्थितियों मे रख कर और ठोस वस्तु की स्थिति बदल कर प्रयोग करो। प्राप्त परछाई की आकृति और आकार पर इसके प्रभाव का अध्ययन करो।

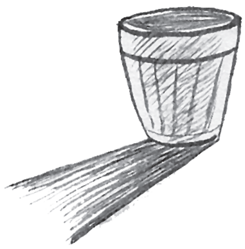


चित्र 1

यहाँ एक अन्य विनोदी प्रयोग जिसे आप शायद प्रयोग कर चुके होंगे। एक वृत्ताकार पात्र को खुले में बाहर रखो दोपहर के समय सूर्य इसके ठीक ऊपर होना चाहिए जैसा कि नीचे चित्र में दर्शाया गया है। आप को कैसी परछाई प्राप्त होगी.?

क्या वह समान होगी? दो पहर के समय, शाम के समय,

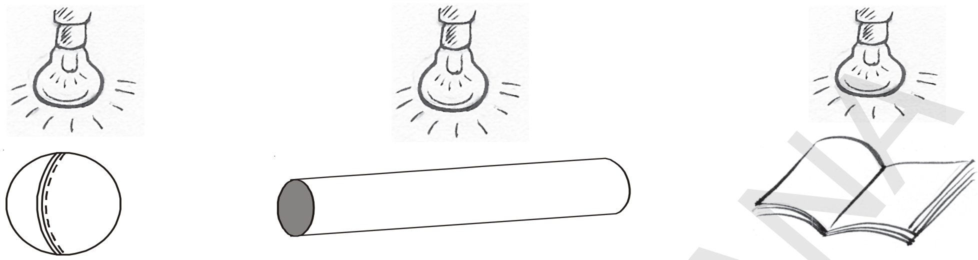




सूर्य की स्थिति और निरीक्षण समय के अनुसार परछाई का अध्ययन करो।

अभ्यास -4

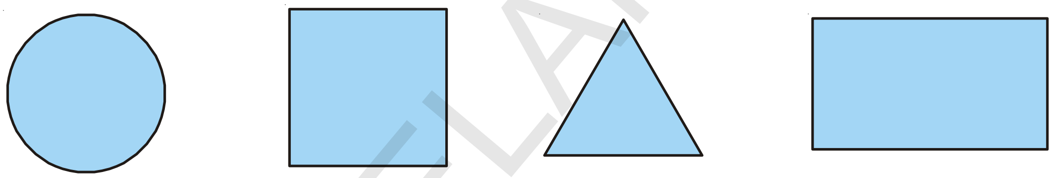
1. बिजली के गोले (बल्ब) के नीचे ठोस वस्तुएँ हैं। इनकी परछाइयों के नाम विविध स्थितियों में लिखो। इस परछाई का एक चित्र बनाओ। (तुम प्रयोग करने के पश्चात इन प्रयोग का उत्तर दो।)



गेद　　　　एक बेलनाकार नली　　　　एक पुस्तक

2. यहाँ कुछ 3-डी वस्तुओं की परछाइयाँ हैं। इन्हें प्रोजेक्टर के लेम्प के नीचे रखा गया। प्रत्येक परछाई की ठोस आकृति पहचानो। (इनके कई उत्तर हो सकते है।)

गोला　　　　वृत्त　　　　त्रिभुज　　　　आयता



(i)　　　　(ii)　　　　(iii)　　　　(iv)

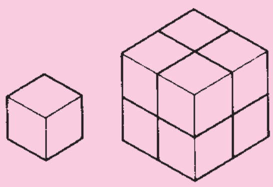
पृष्ठावलोकन

3D आकृतियों को 2D समतल पर देखा जा सकता है। उसकी रूपरेखा कागज पर बनाओ। तिरछी रेखाचित्र और आइसोमेट्रिक रेखाचित्र 3D आकृतियों को समतल धरा पर देखने में मदद करते हैं।

घन का खेल

सात इकाई घनों को साथ रखकर एक बड़े इकाई घन का निर्माण कीजिए, जिसका फलक दो इकाई हो, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

तीन इकाइयों के घन को बनाने के लिए एक इकाई के कितने घनों की आवश्यकता होगी?



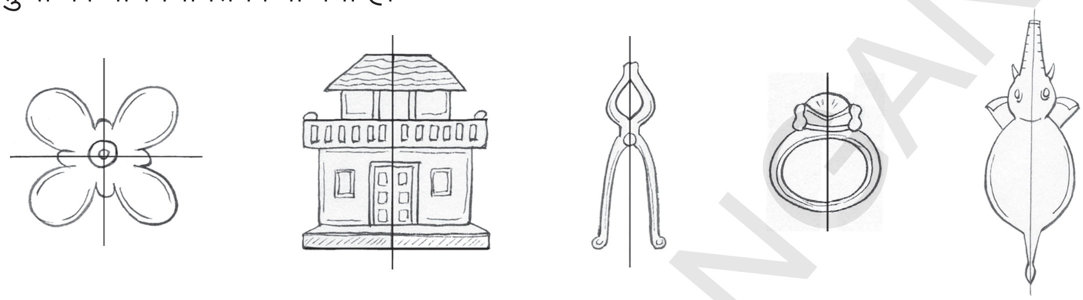
समममिति

(SYMMETRY)

15

15.0 परिचय

अपने आसपास देखो। आप पाओगे कि चारों ओर कई वस्तुएँ समान या समममिति होती हैं। ऐसी ही कुछ वस्तुओं को नीचे चित्रित किया गया है।



ये सभी वस्तुएँ सममितीय हैं। क्योंकि इन्हें दो समान अनुरूप खण्डों में विभजित किया जा सकता है।

15.1 सममिति रेखा-

आइए कुछ और उदाहरण ले कर इसका अर्थ समझेंगे। निम्न चित्रों का निशान कागज (ट्रेस पेपर) पर बनाओ।

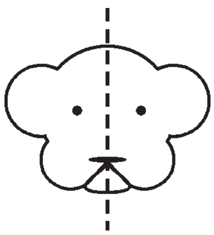


Figure 1

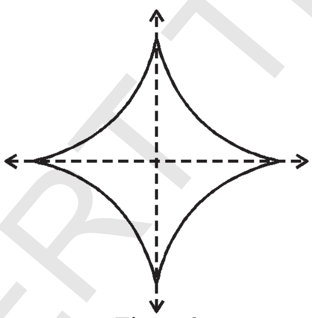


Figure 2

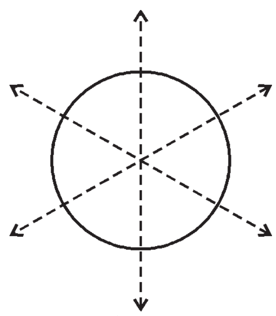


Figure 3

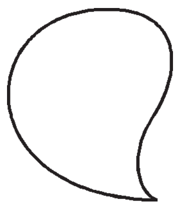


Figure 4

चित्र-1 को बिन्दुओं वाली रेखा से मोड़ो। आप ने क्या **देखा**। आप देखेंगे कि दो खण्ड एक दूसरे के अनुरूप हैं। क्या यह चित्र 2 और 3 के लिए भी सही है।

चित्र-2 का निरीक्षण करने पर पाओगे कि दो रेखाओं मे यह सही है और चित्र 3 में कई रेखाओं मे यह सही सिध्द हुआ है। क्या चित्र चार को इसी ढंग से विभाजित किया जा सकता है।

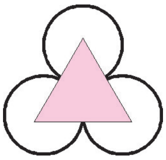
चित्र 1,2,3 सममितीय हैं। क्योंकि जब इन्हें सममितीय रेखा पर ढंग से विभाजित कर मोड़ा गया तो दो खण्ड एक दूसरे के अनुरूप पाये गये। बिन्दु वाली रेखा जो चित्र को दो समान भागों में विभाजित करती है। वह सममितीय रेखा या सममितीय अक्ष है। जैसा कि आप देख चुके हैं कि एक वस्तु की एक **या** एक से अधिक सममित रेखाएँ या सममितीय अक्ष हो सकते है।

प्रयास करो

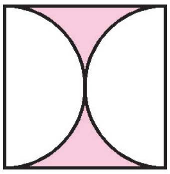
1. प्रकृति में पाई जाने वाली कुछ वस्तुओं के नाम बताओ जो सममितीय हों।
2. मनुष्य द्वारा निर्मित 5 सममितीय वस्तुओं के नाम बताओ।

अभ्यास - 1

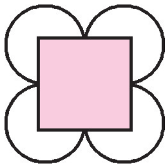
1. नीचे कुछ आकृतियाँ दी गयी हैं। इनमें से कौनसी सममितीय आकृतियाँ हैं। उनके लिए सममितीय अक्ष खींचिए।



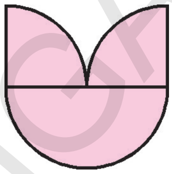
(i)



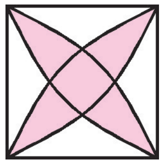
(ii)



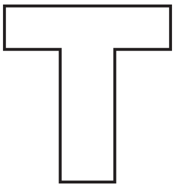
(iii)



(iv)

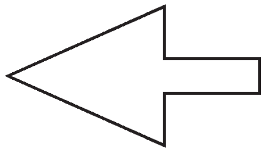


(v)

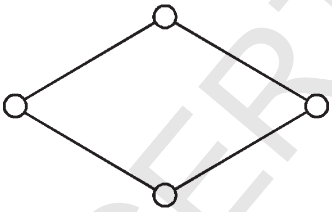


(vi)

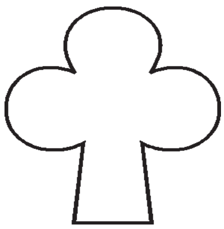
(vii)



(viii)



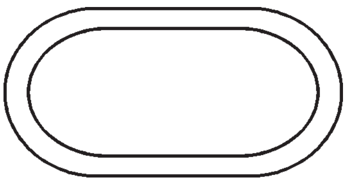
(ix)



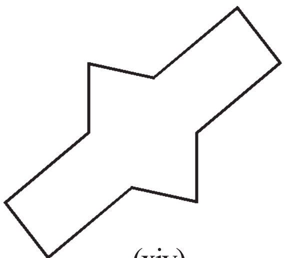
(x)

(xi)

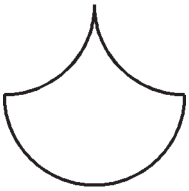
(xii)



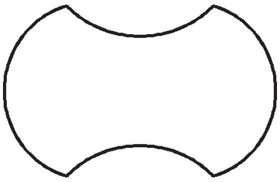
(xiii)



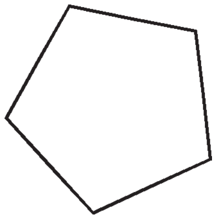
(xiv)



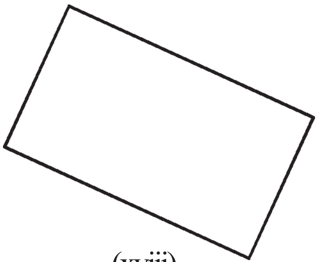
(xv)



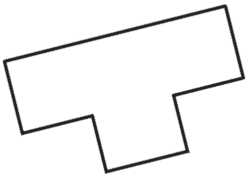
(xvi)



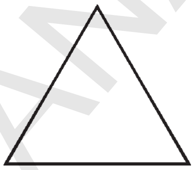
(xvii)



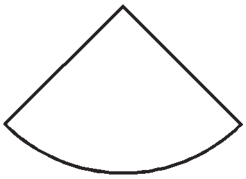
(xviii)



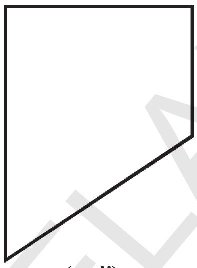
(xix)



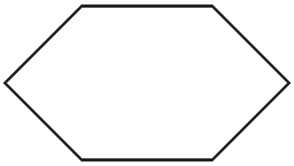
(xx)



(xxi)



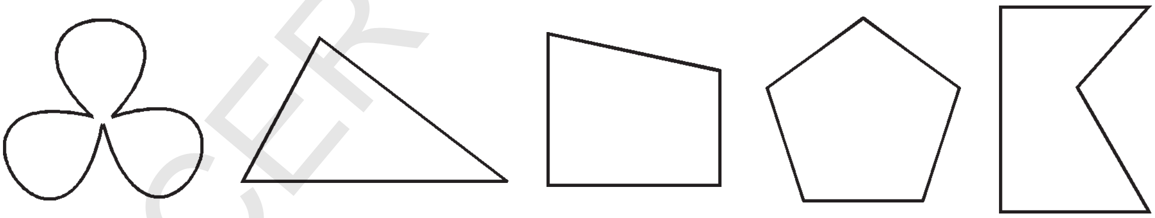
(xxii)



(xxiii)

15.1.1 सम बहुभुज के लिए सममित रेखाएँ

नीचे दिये गए संवृत्त (बंद) आकृतियों को देखो।

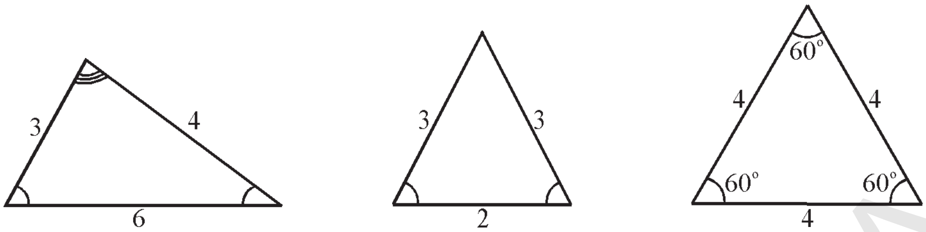


एक संवृत्त (बंद) आकृति जो कई रेखाखंडों से मिल कर बनी हो उसे बहुभुज कहते हैं। उपरोक्त आकृतियों में कौन सी आकृतियां बहुभुज हैं।

प्रयास करो

1. क्या हम तीन से कम रेखा खण्डों द्वारा बहुभुज बना सकते हैं।
2. बहुभुज मे कम से कम कितनी भुजाओं की संख्या होनी चाहिए।

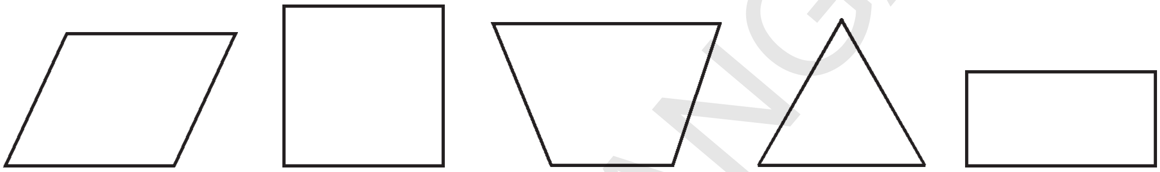
नीचे दिये गये त्रिभुजों का निरीक्षण करो।



चित्र-1 चित्र-2 चित्र-3

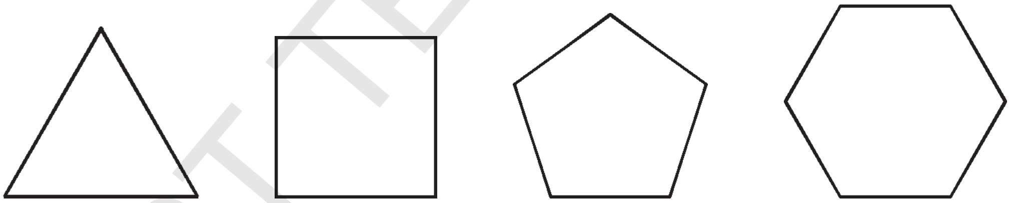
चित्र 3 में त्रिभुज की भुजाएँ और कोण समान हैं। इसीलिए इसे समबाहुत्रिभुज कहते हैं। इस बहुत्रिभुज की सभी भुजाएँ और सभी कोण समान हैं, इसीलिए इसे समबाहुत्रिभुज कहते है।

निम्न आकृतियों में से कौन से बहुभुज समबहुभुज है।



समानान्तर चतुर्भुज वर्ग समलब चतुर्भुज समबाहु त्रिभुज आयत

अब नीचे दिए गए सब बहुभुजों के लिए सममित अक्षों को उतारिए।



समबाहु त्रिभुज वर्ग समचतुर्भुज समांतर भुज

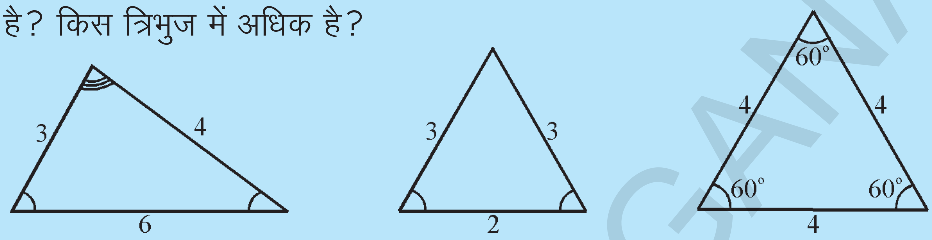
अपने निष्कर्ष को नीचे तालिका में लिखो।

समबाहु त्रिभुज	भुजाओं की संख्या	सममित अंको की संख्या
त्रिभुज	3	3
वर्ग		
पंचभुजी		
षटभुजी		

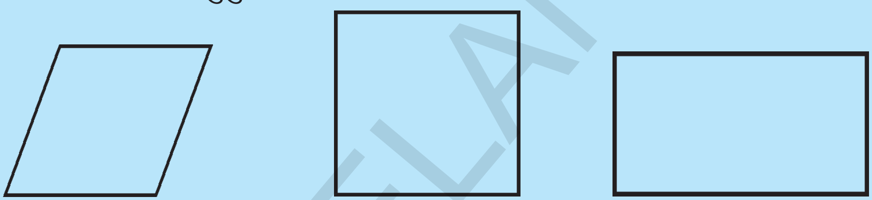
क्या आप एक समबहुभुज की भुजाओं की संख्या और सममित अक्षों की संख्या में कोई सबंध पाते हैं। आप पायेंगे कि भुजाओं की संख्या अक्षों की संख्या के समान होती है। आप अपने परिणामों की जाँच चारों चित्रों को कागज पर उतार कर उन्हे काट कर और प्रत्येक को ठीक दिशा में मोड कर सममित अक्षों को प्राप्त कर सकते है।

प्रयास करो

1. नीचे तीन प्रकार के त्रिभुज दिये गए है, क्या सभी त्रिभुजों में रेखाओं कि संख्या समान है? किस त्रिभुज में अधिक है?



2. नीचे विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज दिये गये हैं। क्या इन सभी में सममित रेखाओं की संख्या समान है? किस चतुर्भुज में सबसे अधिक है?



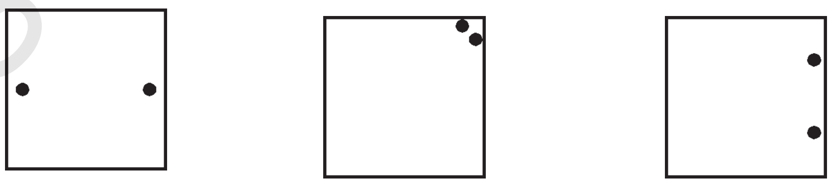
समचतुर्भुज वर्ग आयत

संकेत- त्रिभुजों और चतुर्भुजों को आप कागज पर उतार कर और वास्तव में मोड कर प्रत्येक चित्र के सममित अक्ष प्राप्त कर सकते है।

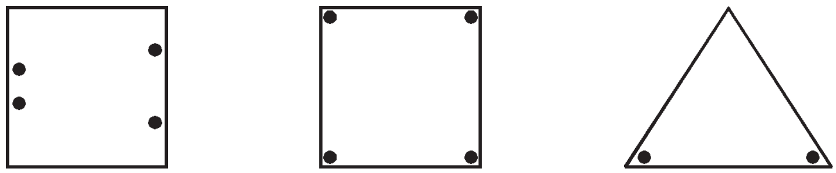
(1) और (2) के आधार पर हम कह सकते हैं कि समबहुभुज के अधिकतम सममित अक्ष होते हैं।

अभ्यास - 2

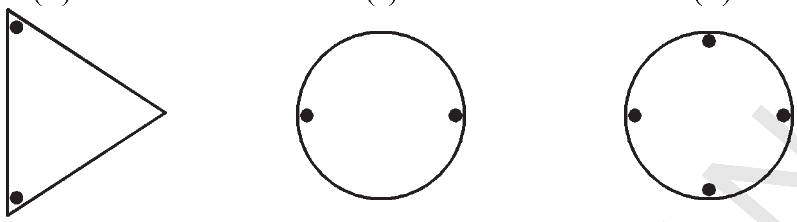
1. दी गई आकृतियों के दो बिन्दुओं को एक दूसरे पर रख कर अक्ष से मोडिए और सममित अक्ष ज्ञात कीजिए।



(i) (ii) (iii)

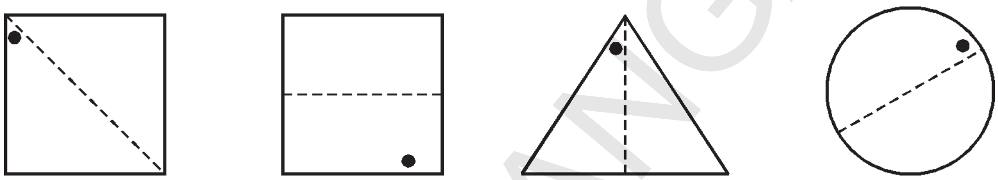


(iv) (v) (iv)



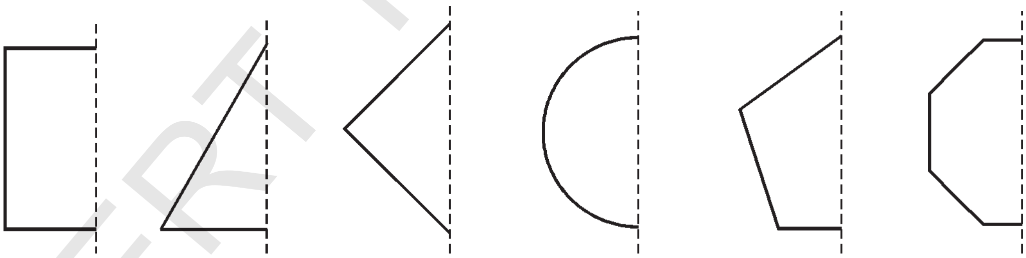
(vii) (viii) (ix)

2. सममिति रेख दी गई है अन्य (दूसरा) बिन्दु ज्ञात करो



(i) (ii) (iii) (iv)

3. नीचे दिए गये अपूर्ण चित्रों में दर्पण रेखा (अर्थात सममित रेखा) बिन्दुओं से अंकित की गयी है। प्रत्येक चित्र को अंकित वाली रेखा के परावर्तन द्वारा पूरा कीजिए (आप बिन्दु वही रेखा को दर्पण के सामने रख कर भी उसका प्रतिबिम्ब देख सकते है) क्या आप पूर्ण हुए चित्र को उसका नाम देने में समर्थ है।



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

4. नीचे दिये गए कथन सत्य है या असत्य बताइये।
   (i) प्रत्येक संवृत्त (बंद)आकृतिक सममित अक्ष होता है ( )
   (ii) किसी चित्र में यदि कम से कम एक सममित अक्ष हो तो उसे सममित आकृति कहते है। ( )
   (iii) एक सम बहुभुज की 10 भुजाएँ हो तो उसके 12 सममित अक्ष होते है। ( )

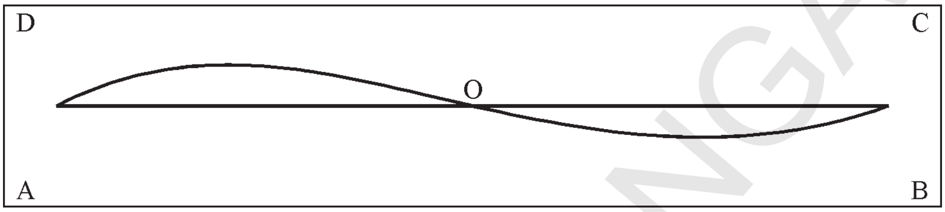
5. एक वर्ग उतारिए और उस पर सभी सममित अक्षो की रचना कीजिए।
   प्रत्येक जोडी सममित अक्षो के मध्य (बीच के) बनने वाले कोण मापो।
   आप ने क्या देखा? क्या यही नियम अन्य समबहुभुजों पर लागू होगा।

15.2 चक्रीय समसिति

प्रक्रिया**1 :** निम्न आकृति को एक अक्स कागज पर उतारो

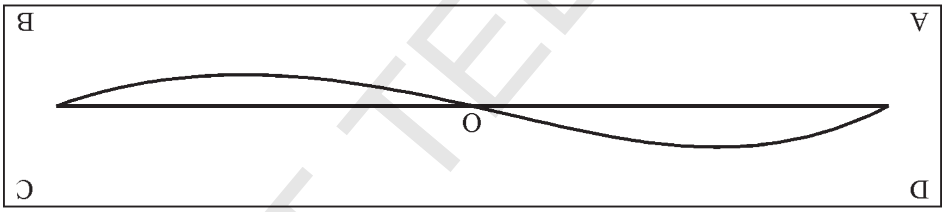
चित्र को इस प्रकार मोड़ने का प्रयास करो कि उसके दोनो खण्ड अनुरूप हों क्या यह आकृति सममिति है।

आइए अब अलग प्रकार से चित्र की विभिन्न स्थितियो में जोडी बनाएँ। एक कागज के टुकड़े पर उपरोक्त आकृति बनाएँ। चित्र में दर्शाए अनुसार इसकी बिन्दु पर O बिन्दु अंकित करो और कागज के चार शीर्षों को ABCD नाम दो।



चित्र 1

अंकित बिन्दु से चारो ओर कागज को 180° पर घुमाएँ।



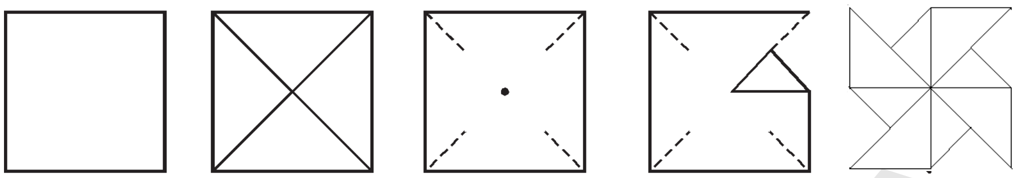
चित्र 2

आपने क्या देखा है? क्या यह आकृति पहले वाली आकृति से भिन्न है। घूमने के कारण बिन्दु A, B, C, D की स्थिति बदल गयी, किंतु वह आकृति नही बदली। क्योंकि इस आकृति में चक्रीय सममिति पायी जाती है।

प्रक्रिया- 2 आओ पवन चक्की बनाएँ

- एक कागज लो और उसे वर्गान्तर काटो।
- उसे कोणो से मोड़ो।
- एक किनारे से शुरू करके उसे कागज को कर्ण से केन्द्र की ओर एक चौथाई काटो। अन्य किनारे भी इस प्रकार काटो।
- बारी-बारी से किनारे को केन्द्र की ओर मोडो।
- मध्य बिन्दु से काँटे के साथ एक लकड़ी चिपका दो, जिससे कागज स्वतंत्रता से घूमता रहे।

- इसका **मुख** हवा की विपरीत दिशा मे रखो। आप पाएंगे कि वह घूमने लगेगा।

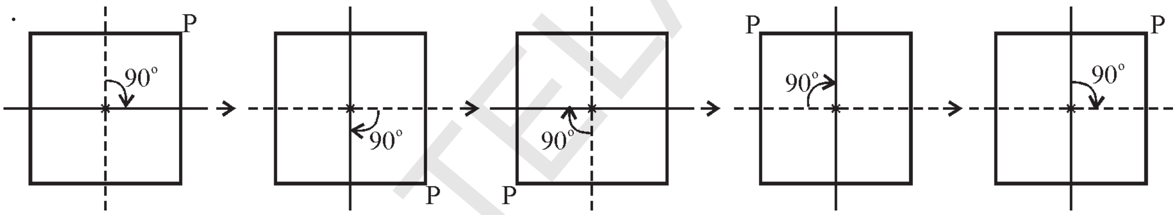


आइये अब पवन चक्की को 90° पर घुमाइए। प्रत्येक **को** घुमाने के पश्चात आप पाएंगे कि पवन चक्की वैसे ही दिखती है।

पवन चक्की में चक्रीय सममिति पाई जाती है। इस प्रकार जब हम किसी भी आकृति को एक स्थिर बिन्दु पर निश्चित कोण पर घुमाएँ और वह आकृति पहले जैसी दिखाई देती है तो कहा जा सकता है कि उस आकृति मे चक्रीय सममिति है।

15.2.1 चक्रीय सममिति के कोण

चक्रिय सममिति के कोण हम जानते है कि वर्ग की सममिति रेखा और य सममिति अक्ष पाए जाते है। आइए अब देखे कि क्या वर्ग में चक्रीय सममिति पाई जाती है, माना चित्र मे दर्शाये अनुसार एक वर्ग है जिसका एक किनारा p है-



चित्र-1 चित्र-2 चित्र- 3 चित्र- 4 चित्र- 5

चित्र-1 वर्ग की प्रारंभिक अवस्था दर्शाता है।

वर्ग को उसके केन्द्र से 90° पर घुमाओ। यह एक चौथाई घुमाव से हमें चित्र -2 प्राप्त होगा। p की स्थिति पर विचार करो, इसी प्रकार वर्ग को पुन 90° पर घुमाओ तब आप चित्र 3 पाओगे। जब हम चार बार इसी प्रकार एक चौथाई घुमाएंगे तो वर्ग अपनी वास्तविक अवस्था मे पहुंच जाएगा। प्रत्येक घुमाव के पश्चात वर्ग बिलकुल वास्तविक अवस्था जैसा ही दिखेगा। यह की स्थिति का सहायता से भी समझा (देखा) जा सकता है।

उपरोक्त क्रिया मे चित्र 1 को 90°, 180^0, 270^0 और 360^0 पर घुमा कर चित्र 2 चित्र 3 चित्र 4 और चित्र 5 की स्थितियाँ प्राप्त की गई तथा सभी स्थितियों मे यह वास्तविक चित्र 1 जैसी है भी। इनमें से न्यूनतम कोण 90° का है इसे चक्रीय सममिति का कोण कहा जाता है।

वह न्यूनतम कोण जिस पर आकृति को घुमा कर वास्तविक जैसी आकृति पाई जाए उसे चक्रीय **सममिति का कोण या** चक्रीय **कोण कहा जाता है।**

इसे करो

1. वर्ग का चक्रीय सममिति कोण क्या है।
2. समानान्तर चतुर्भुज का चक्रीय सममिति कोण क्या है।
3. वृत्त का चक्रीय सममिति कोण क्या है।

15.2.2 चक्रीय **सममिति का क्रम**

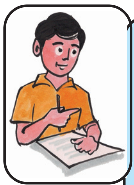
उपरोक्त क्रिया कलाप द्वारा ज्ञात होता है कि एक वर्ग का चक्रीय सममिति कोण 90^0 है और आकृति को उसकी वास्तविक अवस्था मे लाने के लिए 4 बार चक्रीय सममिति कोण पर घुमाया गया। अतः अब हम कह सकते है कि चक्रीय सममिति का क्रम 4 है।

एक समबाहु पर विचार करो। इसका चक्रीय सममिति का कोण 120^0 है अर्थात इसे वास्तविक अवस्था के समान स्थिति मे लाने के लिए 3 बार केन्द्र से घुमाया जाता है। अतः समबाहु का चक्रीय सममिति का क्रम 3 है।

इन उदाहरणो द्वारा हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते है कि किसी आकृति को पुनः इसकी वास्तविक स्थिति मे लाने के लिए चक्रीय सममिति कोण पर जितनी बार घुमाया जाता है उसे चक्रीय सममिति का क्रम कहते है।

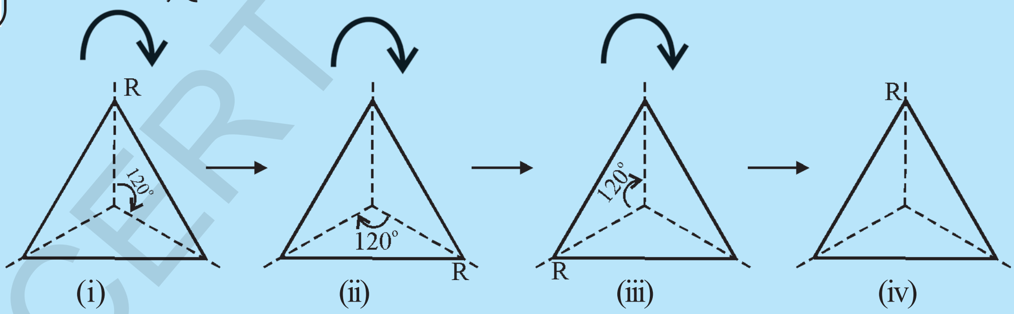
आइए उपरोक्त उदाहरणों से निष्कर्ष निकाले-

- वर्ग का चक्रीय सममिति केन्द्र उसका कर्णो का **प्रतिच्छेदी बिंदु** होता है।
- वर्ग का चक्रीय सममिति कोण 90^0 है।
- वर्ग के चक्रीय सममिति का क्रम 4 है।



प्रयास करो

1. (i) क्या आप समबाहु के लिए चक्रीय सममिति का क्रम बता सकते हैं। कितनी सममिति रेखाएँ हैं।



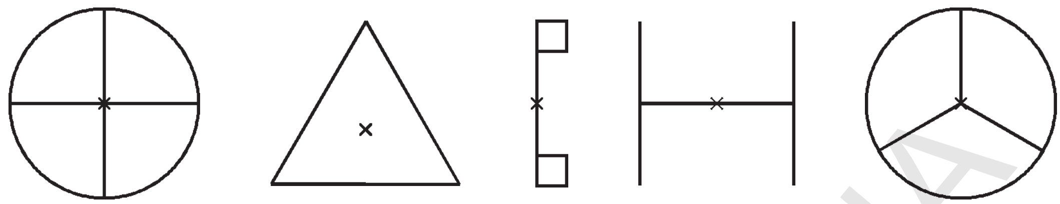
(ii) प्रत्येक संगत अक्षों के बीच का कोण क्या है?

2. अपने आस पास देखो। किन वस्तुओं मे चक्रीय सममिति पायी जाती है। (चक्रीय सममिति का क्रम 1से अधिक है)

नोट- यह समझना आवश्यक है कि क्रम -1 में प्रत्येक वस्तु मे चक्रीय सममिति पायी जाती है। उसे अपने वास्तविक अवस्था मे पुनः लौटने के लिए 360^0 का घुमाव आवश्यक है। अतः हम कह सकते हैं कि एक वस्तु में चक्रीय सममिति पायी जाती है। जब उसके चक्रीय सममिति का क्रम 1 से अधिक हो।

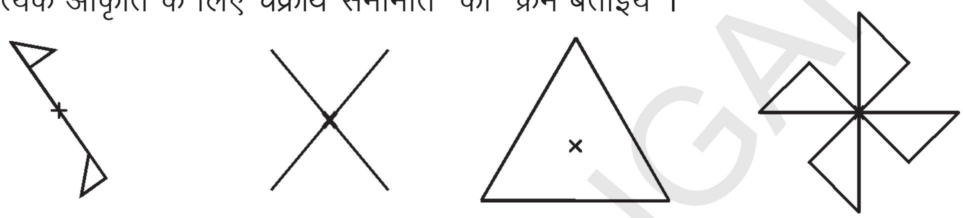
अभ्यास -3

1. निम्न मे से कितनी आकृतियों मे चक्रीय सममिति का क्रम अधिक है।

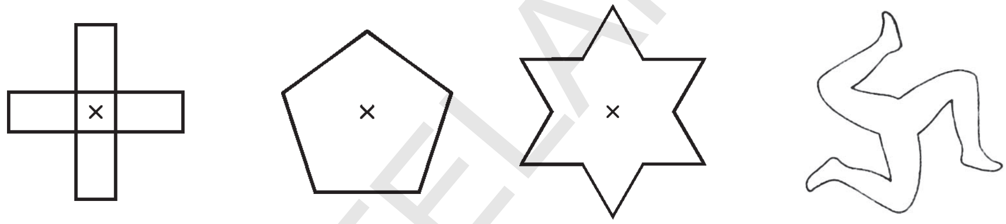


(i) (ii) (iii) (iv) (v)

2. प्रत्येक आकृति के लिए चक्रीय सममिति का क्रम बताइये ।



(i) (ii) (iii) (iv)



(v) (vi) (vii) (viii)

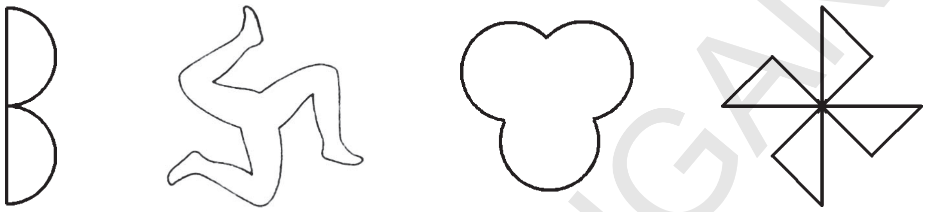
3. नीचे दी गई आकृतियों को उतारो और रिक्त स्थानों की पूर्ति करो ।

आकृति क्रम	चक्रीय केन्द्र (कर्ण का **प्रतिच्छेदि** बिन्दु अक्षों का **प्रतिच्छेदि** बिन्दु)	चक्रीय कोण	चक्रीय
वर्ग (Square)			
आयत (Rectangle)			
समचतुर्भुज (Rhombus)			
समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)			
सामान्य अष्टभुज(Regular Hexagon)			
वृत्त (Circle)			
अर्धवृत्त (Semi-circle)			

15.3 रेखा सममिति और चक्रीय सममिति (Line Symmetery and Rotational Symmetry)

अब तक आप जान चुके होंगे कि कुछ आकृतियों मे केवल रेखा सममिति और कुछ मे केवल चक्रीय सममिति होती है। कुछ मे दोनों होते है। वर्ग एवं समबाहु त्रिभुज में दोनों रेखा सममिति और चक्रीय सममिति होती है। वृत्त एक निश्चित सममिति आकृति है, क्योंकि इसे किसी भी कोण से केन्द्र से घुमा सकते हैं। यह समान ही दिखाई देता है। इसके अतिरिक्त वृत्त मे अनगिनत सममिति रेखाएँ होती है।

उदा **1:** निम्न मे से किन आकृतियों मे रेखा सममिति पायी जाती है, किन आकृतियों मे चक्रीय सममिति पायी जाती है।

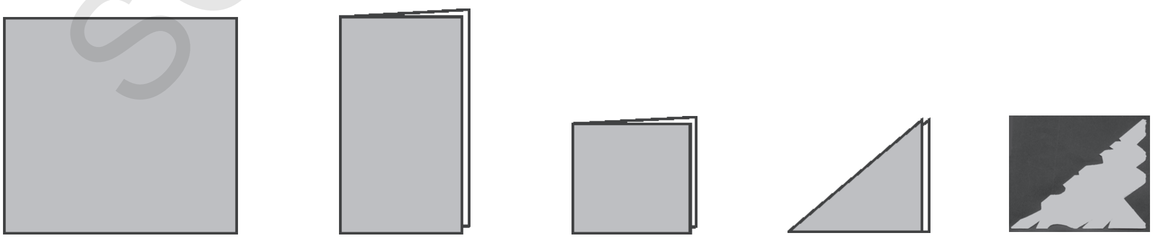


(i) (ii) (iii) (iv)

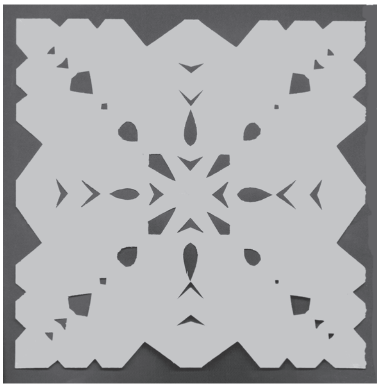
आकृति	रेखा सममिति	चक्रीय सममिति
1.	हाँ	नहीं
2.	नहीं	हाँ
3.	हाँ	हाँ
4.	नहीं	हाँ

प्रक्रिया -3

- एक वर्गाकार कागज लो।
- पहले उसे लम्बवत मोडो, फिर ऊर्ध्वाधर मोडो।
- तब उसे कर्ण से या तिरछा मोडो, इस प्रकार मोडने से कागज त्रिभुजाकार हो जाएगा।
- मोड़े हुए किनारों को चित्र मे दर्शाए अनुसार काटो या **अपनी इच्छानुसार** काटो ।
- अब कागज को खोलो।



चित्र 1 चित्र 2 चित्र 3 चित्र 4 चित्र 5



(i) क्या इस कागज मे सममिति रेखा पाई जाती है।

(ii) क्या इस कागज मे चक्रीय सममिति पायी जाती है।

अभ्यास -4

1. अंग्रेजी वर्णमाला के कुछ अक्षरों मे मोहक सममिति पायी जाती है। किन अक्षरों में केवल एक रेखा की सममिति होती है। किन अक्षरों मे चक्रीय सममिति का क्रम -2 पाया जाता है।

निम्नलिखित तालिका में रेखाओं के विषय मे सोच कर भरो।

अक्षर	रेखा सममिति	सममिति रेखाओं चक्रीय सममिति	चक्रीय की संख्या	सममिति का क्रम की संख्या
Z	नहीं	0	हाँ	2
S				
H				
O				
E	हाँ	1	नहीं	-
N				
C				

योजना

समाचार पत्र-पत्रिकाओं और विज्ञापन पत्रों से सममिति आकृतियाँ जमा करो। उनपर सममिति अक्ष उतारो। उन्हें श्रेणियों में बाँटो।

पुनरावलोकन (स्मरणीय अंश)

- एक रेखा जो किसी आकृति को दो अनुरूप भागों में **विभाजित** करती है, उसे सममित रेखा या सममित अक्ष कहते हैं।
- प्रत्येक वस्तु मे एक या अधिक सममित रेखाएँ या सममित अक्ष हो सकते है।
- यदि किसी आकृति को स्थिर अक्ष से निश्चित कोण पर घूमाने पर वह आकृति बिल्कुल पहले जैसे दिखाई दे तो उस आकृति में चक्रीय सममिति पायी जाती है।
- आकृति को जिस कोण पर घुमाते हैं, उसे चक्रीय कोण कहते हैं।
- सभी आकृतियों मे क्रम -1 की चक्रीय सममिति पाया जाती है। इन्हे जब पूर्णतः 360^0 पर घुमाया जाया तो वे पुनः अपनी वास्तविक अवस्था में आ जाते हैं। अत जब वस्तु मे सममिति का क्रम 1 से अधिक हो तभी उसे चक्रीय सममिति कह सकते है।
- कुछ आकृतियों मे केवल रेखा सममिति पायी जाती है, कुछ मे केवल चक्रीय सममिति पायी जाती है तथा कुछ मे दोनो पाई जाती है। वर्ग समबाहु त्रिभुज और वृत्त मे रेखा सममिति और चक्रीय सममिति दोनो पायी जाती है।

उत्तर

01. पूर्ण संख्याएँ

अभ्यास- 1 **पेज - 2**

(1) बड़ी संख्या = 2; छोटी संख्या = -3

(2) (i) −9, −8, −7, −6 ; उच्चतम संख्या = −6 ; न्यूनतम संख्याएँ = −9

(ii) −2, −1, 0 +1, +2 ; उच्चतम संख्या = +2 ; न्यूनतम संख्याएँ = −1

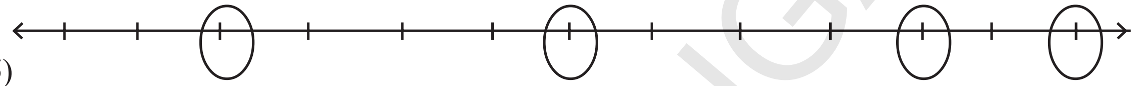
(iii) −7, −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5

b) उच्चतम संख्या = +4 ; *न्यूनतम संख्याएँ* = −7

(3) (i) −8, −5, 1, 2 (ii) −5, −4, −3, 2 (iii) −15, −10, −7

(4) (i) −2, −3, −5 (ii) −1, −2, −8 (iii) 8, 5, −2

(5)



(6) निम्न संख्याओं को व्यक्त करते हुए संख्या रेखा उतारना चाहिए। -8,-7,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,5,6,7,9

(7) i)

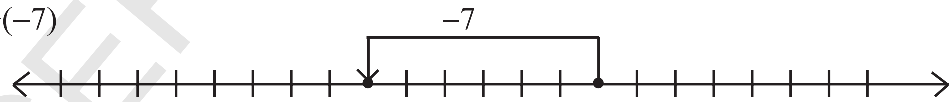
क्र.सं.	शहर	तापमान
1	बेंगलूरु	20°C
2	ऊटी	15°C
3	नैनीताल	−3°C
4	मनाली	−7°C
5	कसौली	−9°C

(ii) बेंगलूरु (20°C) (iii) कसौली (−9°C)

(iv) नैनीताल (−3°C) मनाली (−7°C) कसौली (−9°C) (v) ऊटी (15°C) बेंगलूरु (20°C)

अभ्यास- 2 **पेज - 4**

(1) 5+(−7)



(2) (i) 11 (ii) 5 (iii) 14 (iv) 8 (v) 2 (vi) 4

(vii) −2 (viii) 0 (ix) 8 (x) 20 (xi) 80

अभ्यास- 3 **पेज - 6**

(1) (i) 5 (ii) 15 (iii) -4 (iv) 1 (v) 13 (vi) -1

(2) (i) 31 (ii) 21 (iii) 24 (iv) −13

(v) −8 (vi) 130 (vii) 75 (viii) 50

(3)	क्र.सं.	ऋण पूर्ण सं	+	पूर्णांक	=	-6
	1	(-6)	+	0	=	-6
	2	(-7)	+	1	=	-6
	3	(-8)	+	2	=	-6
	4	(-9)	+	3	=	-6 आदि

अभ्यास - 4 **पेज - 11**

(1) (i) +600 (ii) -1 (iii) -600 (iv) +200 (v) -45

(2) (i) -3 (ii) -225 (iii) 630 (iv) 316 (v) 0
(vi) 1320 (vii) 162 (viii) -360 (ix) -24 (x) 36

(3) $-10°$ (4) (i) 10 (ii) 8 (iii) 5 (5) (i) ₹5000 लाभ (ii) 3200

(6) (i) -9 (ii) -7 (iii) +7 (iv) -11

अभ्यास - 5 **पेज - 19**

(1) (i) सत्य (72 = 126 − 54 = 72) (ii) सत्य (210 = 84 + 126 = 210) (2) (i) $-a$ (ii) -5

(3) (i) 480 (ii) $-53,000$ (iii) -15000 (iv) -4182
(v) -62500 (vi) 336 (vii) 493 (viii) 1140

अभ्यास - 6 **पेज - 22**

(1) (i) -1 (ii) -49 (iii) अपरिभाषित (iv) 0

अभ्यास - 7 **पेज - 23, 24**

(1) (i) 2 4 (ii) 20 (2) (i) 33,000 लाभ (ii) 3000

(3) 9 घंटे 9PM ; आधी रात 12 बजे के समय तापमान = $-14°C$

(4) (i) 8प्रश्न (ii) 13 प्रश्न (5) 1 बजे

02-भिन्न, दशमलव और वास्तविक संख्याएँ

अभ्यास - 1 **पेज - 29**

(1) (i) $2\frac{3}{4}$ (ii) $1\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{3}{7}$ (iv) $3\frac{1}{6}$ (v) $\frac{19}{24}$ (vi) $6\frac{1}{6}$

(2) (i) $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}$ (ii) $\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$

(3) आड़ी पंक्तियों में कुल = $\frac{21}{13}$, खड़ी पंक्तियों में कुल = $\frac{21}{13}$, कर्णों की पंक्तियों में कुल = $\frac{21}{13}$ कुल पंक्तियों में समान है।

(4) $17\frac{11}{15}$ सें. मी. (5) $1\frac{7}{8}$ (6) $\frac{7}{12}$

(7) परिमिति (i) ABE $= 10\frac{1}{5}$ सें.मी. (ii) आयत BCDE परिमिति $= 7\frac{11}{15}$ सें. मी.

Δ ABE अधिक है और अंतर $= 2\frac{7}{15}$ सें. मी.

अभ्यास - 2 पेज - 34

(1) (i) $5\frac{0}{6}$ या 5 (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $1\frac{5}{7}$ (iv) $1\frac{1}{9}$ (v) $6\frac{0}{5}$ या 6

(2) (i) 6 (ii) 6 (iii) 9 (iv) 15

(3) (i) 4 (ii) 6 (iii) 6 (iv) 12

अभ्यास - 3 पेज - 37

(1) (i) $\frac{35}{66}$ (ii) $1\frac{1}{5}$ (iii) $7\frac{7}{15}$ (2) (i) $3\frac{7}{15}$ (ii) $\frac{2}{21}$ (iii) 3

(3) (i) $\frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ का $\frac{3}{4}$ (ii) दोनों समान हैं। (4) $17\frac{1}{2}$ घंटे (5) $85\frac{1}{3}$ कि.मी.

(6) 1 मी 350 मिमी या 1350 मिमी (7) (i) $\frac{10}{7}$ (ii) $\frac{3}{5}$, 35 या 3,7

अभ्यास - 4 पेज - 43

(1) (i) $\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{7}{13}$ (iv) $\frac{4}{3}$ (2) (i) 24 (ii) $3\frac{3}{7}$ (iii) $1\frac{2}{7}$ (iv) $\frac{7}{5}$

(3) (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{7}{40}$ (iii) $\frac{5}{9}$ (iv) $\frac{4}{3}$ (4) $2\frac{1}{2}$ दिन

अभ्यास - 5 पेज - 45, 46

(1) (i) 0.7 (ii) 8.5 (iii) 1.51 (iv) 6 (2) (i) ₹. 0-09 (ii) ₹. 77-07 (iii) ₹. 2-35

(3) (i) 0.1 मी, 0.0001 किमी (ii) 4.5 सेमी0.045 मी 0.000045 किमी

(4) (i) 0.19 कि. ग्रा (ii) 0.247 कि. ग्रा (iii) 44.08 कि. ग्रा

(5) (i) $50+5+\frac{5}{10}$ (ii) $5+\frac{5}{10}+\frac{5}{100}$ (iii) $300+3+\frac{3}{100}$

(iv) $30+\frac{3}{10}+\frac{3}{1000}$ (v) $1000+200+30+4+\frac{5}{100}+\frac{6}{100}$

(6) (i) 3 (ii) 30 (iii) $\frac{3}{100}$ (iv) $\frac{3}{10}$ (v) $\frac{3}{100}$

(7) राधा ने अरुणा से 100 मी. अधिक चली, (8) 5.625 कि.ग्राम

अभ्यास - 6 **पेज - 50, 51**

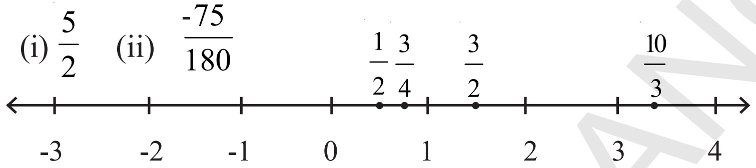
(1) (i) 1.8 (ii) 18.9 (iii) 13.55 (iv) 78.8 (v) 0.35
(vi) 1050.05 (vii) 1.72 (2) 24.8 वर्ग से.मी.

(3) (i) 213 (ii) 368 (iii) 537 (iv) 1680.7 (v) 13110
(vi) 15610 (vii) 362 (viii) 4307 (ix) 5 (x) 0.8
(xi) 90 (xii) 30 (4) 625 कि.मी. (5) (i) 0.45 (ii) 0.475
(iii) 42.16 (iv) 14.62 (v) 0.025 (vi) 1.12 (vii) 0.0214
(viii) 10.5525 (ix) 1.0101 (x) 77.011 (6) (i) 0.023 (ii) 0.09 (iii) 4.43
(iv) 0.1271 (v) 2 (vi) 590 (vii) 0.02 (7) 5 (8) 0.128 सेमी.

अभ्यास - 7 **पेज - 56**

(2) (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-75}{180}$

(3)



(4) (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) सत्य

03 - सरल समीकरण

अभ्यास - 1 **पेज - 59**

(1) (i) LHS = 2x, RHS = 10 (ii) LHS = 2x–3, RHS = 9 (iii) LHS = 4z+1, RHS = 8 (iv) LHS = 5p+3, RHS = 2p+9
(v) LHS = 14, RHS = 27–y (vi) LHS = 2a–3, RHS = 5 (vii) LHS = 7 m, RHS = 14 (viii) LHS = 8, RHS = q+5

(2) (i) y = 5 (ii) a = 7 (iii) m = 3 (iv) n = 7

अभ्यास - 2 **पेज - 63**

(1) (i) x = 4 (ii) y = 7 (iii) x = 5 (iv) z = 9 (v) x = 3 (vi) y = –20

(2) (i) y = 5 (ii) a = 4 (iii) q = 4 (iv) t = 4 (v) x = 13
(vi) x = 3 (vii) x = –5 (viii) x = –1 (ix) y = 4 (x) x = –2

अभ्यास - 3 **पेज - 67**

(1) 4 सेमी (2) 5 सेमी (3) 21 (4) 30 (5) 8 (6) 49, 49 (7) 7, 8, 9
(8) l = 34 मी b = 2 मी (9) l=23 मी b=19 मी (10) 5 वर्ष (11) 19, 44 (12) 40, 25,15
13) 2 (14) 40 (15) 30°, 60°, 90° (16) 30

04 - रेखाएँ-कोण

अभ्यास - 1 **पेज - 69**

(1) (i) रेखा खंड AB (ii) किरण CD (iii) रेखा XY (iv) बिंदु 'P'

(2) (i) $\overrightarrow{OP}$ (ii) • X (iii) $\overleftrightarrow{RS}$ (iv) $\overline{CD}$

(3) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$

(5) (i) न्यूनकोण (ii) अधिक कोण (iii) समकोण (iv) न्यून कोण (v) अधिककोण

(6) $\angle AOF, \angle FOE, \angle EOD, \angle DOC, \angle COB, \angle FOD, \angle EOC, \angle DOB$ - न्यूनकोण

$\angle AOE, \angle EOB, \angle FOC$ - समकोण ; $\angle AOD, \angle AOC, \angle FOB$ - अधिककोण

$\angle AOB$ - सरल कोण (7) (i) और (iv) समानांतर; (ii) और (iii) असमानांतर

(8) i, ii और iv प्रतिच्छेदी रेखाएँ होती हैं और iii अप्रतिच्छेदी रेखाएँ होती हैं।

अभ्यास - 2 **पेज - 71**

(1) iii (2) (i) 65° (ii) 50° (iii) 1° (iv) 35° (3) 45°, 65°

(4) हाँ, क्योंकि कोणों का योग 90° होना चाहिए ।

अभ्यास - 3 **पेज - 73**

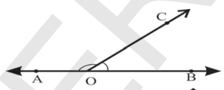
(1) (i), (ii) (2) (i) 75° (ii) 85° (iii) 30° (iv) 160°

(3) दो न्यून कोणों का कुल योग हमेशा 180° से कम होता है। (4) 90°, 90°

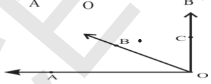
अभ्यास - 4 **पेज - 74**

(1) (i) a, b (ii) c, d (2) (i) $\angle AOD, \angle DOB$ (ii) $\angle DOB, \angle BOC$

(iii) $\angle BOC, \angle COA$ (iv) $\angle COA, \angle AOD$

(3) हाँ 

क्योंकि $\angle AOC + \angle COB = 180°$

(4) हाँ 

क्योंकि $\angle AOB + \angle BOC = 90°$

अभ्यास - 5 **पेज - 75**

(1) i, ii (2) नहीं, दोनों की संयुक्त भुजाएं नहीं हैं।

अभ्यास - 6 **पेज - 76**

(1) (i) $\angle AOD, \angle BOC$ (ii) $\angle AOC, \angle BOD$

(2) y = 160° (सम्मुख विलोम कोण) $x + 160° = 180°$ $\therefore x = 20°$

$\angle x = \angle z$ (सम्मुख विलोम कोण) $\therefore z = 20°$

अभ्यास - 7 **पेज - 85**

(1) (i) तिर्यक रेखा (ii) समानांतर (iii) समानांतर (iv) एक

(2) (i) 100° (ii) 45° (iii) 90° (iv) 100°

(3) $\angle x = 180 - (75+45) = 60°$; $\angle y = 75$; $z = 45°$

(4) $b + 50° = 180°$ $\therefore b = 130°$

$b + c = 180° \Rightarrow 130° + c = 180° \Rightarrow c = 50°$

$d + 50° = 180° \Rightarrow d = 130°$

(5) $\angle APQ + \angle AQR = 180°$

$100° + \angle PQR = 180°$

$\angle AQR = 80°$

$\angle AQR = \angle CRS = 80°$ सदृश्य कोण

$\therefore l \parallel m$

(6) $\angle a = 50°$ (एकांतर कोण)

$\angle b = 50°$ (एकांतर कोण)

$\angle c = \angle d = \angle e = 50°$

(सभी एकांतर कोण है।)

05 - त्रिभुज और उनके गुण

अभ्यास - 1 **पेज - 93**

(1) (i) संभव (ii) संभव (iii) असंभव (iv) संभव

अभ्यास - 2 **पेज - 94**

(1) (i) माध्यिका 0 (ii) ऊँचाई (2) समकोण त्रिभुज (3) हाँ

(4) नहीं, कभी-कभी वह त्रिभुज के बाहर होगा। (5) (i) XZ (ii) $\angle P$ (iii) B

अभ्यास - 3 **पेज - 100**

(1) (i) 70° (ii) 60° (iii) 40° (2) (i) x = 70° ; y = 60° (ii) x = 80° ; y = 50° (iii) x = 110° ; y = 70° (iv) x = 60° ; y = 90° (v) x = 45° ; y = 90° (iv) x = 60°

(3) (i) 40° (ii) 34° (iii) 60° (4) 60° (5) (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

(6) (i) 30° ; 60° ; 90° (7) x = 100° ;y = 50° ; z = 100° (8)(9) $\angle P = 80°$; $\angle Q = 40°$; $\angle R = 60$ (10) ° (11) 18° ; 72° ; 90 (11) ° (12) 36° (13) 54° ; 90^0 (12) $\angle LPM = 40°$; $\angle PML = 50°$; $\angle PRQ = 50^0$ (13) 540^0

अभ्यास - 4 (पृष्ठ संख्या : 107)

(1) अंतर कोण : $\angle ABC, \angle ACB, \angle BAC$; बाह्यकोण : $\angle CBX, \angle ACZ, \angle BAY$

(2) $\angle ACD = 111°$ (3) $x = 115°$; $y = 35°$ (4) (i) $x = 50°$ (ii) $x = 33°$; $y = 82°$(5) $\angle CDB = 76°$; $\angle DBC = 39°$; $\angle ABC = 58°$

(6)) (i) $x = 55°$ (ii) $x = 100°$ (iii) $x = 120°$, $y = 30°$ (iv) $y = 70°$ (v) $x = 60°$; $y = 150°$; (vi) $x = 50°$; $y = 130°$ (7)(7) 50° ; 75° ; 55° (8) $\angle P$ 35° हाँ (9) 70°

(10) 30° ; 75° ; 75° (11)(11) $x = 135°$; $y = 80°$

06 .अनुपात और उनका उपयोग

अभ्यास - 1 **पेज - 111**

(1) 100 : 10 , 10:1 (2) ₹15 (i) 15 : 5 *या* 3 : 1 (*राधा : सुधा*)

(ii) 5 : 15 or 1 : 3 (*सुधा : राधा*) (3) *राजु का हिस्सा* = 40 ; *रवि का हिस्सा* = 56

(4) $\overline{AX} = 18$ *सेंमी,* $\overline{XB} = 20$ *सेमी* (5) ₹.60,000 (6) 8 *लीटर*

(7) 40 : 20 *या* 2: 1 (8) 1:2400 या 0.05 : 120

(9) (i) अपनी कक्षा के बालक-बालिकाओं की संख्या गिनकर अनुपात रूप में बताओ। यदि बालक-बालिकाओं की संख्या शून्य है तो क्या आप उन्हें अनुपात रूप में बता सकते हैं? ऐसी अनुपातों को नहीं बता सकते।

(ii) अपनी कक्षा की खिड़कियों, दरवाजों को गिनकर अनुपात रूप में बताओ।

(iii) अपनी पास की पाठ्यपुस्तकें, नोटपुस्तकें गिनकर अनुपात रूप में बताओ।

अभ्यास - 2 **पेज - 114**

(1) (i) 8, 8 (ii) 450, 450 (iii) 96, 96 (iv) 6, 30 (v) 24, 72

(2) (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य

(3) ₹.90 (4) 10 कि.ग्रा. (5) a) 45 b) 26 (6) i) 540° ii) –21°

अभ्यास - 3 **पेज - 120**

(1) 0.0001से.मी. ; 2 सेमी (2) (i) हाँ (ii) नहीं (iii) नहीं (3) 4 सेमी

(4)
- 5 अलग-अलग वर्ग बनाओ। उनके कोणों की लंबाई मापकर तालिका पूर्ण कीजिए।
- वर्ग की परिमिति उसकी भुजाओं का चार गुना हैं, तालिका बनाओ।
- वर्ग उतारकर तालिका की पूर्ति कीजिए।

(i) हाँ, वर्ग की भुजाओं की लंबाई उसके परिमिति का सीधा समानुपाती है।

(ii) नहीं, वर्ग की भुजाओं की लंबाई उसके क्षेत्रफल का सीधा समानुपाती नहीं है।

अभ्यास - 4 (पृष्ठ संख्या : 125)

(1) पाठशाला Y (2) 20% कटौती (3) आम = 35% (4) 16%

(5) पाठशाला नहीं आने वाले $= 16\frac{2}{3}\%$ या 16.66% पाठशाला आने वाले $= 83\frac{1}{3}\%$ या 83.33%

(6) 7200 (7) 15 (8) सोना 70% ; चाँदी 25% ; ताँबा 5% (9) 2000

अभ्यास - 5 (पृष्ठ संख्या : 136)

(1) $12\frac{1}{2}\%$ 12.5% (2) 6% (3) ₹. 2,00,000 (4) ₹ 875

(5) हानि = 1200 (2.44%) (6) 561 (7) 202.5 (8) 800 (9) 1100

अभ्यास - 6 (पृष्ठ संख्या : 140)

(1) 2 वर्ष 8 महीने या $\frac{8}{3}$ वर्ष या $2\frac{2}{3}$ वर्ष (2) 12%

(3) ₹. 450 (4) ₹. 12958 (5) $1\frac{1}{2}$ वर्ष

07 - दत्तों का संचालन

अभ्यास - 1 (पृष्ठ संख्या : 147)

(1) (i) 33 ^{0}C (ii)30 ^{0}C (2) 15.9 कि.ग्रा.

(3) (i) मूँगफली ₹ 7500 ; जवार ₹ 4000 ; मकई ₹ 5250 (ii) मूँगफली (4) 42

(5) (i) 23 (ii) 21 (iii) 16.5 (iv) लेख्या (6) (i) ₹ 18 (ii) ₹ 54 (iii) ₹ 9 (iv) अनुपात

(7) 5.5 (8) 5.6 (9) 107

अभ्यास - 2 (पृष्ठ संख्या : 152)

(1) 155 सेमी (2) 140सेमी (i) अंकगणित = 28, बहुल = 27 (ii) 25 वर्ष आयु वालों के हिसाब से दो खिलाड़ी

(3) 25 (4) (i) बहुलक (ii) अंकगणित औसत (iii) अंकगणित औसत (iv) बहुलक

अभ्यास - 3 (पृष्ठ संख्या : 155)

(1) (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य(2) (i) ₹ 1400 (ii) ₹ 1450

(3) बहुलक सत्य है, लेकिन माध्यिका असत्य है। (4) 3,1,7,10 ; 2,7,9 ; 3,7,8 (5) 11

अभ्यास - 4 (पृष्ठ संख्या : 160)

(5) (i) विद्या (ii) भोजन (iii) ₹ 2250 (iv) ₹ 1500

08 - त्रिभुजो की समरूपता

अभ्यास - 1 (पृष्ठ संख्या : 169)

(1) (i) सत्य (ii) असत्य

(2) (i) $\angle P = \angle R$ (ii) $\angle ROS = \angle POQ$

$\angle TQP = \angle SQR$ $\angle R = \angle Q$ or $\angle R = \angle P$

$\angle T = \angle S$ $\angle S = \angle P$ or $\angle S = \angle Q$

(3) (ii) ठीक है (4) हाँ (भु. भु. भु. अनुरूपता)

अभ्यास - 2 (पृष्ठ संख्या : 171)

(1) दिया गया है कि; $GH = TR$ और $HJ = TS$

(2) $AP = 4$ से.मी. $(\therefore AP = BQ$ c.p.c.t.)

(3) (i) $\Delta ABC \cong \Delta STR$

$AB = ST$ इसीलिए $BC = TR$

$\angle A = \angle S$ $\angle B = \angle T$

$AC = SR$ $\angle C = \angle R$

(ii) $\Delta POQ \cong \Delta ROS$

$PO = RO$ और $PQ = RS$

$OQ = OS$ $\angle P = \angle R$

$\angle POQ = \angle POS$ $\angle Q = \angle S$

$DR = OW$ तथा $DO = OD$

$\Delta DRO \cong \Delta OWD$

(iii) $\Delta DRO \cong \Delta OWD$

$RO = WD$ $\angle ODR = \angle DOW$

$\angle R = \angle W$ $\angle DOR = \angle ODW$

चित्र WORD में $\angle R = 90^0$

$WD = OR$ और $WO = DR$

$\therefore$ WORD आयत है

$\therefore$ $\Delta WSD \cong \Delta RSO$

$\Delta WSO \cong \Delta RSD$

और $\Delta ORW \cong \Delta DWR$

(iv) ΔABC और ΔCBA अनुरूप नहीं है

(4) (i) ΔABC में और ΔRQP से पता करना है $AB = RQ$.

(ii) ΔABC में और ΔADC से पता करना है $AB = AD$.

अभ्यास - 3 (पृष्ठ संख्या : 175)

(1) (i) को.को.भु. सिद्धांत द्वारा $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (ii) को.भु.को. या को.को.को. सिद्धांत द्वारा $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

(iii) को. को. को. या को.भु.को. सिद्धांत द्वारा $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (iv) अनुरूप नहीं है $\Delta ABC \cong \Delta FED$

(2) (i) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (को.भु.को. सिद्धांत)

(ii) से $AB = CD$ (c.p.c.t.) (अनुरूप त्रिभुज के संगत भाग)

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (समान है को.को.को. से)

या ΔAOB और ΔDOC अनुरूप त्रिभुजों में संगत भाग समान होते हैं।

अभ्यास - 4 (पृष्ठ संख्या : 178)

(1) (i) भु.भु.भु. (ii) भु. को. भु. (iii) को.भु.को (iv) लं.क. भु (2) (i) a) AR = PE b) RT = EN c) AT = PN (ii) a) RT = EN b) PN = AT (iii) a) $\angle A = \angle P$ b) $\angle T = \angle N$

(3) (i) भुजा (ii) कोण (iii) सामान्य भुजाएँ (iv) भु.को.भु

(4) सदृश्यकोण के समान होने मात्र से वे सर्वसमान नहीं होते $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ नहीं कह सकते हैं।

(5) $\Delta RAT \cong \Delta WON$ (6) $\Delta ABC \cong \Delta ABT$ और $\Delta QRS \cong \Delta TPQ$

(7) (i) एक समान माप वाले दो त्रिभुज बनाने चाहिए। (ii) अलग-अलग माप वाले दो त्रिभुज बनाने चाहिए।

(8) BC = QR (को. भु. को.) या AB = PQ (को. को. भु.) या AC = PR (को. को. भु.)

(9) $\angle B = \angle E$; $\angle A = \angle F$ को.भु.को. आधार पर $\Delta ABC \cong \Delta FED$ सर्वसमान ; BC = ED

10 बीजीय व्यंजक

अभ्यास - 1 (पृष्ठ संख्या : 192)

(1) (i) $3n$ (ii) $2n$

(2) (i) • चित्र. 4 में चारों ओर 4 भुजाएँ होती हैं।

• चित्र. 5 में चारों ओर 5 चतुर्भुज होते हैं।

(ii) नमूने के आधार पर बीजीय व्यंजक = 4n ; 4, 8, 12, 16, 20 . . . व्यंजक = 4n

(iii) नमूने के आधार पर बीजीय व्यंजक = 4n + 1 ; 9, 13, 17, 21 ... व्यंजक = 4n + 1

(3) (i) $p + 6$ (ii) $x - 4$ (iii) $y - 8$ (iv) $-5q$ (v) $y \div 4$ या $\frac{y}{4}$

(vi) pq का $\frac{1}{4}$ या $\frac{pq}{4}$ (vii) $3z + 5$ (viii) $10 + 5x$ (ix) $2y - 5$ (x) $10y + 13$

(4) (i) x से 3 अधिक है या x में तीन मिलाने पर (ii) y से 7 निकालने पर (iii) 10 से l गुणा करने पर

(iv) 5 से x भाग करने पर

(v) 3 को n से गुणा करने पर और 11 जोड़ने पर

(vi) 2 को y से गुणा करने पर, 2 में से घटाने पर, y के दुगने मूल्य में से 5 घटा देने पर

(5) (i) स्थिर (ii) अस्थिर (iii) स्थिर (iv) अस्थिर

अभ्यास - 2 (पृष्ठ संख्या : 199)

(1) (i) $(a^2, -2a^2)$ (ii) $(-yz, 2zy)$ (iii) $(-2xy, 5y^2x)$ (iv) $(7p, -2p, 3p)$ और $(8pq, -5pq)$

(2) बीजीय व्यंजक : प्रश्न संख्याएँ : i, ii, iv, vi, vii,ix, xi

संख्या व्यंजक : प्रश्न संख्याएँ iii, v, viii, x

(3) एकपदी i, iv, vi ; द्वीपदी : ii, v, vii , त्रिपदी iii, viii, ix, बहुपदी x

(4) (i) 1 (ii) 3 (iii) 5 (iv) 4 (v) 2 (vi) 3 (5) (i) 1 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 3
(v) 4 (vi) 2 (6) $xy + yz$ $2x^2 + 3x + 5$

अभ्यास - 3 (पृष्ठ संख्या : 204)

(1) $3a + 2a = 5a$ (2) (i) $13x$ (ii) $10x$ (3) (i) $3x$ (ii) $-6p$ (iii) $11m^2$ (4) (i) -1 (ii) 4 (iii) -2 (5) -9 (6) $2x^2 + 11x - 9$ (7) (i) 3 (ii) 5 (iii) -1 (8) 54 से.मी. × से.मी. = 54 सें.मी.^{2}

(9) ₹ 90 (10) $s = \frac{d}{t} = \frac{135 \text{ मी}}{10 \text{ से}} = \frac{27}{2}$ मी / से or $13\frac{1}{2}$ मी / से or 13.5 मी / से

अभ्यास - 4 (पृष्ठ संख्या : 209)

(1) (i) $-5x^2 + xy + 8y^2$ (ii) $10a^2 + 7b^2 + 4ab$ (iii) $7x + 8y - 7z$ (iv) $-4x^2 - 5x$
(2) $7x + 9$ (3) $18x - 2y$ (4) $5a - 2b$ (5) (i) $3a$ (ii) $y - 2z$ (iii) $6a^2 + 12ab + 4b^2$
(iv) $4pq + 15p^2 - 2q^2$ (v) $-5x^2 + 3x + 10$ (vi) $2x^2 - 2xy - 5y^2$ (vii) $3m^3 + 4m^2 - 7m - 7$
(6) $7x^2 + xy - 6y^2$ (7) $4x^2 - 3x - 2$ (8) $4x^2 - 3y^2 - xy$ (9) $2a^2 + 14a + 5$
(10) (i) $22x^2 + 12y^2 + 8xy$ (ii) $-14x^2 - 10y^2 - 20xy$ या $-(14x^2 + 10y^2 + 20xy)$
(iii) $20x^2 + 5y^2 - 4xy$ (iv) $-8y^2 - 32x^2 - 30xy$

11 घात और घातांक

अभ्यास- 1 (पृष्ठ संख्या : 214)

1. (i) $3 \times 3 \times 3 \times 3$ आधार 3, घातांक 4 (ii) $7 \times x \times 7 \times x$ आधार $7x$, घातांक 2
   (iii) $5 \times 5 \times 5 \times a \times a \times a \times b \times b \times b$ आधार 5 ab, घातांक 3
   (iv) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times y \times y \times y \times y \times y$ आधार 4y, घातांक 5
2. (i) 7^5 (ii) $3^3 \times 5^4$ (iii) $2^3 \times 4^4 \times 5^3$
3. (i) $2^5 \times 3^2$ (ii) 2×5^4 (iii) $2 \times 3^2 \times 5^3$ (iv) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ (v) $2^5 \times 3 \times 5^2$
4. (i) 3^2 (ii) 3^5 (iii) 2^8 5. (1) 17 (ii) 31 (iii) 25 (iv) 1

अभ्यास - 2 (पृष्ठ संख्या : 225)

(1) (i) 2^{14} (ii) 3^{10} (iii) 5^5 (iv) 9^{30} (v) $\left(\frac{3}{5}\right)^{15}$ (vi) 3^{20}

(vii) 3^4 (viii) 6^4 (ix) 2^{9a} (x) 10^6 (xi) $\left(\frac{-5}{6}\right)^{10} = \frac{(-5)^{10}}{6^{10}} = \frac{5^{10}}{6^{10}}$

(xii) 2^{10a+10} सें.मी. xiii) $\frac{2^5}{3^5}$ (xiv) 15^3 (xv) $(-4)^3$ (xvi) $\frac{1}{9^8}$ (xvii) $\frac{1}{(-6)^4}$

(xviii) $(-7)^{15}$ (xix) $(-6)^{16}$ (xix) a^{x+y+z} (2) 3^{10} (3) 2 (4) 2 (5) 1

(6) (i) सत्य (2+11=13) (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य
(v) असत्य (vi) असत्य (vii) सत्य

12 - चतुर्भुज

अभ्यास - 1 (पृष्ठ संख्या : 232)

(1) (i) भुजायें : $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$ कोण : $\angle QPS$, $\angle PSR$, $\angle SRQ$, $\angle RQP$

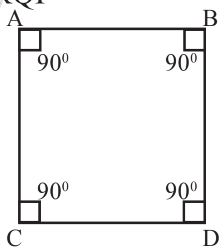
शीर्ष : P, Q, R, S कर्ण : $\overline{PR}$, $\overline{QS}$

(ii) आसन्न भुजाओं की जोडी $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$; $\overline{QR}$, $\overline{RS}$; $\overline{RS}$, $\overline{SP}$ भुजाएँ $\overline{RS}$, $\overline{SP}$

आसन्न कोणों की जोडीयाँ : $\angle QPS$, $\angle PSR$; $\angle PSR$, $\angle SRQ$; $\angle SRQ$, $\angle RQP$ और $\angle RQP$, $\angle QPS$

सम्मुख भुजाओं की जोडी : $\overline{PS}$, $\overline{QR}$ *और* $\overline{QP}$, $\overline{RS}$

सम्मुख भुजाएँ कोणों की जोड़ियाँ : $\angle QPS$, $\angle SRQ$ *और* $\angle PSR$, $\angle RQP$



(2) 100° (3) $48^0, 72^0, 96^0, 144^0$ (4) $90^0, 90^0, 90^0, 90^0$

(5) $75^0, 85^0, 95^0, 105^0$ (6) चतुर्भुज का कोई भी कोण 180^0 नहीं होता।

अभ्यास - 2 (पृष्ठ संख्या : 242)

(1) (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) असत्य (vi) सत्य (vii) सत्य (viii) सत्य

(2) (i) क्योंकी 4 भुजाएँ होती हैं। (ii) वर्ग की सम्मुख भुजाएँ समानांतर होती हैं।

(iii) क्योंकी वर्ग के कर्ण लम्बवत प्रतिच्छेदक हैं ।

(iv) क्योंकि वर्ग की भुजायें समान लर्म्बा की होती हैं ।

(3) $\angle BAD = 140^0$ DCB = 140°, $\angle CDA = 40°$ (4) 50°, 130°, 50°, 130°

(5) यहाँ 4 भुजाएँ और एक जोड़ी समानांतर भुजाएँ होती हैं। वे $\overline{EA}$, $\overline{DR}$ (6) 1

(7) सम्मुख कोण समान नहीं होते। (8) 15 , 9 सें.मी., 15 सें.मी., 9 सें.मी.

(9) नहीं, समचतुर्भुज की भुजाएँ समान होती हैं। (10) $\angle C = 150^\circ$, $\angle D = 150^\circ$

(11) (i) समचतुर्भुज (ii) वर्ग (iii) $180° - x°$

(iv) समरूप (v) 10 (vi) 90^0

(vii) 0 (viii) 10 (ix) 45

13 – क्षेत्रफल और परिमिति

अभ्यास – 1 (पृष्ठ संख्या : 245)

(1) 2(l+b); a^2 (2) 60 सं.मी.; 22 सं.मी.; 484 सं.मी.^{2} (3)280 सं.मी.^{2}; 68 सं.मी.; 18 सं.मी.; 216 सं.मी.^{2}; 10 सं.मी.; 50 सं.मी.

अभ्यास – 2 (पृष्ठ संख्या : 249)

(1) (i) 28 सं.मी. (ii) 15 सं.मी.^{2} (iii) 38.76 सं.मी.^{2} (iv) 24 सं.मी.^{2} (2) (i) 91.2 सं.मी.^{2} (ii) 11.4 सं.मी.

(3) 42 सं.मी. ; 30 सं.मी. (4) 8 सं.मी. ; 24 सं.मी. (5) 30 मी., 12 मी. (6) 80 मी.

अभ्यास – 3 (पृष्ठ संख्या : 252)

(1) (i) 200 से.मी.^{2} (ii) 12 से.मी.^{2} (iii) 20.25 से.मी.^{2} (iv) 12 से.मी.^{2} (2) (i) 12 से.मी.^{2} (ii) 3 से.मी.

(3) 30 से.मी.^{2}; 4.62से.मी. (4) 27 से.मी.^{2}; 7.2 से.मी.

(5) 64 से.मी.^{2}; हाँ ; Δ BEC, Δ BAE और ΔCDE समानांतर रेखाओं के बीच बनाये गये दो त्रिभुज

रेखाएँ BC और AD, BC = AE+ED

(6) रामू ; ΔPQR में PR धरातल क्योंकि QS$\perp$PR. (7) 40 सं.मी. (8) 20 सं.मी. 40 सं.मी.; (9) 20 सं.मी. (10) 800 सं.मी.^{2} (11) 160 सं.मी.^{2} (12) 192 सं.मी.^{2} (13) 18 सं.मी. ; 12 सं.मी.

अभ्यास – 4 (पृष्ठ संख्या : 257)

(1) (i) 20 सं.मी.^{2} (ii) 24 सं.मी.^{2} (2) 96 सं.मी.^{2} ; 150 मीं.मी. 691.2 मी.^{2}

(3) 18 सं.मी. (4) ₹ 506.25

अभ्यास –5 (पृष्ठ संख्या : 260)

(1) (i) 220 सं.मी. (ii) 26.4 सं.मी. (iii) 96.8 सं.मी. (2) (i) 55मी. (ii) 17.6 मी. (iii) 15.4मी.

(3) (i) (a) 50.24 सं.मी. (b) 94.2 सं.मी. (c) 125.6 सं.मी. (ii) 7 सं.मी. (4) 42 सं.मी.

(5) 10.5 सं.मी. (6) 3 गुना (7) 3 : 4 (8) 1.75सं.मी. (9) 94.20 सं.मी. (10) 39.25 सं.मी.

अभ्यास – 6 (पृष्ठ संख्या : 263)

(1) 475 मी.^{2} (2) 195.5 मी.^{2}, 29.5 मी.^{2} (3) 624 मी.^{2} (4) 68 मी.^{2} (5) 9900 मी.^{2}; 200100 मी.^{2}

14 3D और 2D आकृतियाँ

अभ्यास –1 (पृष्ठ संख्या : 265)

1) गोला : फुटबॉल, क्रिकेट बॉल, लड्डू
बेलनाकार : ड्रम, बिस्कुट कापैक, लाग, कैंडेल
पिरामिड : पिरामिड / घनाभ : दियासलाई की डिब्बी, ईंट, बिस्कुटका डिब्बा
शंकु : आइसक्रीम, फुलदान / घन : पासा, अट्टे का डिब्बा

(2) (i) शंकु: आइसक्रीम , फनल का ऊपरी भाग (ii) घन : पासा, अट्टे का डिब्बा

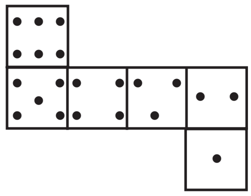
(iii) घनाभ : डष्टर, ईट (iv) गोला : गेंद, काँच की गोली (v) बेलनाकार : पेंसिल पाइप

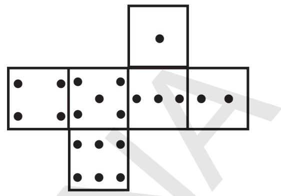
(3)

	घन	घनाभ	पिरामिड
तल	6	6	5
शीर्ष	12	12	8
किनारे	8	8	5

अभ्यास - 2 (पृष्ठ संख्या : 267)

(1) प्रक्रीया करो (2) i) C ii) a (3)





अभ्यास - 4 (पृष्ठ संख्या : 276)

1) गेंद : वृत

बेलनाकार नली : आयत

पुस्तक : आयत

2) (i) गोलाकार / वृताकार वस्तु

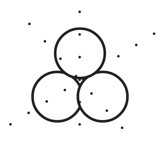
(ii) घन / वर्गाकार शीट

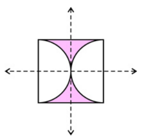
(iii) त्रिभुजाकार / त्रिभुजाकार आधार वाला प्रिज्म

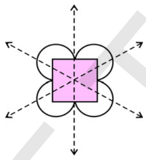
(iv) बेलनाकार / आयताकार शीट

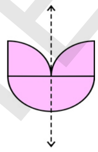
15. सममिति

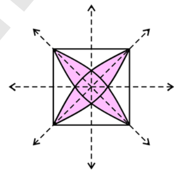
अभ्यास - 1 (पृष्ठ संख्या : 277)

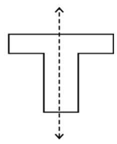

(i)

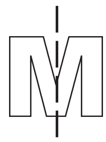

(ii)

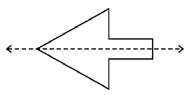

(iii)

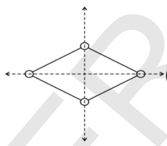

(iv)

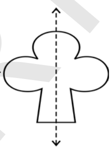

(v)

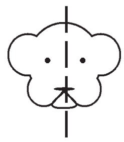

(vi)

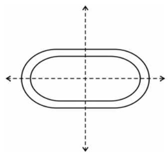

(vii)

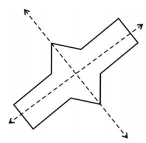

(viii)

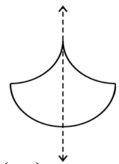

(ix)

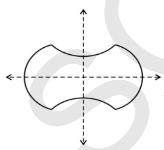

(x)

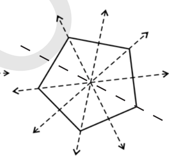

(xii)

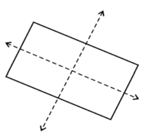

(xiii)

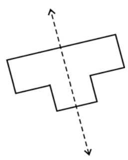

(xiv)

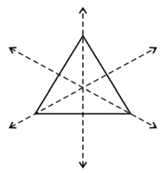

(xv)

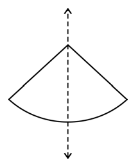

(xvi)

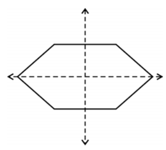

(xvii)


(xviii)

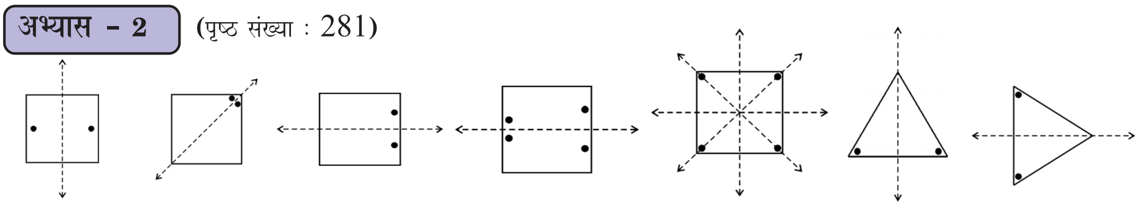

(xix)


(xx)

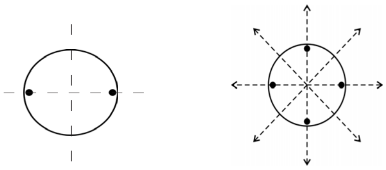

(xxi)


(xxiii)

अभ्यास - 2 (पृष्ठ संख्या : 281)



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi) (vii)

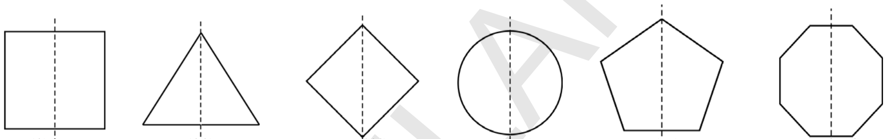


(viii) (ix)

(2)

(i) (ii) (iii) (ix)

(3)



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

(4) (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य

(5) क्रमागत अक्षों की बीच का कोण $= 360/2n = 360/2x4 = 360/8 = 45^0$

सभी बहुभुजों के लिए यह सत्य है।

अभ्यास - 3 (पृष्ठ संख्या : 286)

1. चित्र (i), (ii) (iv) और ६ में चक्रिय सममिति पायी जाती है।
2. (i) 2 (ii) 4 (iii) 3 (iv) 4 (v) 4 (vi) 5 (vii) 6 (viii) 3
3.

वर्ग	हाँ	90^0	4
आयत	हाँ	180^0	2
सम चतुर्भुज	हाँ	180^0	2
समबाहु त्रिभुज	हाँ	120^0	3
समषटभुज	हाँ	60^0	6
वृत	हाँ	अनंत	अनंत
अर्धवृत्त	नहीं	-	-

अभ्यास - 4 (पृष्ठ संख्या : 288)

1.

S	नहीं	0	हाँ	2
H	हाँ	2	हाँ	2
O	हाँ	2	हाँ	2
N	नहीं	0	हाँ	2
C	हाँ	1	नहीं	0

INSTRUCTIONS TO TEACHERS

Dear Teachers!!

Greetings and a hearty welcome to the newly developed textbook Mathematics for class VII.

- The present textbook is developed as per the syllabus and academic standards conceived by the mathematics position paper prepared based on APSCF – 2011 and RTE – 2009 for Upper Primary stage of education.

- The new textbook constitutes 15 chapters with concepts from the main branches of mathematics like Arithemetics, Algebra, Geometry, Mensuration and Statistics.

- These chapters emphasize the prescribed academic standards in achieving the skills like Problem Solving, Reasoning-proof, Communication, Connectivity and representation. The staratagies in building a chapter are observation of patterns, making generalization through deductive, inductive and logical thinking, exploring different methods for problem solving, questioning, interaction and the utilization of the same in daily life.

- The situations, examples and activities given in the textbook are based on the competencies acquired by the child at Primary Stage. So the child participates actively in all the classroom interactions and enjoys learning of Mathematics.

- Primary objective of a teacher is to achieve the "academic standards" by involving students in the discussions and activities suggested in the textbook and making them to learn the concepts.

- Mere completion of a chapter by the teacher doesn't make any sense. The exhibition of prescribed academic standards by the student only ensures the completion of the chapter.

- Students are to be encouraged to answer the questions given in the chapters. These questions help to improve logical, inductive and deductive thinking of the child.

- Understanding and generalization of properties are essential. Student first finds the need and then proceeds to understand, followed by solving similar problems on his own and then generalises the facts. The strategy in the presentation of concepts is.

- Clear illustrations and suitable pictures are given wherever it was found connection and corrects the misconnection necessary.

- Exercises of 'Do This' and 'Try This' are given extensively after completion of each concept. Exercises given under 'Do This' are based on the concept taught. After teaching of two or three concepts some exercises are given based on them. Questions given under 'Try This' are intended to test the skills of generalization of facts, ensuring correctness of statements, questioning etc., 'Do This' exercise and other exercises given are supposed to be done by students on their own. This process helps the teacher to know how far the students can fare with the concepts they have learnt. Teacher may assist in solving problem given in 'Try This' sections.

- Students should be made to digest the concepts given in "looking back" completely. The next chapter is to be taken up by the teacher only after satisfactory performance by the students in accordance with the academic standards designated for them (given at the end).

- Teacher may prepare his own problems related to the concepts besides solving the problems given in the exercises. Moreover students should be encouraged to identify problems from day- to-day life or create their own.

- Above all the teacher should first study the textbook completely thoroughly and critically. All the given problems should be solved by the teacher well before the classroom teaching.

Happy Teaching.

Syllabus

Number System: (50 hrs) **1. Integers** **2. Fractions, Decimals & Rational Numbers**	**(i) Integers** • Multiplication and division of integers (through patterns). • Properties of integers (including identities for addition & multiplication, (closure, commutative, associative, inverse, distributive) (through patterns). (examples from whole numbers as well). Expressing properties in a general form. Construction of counter examples, (eg. subtraction is not commutative). • Word problems involvingintegers (all operations)
	(ii) Fractions, Decimals and rationalnumbers: • Multiplication of fractions • Fraction as an operator “of” • Reciprocal of a fraction and its use • Division of fractions • Word problems involving mixed fractions (related to daily life) • Introduction to rational numbers (with representation on number line) • Difference between fraction and rational numbers. • Representation of rationalnumber as a decimal. • Word problems on rationalnumbers (all operations) • Multiplication and division of decimal fractions • Conversion of units (length & mass) • Word problems (including all operations)
Algebra (20 hrs) **11. Exponents** **10. Algebraic Expressions** **3. Simple Equations**	**Exponents and powersIntroduction** Meaning of x in a^x where a Ý Z • Laws of exponents (throughobserving patterns to arrive at5 generalization.)whereM, n ∈N(i) $a^m a^n = a^{m?+n}$(ii)? $(a^m)^{?n} = a^{mn}$(iii) $a^m/a^n = a^{m-n}$, where (m-n)∈ N(iv) $a^m.b^m = (ab)^m$(v) number with exponent zerovi)Decimal number in exponential notation vii) Expressing large number in standard form (Scientific Notation)
	ALGEBRAIC EXPRESSIONS Introduction Generate algebraic expressions(simple) involving one or two variables • Identifying constants, coefficient, powers • Like and unlike terms, degree of expressions e.g., x^2y etc.(exponentd”?3, number of variables d”?2) • Addition, subtraction of algebraic expressions (coefficients should be integers).
	Simple equations • Simple linear equations in one variable (in contextual problems) with two operations (integers as coefficients)
6. Ratio - Applications (20 hrs)	• Ratio and proportion (revision) • Unitary method continued,consolidation, generalexpression. • Compound ratio : simple word problems • Percentage- an introduction • Understanding percentage as a fraction with denominator 100 • Converting fractions anddecimals into percentage andvice-versa. • Application to profit and loss (single transaction only) • Application to simple interest (time period in complete years).

Understanding shapes / Geometry **4. Lines and Angles** **5. Triangle and Its Properties** **8.Congurencey of Triangles** **9.Construction of Triangles** **12.Quadrilaterals** **15. Symmetry** **14.Understand-ing 3D and 2D Shapes**	**(i) Lines and Angles:** • Pairs of angles (linear,supplementary, complementary,adjacent, vertically opposite)(verification and simple proofof vertically opposite angles) • Properties of parallel lines withtransversal (alternate,corresponding, interior, exteriorangles) **(ii) Triangles:** • Definition of triangle. • Types of triangles acc. To sides and angles • Properties of triangles • Sum of the sides, difference of two sides. • Angle sum property (with notion of proof and verification through paper folding, proofs , using property of parallel lines , difference between proof and verification • Exterior angle property of triangle **(iii) Congruence**: • congruence through superposition **ex**. Blades, stamps etc.. • Extend congruence to simple geometrical shapes ex. Triange , circles, • criteria of congruence (by verification only) • property of congruencies of triangles SAS, SSS, ASA, RHS Properties with figures• **(iv) Construction of triangles** (all models) • Constructing a triangles when the lengths of its 3 sides are known (SSS criterion) • Constructing a triangle when the lengths of 2 sides and the measure of the angle between them are known (SAS criterion) • Constructing a triangle when the measures of 2 of its angles and length of the side included between them is given (ASA criterion) • Constructing a right angled triangle when the length of one leg and its hypotenuse are given (RHS criterion) **(v) Quadrilaterals**Quadrilateral-definition. • Quadrilateral, sides, angles, diagonals. • Interior, exterior of quadrilateral • Convex, concave quadrilateral differences with diagrams • Sum angles property (By verification) , problems • Types of quadrilaterals • Properties of parallelogram, trapezium, rhombus, rectangle, square and kite. **(vi) Symmetry** • Recalling reflection symmetry • Idea of rotational symmetry,observations of rotationalsymmetry of 2-D objects. (900,1200, 1800) • Operation of rotation through900 and 1800 of simple figures. • Examples of figures with bothrotation and reflection symmetry(both operations) • Examples of figures that havereflection and rotation symmetryand viceversa

	(vii) Understanding 3-D and 2-D Shapes: • Drawing 3-D figures in 2-Dshowing hidden faces. • Identification and counting ofvertices, edges, faces, nets (forcubes cuboids, and cylinders,cones). • Matching pictures with objects(Identifying names)
Mensuration *(15 hrs)* **13. Area and Perimeter**	**Area and Perimeter** • Revision of perimeter and Area of Rectangle, Square. • Idea of Circumference of Circle. • Area of a triangle, parallelogram, rhombus and rectangular paths.
7. Data Handling (15 hrs)	**Data Handling** • Collection and organisation ofdata • Mean, median and mode ofungrouped data – understandingwhat they represent.Reading bar-graphs • Constructing double bar graphs • Simple pie charts with reasonable data numbers

Academic Standards

CONTENT	ACADEMIC STANDARDS	
Number system 1. Integers	**Problem Solving:**	• Solves the problems involving four fundamental operations of integers • Solves the word problems involving the integers. • Used brackets for solving problems to simplify numerical statements.
	Reasoning Proof:	• Explains why the division by zero is meaning less. • Differentiates and compares the set of Natural numbers with integers. • Gives examples and counter examples to the number properties such as closure, Commutative, Associative etc.
	Communication:	• Expressing the number properties of integers in general form. • Uses the negative symbol in different contexts.
	Connections:	• Finds the usage of integers from their daily life situations • Understands the relation among N, W and Z.
	Representation:	• Represents the integers on number line. • Performs the operations of integers on the number line.
2. Fractions, Decimals and Rational numbers	**Problem Solving:**	• Solves the problems in all operation of fractions. • Solves the word problems of all operations of rational numbers. • Solves the problems of all operations of decimal fractions • Converts the small units into large units and vice versa.
	Reasoning : and Proof	• Differentiates rational numbers with fractions. • Justifies density property in rational numbers
	Communication:	• Expresses the need of set of rational numbers • Expresses the properties of rational numbers in general form
	Connections:	• Finds the usage of / inter relation among fractions, rational numbers, and decimal numbers.
	Representation:	• Represents rational numbers on the number line. • Represents the rational numbers in decimal form.
Algebra: 11. Exponents and powers	**Problem Solving:**	• Writes the large numbers in exponential form by using prime factorization
	Reasoning : and Proof	• Generalizes the exponential laws through the observation of patterns
	Communication:	• Understands the meaning of x in a^x where a € z. • Uses of exponential form when using large numbers

	Connections:	• Uses prime factorization in expression of large numbers in exponential form
	Representation:	• Expresses the large numbers in standard form
Algebra: 10. Algebraic Expression 3. Simple Equations	**Problem Solving**	• Finds the degree of algebraic expressions • Doing addition, subtraction of algebraic expressions (Co-efficient should be integers) • Solves the word problems involving two operations (Which can be expressed as simple equation and single variable)
	Reasoning and Proof	• Generates algebraic expressions involving one or two variables by using the patters
	Communication:	• Writes the standard form of first, second, third order expressions in one or two variables • Converts the daily life problems into simple equations. (Contains one variable only)
	Connections:	• Uses closure, commutative etc. properties in addition and subtraction of algebraic expressions. • Uses solving simple equations in daily life situations.
	Representation:	• Represents algebraic expressions in standard forms
6. Ratio - Applications	**Problem Solving**	• Finds the compound, inverse ratio of 2 ratios • Solves word problems involving unitary methods • Solves word problems involving percentage concept • Solves word problems to find simple interest (Time period in complete years)
	Reasoning and Proof	• Compares the decimals, converting into percentages and vice versa. • Formulates the general principles of ratios and proportions
	Communication:	• Expresses the fractions into percentages and decimal forms and their usage.
	Connections:	• Uses profit and loss concepts in daily life situations (Single transactions only) • Understands and uses the solutions for percentage problems in daily life.
	Representation:	• Converts fractions and decimals into percentage form and vice versa.

Understanding Shapes / Geometry **4. Lines and Angles**	**Problem Solving**	• Solves problems on angles made by transversal intersecting parallel line
	Reasoning and proof	• Differentiates the types of pair of angles from given angles • Verifies the parallel ness of the given lines with the use of properties of parallel lines. • Proofs and verifies the angle sum property through paper folding and using property of parallel lines.
	Communication:	• Gives examples of pairs of angles.
	Connections:	• Observes the parallelness in surroundings.
	Representation:	• Represents the notation of angle.
5. Triangle and Its Properties	**Problem Solving**	• Determines whether the given lengths of sides are shapes suitable to make triangle. • Finds the angle which is not given from exterior and other angles of triangle.
	Reasoning and proof	• Makes relationship between exterior angle to its opposite. • Classifies the given triangles on the basis of sides and angles. • Estimates the kind of triangle by observing the given triangle.
	Communication:	• Explains the different types of triangles according to sides and angles. • Explains the property of exterior angle of triangle.
	Connections:	• Uses the concept of triangle.
	Representation:	• ______________________
8. Congruencey of Triangles	**Problem Solving**	• Identifies the congruent triangles from given triangles suitable to make triangle.
	Reasoning and proof	• __________________________
	Communication:	• Appreciates the congruency in 2-D figures.
	Connections:	• ______________________
	Representation:	• Represents the congruent triangles using symbols, notation.

9. Construction of Triangles	**Problem Solving**	• Construct triangles using given measurements.
	Reasoning and proof	• ______________________
	Communication:	• ______________________
	Connections:	• ______________________
	Representation:	• ______________________
12.Quardilateral	**Problem Solving**	• ______________________
	Reasoning and proof	• Differentiates the convex, concave quadrilaterals. • Verifies and justifies the sum angle property of quadrilaterals.
	Communication:	• Explains the inter relationship between triangle and quadrilateral. • Explains the different types quadrilaterals based on their properties.
	Connections:	• Tries to define the quadrilateral. • Classifies the given quadrilaterals using their properties and their inter relationship.
	Representation:	• ______________________
15.Symmetry	**Problem Solving**	• Rotate the figure and find its angular symmetry.
	Reasoning and proof	• Can differentiate linear and reflection symmetry using objectives or figures.
	Communication:	• Gives examples that have reflection symmetry.
	Connections:	• ______________________
	Representation:	• ______________________

14.Understanding 3-D and 2-D shapes	**Problem Solving**	• Identifying and counting of faces, Edges, Vertices, nets for 3D Fig (Cube, Cuboid, Cone, Cylender).
	Reasoning and proof	• Matches picture with 3-D objects and visualize fells the Faces, Edges, Vertices etc.
	Communication:	• ______________________________
	Connections:	• ______________________________
	Representation:	• Can draw simple 3-D shapes in to 2-D figures.
Mensuration 13. Area and Perimeter	**Problem Solving**	• Solves the problem of Area and perimeter for square, rectangle, parallelogram, triangle and Rhombus shapes of things.
	Reasoning and Proof	• Understands the relationship between square, Rectangle, Parallelogram with triangle shapes for finding the area of triangle. • Understands the Area of Rhombus by using area of triangles.
	Communication:	• Explains the concept of Measurement using a basic unit.
	Connections:	• Applies the concept of Area perimeter to find the daily life situation problems (Square, Rectangle, Parallelogram, Triangle, Rhombus and Circle) • Applies the concept of area of Rectangle, Circle. • Finds the area of the rectangular paths, Circular paths.
	Representation:	• Represent word problems as figures.
7. Data Handling	**Problem Solving**	• Organization of raw data into classified data. • Solves the problems for finding the Mean, Medium, Mode of ungrouped data
	Reasoning	• Understands the Mean, Mode and Medium of ungrouped data and what they represent.
	Communication:	• Explains the Mean, Mode and Medium for ungrouped data.
	Connections:	• Understands the usage of Mean, Mode and Medium in daily life situation problems. • Understands the usage of double graphs and pie graphs in daily life situation (Year wise population, Budget, Production of crops etc.)
	Representation:	• Representation of Mean, Medium and Mode for ungrouped data. • Representation of the data in to double bar graphs and pie graphs.